基于光束偏转的全光声学断层成像

Xingchi Yan[†*]

美国罗得岛州普罗维登斯市布朗大学化学系（邮编 *02912*），以及美国马萨诸塞州剑桥市哈佛大学 *NSF*-西蒙斯数学与统计生物学分析中心（邮编 *02138*）

Siyuan Song[†]

美国罗得岛州普罗维登斯市布朗大学工程学院（邮编 *02912*）

Hanxun Jin

机械工程与材料科学系，圣路易斯华盛顿大学，美国密苏里州圣路易斯，*63130*；美国国家科学基金会工程机械生物学科学与技术中心，圣路易斯华盛顿大学，美国密苏里州圣路易斯，*63130*

arXiv:2601.05448v1 [physics.app-ph] 9 Jan 2026

摘要

光声成像（PAI）独特地将光学对比度与声波的深层组织穿透能力相结合，从而能够对深达数厘米的组织进行成像。传统的光声成像方法依靠脉冲激光器诱导光声效应，并通过压力换能器阵列检测由此产生的超声信号。在本研究中，我们提出了一种替代性的全光学方法，利用光偏转，通过探测光束阵列记录光声波。研究表明，所测信号是压力梯度的拉东变换。我们采用基于优化的反演过程来重建初始时刻压力梯度场。随后，使用Galerkin方法根据压力梯度场重建压力场。这种新模态有望提高灵敏度并减少信号失真，从而推动光声成像的能力超越传统的基于换能器的系统。

关键词：多物理场模态、逆问题、全光学光声成像、拉东变换、有限元法

I. 引言

光声效应结合了强光学对比度与超声的深层组织穿透能力，在生物成像领域展现出巨大潜力，应用范围涵盖大鼠脑 [1], 组织 [2], 乳腺 [3] 以及人脑 [4]成像。凭借其独特性质，光声成像不仅能够提供血液的高对比度，还具有出色的分辨率，因此可应用于包括肿瘤检测在内的多种医学领域 [5–8]。

迄今为止，记录脉冲激光器激发并产生的声波，常规方法是使用压力换能器阵列。文献 [5, 6, 9, 10]介绍了多种超声换能器阵列配置。一些研究团队使用频率编码的连续激光束产生光声波，再通过传统压电换能器进行检测 [11]。法布里-珀罗干涉仪已用于感测扫描探测激光束扫过干涉仪表面时产生的压力场 [12, 13]。研究人员曾使用 U形阵列的光纤法布里-珀罗干涉仪来

* xingchi yan@alumni.brown.edu（通讯作者）

† 这些作者对本研究的贡献相同。

记录沿光纤长度积分的压力 [14]。关于光声成像的详细综述可参见文献 [6, 8]。

利用光束偏转记录光声效应的想法已见于少数文献 [15–18], ，其中包括一种基于光束偏转的光声显微镜 [16]。与传统压力换能器相比，光学记录具有三大优势。

首先，压力换能器是光声成像系统中的关键组件，但其性能远非理想 [19, 20]。PVDF 等薄膜换能器的频率响应相当平坦，这对高分辨率成像十分有利，但其灵敏度较低 [21]。$LiNbO_3$ 等晶体以及 PZT 等固体换能器的灵敏度高于 PVDF，但会使实际光声压力波形产生显著失真。这种失真源于固体换能器的机械共振，可能严重扭曲测得的光声压力波形 [22]。现有压力传感器本身构成了测量精度的固有局限 [15]。光电二极管探测器记录的光束偏转信号则不会受到同样的失真问题影响，因为用于数据采集的商用光电探测器带宽足够大，能够准确捕获信号而不产生失真。

其次，压电换能器的灵敏度是固定的，取决于压电电压系数（pC/Pa）以及前置放大器中的噪声。在所介绍的模态中，激光束穿过声场时会发生偏转；通过增大压力场与探测器位置之间的距离，可以获得巨大的振幅增益，而最终限制可获得增益的只有激光的指向稳定性。已有研究证明了激光束偏转的灵敏度：使用输出功率仅为 3 mW 的探测激光器即可获得信号 [23]。

第三，基于光束偏转的光学记录具有宽带宽，其限制因素仅为光学传感器的速度，以及电子设备从二极管探测器读取电压的能力。商用光学传感器的响应时间很容易达到约 10 ns。

尽管基于光束偏转的光声显微镜[23],具有卓越的灵敏度，但其向断层成像的拓展仍未得到探索。在本研究中，我们提出一种新的成像方式，通过记录光偏转来探测声场。本文介绍了该成像方式源识别所用的模型和数值方法。考虑图 1 (a) 所示的光学装置，其中感兴趣的物体位于

Γ 平面上方。排列在 Γ 平面上的探测光束阵列射向光电探测器阵列，该阵列用于记录探测光束在 x_3 方向上的偏转。由于声波中存在密度变化，会扰动介质的折射率，因此每束探测光束沿其轨迹在 x_3 方向上的各点都会发生偏转，偏转量与光声波中的密度梯度成正比。阵列中每束光的总偏转量与沿光束路径的偏转量积分成正比。探测光束和光学传感器可以沿区域边界以不同配置排列，以提取压力梯度分布的部分信息。

本文旨在利用一种传感器配置重建源——即初始压力场和底层几何结构。由于我们获得的信息不完整且含有噪声，该逆问题病态，可通过逆问题的伴随算子 [24] 迭代求解。该算法首先针对给定的试探源项建立波传播模型，然后根据对所得误差项应用逆算子或伴随算子所得到的结果进行修正。压力场可利用有限元方法对压力梯度场进行数值积分得到。通过对若干已知源项进行正向模拟（这些源项用于模拟实验中的源），可以数值生成合成实验传感器信号。本文结构如下：第二节介绍实验的主要设置和正问题；第三节阐述基于优化和伽辽金方法的反演算法；第四节展示简单源和复杂源的主要结果；第五节进行讨论。

II. 物理建模

A. 本构方程

激光激发产生向外传播的声波，如图 1 所示。均匀可压缩流体在小变形下的波传播可通过一组基于质量守恒和线性化状态方程的线性方程描述。对于理想流体中粒子的微小位移,

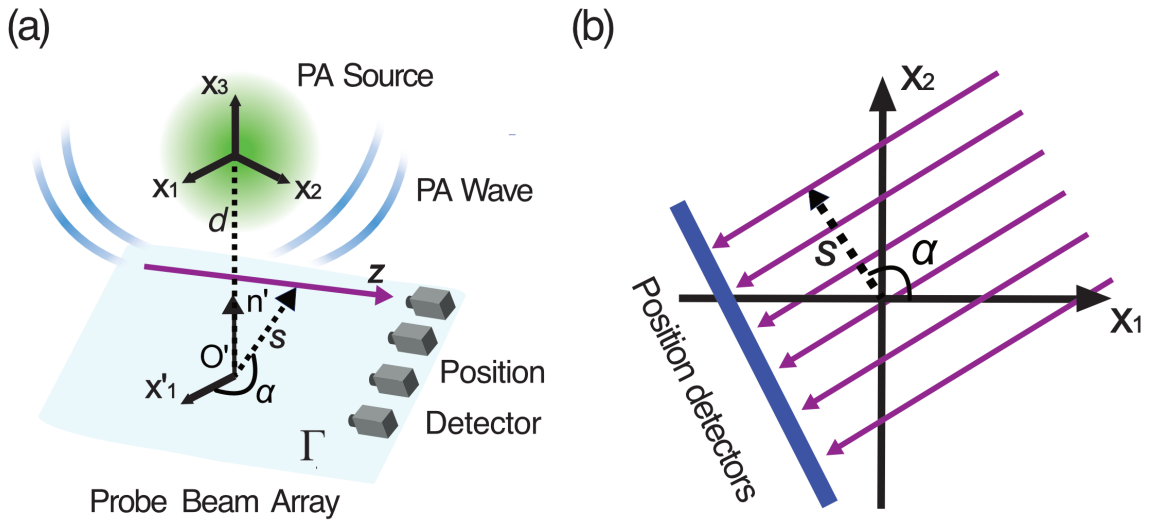

图 1. 光束偏转层析成像实验装置示意图。(a) 吸收体（以绿色表示）受到短激光脉冲照射并发出声波（以蓝色表示）。当声波传播至探测光束阵列平面 Γ （以浅蓝色表示）时，探测光束阵列（以紫色表示）发生偏转，偏转角沿 z 轴由位置探测器阵列记录。对于每次脉冲激励，都可以将探测光束阵列在平面 Γ 内旋转增量角度 α 后重复实验。为重建图像，必须记录完整的 180 度旋转过程。图中仅显示一束探测激光束和一个探测器阵列。(b) 探测光束阵列和探测器的俯视图。

