arXiv:2601.05439v1 [math.MG] 9 Jan 2026

T典型图像的 Assouad 谱与维数

Tianyi Feng 和 Jonathan M. Fraser

摘要

我们研究了某些 Banach 空间中函数图像的 Assouad 谱与维数。我们在贝尔范畴意义下求得其典型值，并证明在特定函数空间的约束下，这些值往往会达到可能的最大值。例如，我们证明，在小 α-H¨older 空间中，典型图像的 Assouad 维数为 2，Assouad 谱为 $\min\{2, 2-\frac{\alpha-\theta}{1-\theta}\}$；而在与连续模 $t(1+|\log t|)$ 相关的空间中，典型图像的 Assouad 维数为 2，但其 quasi-Assouad 维数（以及 Assouad 谱）为 1。

Mathematics Subject Classification：主要分类：26A21, 28A80；次要分类：26A15, 26A16。
Key words and phrases：贝尔范畴，Assouad 维数，quasi-Assouad 维数，Assouad 谱，连续模，H¨older 函数，连续函数图像。

目录

1 引言 **1**
1.1 概述.1 1.2 我们的函数空间与一些记号.2 1.3 贝尔范畴与空间 $c^{\omega}[0,1]$ .3 1.4 Assouad 维数与谱.4

2 主要结果 **5**

3 证明 **7**
3.1 预备知识.7 3.2 典型小 ω 图像的 Assouad 谱.8 3.3 典型小 ω 图像的 Assouad 维数.14

1 引言

1.1 概述

连续函数图像的分形维数长期以来一直是人们关注的主题，许多具体例子在其中发挥了重要作用，例如魏尔斯特拉斯函数、高木函数，或布朗运动等随机过程。计算特定图像的维数通常极具挑战性，因此一种替代方法是转而考察特定函数空间中的“泛型答案”。本文正是采用这一视角，运用贝尔范畴方法，研究这一背景下图像的典型维数。这个问题也已得到广泛研究，但尚未在 Assouad 谱的框架下进行探讨；Assouad 谱是一族在上盒维数与（准）Assouad维数之间进行插值的维数。我们发现，Assouad 谱所提供的额外信息有助于对这类问题给出更细致的答案。

作者获得了 *Leverhulme Trust Research Project Grant* (RPG-2023-281) 的经费支持。JMF 还获得了 *EPSRC Open Fellowship* (EP/Z533440/1) 的资助。

记实值连续函数在 $[0,1]$ 上的集合为 $C^0[0,1]$，无穷范数记为 $||\cdot||_\infty$。将函数 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$的图像记作 $G_f=\{(x,f(x)) \mid x\in[0,1]\}\subseteq\mathbb{R}^2$。已有文献[7, 8, 10]证明，贝尔意义下的典型 $f\in(C^0[0,1],||\cdot||_\infty)$ 满足

$$\dim_{\mathrm{H}}G_f=\underline{\dim}_{\mathrm{B}}G_f=1<2=\dim_{\mathrm{P}}G_f=\overline{\dim}_{\mathrm{B}}G_f,$$

其中，$\dim_{\mathrm{H}}G_f$、$\underline{\dim}_{\mathrm{B}}G_f$、$\dim_{\mathrm{P}}G_f$和$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}G_f$分别指 G_f 的豪斯多夫维数、下盒维数、填充维数和上盒维数。有关这些维数的精确定义和性质，请参见 [3] 。注意， G_f 具有完整的填充维数和上盒维数，即它们等于环境空间 $\mathbb{R}^2$的维数。

本文将重点研究*Assouad* 维数和*Assouad* 谱。由于一个集合的 Assouad 维数和谱至少不小于其上盒维数，因此典型连续函数图像的 Assouad 维数和谱显然也是满维的。然而，对于满足更具体连续性约束的函数，这一结论未必成立。例如，给定 $\alpha\in(0,1)$，函数f 若满足以下条件，则称为 α-H¨older 连续:

$$\sup_{x,y\in[0,1]}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty$$

而 [3] 中的一个结果表明，对于所有这类函数，$\dim_{\mathrm{B}}G_f\leqslant 2-\alpha<2$。尽管如此，我们仍无法为 Assouad 维数得到任何非平凡的界。事实上，我们将在下文看到，在下文第 1.2 节中定义的小 H¨older 空间里，典型的函数具有 Assouad 维数为 2 的图像；参见定理 2.5。由于 Assouad 谱介于盒维数与 Assouad 维数之间，因此，研究典型图像的 Assouad 谱是一个有趣的问题。具体而言，我们将证明，小 H¨older 空间里的典型图像对于 $\theta\leqslant\alpha$具有 Assouad 谱 $2-\frac{\alpha-\theta}{1-\theta}$；参见定理 2.3。

本文结构如下：第 1 节介绍函数空间、Assouad 维数、贝尔范畴及其他相关预备知识。主要结果将在第 2 节给出，并在第 3 节中证明。

1.2 我们的函数空间与一些记号

回顾一下， $\omega\colon [0,1]\to[0,\infty]$是一个连续模，如果 ω 是递增的， $\omega(t)>0$ 对于 $t>0$ 成立，并且满足

$$\lim_{t\to0}\omega(t)=\omega(0)=0.$$

本文中，递增意为非递减，即对于 $x\leqslant y$， $\omega(x)\leqslant\omega(y)$。对于 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，我们定义

$$[f]_\omega=\sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)},$$

并将 ω-连续函数的集合记为

$$C^\omega[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\ \mid\ [f]_\omega<\infty\}.$$

可以证明， $||\cdot||_\omega\colon C^\omega[0,1]\to\mathbb{R}$，其中

$$||f||_\omega=||f||_\infty+[f]_\omega$$

在 $C^\omega[0,1]$上定义了一个范数，我们称之为 ω-范数。我们称 $(C^\omega[0,1],||\cdot||_\omega)$ 为 ω-空间。我们特别关注局部相对光滑的函数子集，即所有满足以下条件的函数 $f\in C^\omega[0,1]$

$$\limsup_{t\to0}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)}:x,y\in[0,1],\ x\neq y,\ |x-y|\leqslant t\right\}=0.$$

我们用 $c^\omega[0,1]$ 表示由这类函数组成的集合，并将 $(c^\omega[0,1],||\cdot||_\omega)$ 称为小 ω-空间。

给定 $\alpha\in(0,1)$，若取 $\omega(t)=t^\alpha$，则 $C^\omega[0,1]$是 α-H¨older 函数的集合。我们将相应的空间称为 α-H¨older 空间，而将 $(c^\omega[0,1],\ ||\cdot||_\omega)$ 称为小 H¨older 空间。另一

另一类重要的连续函数是利普希茨函数，若函数 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为 Lipschitz 函数

$$\sup_{x,y\in[0,1]}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}<\infty.$$

取上文的 $\omega(t)=t$，得到 Lipschitz 函数空间 $C^1[0,1]$，也就是 Lipschitz 空间。

这里指出，尽管每个 ω 都唯一确定一个 ω-范数，进而唯一确定一个 ω-空间，但它并不能唯一确定 $C^\omega[0,1]$。例如，对于 $\omega_1(t)=t$ 和 $\omega_2(t)=2t$，$C^{\omega_1}[0,1]$ 和 $C^{\omega_2}[0,1]$都是全体 Lipschitz 函数构成的集合。

对于 $d\in\mathbb{N}$、$x\in\mathbb{R}^d$ 和 $r>0$，将以 x 为中心、半径为 r 的闭球记为 $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^d:|x-y|\leqslant r\}$，相应的开球记为 $B^o(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^d:|x-y|<r\}$。类似地，我们将以 x为中心、边平行于坐标轴且边长为 r 的（闭）立方体记为 $Q(x,r)$。此外，在上下文明确时，若存在一个 $c>0$ 使得 $A\geqslant cB$，我们记作 $A\gtrsim B$；若 $B\gtrsim A$，则记作 $A\lesssim B$。最后，当 $A\gtrsim B$ 且 $B\gtrsim A$时，我们使用 $A\approx B$。

1.3 贝尔范畴与空间 $c^\omega[0,1]$

在完备度量空间 X 中，如果一个集合是无处稠密子集的可数并集，则称其为瘦集。瘦集的补集称为余剩集。如果具有某种性质的元素所构成的集合是余剩集，我们就称典型的元素具有该性质。从拓扑学的角度看，可以将典型元素视为泛型元素。更多详情请参见 [11]。

为了研究 $(c^\omega[0,1],\ ||\cdot||_\omega)$ 中的典型函数，它必须是一个完备度量空间。为完整起见，我们给出以下引理的证明。

引理 1.1。$(C^\omega[0,1],||\cdot||_\omega)$ 和$(c^\omega[0,1],||\cdot||_\omega)$ 都是完备的。