动量守恒方程为：

$$-\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \nabla p(\mathbf{x}) \tag{1}$$

其中，$\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t)$ 是粒子的位移，t 是时间，$\mathbf{x}$ 是全局空间坐标。$p(\mathbf{x})$ 是压力场，ρ_0 是平衡密度。对于理想流体的小扰动，线性化状态方程为：

$$p(\mathbf{x},t) = c^2\left(\rho(\mathbf{x},t) - \rho_0\right) \tag{2}$$

其中，c 为声速，$\rho(\mathbf{x}\ t)$ 为瞬时密度。对于小扰动，质量守恒方程为：

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = 0 \tag{3}$$

其中，$\mathbf{v}(\mathbf{x}\ t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}\ t)}{\partial t}$ 为速度场。结合这三个关系式，可得压力场的经典波动方程 [25–27]：

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 p(\mathbf{x},t) = 0 \tag{4}$$

给定初始条件 $p(\mathbf{x}\ t = t_0) = p_0(\mathbf{x})$ 和边界条件 B，即可确定压力场 $p(\mathbf{x}\ t) = \mathcal{F}(c,\ B)p_0(\mathbf{x})$，其中 $\mathcal{F}(c,\ B)$ 为前向算子。根据双曲型偏微分方程的线性特性，压力梯度场 $\nabla p(\mathbf{x}\ t)$ 也满足方程 4。可使用有限差分或谱方法求解正问题 [28–30]。

B. 光学传感

在距光声源一定距离处，位于测量平面上的探测光束 Γ穿过光声场，并被引导至光电探测器（PD）。光声诱导的局部密度波动会扰动介质的折射率，使探测光束在传播路径上发生偏转。偏转幅度与光声场内的局部密度梯度成正比。PD 接收偏转后的探测光束信号，其中包含由光声源产生的压力场 $p(\mathbf{x}\ t)$ 的部分信息。通过收集布置在不同位置和方向、并在不同采集时间进行测量的多个探测器所获取的 PD 信号 β，即可通过求解逆问题重建初始光声源。理想情况下，应使用多束平行光束和多个探测器。然而，为了降低成本，可以采用简化装置：使用单个探测激光器和一个可沿边界扫描的探测器。

光电二极管信号 β 与光声场 $p(\mathbf{x}\ t)$ 之间的关系可表示如下。我们考虑一个位于全局笛卡尔坐标系原点附近的光声源 $p_0(\mathbf{x})$，它会产生随时间变化的压力场 $p(\mathbf{x}\ t)$。测量平面 Γ 位于距光声源一定距离处。该平面由其单位法向量 $\mathbf{n}'$ 及其到原点的法向距离 d 确定。在 Γ上构建局部极坐标系 (s, α)，其中心位于原点在平面上的投影处，记为 O'。对于由 (s, α) 指定的每个点，我们定义一条经过该点且垂直于径向向量的切线。该切线表示探测光束的方向，且与相应的光电二极管对齐。沿着这条切线，我们建立

Frenet–Serret 标架，其中局部坐标 z 沿光束的传播方向定义。探测光束的入射位置和出射位置（即其端点）分别记为 z_{L} 和 z_{U}。随后，光电二极管检测到的相对信号幅度可由拉东变换 [31]表示：

$$\beta = M(\alpha, s;\, \mathbf{n}', d, \tau)\, p(\mathbf{x}, t) = \int_{z_{\mathrm{L}}}^{z_{\mathrm{U}}} \mathbf{n}' \cdot \nabla p\big(\mathbf{x}(z;\, \alpha, s, \mathbf{n}', d),\, \tau\big)\, dz \tag{5}$$

这里，测量算子 $M(\alpha,\ s;\, \mathbf{n}',\ d,\ \tau)$ 由三个依次执行的子操作组成：

$$M(\alpha, s;\, \mathbf{n}', d, \tau) = R(\alpha, s)\, \chi(\mathbf{n}', d, \tau)\, \mathbf{n}' \cdot \nabla, \tag{6}$$

其中：

- $\mathbf{n}' \cdot \nabla$ 计算压力场的方向导数；
- $\chi(\mathbf{n}',\ d,\ \tau)$ 提取时间 $t = \tau$ 时测量平面 Γ 上的值；
- $R(\alpha,\ s)$ 表示沿从 z_{L} 到 z_{U}路径的截断 Radon 变换。

具体而言，对于标量场 $f(x_a,\ x_b)$，其中 x_a和 x_b 表示定义在 Γ 上的局部笛卡尔坐标，算子 $R(\alpha,\ s)$ 定义如下：

$$R(\alpha, s)\, f(x_a, x_b) = \int_{z_{\mathrm{L}}}^{z_{\mathrm{U}}} f\Big(s\cos\alpha + z\sin\alpha,\, s\sin\alpha - z\cos\alpha\Big)\, dz \tag{7}$$

其中，积分沿着一条与平面上由极坐标（$\alpha,\ s$）所定义的径向方向垂直的直线进行。

可调整设置参数 $\alpha,\ s,\ \mathbf{n}',\ d,\ \tau$，以适应不同的数据采集设置配置。可通过多种方法实现这些变化，例如：

- 绕由$\mathbf{n}'$定义的轴旋转目标，从而改变角度 α ，而不改变测量平面 Γ或传感器偏移量 s；
- 设置一系列采集时间 τ；
- 配置一系列具有不同 s、$\mathbf{n}'$和 d值的传感器阵列。

为方便起见，我们将给定光电二极管在给定时间的一次测量记为M。我们的目标是根据所有此类测量 $\mathcal{M} = \{M\}$的集合 $\mathcal{B} = \{\beta\}$ 重建光声源。

III. 逆问题

A. 数学表述

相应的时间反演问题旨在根据测得的光学偏转数据 $\mathcal{B}$重建初始压力分布$p_0(\mathbf{x})$。前向波传播问题具有确定性且适定。然而，逆问题并非如此：当测量数量有限时 $\mathcal{M}$，根据测得的信号恢复 $p_0(\mathbf{x})$会成为一个病态问题，并且不存在唯一的反向传播算子。我们将其重新表述为一个优化问题，以寻找近似场 $\tilde{p}_0$ ，使其满足所有可用的物理约束和基于测量的约束。针对传统光声重建，已有多种数值方法，包括反向传播 [32–35], 伴随算子方法 [36, 37], 以及基于机器学习的反演 [38–40], 。本节将介绍一种基于伴随算子的重建算法，并采用 ISTA 型（迭代收缩阈值算法）方案 [41]实现。

为量化这一数据一致性要求，将传感器损失定义为：

$$L^{\text{Sensor}}(\tilde{p}_0) = \sum_{M \in \mathcal{M}} w(M) \, \| M\mathcal{F}\tilde{p}_0 - \beta(M) \| \tag{8}$$

其中， $\tilde{p}_0$ 表示感兴趣区域内真实初始压力场的一个试探近似， $w(M)$是分配给测量值 $M \in \mathcal{M}$的权重， $\|\cdot\|$ 表示L_2范数。求和遍历所有测量值 $\mathcal{M}$。逆问题可表述为以下优化问题：$\min_{\tilde{p}_0}(L^{\text{Sensor}})$。首先，未经优化的$p_0$传感器布置可能产生信息量较低的测量结果，使直接反演成为欠定问题。其次，测量过程涉及拉东变换以及微分和积分算子，因此直接最小化式（8）需要在每次迭代中反复执行拉东变换和逆拉东变换，并进行高阶数值微分和积分，从而导致巨大的计算成本和数值不稳定性。为应对这两项挑战，我们提出了一种重建方案，将（1）结构化测量策略、（2）提取测量信号方向分量的预处理流程，以及（3）针对这些处理后测量数据量身定制的重建框架结合起来。

a. 测量策略。 完整的测量方案需要明确三个基本组成部分：（i）传感器的空间布置，（ii）时间采样方案，

以及（iii）数据采集过程中施加的任何主动调整。在本研究中，这些组成部分定义如下。

- **传感器布置：**目标位于一个立方域内，其六个边界面分别记为 $\Gamma_{x_1^-}$、 $\Gamma_{x_1^+}$、 $\Gamma_{x_2^-}$、 $\Gamma_{x_2^+}$、 $\Gamma_{x_3^-}$ 和 $\Gamma_{x_3^+}$。测量平面 Γ 仅限于这些面。为恢复三个坐标方向上的压力导数 x_1、x_2、x_3，至少需要在三个相互正交的面上布置传感器，最多可使用全部六个面。在每个选定面 Γ上，传感器的面内偏移量 s 沿该面内指定的扫描方向均匀分布。

- **采集速率：**所有传感器以均匀的时间间隔同时采集数据。

- **旋转采样：**对于每个测量面 Γ，目标与传感器阵列围绕该面的外法线方向 $\mathbf{n}'$ 进行相对旋转。旋转角度 α 在 $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$内均匀采样。

b. 方向性预处理。 根据各测量平面法向量的方向，测量策略 $\mathcal{M}$ 被划分为三个互不相交的子集 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$。对于给定的测量平面 Γ 和时间 τ，相对于 α 和 s的测量有序分布使逆拉东变换能够通过 $R^{-1}\mathcal{B}_m(\Gamma,\ \tau)$恢复局部笛卡尔坐标下的压力梯度场，其中$\mathcal{B}_m(\Gamma,\ \tau)$表示与对应给定平面 Γ和时间 τ的子集 $\mathcal{M}_m$相关联的光电探测器信号集合。这里， $R^{-1}\mathcal{B}_m(\Gamma,\ \tau)$表示从测量数据中提取的后处理部分信息，反映在均匀笛卡尔网格上评估的压力梯度分量（即 $\partial p/\partial x_m$）。与原始测量值 $\mathcal{B}_m$相比，该量可作为更精细的参考信号。

在我们的设置中，光电探测器测量压力梯度场，其傅里叶域幅度按 $|k|p(k)$ 缩放，其中 k 表示波数。这会增强高频分量，并衰减低频分量和直流分量。尽管由于生物组织的衰减，深层组织信号主要由低频成分构成，但梯度场 ∇p编码了边界和界面等空间变化——这些变化承载着重要的结构信息。因此，所提出的基于梯度的

方法在抑制与形态无关的全局背景的同时，保留了具有诊断意义的成分。未来的研究可将所提出的模态与传统技术相结合，通过互补的频率灵敏度实现更出色的性能，并进一步提升图像保真度。

c. 重建框架。给定提取的压力梯度信息 $R^{-1}\mathcal{B}_m(\Gamma,\ \tau)$，我们重建方向导数 $\nabla_m\tilde{p}_0$，而非压力场 $\tilde{p}_0$ 本身。这样可以避免在每次重建迭代中反复进行数值微分、积分以及拉东变换/逆拉东变换运算。对于每个方向 $m \in \{1,2,3\}$，在给定测量平面 Γ 和时间τ上获取压力梯度信息的正问题为 $\chi(\Gamma,\ \tau)\ \mathcal{F}\nabla_m\tilde{p}_0$。数据一致性要求通过以下损失泛函进行量化，

$$L_m^{\text{Sensor–IR}}(\nabla_m\tilde{p}_0) = \sum_{\Gamma,\tau\in\mathcal{M}_m} \Big\| \chi(\Gamma,\tau)\,\mathcal{F}\nabla_m\tilde{p}_0 - R^{-1}\mathcal{B}_m(\Gamma,\tau) \Big\|. \tag{9}$$

其中，算子 ∇_m 表示关于 x_m 轴的方向导数。求和范围为 $\mathcal{M}_m$内的所有测量平面；具体取决于实验设置，每个$\mathcal{M}_m$可能包含一个或两个平面。量 $\chi(\Gamma,\ \tau)\ \mathcal{F}\nabla_m\tilde{p}_0$表示在测量平面 Γ上前向模拟得到的压力梯度，而 $R^{-1}\mathcal{B}_m(\Gamma,\ \tau)$表示通过对PD数据进行逆拉东变换得到的重建梯度。优化问题可重新表述为，

$$\min_{\nabla_m\tilde{p}_0} \left(\lambda J(\nabla_m\tilde{p}_0) + L_m^{\text{Sensor}-\text{IR}}(\nabla_m\tilde{p}_0) \right) \tag{10}$$

项 $\lambda J(\nabla_m\tilde{p}_0)$ 引入正则化以纳入先验知识。方程（10）定义了三个相互独立的逆问题——每个空间方向对应一个，分别求解。鉴于真实压力梯度场预期具有稀疏性，$J(\nabla_m\tilde{p}_0)$ 被选作 L_1 范数正则化项，以促进边缘保持并改善源拓扑的恢复。每个子问题均使用迭代收缩阈值算法（ISTA）和伴随算子 $\mathcal{F}^*$ [37, 42] 求解。最后，基于包含参考压力的完整梯度场 $\nabla\tilde{p}_0$，通过求解泊松方程重建初始压力场 $\tilde{p}_0$。

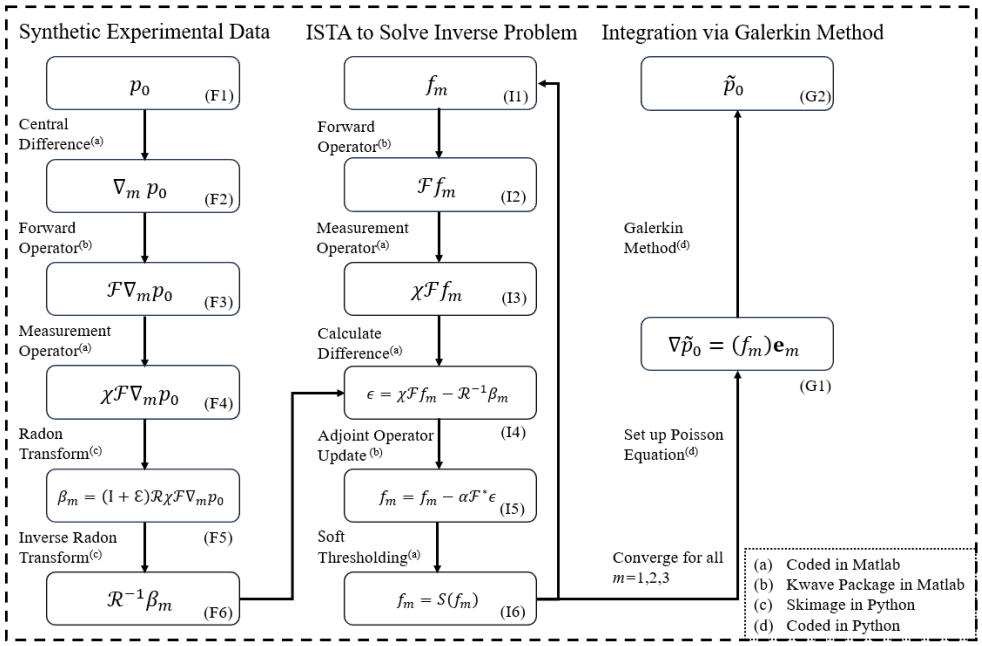

图 2. 算法框架。第一列展示了用于生成合成实验数据的正向模拟过程。从左下方的模块开始，六个阶段依次为：（F1）初始压力场；（F2）相应的压力梯度场；（F3）梯度场的时间演化；（F4）将其限制到测量平面；（F5）提取采样点处的拉东变换值；以及（F6）对提取的数据进行逆拉东变换。第二列和第三列展示了逆重建过程。从顶部中央开始，七个阶段包括：（I1）试探性初始压力梯度场；（I2）其模拟时间演化；（I3）提取采样点处的值；（I4）试探数据与合成数据之间的残差；（I5）通过伴随运算计算校正项；（I6）利用校正项更新试探梯度场；（G1）建立泊松方程；以及（G2）通过最终积分重建初始压力场。