证明。设 $(f_n)\subseteq(C^\omega[0,1],\ ||\cdot||_\omega)$ 是柯西列，此时 (f_n) 也是 $(C^0[0,1],\ ||\cdot||_\infty)$ 中的柯西列。由于 $(C^0[0,1],\ ||\cdot||_\infty)$ 是完备的，存在某个 $f\in C^0[0,1]$ 使得 $||f_n-f||_\infty\to 0$。令 $\varepsilon>0$。通过取子列并重新标记各项，我们可以假设 (f_n) 满足 $||f_n-f_{n+1}||_\omega\leqslant 2^{-n}\varepsilon$，且对所有 n，都有 $||f_n-f||_\infty\leqslant 2^{-n-1}\omega(2^{-n})\varepsilon$。选取 N，使得对所有 $n\geqslant N$，都有 $||f_n-f||_\infty\leqslant\varepsilon$。考虑$f_n$，其中 $n\geqslant N$。令 $x,y\in[0,1]$ 互不相同，并令 m 为满足 $2^{-m}\leqslant|x-y|<2^{-m+1}$ 的整数。如果 $m\leqslant n$，

$$\frac{|(f_n-f)(x)-(f_n-f)(y)|}{\omega(|x-y|)}\leqslant\frac{2||f_n-f||_\infty}{\omega(2^{-n})}\leqslant 2^{-n}\varepsilon\leqslant\varepsilon.$$

否则 $m>n$ 并且

$$\begin{aligned}\frac{|(f_n-f)(x)-(f_n-f)(y)|}{\omega(|x-y|)}&\leqslant\frac{|(f_m-f)(x)-(f_m-f)(y)|+\sum_{k=n}^{m-1}|(f_k-f_{k+1})(x)-(f_k-f_{k+1})(y)|}{\omega(|x-y|)}\\&\leqslant\frac{|(f_m-f)(x)-(f_m-f)(y)|}{\omega(2^{-m})}+\sum_{k=n}^{m-1}||f_k-f_{k+1}||_\omega\\&\leqslant\sum_{k=n}^{m}2^{-k}\varepsilon\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

换句话说，$[f_n-f]_\omega\leqslant\varepsilon$。因此，

$$\begin{gathered}||f_n-f||_\omega=||f_n-f||_\infty+[f_n-f]_\omega\leqslant 2\varepsilon,\\[f]_\omega\leqslant[f_n-f]_\omega+[f_n]_\omega<\infty\end{gathered}$$

因此 $f_n\to f\in(C^\omega[0,1],\ ||\cdot||_\omega)$ 也成立。这说明 $(C^\omega[0,1],\ ||\cdot||_\omega)$ 是完备的。

现在，令 $(f_n)\subseteq c^\omega[0,1]$，并假设 $f_n\to f\in C^\omega[0,1]$ 关于 $||\cdot||_\omega$。再次通过取子序列并重新标记各项，我们可以假设对所有 n，都有 $||f_n-f||_\omega\leqslant n^{-1}$。定义 (t_n) 为一个严格递减

序列，使得 $t_n > 0$ 且

$$\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{\omega(|x-y|)} \leqslant \frac{1}{n}$$

对所有满足 $|x-y| \leqslant t_n$ 的互异 x，$y \in [0,1]$，利用 $f_n \in c^\omega[0,1]$ 这一事实。令 $0 < t \leqslant t_1$，则 $t_{n+1} < t \leqslant t_n$ 对于某个整数 n 成立。假设 x，$y \in [0,1]$ 满足 $|x-y| \leqslant t$ 且彼此互异。那么，

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)} &\leqslant \frac{|(f-f_n)(x)-(f-f_n)(y)|}{\omega(|x-y|)} + \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant ||f_n - f||_\omega + \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{2}{n} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

因为 $t \to 0$。这表明 $f \in c^\omega[0,1]$。因此，$c^\omega[0,1]$ 在 $C^\omega[0,1]$ 中关于 $||\cdot||_\omega$ 是闭的，由此可知 $(c^\omega[0,1], ||\cdot||_\omega)$ 的完备性。 □

与更大的集合 $C^\omega[0,1]$ 相比，$c^\omega[0,1]$ 看起来似乎相当小；事实上，Berezhnoi 在[1] 中证明，对于凹 ω，$c^\omega[0,1]$ 在 $(C^\omega[0,1], ||\cdot||_\omega)$ 中是瘦集。然而，若考虑 α-H¨older 函数的集合 $C^\alpha[0,1]$ 及其小集合 $c^\alpha[0,1]$，我们会发现对于所有 $0 < \alpha < \alpha' < 1$，$C^{\alpha'}[0,1] \subseteq c^\alpha[0,1]$。

1.4 Assouad 维数与谱

设 $E \subseteq \mathbb{R}^d$ 非空且 $r > 0$。若一族球 $\{B(x_i, r)\}_i$ 是 E 的一个 r-包，则称之为 E 的一个 r-包，其中 $x_i \in E$ 对所有 i 均成立，且这些球两两不相交。用 $N_r(E)$ 表示 E 的 r-包中球的最大数量。回顾一下，非空有界集合 $F \subseteq \mathbb{R}^d$ 的上盒维数 定义为

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F = \limsup_{r \to 0} \frac{\log N_r(F)}{-\log r}.$$

对于非空集合 $F \subseteq \mathbb{R}^d$，其*Assouad* 维数 定义为

$$\dim_{\mathrm{A}} F = \inf\Bigg\{\beta : \text{there exists } C > 0 \text{ such that for all } 0 < r < R \text{ and } x \in F,$$
$$N_r(B^o(x,R) \cap F) \leqslant C\left(\frac{R}{r}\right)^\beta\Bigg\}.$$

可以证明，对于所有有界的 $F \subseteq \mathbb{R}^d$，均有 $\dim_{\mathrm{B}} F \leqslant \dim_{\mathrm{A}} F$，且该不等式可能是严格的。于是，Assouad 谱用于在上盒维数与 Assouad 维数之间进行插值。更准确地说，我们将 F 的*Assouad* 谱 定义为

$$\dim_{\mathrm{A}}^\theta F = \inf\Bigg\{\beta : \text{there exists } C > 0 \text{ such that for all } 0 < r < 1 \text{ and } x \in F,$$
$$N_r(B^o(x,r^\theta) \cap F) \leqslant C\left(\frac{r^\theta}{r}\right)^\beta\Bigg\}$$

其中 $\theta \in (0,1)$。这是 Fraser 和 Yu 于 [5, 6]提出的。L¨u 和 Xi 于 [9] 定义了*quasi-Assouad* 维数 $\dim_{\mathrm{qA}} F$，它也可定义为 $\dim_{\mathrm{qA}} F = \lim_{\theta \to 1} \dim_{\mathrm{A}}^\theta F$，见 [4]。

在上述所有定义中，$N_r(B^o(x,R) \cap F)$ 都可以替换为 $N_r'(Q(x,R) \cap F)$，其中 $N_r'(E)$ 是与以原点为中心的标准 r-网格相交的（闭）立方体的最小数量。

请注意，对所有 $\theta \in (0,\ 1)$，$\dim_{\mathrm{B}} F \leqslant \dim_{\mathrm{A}}^{\theta} F \leqslant \dim_{\mathrm{qA}} F \leqslant \dim_{\mathrm{A}} F$均成立，而且事实上

$$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} F \leqslant \min\left\{\frac{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} F}{1-\theta},\ \dim_{\mathrm{qA}} F\right\}.$$

此外，映射 $\theta \mapsto$ 维$_{\mathrm{A}}^{\theta} F$在 $\theta \in (0,\ 1)$ 中是连续的，并且

$$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} F \to \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F \quad \text{as} \quad \theta \to 0.$$

有关 Assouad 维数和 Assouad 谱的更多讨论，请参见 [4] 。

2 主要结果

本节陈述我们的主要结果，并将证明推迟至第3节。我们首先研究图像的 Assouad 谱，并得到一个适用于所有函数的一般上界。该估计是对 Chrontsios-Garitsis 和 Tyson 最近一个估计的温和推广；后者研究了 H¨lder 函数空间 [2], 。

命题 2.1。 设 ω 为满足 $\omega(1) < \infty$ 的连续模，并且

$$\eta = \liminf_{t \to 0} \frac{\log \omega(t)}{\log t}$$

满足 $\eta \leqslant 1$。那么，对于所有 $f \in C^{\omega}[0,1]$ 以及 $\theta \in (0,\ \eta)$,

$$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f \leqslant 2 - \frac{\eta - \theta}{1-\theta} < 2.$$

此外，我们有 维数$_{\mathrm{B}} G_{\overline{f}} \leqslant 2 - \eta$。

证明见第3.2节。事实上，若 $\eta > 1$ ，则 $C^{\omega}[0,1]$ 中唯一的函数是常函数，其图像的 Assouad 维数和 Assouad 谱均为 1，见命题 3.1。还需注意，若我们仅利用 Assouad 谱与上盒维数之间的一般不等式来比较二者，则得到

$$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f \leqslant \frac{\overline{\dim}_{\mathrm{B}} G_f}{1-\theta} \leqslant \frac{2-\eta}{1-\theta}.$$

T这弱于命题 2.1 中的上界，因为对于 $\theta \in (0,\ \eta)$，$2 - \frac{\eta-\theta}{1-\theta} < \frac{2-\eta}{1-\theta}$ —— .