B. 数值算法

图2中的流程图展示了求解方程（10）所定义的最小化问题的完整算法。该算法由两个主要部分组成：（1）使用迭代方法求解逆问题；（2）通过Galerkin方法求解泊松方程。

在实际场景中，真实压力源是未知的，而只有测量的传感器数据（对应模块 F6）可用。

在本研究中，我们首先使用已知的真实值（模块 F1）生成合成实验数据。沿$\mathbf{x}_m$ 方向的压力梯度场采用中心差分格式计算。为模拟波传播，我们使用 k-Wave 软件包[30], ，并纳入上一节介绍的本构关系。随后，在预先定义的测量平面（模块 F4）处提取测量数据。在实际实验中，光学传感器可以通过类似拉东变换的方式测量压力梯度。为模拟这一过程，我们应用拉东变换并叠加随机噪声（模块 F5）。合成噪声在范围（$-\epsilon$， ϵ）$|\beta|$内服从均匀分布，其中 $|\beta|$ 表示信号的局部绝对幅值。随后，使用逆拉东变换对所得数据进行重建，以恢复离散边界点处的压力梯度分布（模块 F6），从而完成合成数据生成过程。

流程图的第二列表示使用 ISTA 进行逆重建的阶段。初始化一个试探压力梯度场 $f_m = \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial x_m}$ 。模拟步骤 (I1) 至 (I3) 与前向过程 (F2) 至 (F4) 相对应，从而得到预测传感器数据。将这些数据与合成测量值进行比较（模块 I4），并使用伴随算子处理残差，以生成校正项（模块 I5）。随后使用由 L_1-范数正则化导出的软阈值算子对校正项进行优化：

$$\mathcal{S}(\cdot) = \operatorname{sign}(\cdot) \max\left(|\cdot| - \lambda,\, 0\right), \tag{11}$$

其中，正则化参数 $\lambda = 0.01$ 根据经验优化选取。

最后一个阶段如第三列所示，通过求解泊松方程来重建初始压力场。节点处更新后的压力梯度场作为输入。随后采用基于 Galerkin方法的有限元解，以恢复底层压力源分布。

C. 数值实现

本节将简要介绍流程图的数值实现。考虑一个边长为 $l = (N^{[F]} - 1)\Delta^{[F]}$ 的立方域，其中 $N^{[F]} = \left(2n^{[F]} + 1\right)$为边上的节点数， $\Delta^{[F]}$ 为间隔大小，并在全部六个边界表面上应用完美匹配层（PML）边界条件。空间被均匀离散为

$N^{[F]} \times N^{[F]} \times N^{[F]}$个网格点 $x_{ijk} =(i,\ j,\ k)\Delta^{[F]}$，其中 $i,\ j,\ k =-n^{[F]},\ ...,\ -1,$ 0，1，$...n^{[F]}$。为确保求解双曲型偏微分方程时的数值稳定性，CFL数要求

$$(\mathrm{CFL})^{[\mathrm{F}]} = \frac{\mathrm{c}}{\Delta^{[\mathrm{F}]}/(\mathrm{dt})^{[\mathrm{F}]}} < 1,$$

其中，$(dt)^{[F]}$是时间步长，$N_t^{[F]} = \sqrt{3}l_{(dt)^{[F]}}$是确保波有足够时间从计算域的一个角传播到相对角的最大时间步数。

表 I. 空间和时间离散

参数名称	符号	数值（单位）
边上的节点数	$N^{[F]}$	9, 17, 33, 65, 129
间隔大小	$\Delta^{[F]}$	1 mm
完美匹配层的节点数	$N^{[F-PML]}$	10
声速（水中）	c	1500 m/s
CFL数	$(CFL)^{[F]}$	0.25
时间步数	$N_t^{[F]}$	$\frac{\sqrt{3}l}{(dt)_{Forward}}$
梯度下降法的学习率	ν	0.1
正则化参数	λ	0.01

我们提出了一种具有代表性的传感器布置方法，并且可以轻松地将其调整为其他策略。在此，我们将传感器布置在位置 (1) $\left(-n^{[F]}, -n^{[F]}:\ {}^{n^{[F]}}_{n^{[s]}}:\ n^{[F]},\ -n^{[F]}\right)\Delta^{[F]}$，朝向 x_3方向，以提取 $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ 的信息；(2) $\left(-n^{[F]}, -n^{[F]}, -n^{[F]}:\ {}^{n^{[F]}}_{n^{[s]}}:\ n^{[F]}\right)\Delta^{[F]}$，朝向 x_1方向，以提取 $\frac{\partial p}{\partial x_2}$ 的信息；(3) $\left(-n^{[F]}:\ {}^{n^{[F]}}_{n^{[s]}}:\ n^{[F]},\ -n^{[F]},\ -n^{[F]}\right)\Delta^{[F]}$，朝向 x_2方向，以提取$\frac{\partial p}{\partial x_3}$的信息。这里，$n^{[s]}$是 $n^{[F]}$ 的一个因子。在源项发生相对旋转后，我们可以获得一系列信号，这些信号是场信息的拉东变换。对于计算域外的积分，由于黏性介质中的场呈指数衰减，因此将函数值视为零。沿三个方向对压力梯度场进行拉东变换，并经过$N_t^{[F]}$个时间步长后，得到维度为 $3 \times N_t^{[F]} \times N^{[F]} \times N^{[\alpha]}$，的矩阵，其中第三个索引表示传感器方向相对于表面中心的距离，第四个索引表示一系列旋转角度。为模拟测量中的测量噪声，在对压力梯度场进行拉东变换后加入高斯噪声。

考虑 $N^{[S]}=2n^{[S]}+1$ 个传感器，如粗粒化矩阵所示，其维度为 $3\times N_t^{[F]}\times N^{[S]}\times N^{[\alpha]}$. 逆拉东变换得到边界表面上的压力梯度场，其维度为 $3\times N_t^{[F]}\times N^{[S]}\times N^{[S]}$，定义在新网格$x_{ijk}=(i,\ j,\ k)\ {}^{n^{[F]}}_{n^{[S]}}\Delta^{[F]}$，其中 $i,\ j,\ k=-n^{[s]},\ ...,\ -1,\ 0,\ 1,\ ...n^{[s]}$. 拉东变换和逆拉东变换通过 Python-Scikit-Image 软件包 [43]实现。在上一节中，我们获得了预设边界平面处所有$\overline{N_t^{[F]}}$个时间步长的合成压力梯度场历史 $F\nabla p_0(x_{ijk})$。如第二列图2所示，通过伴随算子 F^* [36]，可以将方程10中的优化问题相对于三个方向分解为三个独立的问题进行求解。

我们首先将压力梯度场 $\nabla_m\tilde{p}_0$ 在 $t=t_0$处的初始猜测设为全零，然后通过正向模拟计算其演化历程 $\nabla_m\tilde{p}$。计算域离散为 $N^{[I]}\times N^{[I]}\times N^{[I]}$个网格点，其中 $N^{[I]}=2n^{[I]}+1$ 为沿边缘方向的节点数。为方便起见，本分析中取 ${}^{n^{[I]}}_{n^{[S]}}\in\mathbb{N}$，以确保观测值位于计算域网格点的一个子集中。将边界节点处压力梯度的猜测值与测量值进行比较，即可得到残差 ϵ。将伴随算子F^* 作用于残差 ϵ，即可得到初始压力梯度分布猜测值的校正项。

$\nabla_m\tilde{p}$ 根据学习率 0.1 进行迭代更新。该试探-修正算法基于伴随算子和 ISTA算法实现，其中正则化项选用L_1 范数，相应权重设为 0.1。整个优化过程共进行 50 次迭代。随后，基于泊松方程，通过 Galerkin方法对所得压力梯度场进行数值积分。

为了评估图像重建的性能，我们定义了相对均方误差（RMSE）、峰值信噪比（PSNR）和结构相似性指数（SSIM）。相对均方误差（RMSE）定义为 [44, 45],

$$e^{\mathrm{RMSE}}=\frac{\|f^{\mathrm{True}}-f^{\mathrm{Pred}}\|}{\|f^{\mathrm{True}}\|}$$