对于 $\alpha \in (0,\ 1)$， α-H¨older 空间具有 $\eta = \alpha$。在 Chrontsios-Garitsis 和 Tyson 最近关于 Hölder 图像的 Assouad 谱的论文 [2] 中，定理 1.1] 给出的上界与上述上界一致。对于上盒维数，上界也与 [3, 推论 11.2] 中给出的上界一致。

Next，我们给出了一个关于凹模的技术引理。证明见第3节。 1.

引理 2.2。 设 ω 是一个凹连续模，则极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log \omega(t)}{\log t}$$

存在。

以下定理的证明见第3.2节。

定理 2.3. 设 ω 为凹连续模，并记

$$\eta = \lim_{t \to 0} \frac{\log \omega(t)}{\log t}.$$

Then

(i) 若 $\eta \geqslant 1$，则对所有 $f \in C^{\omega}[0,1]$ 和 $\theta \in (0,\ 1)$，均有 维数$^{\theta}_{\mathrm{A}}\, G_f = 1$。

（*ii*）若 $\eta < 1$，则对于典型的 $f \in$ （$c^{\omega}[0,1], ||\cdot||_{\omega}$），

$$\dim^{\theta}_{\mathrm{A}} G_f = 2 - \frac{\eta - \theta}{1 - \theta}$$

当 $\theta \leqslant \eta$ 时，以及当 $\theta > \eta$ 时，维数$^{\theta}_{\mathrm{A}}\, G_f = 2$ 。特别地，这适用于所有满足$\eta = \alpha \in$ （0,1）条件的小 *H¨lder* 空间。

特别地，(ii) 部分表明，命题 2.1 中 Assouad 谱的上界是锐的，这与 [2, 定理 1.2]一致。

一个直接的推论】【。是以下描述 quasi-Assouad 维数的结果 n.

推论 2.4. 设 ω 为凹连续模，并记

$$\eta = \lim_{t \to 0} \frac{\log \omega(t)}{\log t}.$$

Then

(i) 若 $\eta \geqslant 1$，则 维数$_{\mathrm{qA}}\, G_f = 1$ 对所有 $f \in C^{\omega}[0,1]$均成立。

(ii) 若 $\eta < 1$，则对典型的 $f \in (c^{\omega}[0,1], ||\cdot||_{\omega})$，

$$\dim_{\mathrm{qA}} G_f = 2.$$

接下来，我们给出一个关于图像的 Assouad 维数的类似结果，其证明见第3.3节。

定理 2.5. 设 ω 是一个凹连续模。

(i) 若 ω 满足

$$\lim_{t \to 0} \frac{\omega(t)}{t} < \infty,$$

则 $C^{\omega}[0,1]$ 是所有 *Lipschitz* 函数构成的集合，且对所有 $f \in C^{\omega}[0,1,$ 维数$_{\mathrm{A}}\, G_f = 1$].

(ii) 否则， ω 满足

$$\lim_{t \to 0} \frac{\omega(t)}{t} = \infty,$$

此时，对典型的 $f \in (c^{\omega}[0,1], ||\cdot||_{\omega})$，有 维数$_{\mathrm{A}}\, G_f = 2$。特别地，这在所有小 *H¨older* 空间中均成立。

Assouad 维数与 quasi-Assouad 维数之间微妙却显著的差异，可以通过上述结果加以说明。考虑由下式给出的连续模

$$\omega(t) = t(1 + |\log t|),$$

注意到 ω 是凹函数，且

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log \omega(t)}{\log t} = 1 \ \text{ and } \lim_{t \to 0} \frac{\omega(t)}{t} = \infty.$$

由推论 2.4 和定理 2.5，典型的 $f \in (c^{\omega}[0,1], ||\cdot||_{\omega})$ 满足 $\dim_{\mathrm{qA}} G_f = 1$，但 $\dim_{\mathrm{A}} G_f = 2$。

最后，自然会想到在更大的空间 $(C^{\omega}[0,1],\ ||\cdot||_{\omega})$ 中会发生什么。如果不假设函数是局部平坦的，那么直觉上似乎是，函数振荡得越剧烈，其 Assouad 维数和谱就越可能更大。然而，用于证明定理 2.3 (ii) 和定理 2.5 (ii) 的构造在这里行不通。问题出在证明中展示稠密性的部分。例如，如果 $C^{\omega}[0,1]$ 中的一个函数振荡达到最大程度，但其 Assouad 维数不知何故严格小于 2，那么我们不知道如何在 $||\cdot||_{\omega}$ 中用 Assouad 维数为 2 的函数逼近它，因为逼近函数的范数变化必须很大。因此，我们提出以下问题。

问题 2.6。 对于一个凹 ω，满足

$$\eta = \lim_{t\to 0} \frac{\log \omega(t)}{\log t} < 1,$$

对于典型的 $f \in (C^\omega[0,1], ||\cdot||_\omega)$，是否满足

$$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f = 2 - \frac{\eta - \theta}{1-\theta}$$

对于 $\theta \leqslant \eta$?

问题 2.7。 对于一个凹的 ω，满足

$$\lim_{t\to 0} \frac{\omega(t)}{t} = \infty,$$

对于典型的 $f \in (C^\omega[0,1], ||\cdot||_\omega)$，是否满足 维数$_{\mathrm{A}}\, G_f = 2$?

3 证明

本节证明第 2 节中陈述的结果。

3.1 预备知识

尽管本文主要讨论具有凹连续模的函数，但我们先从 ω 不一定是凹函数的情形开始。

命题 3.1。 设 ω 是一个满足以下条件的连续模

$$\eta = \limsup_{t\to 0} \frac{\log \omega(t)}{\log t} > 1.$$

那么 $C^\omega[0,1]$ 只包含常函数。

证明。 设 $f \in C^\omega[0,1]$，并令 $x,\ y \in [0,1]$ 为两个不同的对象。不失一般性，假设 $x < y$。令 $\delta \in (0,\ \eta - 1)$，并设 $(t_k) \subseteq [0,1]$ 是一个递减序列，满足 $t_1 \leqslant |x-y|$ 和 $t_k \to 0$，使得

$$\frac{\log \omega(t_k)}{\log t_k} > 1 + \delta$$

对所有 k 均成立，整理后可得

$$\omega(t_k) < t_k^{1+\delta}.$$

选择 $N_k \in \mathbb{N}$，使得

$$\frac{t_k}{2} \leqslant \frac{|x-y|}{N_k} \leqslant t_k.$$

现在，令 $x = x_0 < x_1 < ... < x_{N_k} = y$ 等间距排列。由于 $f \in C^\omega[0,1]$，由三角不等式以及 ω 的单调性可得

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f(x_1)| + ... + |f(x_{N_k-1}) - f(y)| \\
&\leqslant [f]_\omega \sum_{i=1}^{N_k} \omega(|x_{i-1} - x_i|) \\
&= [f]_\omega \sum_{i=1}^{N_k} \omega\left(\frac{|x-y|}{N_k}\right) \\
&\leqslant [f]_\omega \cdot N_k \cdot \omega(t_k) \\
&\leqslant [f]_\omega \cdot N_k \cdot t_k^{1+\delta} \\
&\leqslant [f]_\omega \cdot 2|x-y| \cdot t_k^{\delta} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

当 $k \to \infty$时。因此， $f(x) = f(y)$。由于 $x,\ y \in [0,1]$ 是任意选取的，我们得出结论： f实际上是常数。

□

接下来我们介绍一个关于凹连续模的技术引理，下面的几个证明中会用到它。

引理 3.2. 设 ω 是一个凹连续模。若 $f \in C^0[0,1]$ 在某个 $[a,b] \subseteq [0,1]$上是仿射的，其中 $a < b$，则

$$\sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)} = \frac{|f(a)-f(b)|}{\omega(|a-b|)}.$$

证明。设 $x, y \in [a,b]$ 互不相同。对于某些$\gamma_1, \gamma_2 \in [0,1]$，我们可以写成 $x = a + \gamma_1(b-a)$ 和 $y = a + \gamma_2(b-a)$。由于 f是仿射的，

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)} = \frac{|\gamma_1-\gamma_2||f(a)-f(b)|}{\omega(|\gamma_1-\gamma_2||a-b|)} \leqslant \frac{|f(a)-f(b)|}{\omega(|a-b|)},$$

其中根据 ω的凹性， $|\gamma_1-\gamma_2|\omega(|a-b|) \leqslant \omega(|\gamma_1-\gamma_2||a-b|)$。 □

3.2 典型小 ω 图像的 Assouad 谱

本节主要讨论 Assouad 谱。首先考虑 ω 为任意连续模的情形。

命题 *2.1* 的证明。首先，令 $\theta < \eta$ 和 $0 < \varepsilon < (\eta-\theta)/(1-\theta)$。选取 $r_0 > 0$，使得对所有$r \in (0, r_0]$

$$\frac{\log \omega(r)}{\log r} - \theta \geqslant \varepsilon(1-\theta), \tag{3.1}$$

由此我们得到

$$\frac{\omega(r)}{r} \leqslant \left(\frac{r^\theta}{r}\right)^{1-\varepsilon}$$

整理后可得。如果 $r_0 \leqslant r < 1$，那么

$$\omega(r) r^{\varepsilon(\theta-1)-\theta} \leqslant \omega(1) r_0^{\varepsilon(\theta-1)-\theta}.$$

因此

$$\frac{\omega(r)}{r} \leqslant C\left(\frac{r^\theta}{r}\right)^{1-\varepsilon} \tag{3.2}$$

对所有 $0 < r < 1$ 均成立，其中 $C = \max\{1,\ \omega(1) r_0^{\varepsilon(\theta-1)-\theta}\} < \infty$。令 $f \in C^\omega[0,1]$ 和 $0 < r < 1$。令 $x \in [0,1]$，并写作 $\boldsymbol{x} = (x, f(x))$。与正方形 $Q(\boldsymbol{x}, r^\theta)$ 相交的、形如 $[nr, (n+1)r] \times \mathbb{R}$ 的 r-列的数量至多为 $r^{\theta-1} + 2$，其中某个整数为 n。由于

$$|f(y) - f(z)| \leqslant [f]_\omega \omega(|y-z|) \leqslant [f]_\omega \omega(r)$$

对所有 $y, z \in [nr, (n+1)r]$，每个 r-列中与 G_f 相交的 r-正方形数量至多为 $\frac{[f]_\omega \omega(r)}{r} + 2$。因此

$$\begin{aligned} N_r'(Q(\boldsymbol{x}, R) \cap G_f) &\leqslant \left(\frac{r^\theta}{r} + 2\right)\left(\frac{[f]_\omega \omega(r)}{r} + 2\right) \\ &\lesssim \frac{r^\theta}{r} \cdot \frac{\omega(r)}{r} \\ &\lesssim \frac{r^\theta}{r} \cdot \left(\frac{r^\theta}{r}\right)^{1-\varepsilon} \\ &= \left(\frac{r^\theta}{r}\right)^{2-\varepsilon} \end{aligned}$$

由 (3.2) 可得，这表明 $\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f \leqslant 2-\varepsilon$。由于我们选取了 $\varepsilon < (\eta-\theta)/(1-\theta)$，因此得到 $\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f \leqslant 2-\frac{\eta-\theta}{1-\theta} < 2$，证毕。

上盒维数的界由 Assouad 谱的连续性得出，其中

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}} G_f = \lim_{\theta\to 0} \dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f \leqslant \lim_{\theta\to 0} 2-\frac{\eta-\theta}{1-\theta} = 2-\eta.$$

□

引理 *2.2* 的证明。令

$$\eta = \liminf_{t\to 0} \frac{\log \omega(t)}{\log t}$$

并注意到 $\eta \geqslant 0$。令 $\varepsilon > 0$ 和 $T \in (0,1]$；选择 $t \in (0,\ T]$ 使得

$$\frac{\log \omega(t)}{\log t} \leqslant \eta+\varepsilon.$$

令 $\alpha \in (0,\ 1)$，使得 $\alpha t \in (0,\ t)$。然后由 ω 的凹性，

$$\frac{\log \omega(\alpha t)}{\log \alpha t} \leqslant \frac{\log \alpha\omega(t)}{\log \alpha t} \leqslant \eta+\varepsilon+\frac{\log \alpha}{\log \alpha+\log t} \to \eta+\varepsilon$$

由于 $T\to 0$。因为 $\varepsilon > 0$ 是任意选取的，我们得出

$$\limsup_{t\to 0} \frac{\log \omega(\alpha t)}{\log \alpha t} \leqslant \eta$$

对所有 $\alpha \in (0,\ 1)$ 均成立。这就证明了该断言。 □

我们证明 定理 2.3 分为两部分：首先证明所需集合是稠密的，然后验证它满足 $G_{\quad\delta}$.

对于函数 $f\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}$ 和区间 $I\subseteq[0,1]$，我们将

$$\sup_{x,y\in I} |f(x)-f(y)|$$

称为 f 在 I上的振荡。

引理 3.3。 设 ω 是一个凹连续模，且其极限

$$\eta = \lim_{t\to 0} \frac{\log \omega(t)}{\log t}$$

满足 $\eta < 1$。那么对于 $\theta < \eta$，集合

$$\left\{ f \in c^{\omega}[0,1] \mid \dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f = 2-\frac{\eta-\theta}{1-\theta} \right\}$$

在$(c^{\omega}[0,1], ||\cdot||_{\omega})$中稠密。

证明。 由引理 2.2，极限 η 存在。令 $f \in c^{\omega}[0,1]$, $\theta < \eta$ 和 $\varepsilon > 0$。我们可以假设 ε 足够小，使得 $\tilde{\ }\ \omega(\varepsilon) \leqslant 1$，从而对所有 $t \leqslant \varepsilon$，都有 $\omega(t) \leqslant 1$。我们的目标是证明存在 $f \in c^{\omega}[0,1]$，使得 $||f-\tilde{f}||_{\omega} \leqslant \varepsilon$ 且 $\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_{\tilde{f}} \geqslant 2-\frac{\eta-\theta}{1-\theta}$，然后我们将用命题 2.1 证明反向不等式。 ——

设 $\delta > 0$。设 (ε_k) 是一个正数递减序列，满足 $\sum_k \varepsilon_k \leqslant 1/4$，且对所有 k 都有 $\varepsilon_k \leqslant 28^{-1}\varepsilon$。设 (m_k) 是一个奇正整数序列，其中 $m_k \geqslant (\varepsilon_k/2)^{(\theta-1)/\theta}$，并具有以下性质。记 $r_k = m_k^{1/(\theta-1)}$ 和 $L_k = 2r_k^{\theta}$，注意到二者都满足 $r_k,\ L_k \searrow 0$，且 $L_k \leqslant \varepsilon_k$。由于当 $t\to 0$ 时，$\log \omega(t)/\log(t) \to \eta > \theta$，我们可以假设每个 m_k 都足够大，使得

$$\theta \leqslant \frac{\log \omega(r_k)+\log \varepsilon_k}{\log r_k} \leqslant \eta+\delta, \tag{3.3}$$

整理后可得

$$r_k^{\eta+\delta} \leqslant \varepsilon_k \omega(r_k) \leqslant r_k^{\theta}.$$

此外，由于 $f \in c^{\omega}[0,1]$，我们可以选取 m_k，使得若 x，$y \in [0,1]$ 互不相同且满足 $|x-y| \leqslant L_k$，则

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)} \leqslant \varepsilon_k. \tag{3.4}$$

由此可得，对于这样的 x，y，

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon_k \omega(L_k) \leqslant \varepsilon_k. \tag{3.5}$$

考虑区间 $I_1 = [0, L_1]$ 和 $I_k = [2(L_1 + ... + L_{k-1}), 2(L_1 + ... + L_{k-1}) + L_k]$，其中 $k \geqslant 2$。注意，I_k 两两不相交，且 $\cup_k I_k \subseteq [0,1]$。将 I_k 的左端点记为 y_k，将其右端点记为 z_k。我们通过修改 f 在 I_k 上的取值来定义一个新函数 f，使得 f 在$[0,1] \setminus \cup_k I_k$上与 f 重合。

设 $k \in \mathbb{N}$，并不失一般性地假设 $f(y_k) \geqslant f(z_k)$。令 $y_k' = (y_k + z_k)/2$且 $x_k = (y_k + y_k')/2$。定义 f如下。令 $f(y_k) = f(y_k)$，$f(z_k) = f(z_k)$，$f(x_k) = f(y_k) - \varepsilon_k \omega(r_k)/2$，$\tilde{f}(y_k') = f(y_k) - \varepsilon_k \omega(r_k)$，并在 y_k'与 z_k之间进行线性插值。现在 $|y_k - y_k'| = r_k^{\theta} = m_k^{\theta/(\theta-1)}$，因此我们将 $[y_k, y_k']$ 分成$r_k^{\theta-1} = m_k$ 个长度为 r_k的子区间。此外，令 $\tilde{f}$ 满足：

- $\tilde{f}$ 连续；
- f 在每个子区间上均为仿射函数；
- 在每个子区间上的振荡等于 $\varepsilon_k \omega(r_k)$；
- $f(x) \in [f(y_k)\ f(y_k')]$对所有 $x \in [y_k, y_k']$均成立。