其中，f^{True}为场的归一化真实值，$f_{\text{预测值}}$是基于图像重建得到的归一化预测值，$f=\frac{dp}{dx_1}$、$\frac{dp}{dx_2}$、$\frac{dp}{dx_3}$、p。峰值信噪比（PSNR）和结构相似性指数（SSIM）定义为 [44, 45],

$$e^{\mathrm{PSNR}} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{(\mathrm{N}^{[\mathrm{I}]})^3}{(\|\mathrm{f}^{\mathrm{True}} - \mathrm{f}^{\mathrm{Pred}}\|)^2}\right)$$

$$e^{\mathrm{SSIM}} = \frac{(2\mu^{\mathrm{Pred}}\mu^{\mathrm{True}} + 0.0001)(2\sigma^{\mathrm{Pred-True}} + 0.0009)}{((\mu^{\mathrm{Pred}})^2 + (\mu^{\mathrm{True}})^2 + 0.0001) \cdot ((\sigma^{\mathrm{Pred}})^2 + (\sigma^{\mathrm{True}})^2 + 0.0009)}$$

其中， μ 和 σ 分别表示 f的均值和标准差。为简化分析，我们始终取 $N^{[F]} = N^{[s]} = N^{[I]}$，这表示合成实验数据生成中的节点数、边上的传感器数量以及逆问题表述中的节点数均相同。除参数研究部分外，噪声项均设为零。

IV. 结果

鉴于所提出的成像设置以及反问题所面临的数值挑战，我们首先通过数值模拟验证该方法。一种简单的设置是确定由高斯时间轮廓激光脉冲照射的光学薄流体球阵列 [46–48] 所产生的光声效应的空间和时间轮廓，据此可以确定并测量声场对 x、 y 和 z 的导数，具体方法如第二节所述。考虑到数值实现的灵活性，我们选择了更通用的声源，以扩大其适用范围。第四节 A 展示了数值收敛性；随后，第四节 B 和 C 通过对*Shepp3d* 模体、立方场和机械超材料进行仿真，验证了该方法。

A. 数值收敛

利用第二节所述的拟议装置，我们使用基于尺寸为 65^3 、未添加噪声的*Shepp3d* 矩阵的合成源数据，评估了第三节所介绍算法的性能。详细参数设置列于表I。需要注意的是，虽然使用配备单束探测光束和单个传感器的平移台具有成本效益，但会显著增加采集时间。为简单起见，将传感器数量设置为与间隔数量一致：对于*Shepp3D*模体和立方场，沿每条边放置65个传感器；对于机械超材料，则放置33个传感器。原则上，

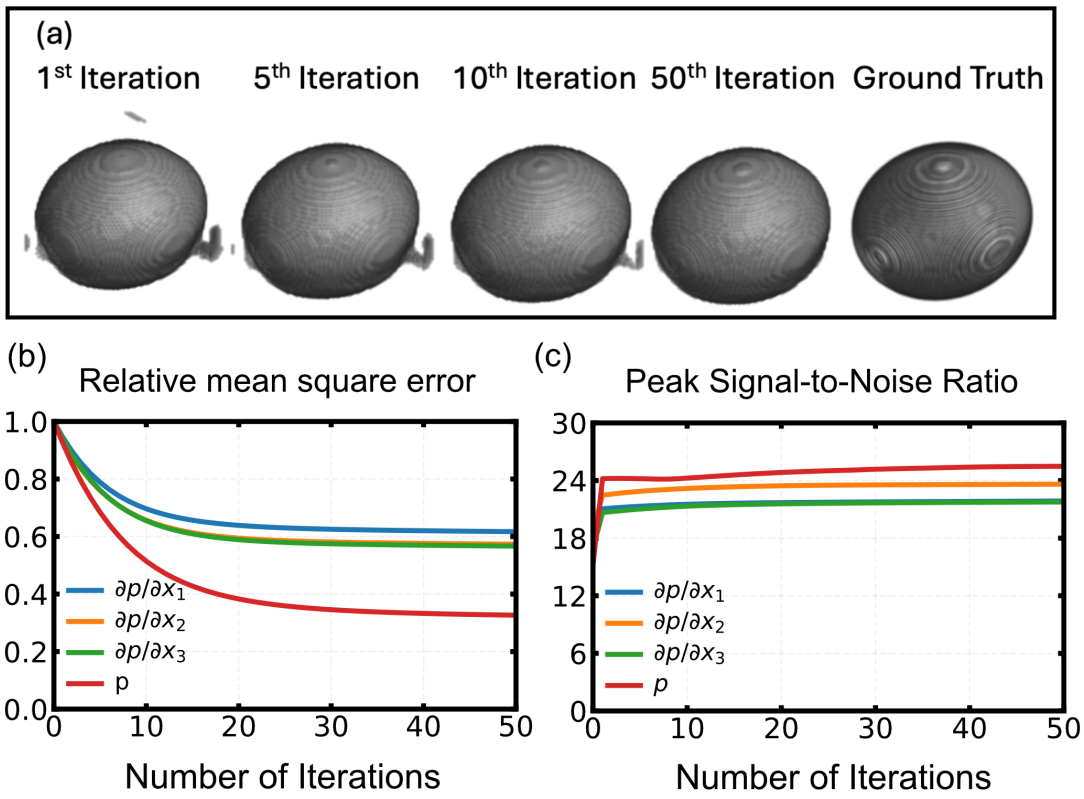

图 3. 估计的压力梯度场和压力场的收敛性。(a) 模体经过 1、5、10 和 50 次迭代后的重建三维形态，并与真实值并列展示。(b) 相对均方误差（RMER）随迭代次数的变化。(c) 峰值信噪比（PNSR）随迭代次数的变化。真实值为尺寸为 65^3的$Shepp3d$ 模体。噪声水平设为零。

也可以使用平移台，仅采用单束探测光束和单个传感器，但代价是需要更长的采集时间。

图 3 展示了重建的收敛性。图 3(a) 显示了经过第 1、5、10 和 50 次迭代后的三维重建形态；图 3(b) 和 (c) 则分别展示了 RMER 和 PSNR 随迭代次数的变化。图 3(a) 中的图像由重建的压力场经后处理得到。具体而言，对体数据进行归一化，并使用 Otsu 自适应阈值分割进行分割，同时抑制低于阈值的体素，以增强高强度特征。

如图3(b)定量所示，压力梯度场和压力场

在前20次迭代中均快速收敛，随后进入较慢的细化阶段。经过50次迭代后，压力梯度场的相对均方误差稳定在约60%，而压力场的相对均方误差则收敛至约32%。由于逆问题具有不适定性，引入 L_1 正则化可通过稳定解来促进收敛，即使传感器数据稀疏时也是如此。有趣的是，压力场的预测值比压力梯度场的预测值更准确，因为采用有限元方法进行积分时利用了更多测量信息，并减少了数值误差的影响。在源重建的实际应用中，主要目标是预测值与真实值之间的相对相似性。因此，PSNR 是一种更有效的指标。图3(c)绘出了 PSNR 随迭代次数的变化情况，结果表明，即使仅进行一次迭代，该算法也能成功重建出主体的大部分相对拓扑结构。相对均方误差收敛较慢，可能是由于 ISTA 公式中采用了固定学习率。本研究中所有学习率均设为0.1。对于使用伴随算子进行的图像重建，该学习率至少需要经过10次迭代才能收敛。较高的学习率能够加快收敛，但可能导致不稳定。

B. Shepp3Dphantom算法演示

在经过 50 次迭代并结合正则化后算法收敛，因此我们对该时刻的真实值、预测结果及其差异进行了可视化。图4展示了迭代次数为 50 时的真实值，以及利用二维和一维切片得到的预测压力梯度场和压力场。二维切片取自中心平面，坐标标注于相应图中；一维切片则沿中心线提取，该中心线在二维切片中以白色点划线标示。如图4(a, b, c)所示，沿垂直于导数分量的方向，压力梯度场的预测精度更高。对于分布在不同平面上的传感器，不同的朝向有助于缓解其他方向分辨率较低的问题。这提升了预测最终压力场的精度；通过有限元方法进行积分后，该压力场的分辨率高于单独使用任一压力梯度场所能达到的分辨率。增加测量平面上的传感器数量可以改善 RMSE 和 PSNR 的收敛性。