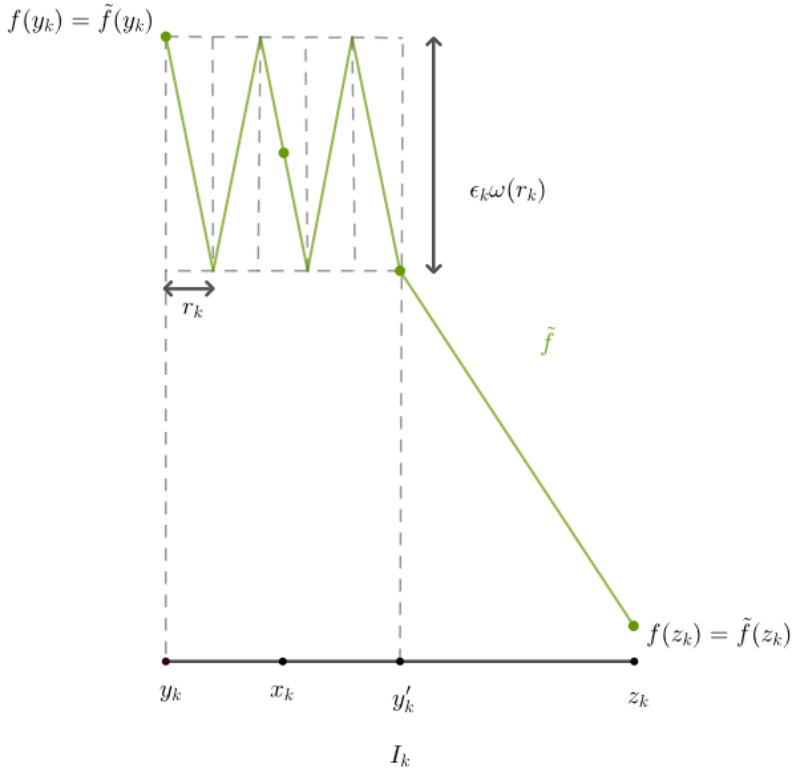


图 1：f 在 I_k 上

见图 1。现在，对于不同的 x，$y \in [y_k, y_k']$，若 $|x-y| > r_k$，则

$$\frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \leqslant \frac{\varepsilon_k \omega(r_k)}{\omega(r_k)} = \varepsilon_k;$$

否则， $|x-y| \leqslant r_k$ 和 x， y 要么属于同一个长度为 r_k 的子区间，要么属于两个相邻的子区间。对于前一种情况，由引理 3.2 可得

$$\frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \leqslant \frac{\varepsilon_k \omega(r_k)}{\omega(r_k)} = \varepsilon_k;$$

而对于后一种情况，记 z 为两个相邻子区间的公共端点，并假设 $x < z < y$。由于 ω 递增且 $|x-y| = |x-z| + |z-y|$，因此有

$$\max\{\omega(|x-z|), \omega(|z-y|)\} \leqslant \omega(|x-y|)$$

再次由引理 3.2 可得

$$\begin{aligned}
\frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} &\leqslant \frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(z)| + |\tilde{f}(z)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(z)|}{\omega(|x-z|)} + \frac{|\tilde{f}(z)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|z-y|)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon_k \omega(r_k)}{\omega(r_k)} + \frac{\varepsilon_k \omega(r_k)}{\omega(r_k)} \\
&= 2\varepsilon_k.
\end{aligned}$$

注意到 $|y_k - z_k| = L_k$，因此由 (3.5) 可得

$$|\tilde{f}(y_k') - \tilde{f}(z_k)| \leqslant |f(y_k) - f(z_k)| + \varepsilon_k \omega(r_k) \leqslant \varepsilon_k \omega(L_k) + \varepsilon_k \omega(r_k).$$

于是引理 3.2 表明，对于 x， $y \in [y_k', z_k]$ 互不相同

$$\begin{aligned}
\frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} &\leqslant \frac{|\tilde{f}(y_k')-\tilde{f}(z_k)|}{\omega(|y_k'-z_k|)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon_k \omega(L_k) + \varepsilon_k \omega(r_k)}{\omega\left(\frac{L_k}{2}\right)} \\
&\leqslant \frac{2\varepsilon_k \omega(L_k)}{\omega(L_k)} + \frac{2\varepsilon_k \omega(L_k)}{\omega(L_k)} \\
&\leqslant 2\varepsilon_k + 2\varepsilon_k \\
&= 4\varepsilon_k,
\end{aligned}$$

这里用到了 ω 是凹且递增的。类似地，若 x， $y \in I_k$ 且 $x < y_k' < y$，采用相同的论证可知

$$\begin{aligned}
\frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} &\leqslant \frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y_k')| + |\tilde{f}(y_k')-\tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y_k')|}{\omega(|x-y_k'|)} + \frac{|\tilde{f}(y_k')-\tilde{f}(y)|}{\omega(|y_k'-y|)} \\
&\leqslant 2\varepsilon_k + 4\varepsilon_k \\
&= 6\varepsilon_k.
\end{aligned}$$

因此，对于 x， $y \in I_k$

$$\frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \leqslant 6\varepsilon_k, \tag{3.6}$$

并且由于我们假设 $\omega(\varepsilon) \leqslant 1$,

$$|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)| \leqslant 6\varepsilon_k \omega(|x-y|) \leqslant 6\varepsilon_k \omega(\varepsilon) \leqslant 6\varepsilon_k. \tag{3.7}$$

~ ~我们验证 $||f - f||_\omega \leqslant \varepsilon$。令 $x \in [0,1]$，并假设 $f(x)$ $\neq f(x)$，因此必有 $x \in I_k$，其中某个 k 满足条件。于是

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leqslant |f(x) - f(z_k)| + |\tilde{f}(z_k) - \tilde{f}(x)| \leqslant \varepsilon_k + 6\varepsilon_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

˜ ˜ ˜由 (3.5) 和 (3.7) 可知。因此 $||f-\tilde{f}||_\infty \leqslant \varepsilon/2$。对于 $[f-\tilde{f}]_\omega$, 记 $h = f - \tilde{f}$。令 $x,\ y \in [0,1]$, 其中我们˜ ˜假设 $f(x) \neq \tilde{f}(x)$ 且 $f(y) \neq \tilde{f}(y)$。那么必存在 $k,\ l \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in I_k$ 且 $y \in I_l$。进一步假设 $k < l$。那么由 (3.4) 和 (3.6)

$$\begin{aligned}
\frac{|h(x)-h(y)|}{\omega(|x-y|)} &= \frac{|h(x)-h(z_k)+h(y_l)-h(y)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{|f(x)-f(z_k)|}{\omega(|x-y|)} + \frac{|\tilde{f}(z_k)-\tilde{f}(x)|}{\omega(|x-y|)} + \frac{|f(y_l)-f(y)|}{\omega(|x-y|)} + \frac{|\tilde{f}(y)-\tilde{f}(y_l)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{|f(x)-f(z_k)|}{\omega(|x-z_k|)} + \frac{|\tilde{f}(z_k)-\tilde{f}(x)|}{\omega(|z_k-x|)} + \frac{|f(y_l)-f(y)|}{\omega(|y_l-y|)} + \frac{|\tilde{f}(y)-\tilde{f}(y_l)|}{\omega(|y-y_l|)} \\
&\leqslant \varepsilon_k + 6\varepsilon_k + \varepsilon_l + 6\varepsilon_l \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

˜ ˜因为 $h(z_k) = h(y_l) = 0$。其他情况, 例如 $k = l$或 $f(x) = f(x)$, 也类似。因此 $[f-\tilde{f}]_\omega = [h]_\omega \leqslant \varepsilon/2$ 并且

$$||f-\tilde{f}||_\omega = ||f-\tilde{f}||_\infty + [f-\tilde{f}]_\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

如所需。

˜接下来我们验证 $f \in c^\omega[0,1]$。令 $t \in (0, L_1]$并定义 m为满足 $t \leqslant L_m$的最大整数。令˜ ˜ $x, y \in [0,1]$, 其中 $x < y$且 $|x-y| \leqslant t$。设 $f(x) \neq \tilde{f}(x)$, 且 $f(y) \neq \tilde{f}(y)$。必定存在 $k, l \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in I_k$ 且 $y \in I_l$, 并且我们进一步假设 $k < l$。由于 $L_k \leqslant |x-y| \leqslant L_m$, 我们必有$k \geqslant m$。再次由 (3.4) 和 (3.6)

$$\begin{aligned}
\frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} &\leqslant \frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(z_k)| + |\tilde{f}(z_k)-\tilde{f}(y_l)| + |\tilde{f}(y_l)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(z_k)|}{\omega(|x-z_k|)} + \frac{|\tilde{f}(z_k)-\tilde{f}(y_l)|}{\omega(|z_k-y_l|)} + \frac{|\tilde{f}(y_l)-\tilde{f}(y)|}{\omega(|y_l-y|)} \\
&\leqslant 6\varepsilon_k + \varepsilon_m + 6\varepsilon_l \\
&\leqslant 13\varepsilon_m \\
&\to 0
\end{aligned}$$

如 $t \to 0$。˜其他情形可类似处理（实际上更简单）, 由此我们得出 $f \in c^\omega[0,1]$.