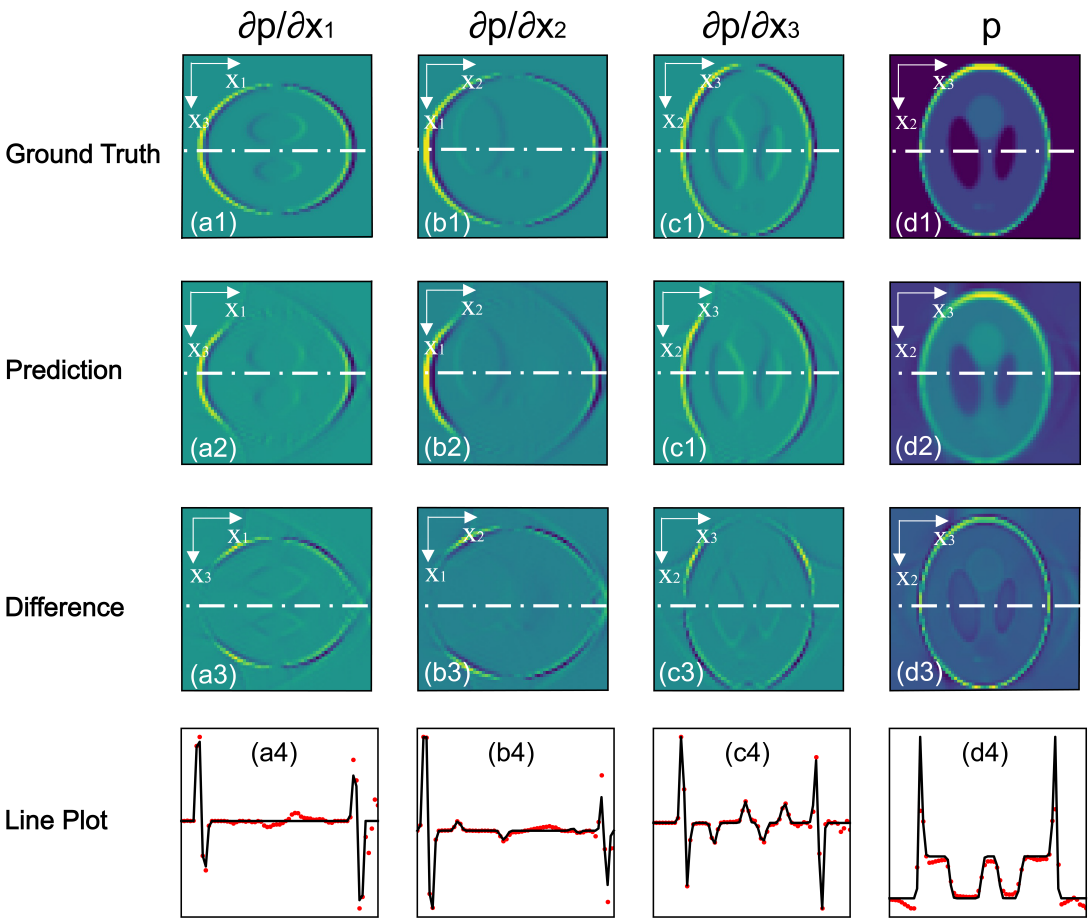

图 4. 压力梯度场和压力场的真实值与预测值对比。从左到右：(a1, a2, a3, a4)：$\frac{\partial p}{\partial x_1}$；(b1, b2, b3, b4)：$\frac{\partial p}{\partial x_2}$；(c1, c2, c3, c4)：$\frac{\partial p}{\partial x_3}$；(d1, d2, d3, d4)：$p$。从上到下：(a1, b1, c1, d1)：真实值；(a2, b2, c2, d2)：基于图像 0.1 的预测值；(a3, b3, c3, d3)：真实值与预测值之差；(a4, b4, c4, d4)：真实值（黑色实线）和预测值（红色虚线）的信号振幅随白色点划线方向距离的变化。真实值为尺寸为 65^3的*Shepp3d* 模体。预测值由图像 0.1 经 50 次迭代和有限元法得到。重建假设探测光束位置为 65 个，探测器间距为 1 mm，激光持续时间为 10 ns，记录时长为 $100\ \mu$s。(a4)、(b4)、(c4) 和 (d4) 中重建信号与真实值之间的皮尔逊相关系数分别为 96.43%、98.20%、99.45% 和 92.22%。

接下来，我们研究传感器测量误差（即拉东变换后的信号）对压力场重建的 SSIM 和 PSNR 的影响，如图 5 所示。拉东变换图像中的每个数据点都受到高斯噪声扰动；噪声随机采样，并按最大绝对振幅进行缩放。对于作为基准的传统基于压力的方法，传感器布置在区域的三个面上，每个面有 33×33 个单元。图中所示结果是在相同噪声水平下获得的（图5中的虚线）。为模拟传统压力换能器带宽有限的情况，每个换能器的中心频率为 1 MHz，带宽范围为 0.2–2.0 MHz。带限处理通过对压力场的快速傅里叶变换应用频率掩模来实现，随后使用 MATLAB 的 fft 和 ifft 函数进行逆傅里叶变换 [49]。为便于比较，所有仿真均采用缩小 40 倍的特征长度，以突出介观尺度特征。随后，在滤波后引入不同水平的加性噪声。如图5所示，所提出的模态在 SSIM 和 PSNR 两项指标上均优于压力梯度方法。即使最大误差水平高达 1，图像重建框架仍保持高度稳定。这种稳定性源于高斯分布误差的无偏性；伽辽金表述中固有的最小势能优化可减弱这类误差。因此，即使噪声水平较高，有限元重建也会优先提取与控制泊松方程一致的梯度数据成分，从而有效抑制随机波动。因此，基于压力梯度的方法在噪声测量环境中表现出更强的稳定性。

C. Al立方体场与机械超材料的算法演示

为了进一步评估该算法重建微小肿瘤状特征的能力，我们引入了一个含有尖锐不连续界面和微小凸起的立方体仿体（图6 (e2)）。众所周知，这类精细结构会给数值重建算法带来挑战。

图6展示了真实值：结构边缘处具有脉冲状轮廓，以及包含微小凸起的立方体场的重建结果。对预测分布与真实分布的比较（图6（a2–e2、a3–e3））表明，该方法

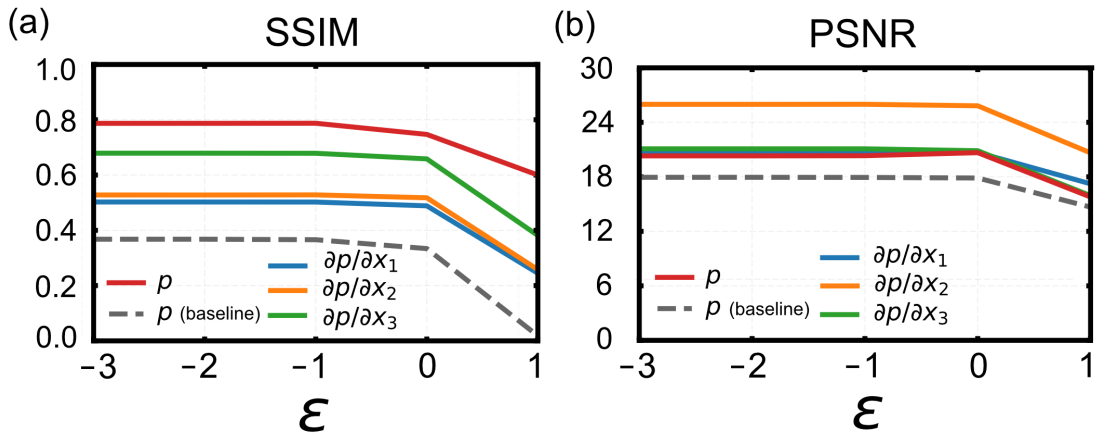

图5. 新模态在不同噪声水平下均优于传统方法。(a) 结构相似性指数（SSIM）和 (b) 峰值信噪比（PSNR）随相对误差幅度 ϵ 的变化；该误差幅度是在拉东变换步骤中引入的传感器测量误差。基线传统压力法的中心频率为 1 MHz，截止频率下限为 0.2 MHz，截止频率上限为 2 MHz。

能够准确恢复立方体和小凸起的尖锐边缘位置，从而实现对整体形态的忠实重建。小特征中的幅度偏差（图6（a4–d4））源于不同的数值步骤，而数值步骤会受到传感器数量和离散化网格尺寸的影响。总体而言，这些结果凸显了该方法恢复尖锐空间特征并检测可能被较大成分掩盖的小型结构的能力——这些能力对于小肿瘤检测以及表征微尺度力学超材料尤为重要，因为动态且无损评估仍然是一项挑战 [27, 47, 50, 51]。

微尺度力学超材料具有独特的功能，但通常采用破坏性技术进行表征。在此，我们模拟了机械超材料中激光诱导振动的光学检测 [52]，并应用重建算法恢复其内部结构。我们引入了一种源尺寸为 33^3 的层状旋节线超材料，如图 7 所示；选择这种材料是因为它具有卓越的机械性能和仿生架构 [53]。它能够精确调控机械各向异性，因此特别适用于研究复杂系统中几何形状与机械功能之间的关系，也适用于设计具有可编程、特定应用响应的结构化材料 [54]。

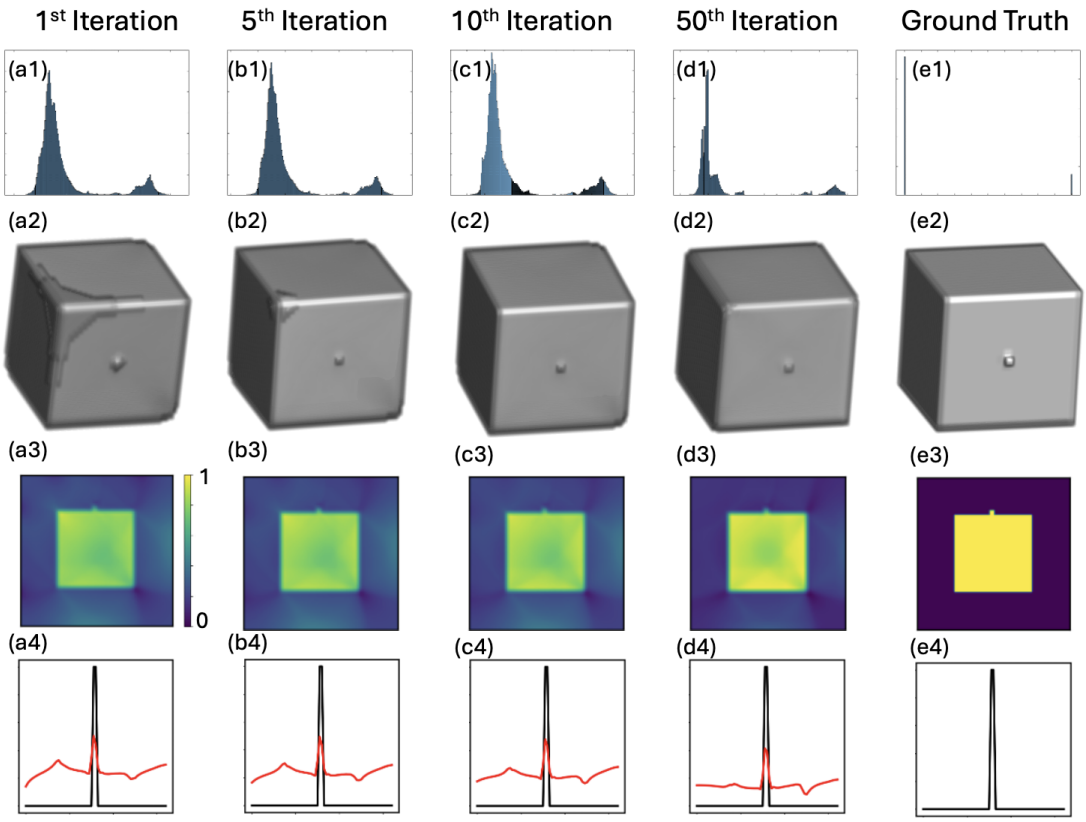

图 6. 带有小凸起的内部立方体的重建结果。每列对应不同的迭代次数：(a) 1 次，(b) 5 次，(c) 10 次，(d) 50 次，并与 (e) 真实值进行比较。每行依次显示：(1) 初始压力强度值的归一化直方图，表示后续大津阈值分割所用的统计分布；(2) 重建的三维形态；(3) 穿过小凸起的归一化压力强度等高线的代表性横截面视图（(a3) 中的色条采用归一化压力标度）；(4) 穿过小凸起的归一化压力强度的代表性剖切线轮廓（红色：预测值；黑色：真实值）。

正向模拟和反演的详细内容见第 II 节和第 III 节。图 8 展示了光声激发的旋节线超材料的重建。如图 8 (d4) 所示，该方法准确捕捉了层状力学特征结构，凸显了所提方法解析微尺度力学超材料特征信号的潜力 [40, 50]。

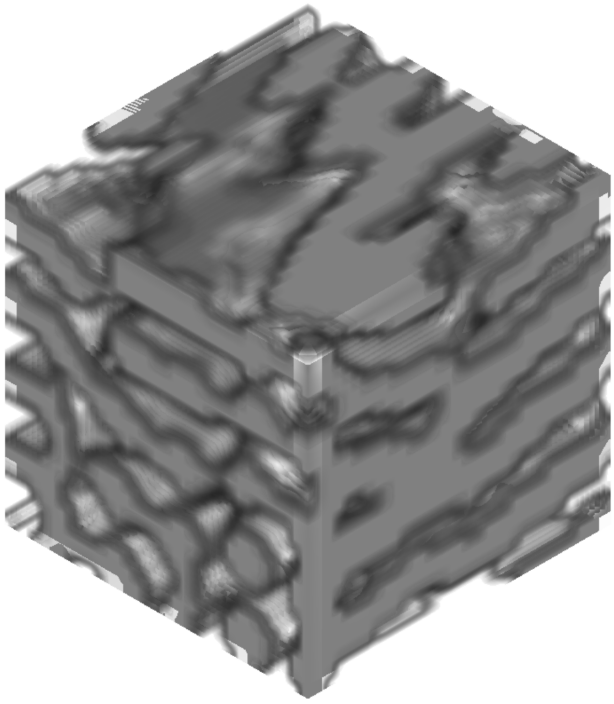

图 7。 尺寸为 32^3的层状自旋odal超材料的代表性结构。

五、结论

光声层析成像能够利用深层声穿透深度进行成像，但由于声换能器的限制，其分辨率或灵敏度存在问题。我们提出了一种新的光声成像模态，通过记录光束偏转来获取声场。我们提出了基于优化的重建方法，用于重建初始压力梯度场，并采用Galerkin方法从压力梯度场重建压力场。仿真结果表明，对于简单源、Shepp-Logan 仿体和机械超材料，该方法均具有出色的重建性能。

本文所述的主要进展包括：(1) 阐述了一种基于光偏转测量光声波的新型成像模态；(2) 对正向测量所依据的多物理场过程进行建模；(3) 采用稳健的基于优化的方法求解三维逆问题；(4) 在广泛的成像设置范围内开展详细的性能评估和基准测试。