最后我们计算 $\dim_{\mathrm{A}}^\theta G_{\tilde{f}}$。令 $\boldsymbol{x_k} = (x_k, \tilde{f}(x_k))$, 并令 $Q_k = Q(\boldsymbol{x_k}, r_k^\theta)$。那么每个 Q_k至少与

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{r_k^\theta}{r_k}$$

列相交, 这些列的形式为 $[nr_k,(n+1)r_k] \times \mathbb{R}$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$ 属于 r_k-网格。根据构造, 每一这样的列中, $G_{\tilde{f}} \cap Q_k$ 至少与

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_k \omega(r_k)}{r_k}$$

个边长为 r_k 的正方形相交, 这些正方形位于网格中, 因为 $\varepsilon_k\omega(r_k) \leqslant r_k^\theta$。将这些加起来,

$$\begin{aligned}
N_{r_k}(Q_k \cap G_{\tilde{f}}) &\gtrsim \frac{r_k^\theta}{r_k} \cdot \frac{\varepsilon_k \omega(r_k)}{r_k} \\
&\geqslant r_k^{\theta-1+\eta+\delta-1} \\
&= r_k^{(\theta-1)\left(2-\frac{\eta-\theta+\delta}{1-\theta}\right)}.
\end{aligned}$$

由于 $r_k^{\theta-1} \to \infty$ as $k \to \infty$, 我们得到

$$\dim_{\mathrm{A}}^\theta G_{\tilde{f}} \geqslant 2 - \frac{\eta-\theta+\delta}{1-\theta}.$$

我们对 $\delta > 0$ 的选择是任意的，因此实际上可以得出

$$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_{\tilde{f}} \geqslant 2 - \frac{\eta - \theta}{1 - \theta}.$$

对于上界，注意到 ω为凹函数意味着 $\omega(1) < \infty$。因此，若 $\theta < \eta$ 且 $\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_{\tilde{f}} \leqslant 2 - \frac{\eta-\theta}{1-\theta}$，则命题 2.1 适用，从而证明所需结果。□

引理 3.4. 设 $\theta \in (0,1)$，且 ω 是一个连续模。令

$$\beta = \max_{f \in c^{\omega}[0,1]} \dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f.$$

那么集合 $\{f \in c^{\omega}[0,1] \mid \text{维数}_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f = \beta\}$ 是 G_{δ}。

证明。设 A 为陈述中的集合。由于对所有 $f \in c^{\omega}[0,1]$，$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f \leqslant \beta$，因此我们可以写成

$$\begin{aligned} A &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{C \geqslant 0} \bigcup_{x \in [0,1]} \bigcup_{r>0} \left\{ f \in c^{\omega}[0,1] : N_r(B^o((x, f(x)), r^{\theta}) \cap G_f) \geqslant C \left(\frac{r^{\theta}}{r}\right)^{\beta-\varepsilon} \right\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{C \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{x \in [0,1]} \bigcup_{r>0} \left\{ f \in c^{\omega}[0,1] : N_r(B^o((x, f(x)), r^{\theta}) \cap G_f) \geqslant C \left(\frac{r^{\theta}}{r}\right)^{\beta-\frac{1}{n}} \right\}, \end{aligned}$$

因此，我们只需证明上面一行中最内层的集合是开集。为此，设给定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $C \in \mathbb{N}_0$。假设 $f \in c^{\omega}[0,1]$ 满足

$$N_r(B^o((x, f(x)), r^{\theta}) \cap G_f) \geqslant C \left(\frac{r^{\theta}}{r}\right)^{\beta-\frac{1}{n}}$$

对某些 $x \in [0,1]$和 $r > 0$成立。设 $\{B((x_i, f(x_i)), r)\}_{i \in I}$是 $B^o((x, f(x)), r^{\theta})$ 中的一个极大 r-装填，其中 I是某个有限指标集。对每个 i，令 $h_i > 0$为 $(x_i, f(x_i))$ 到 $B^o((x, f(x)), r^{\theta})$ 边界的最小垂直距离，并令 $h = \min_{i \in I} h_i$。此外，令

$$d = \min_{i \neq j} |(x_i, f(x_i)) - (x_j, f(x_j))| - 2r$$

并注意到 $d > 0$。然后取

$$\xi = \frac{1}{2} \min\{h, d\},$$

我们看到，如果 $g \in c^{\omega}[0,1]$ 满足 $||f - g||_{\infty} < \xi$，那么对于所有满足集合 $P = \{B((x_i, g(x_i)), r)$ 两两不相交的 i，有 $(x_i, g(x_i)) \in B^o((x, g(x)), r^{\theta}) \cap G_g$。换言之，$P$是 $B^o((x, g(x)), r^{\theta})$ 的一个 r-打包。因此

$$N_r(B^o((x, g(x)), r^{\theta}) \cap G_g) \geqslant N_r(B^o((x, f(x)), r^{\theta}) \cap G_f) \geqslant C \left(\frac{r^{\theta}}{r}\right)^{\beta-\frac{1}{n}}.$$

由于仅当 $||f - g||_{\infty} < \xi$ 时 $g \in B^o(f, \xi)$，所以可得

$$B^o(f, \xi) \subseteq \left\{ f_0 \in c^{\omega}[0,1] : N_r(B^o((x, f_0(x)), r^{\theta}) \cap G_{f_0}) \geqslant C \left(\frac{r^{\theta}}{r}\right)^{\beta-\frac{1}{n}} \right\},$$

这就证明了 A 是一个 G_{δ} 集。□

定理 *2.3* 的证明。同样，由引理 2.2 可知极限 η 存在。对于 (i)，命题 3.1 表明，若$\eta > 1$，则 $C^{\omega}[0,1]$ 仅由常函数构成，其图像的 Assouad 维数和谱均等于 1；因此我们假设 $\eta = 1$。令 $f \in C^{\omega}[0,1]$ 和 $\theta \in (0, 1)$，由命题 2.1 可得 $\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f \leqslant 1$。另一方面，令 $0 < r < 1$ 并考虑 $Q(\mathbf{0}, r^{\theta})$。由于 f 连续，

$$N_r'(Q(\mathbf{0}, r^{\theta}) \cap G_f) \geqslant \left\lfloor \frac{r^{\theta}}{2r} \right\rfloor \gtrsim \frac{r^{\theta}}{r}$$

从而得到 $\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f \geqslant 1$。因此，$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f = 1$。

对于第 (ii) 部分，命题 2.1 和引理 3.3 表明，对于所有 $\theta < \eta$，集合

$$F_\theta := \left\{ f \in c^\omega[0,1] \mid \dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f = 2 - \frac{\eta - \theta}{1 - \theta} \right\}$$

在 $c^\omega[0,1]$ 中是稠密的。由 Assouad 谱的连续性

$$F_\eta = \{ f \in c^\omega[0,1] \mid \dim_{\mathrm{A}}^{\eta} G_f = 2 \}$$

在 $c^\omega[0,1]$ 中是稠密的，其中所有 $f \in F_\eta$ 也满足 $\dim_{\mathrm{A}} G_f = 2$。利用 [6, 推论 3.6]（该推论指出，如果 $\dim^{\phi}{}_{\mathrm{A}} E = \dim_{\mathrm{A}} E$，那么对于所有 $\phi' \in [\phi, 1$，都有 $\dim^{\phi'}{}_{\mathrm{A}} E = \dim_{\mathrm{A}} E$），可知对于所有 $\theta > \eta$ 和 $f \in F_\eta$，都有 $\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f = \dim_{\mathrm{A}} G_f = 2$。因此，对于 $\theta \geqslant \eta$，集合

$$F_\theta := \{ f \in c^\omega[0,1] \mid \dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f = 2 \}$$

都包含 F_η，这意味着它们同样是稠密的。随后，引理 3.4 告诉我们，对于所有 $\theta \in (0, 1)$，F_θ 是余剩集。要完成证明，还需要最后一个简单但重要的步骤。到目前为止，我们仅证明了：对于每个 θ，典型的函数都满足关于 θ 的正确公式。然而，我们想证明的是：典型的函数对于所有 θ 同时满足正确公式。由于需要考虑的 θ 有不可数多个，而余瘦集性质在不可数交下并不保持，这可能会造成问题。不过，通过利用 Assouad 谱的连续性，可以克服这一问题。特别地，Assouad 谱由其在一个可数稠密子集上的取值所确定。事实上，

$$F := \bigcap_{\theta \in (0,1)} F_\theta = \bigcap_{\theta \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} F_\theta.$$

因此，F 是可数个剩余集的交集，故其自身也是剩余集。证明完毕。

□

3.3 典型小 ω 图像的 Assouad 维数

本节聚焦于图像的 Assouad 维数，并证明定理 2.5。我们先考虑 Lipschitz 函数，并写作

$$[f]_1 = \sup_{x,y \in [0,1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

命题 3.5。假设 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是 *Lipschitz* 的。那么，对所有 $\theta \in (0,1)$，都有 维数$_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f =$ 维数$_{\mathrm{A}} G_f = 1$。

证明。设 $0 < r < R$。设 $x \in [0,1]$，并记 $\boldsymbol{x} = (x, f(x))$。对于某个使 $Q(\boldsymbol{x}, R)$ 相交的整数 n，形如 $[nr, (n+1)r] \times \mathbb{R}$ 的 r 列数至多为 $R/r + 2$。由于

$$|f(y) - f(z)| \leqslant [f]_1 |y - z| \leqslant [f]_1 r$$

对于所有 $y, z \in [nr, (n+1)r]$，每个 r 列中与之相交的 r 个正方形数至多为 $[f]_1 r/r + 2 = [f]_1 + 2$。因此

$$N_r'(Q(\boldsymbol{x}, R) \cap G_f) \leqslant \left(\frac{R}{r} + 2 \right) ([f]_1 + 2) \lesssim \frac{R}{r},$$

由此我们得出 $\dim_{\mathrm{A}} G_f \leqslant 1$。对于下界，注意到对于 $\theta \in (0, 1)$，定理 2.3 (i) 蕴含 $\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f = 1$。因此，

$$1 = \dim_{\mathrm{A}}^{\theta} G_f \leqslant \dim_{\mathrm{A}} G_f \leqslant 1$$

并且等号必须处处成立。

□

我们证明定理 2.5 的方法与定理 2.3 非常相似，不过为了完整起见，我们仍将给出证明。我们采用相同的策略：先验证所需集合是稠密的，再证明它是 G_δ。

引理 3.6. 设 ω 是满足以下条件的凹连续模

$$\lim_{t\to 0}\frac{\omega(t)}{t}=\infty.$$

那么集合 $\{f\in c^{\omega}[0,1]\mid \text{维数}_{\mathrm{A}}\, G_f=2\}$ 在$(c^{\omega}[0,1],\|\cdot\|_{\omega})$中稠密。

证明。 设 $f\in c^{\omega}[0,1]$ 和 $\varepsilon>0$。我们可以假设 ε $\omega\ \varepsilon\ \leqslant 1$ $\omega\ t\ \leqslant 1$ 足够小，使得 ( )，从而对所有 $t\leqslant\varepsilon$都有 ( )。我们的目标是证明存在 $\tilde{f}\in c^{\omega}[0,1]$，使得 $\|f-\tilde{f}\|_{\omega}\leqslant\varepsilon$ 且维数$_{\mathrm{A}}\, G_{\tilde{f}}=2$。
设 (ε_k) 是一个由正实数构成的递减序列，满足 $\sum_k\varepsilon_k\leqslant 1/8$ 和 $\varepsilon_k\leqslant 24^{-1}\varepsilon$。设 (r_k) 是一个正的严格递减序列，其中 $\omega(r_k)\leqslant\varepsilon_k$ 并且

$$\frac{\omega(r_k)}{r_k}\geqslant\frac{2k+1}{\varepsilon_k}$$

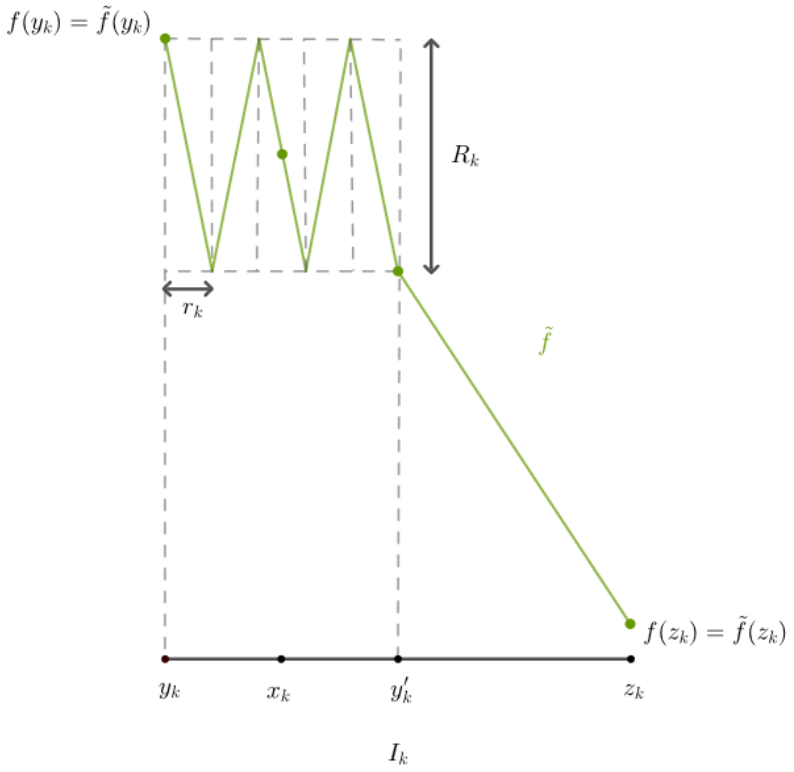
对所有 k，利用 ω 递增且当 $t\to 0$ 时 $\omega(t)/t\to\infty$ 这一事实。此外，由于 $f\in c^{\omega}[0,1]$，我们可以选取 r_k，使得若 $x,\ y\in[0,1]$ 互不相同且 $|x-y|\leqslant\omega(r_k)$，则

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)}\leqslant\varepsilon_k. \tag{3.8}$$

由此可得，对于这样的 $x,\ y$

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\omega(\varepsilon_k)\varepsilon_k\leqslant\varepsilon_k. \tag{3.9}$$

最后，我们定义 $R_k=(2k+1)r_k$，并注意到 $R_k\searrow 0$ 满足 $R_k\leqslant\omega(r_k)\varepsilon_k$。
考虑区间 $I_1=[0,2R_1]$和 $I_k=[4(R_1+\ldots+R_{k-1}),\ 4(R_1+\ldots+R_{k-1})+2R_k]$对于 $k\geqslant 2$；注意到这些 I_k 彼此不相交且 $\cup_k I_k\subseteq[0,1]$。记 I_k 的左端点为 y_k，右 ˜ ˜端点为 z_k。我们通过在 I_k 上修改 f 来定义一个新函数 $\tilde{f}$，使得 $\tilde{f}$ 在$[0,1]\setminus\cup_k I_k$上与 f 重合。



˜图 2： f 关于 I_k

令 $k \in \mathbb{N}$，并不失一般性地假设 $f(y_k) \geqslant f(z_k)$。令 $y'_k = (y_k + z_k)/2$ 且 $x_k = (y_k + y'_k)/2$。定义 $\tilde{f}$ 如下。令 $\tilde{f}(y_k) = f(y_k)$，$\tilde{f}(z_k) = f(z_k)$，$\tilde{f}(x_k) = f(y_k) - R_k/2$，$\tilde{f}(y'_k) = f(y_k) - R_k$，并在线性插值于 y'_k 与 z_k 之间。由于 $|y'_k - y_k| = R_k$，我们将 $[y_k, y'_k]$ 划分为 $2k+1$ 个长度为 r_k 的子区间。此外，令 f 满足：

- $\tilde{f}$ 在每个子区间上都是仿射的；
- 在每个子区间上的振荡等于 R_k；
- $f(x) \in [f(y_k)\ f(y'_k)]$ 对所有 $x \in [y_k, y'_k]$，

见图 2。现在，对于不同的 x，$y \in [y_k, y'_k]$，若 $|x - y| > r_k$，则

$$\frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \leqslant \frac{R_k}{\omega(r_k)} \leqslant \varepsilon_k;$$

否则，$|x - y| \leqslant r_k$ 和 x，y 要么属于同一个子区间，要么属于两个相邻子区间。在前一种情况下，由引理 3.2 可得

$$\frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \leqslant \frac{R_k}{\omega(r_k)} \leqslant \varepsilon_k;$$

而在后一种情况下，记 z 为这两个相邻子区间的公共端点，并假设 $x < z < y$。于是，由于 ω 是递增的，且 $|x - y| = |x - z| + |z - y|$，我们有

$$\max\{\omega(|x-z|), \omega(|z-y|)\} \leqslant \omega(|x-y|)$$

并且再次由引理 3.2 得出

$$\begin{aligned}
\frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} &\leqslant \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(z)| + |\tilde{f}(z) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(z)|}{\omega(|x-z|)} + \frac{|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|z-y|)} \\
&\leqslant \frac{R_k}{\omega(r_k)} + \frac{R_k}{\omega(r_k)} \\
&\leqslant 2\varepsilon_k.
\end{aligned}$$

注意到 $|y_k - z_k| = 2R_k \leqslant \omega(r_k)$，因此由 (3.8) 可得

$$|\tilde{f}(y'_k) - \tilde{f}(z_k)| \leqslant |f(y_k) - f(z_k)| + R_k \leqslant \varepsilon_k \omega(2R_k) + R_k.$$

引理 3.2 随后表明，对于 x，$y \in [y'_k, z_k]$ 互不相同

$$\begin{aligned}
\frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} &\leqslant \frac{|\tilde{f}(y'_k) - \tilde{f}(z_k)|}{\omega(|y'_k - z_k|)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon_k \omega(2R_k) + R_k}{\omega(R_k)} \\
&\leqslant \frac{2\varepsilon_k \omega(R_k)}{\omega(R_k)} + \frac{R_k}{\omega(r_k)} \\
&\leqslant 2\varepsilon_k + \varepsilon_k \\
&= 3\varepsilon_k,
\end{aligned}$$

这里用到了 ω 是凹且递增的。

类似地，若 $x, y \in I_k$ 满足 $x < y'_k < y$，使用相同的论证可得

$$\begin{aligned}
\frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} &\leqslant \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y'_k)| + |\tilde{f}(y'_k) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y'_k)|}{\omega(|x-y'_k|)} + \frac{|\tilde{f}(y'_k) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|y'_k - y|)} \\
&\leqslant 2\varepsilon_k + 3\varepsilon_k \\
&= 5\varepsilon_k.
\end{aligned}$$

因此，对于 $x, y \in I_k$

$$\frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \leqslant 5\varepsilon_k, \tag{3.10}$$

并且由于我们假设 $\omega(\varepsilon) \leqslant 1$

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leqslant 5\varepsilon_k \omega(|x-y|) \leqslant 5\varepsilon_k \omega(\varepsilon) \leqslant 5\varepsilon_k. \tag{3.11}$$

~ ~我们来验证 $||f - \tilde{f}||_\omega \leqslant \varepsilon$。令 $x \in [0,1]$，并假设 $\tilde{f}(x) \neq f(x)$，因此必有 $x \in I_k$，其中某个 k。于是

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leqslant |f(x) - f(z_k)| + |\tilde{f}(z_k) - \tilde{f}(x)| \leqslant \varepsilon_k + 5\varepsilon_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

~ ~由 (3.9) 和 (3.11) 得出。因此 $||f - \tilde{f}||_\infty \leqslant \varepsilon/2$。对于 $[f - \tilde{f}]_\omega$，记 $h = f - \tilde{f}$。令 $x, y \in [0,1]$，其中 ~我们假设 $\tilde{f}(x) \neq f(x)$ 且 $\tilde{f}(y) \neq f(y)$。于是必存在 $k, l \in \mathbb{N}$，使得 $x \in I_k$ 且 $y \in I_l$。进一步假设 $k < l$。那么由 (3.8) 和 (3.10)

$$\begin{aligned}
\frac{|h(x) - h(y)|}{\omega(|x-y|)} &= \frac{|h(x) - h(z_k) + h(y_l) - h(y)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{|f(x) - f(z_k)|}{\omega(|x-y|)} + \frac{|\tilde{f}(z_k) - \tilde{f}(x)|}{\omega(|x-y|)} + \frac{|f(y_l) - f(y)|}{\omega(|x-y|)} + \frac{|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(y_l)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{|f(x) - f(z_k)|}{\omega(|x-z_k|)} + \frac{|\tilde{f}(z_k) - \tilde{f}(x)|}{\omega(|z_k-x|)} + \frac{|f(y_l) - f(y)|}{\omega(|y_l-y|)} + \frac{|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(y_l)|}{\omega(|y-y_l|)} \\
&\leqslant \varepsilon_k + 5\varepsilon_k + \varepsilon_l + 5\varepsilon_l \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

~因为 $h(z_k) = h(y_l) = 0$。其他情形也类似，例如 $k = l$，或 $f(x) = \tilde{f}(x)$。因此 ~ $[f - \tilde{f}]_\omega = [h]_\omega \leqslant \varepsilon/2$ 且

$$||f - \tilde{f}||_\omega = ||f - \tilde{f}||_\infty + [f - \tilde{f}]_\omega \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

正如所希望的那样。

~接下来我们验证 $f \in c^\omega[0,1]$。令 $t \in (0, L_1]$ 并定义 m 为满足 $t \leqslant 2R_m$ 的最大整数。令 ~ ~x, $y \in [0,1]$，其中 $x < y$ 且 $|x-y| \leqslant t$。假设 $\tilde{f}(x) \neq f(x)$，且 $\tilde{f}(y) \neq f(y)$。必定存在 $k, l \in \mathbb{N}$，使得 $x \in I_k$ 且 $y \in I_l$，并且进一步假设 $k < l$。由于 $2R_k \leqslant |x-y| \leqslant 2R_m$，我们必有 $k \geqslant m$。再次由 (3.8) 和 (3.10)

$$\begin{aligned}
\frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} &\leqslant \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(z_k)| + |\tilde{f}(z_k) - \tilde{f}(y_l)| + |\tilde{f}(y_l) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|x-y|)} \\
&\leqslant \frac{|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(z_k)|}{\omega(|x-z_k|)} + \frac{|\tilde{f}(z_k) - \tilde{f}(y_l)|}{\omega(|z_k-y_l|)} + \frac{|\tilde{f}(y_l) - \tilde{f}(y)|}{\omega(|y_l-y|)} \\
&\leqslant 5\varepsilon_k + \varepsilon_m + 5\varepsilon_l \\
&\leqslant 11\varepsilon_m \\
&\to 0
\end{aligned}$$

~由于 $t \to 0$。其他情形可类似处理（事实上更简单），由此我们得出 $f \in c^\omega[0,1]$。

~最后，我们计算 $\dim_{\mathrm{A}} G_{\tilde{f}}$。记作 $\boldsymbol{x_k} = (x_k,\ f(x_k))$，并令 $Q_k = Q(\boldsymbol{x_k},\ R_k)$。那么每个 Q_k 至少与其相交

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{R_k}{r_k}$$

形如 $[nr_k, (n+1)r_k] \times \mathbb{R}$ 的列，其中某个 $n \in \mathbb{Z}$ 位于 r_k 网格中。根据构造，在每个这样的列中，$G_{\tilde{f}} \cap Q_k$ 至少与

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{R_k}{r_k}$$

个边长为 r_k 的正方形位于网格中。将这些加总，

$$N_{r_k}(Q_k \cap G_{\tilde{f}}) \gtrsim \left(\frac{R_k}{r_k}\right)^2.$$

由于

$$\frac{R_k}{r_k} = 2k+1 \to \infty$$

当 $k \to \infty$ 时，我们得到 $\dim_{\mathrm{A}} G_{\tilde{f}} = 2$，从而证明完毕。 □

引理3.7。 设 ω 是一个连续模。集合 $\{f \in c^{\omega}[0,1] \mid \text{维数}_{\mathrm{A}}\, G_f = 2\}$ 为 G_{δ}。

证明概要。 考虑集合

$$\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{C\geqslant 0}\bigcup_{x\in[0,1]}\bigcup_{R>0}\bigcup_{r\in(0,R)}\left\{f\in c^{\omega}[0,1] : N_r(B^o((x,f(x)),R)\cap G_f)\geqslant C\left(\frac{R}{r}\right)^{2-\varepsilon}\right\},$$

可以用与引理 3.4 的证明类似的方法证明它是 G_{δ}。 □

定理 *2.5* 的证明。 (i) 部分由命题 3.5 得出。引理 3.6 和引理3.7 得出 (ii) 部分的结论。

□

参考文献

[1] E. I. Berezhnoi. 仅由最不光滑函数构成的 h¨older 空间子空间。《数学札记》，74(3):316–325, 2003.[2] E.-K. Chrontsios-Garitsis and J. T. Tyson. 关于 H¨older 函数图像与 Sobolev图的 Assouad 谱。即将发表于《剑桥哲学学会数学学报》， 2025+。预印本见 https://arxiv.org/abs/2309.07783.[3] K. J. Falconer.《分形几何：数学基础与应用》。John Wiley & Sons公司，霍博肯，第3版，2014.[4] J. M. Fraser.《Assouad 维数与分形几何》。剑桥大学出版社，剑桥，2020.[5] J. M. Fraser and H. Yu. 若干分形族的 Assouad型谱。《印第安纳大学数学杂志》，67(5):2005–2043, 2018.[6] J. M. Fraser and H. Yu. 新的维数谱：关于尺度缩放与齐性的更精细信息。《数学进展》，329:273–328, 2018.[7] P. D. Humke and G. Petruska. 典型连续函数的填充维数为2。《实分析交流》，14(2):345 – 358, 1989.[8] J. Hyde, V. Laschos, L. Olsen, I. Petrykiewicz, and A. Shaw. 关于典型连续函数图像的盒维数。《数学分析及其应用杂志》，391(2):567–581, 2012.[9] F. L¨u and L.-F. Xi. 分形的 quasi-Assouad 维数。《分形几何杂志》，3:187–215, 2016.[10] R. Mauldin and S. Williams. 关于若干图像的Hausdorff维数。《美国数学学会汇刊》，298:793–793, 12 1986.[11] J. C. Oxtoby.《测度与范畴》。Springer，纽约，第2版，1980.

Tianyi Feng (corresponding author), University of St Andrews, Scotland
E-mail address: tf66@st-andrews.ac.uk

Jonathan M. Fraser, University of St Andrews, Scotland
E-mail address: jmf32@st-andrews.ac.uk