然而，这种方法也存在局限性。与其他光声方法一样，该模式仍缺乏在纳米尺度上所需的空间分辨率，无法分辨分子尺度的

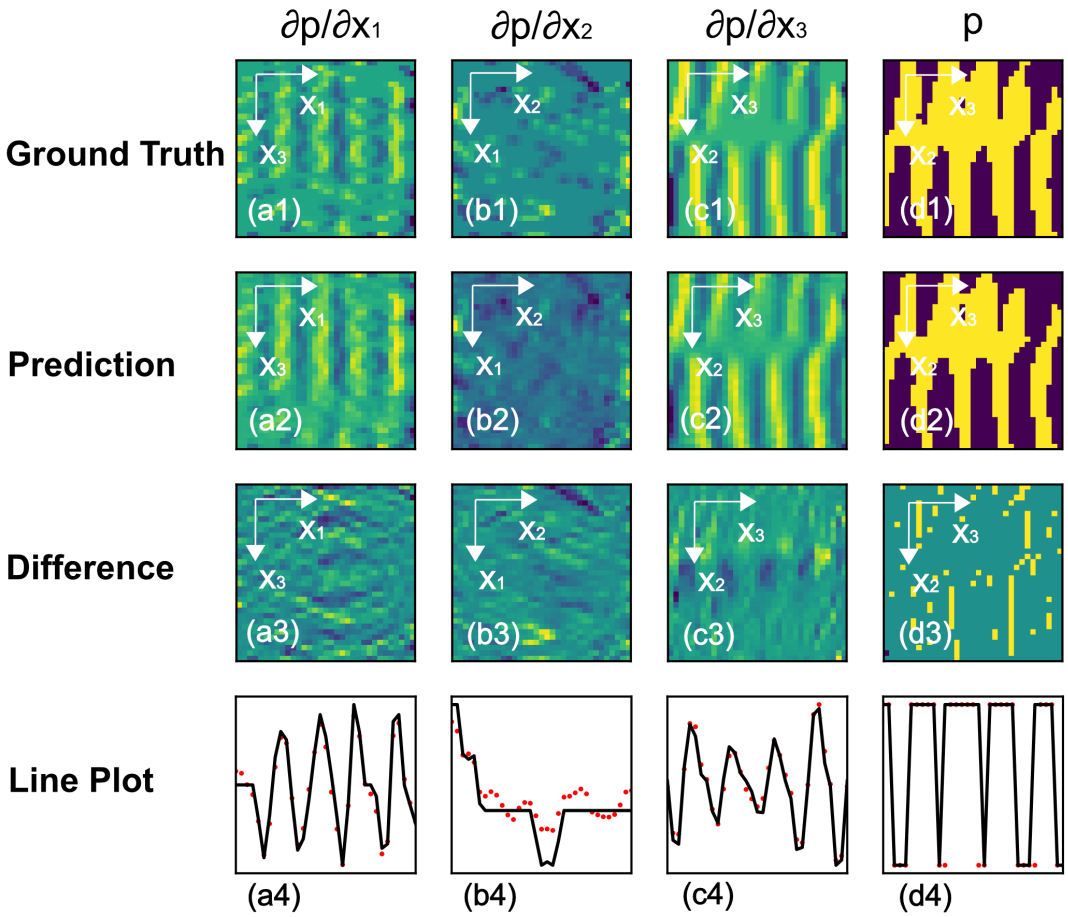

图 8. 对于旋节线超材料的数据源，比较压力梯度场和压力场的真实值与预测值。(a1, a2, a3, a4) $\frac{\partial p}{\partial x_1}$；(b1, b2, b3, b4) $\frac{\partial p}{\partial x_2}$；(c1, c2, c3, c4) $\frac{\partial p}{\partial x_3}$；(d1, d2, d3, d4) p；(a1, b1, c1, d1) 真实值；(a2, b2, c2, d2) 基于图像重建的预测值；(a3, b3, c3, d3) 真实值与预测值之差；(a4, b4, c4, d4) 沿白色点划线的距离变化的信号振幅，其中真实值以黑色实线表示，预测值以红色虚线表示。真实值为尺寸为 32^3的立方体源。预测值是通过 50 次迭代后的图像重建和有限元法得到的。重建假定有 33 个探测光束位置，探测器间距为 1 mm，激光持续时间为 10 ns，记录时长为 $100\ \mu$s。(a4)、(b4)、(c4) 和 (d4) 中重建信号与真实值之间的皮尔逊相关系数分别为 98.48%、93.26%、98.87% 和 97.22%。

相互作用[55]。该数值方法面临基于模型的优化所带来的传统挑战——计算成本高昂，尤其是在三维中的波动力学模拟 [24, 28]。此外，要准确地对压力场进行积分，必须掌握全部三个压力梯度分量，而这又要求在三个不平行平面上密集布置传感器，或延长数据采集时间。更精细的网格因无法满足内存和计算约束而未被采用。传感器的其他空间布置方式及其相关特性仍有待探索。

此外，声学介质的其他非均匀特性也可以在逆问题设置中进行建模和探索 [56]。近期的基于LED的光声成像系统聚焦于低成本、便携式的光学激发，为临床转化提供了有前景的路径。相比之下，所提出的模态通过实现全光学超声检测，解决了一个互补性的瓶颈，并且可以与基于LED的激发自然结合，从而实现更高程度的小型化和更完善的系统集成[57–60]。

请注意，当折射率梯度较弱且光线弯曲有限时，式（5）中的线性Radon变换成立。对于非均匀性更强的介质，则需要采用更精确的建模方法，例如基于射线传播方法的光路模拟（如波前追踪）。未来的研究还可探索包括深度神经网络在内的先进方法，以解决多物理场逆问题 [38, 61, 62]。

本文着重于开发适用于这一新提出成像方式的物理模型和反演算法。关于全光学光声层析成像优越性的论断，仍需通过实验研究进一步验证。与采用传统基于压力的检测方法所获得的结果相比，这种新提出的模态能否带来更高的信噪比，以及重建图像是否具有更高的分辨率和更好的对比度，仍有待证明。在所提出装置的实验实现中，可使用一套简化设备，其中配备简单的探测激光器和探测器，并沿边界长度方向进行扫描。探测激光器和探测器都将安装在平移台上；脉冲激光发射时，平移台沿探测器坐标方向移动，同时记录偏转信号随时间的变化。在后续实验中，可利用这一单通道仪器确定最佳光源、探测器和光学系统。

致谢

X.Y. 获 NSF-西蒙斯数学与统计生物学分析中心（DMS-174269）和哈佛定量生物学倡议的资助。本文的计算工作使用了布朗大学计算与可视化中心提供的计算资源和服务。我们感谢布朗大学的 Gerald J. Diebold 教授和南洋理工大学的李智博士，他们就本文进行了富有见地的讨论并协助校对。

[1] X. Wang, Y. Pang, G. Ku, X. Xie, G. Stoica, and L. V. Wang, 《用于脑部结构与功能活体成像的无创激光诱导光声断层成像》, 《自然·生物技术》**21**, 803 (2003).[2] A. P. Jathoul, J. Laufer, O. Ogunlade, B. Treeby, B. Cox, E. Zhang, P. Johnson, A. R. Pizzey, B. Philip, T. Marafioti, 等, 《利用基于酪氨酸酶的遗传报告基因对哺乳动物组织进行深层活体光声成像》, Nature Photonics**9**, 239 (2015).[3] R. A. Kruger, R. B. Lam, D. R. Reinecke, S. P. Del Rio, and R. P. Doyle, 《乳腺光声血管造影》, 《医学物理学》**37**, 6096 (2010).[4] S. Na, J. J. Russin, L. Lin, X. Yuan, P. Hu, K. B. Jann, L. Yan, K. Maslov, J. Shi, D. J. Wang, 等, 《人脑大规模并行功能光声计算机断层成像》, Nature Biomedical Engineering **6**, 584 (2022).[5] R. Bouchard, O. Sahin, and S. Emelianov, 《超声引导光声成像：现状与未来发展》, IEEE 超声、铁电与频率控制汇刊**61**, 450 (2014).[6] H. Jiang, 《光声层析成像》 (CRC出版社, 2018).[7] M. Xu and L. V. Wang, 《生物医学中的光声成像》, 《科学仪器评论》**77** (2006).[8] L. Wang, 《光声成像与光谱学》 (CRC出版社, 2017).[9]R. A. Kruger, P. Liu, Y. R. Fang, and C. R. Appledorn, 《光声超声（PAUS）——重建断层成像》, 《医学物理学》**22**, 1605 (1995).[10] R. A. Kruger, 《乳腺热声计算机断层成像》, 载于《光声成像与光谱学》 (CRC出版社, 2017) 第331–338页。[11] A. Mandelis, 《光声与光热科学技术进展》(1991).[12] E. Z. Zhang, B. Povazay, J. Laufer, A. Alex, B. Hofer, B. Pedley, C. Glittenberg, B. Treeby, B. Cox, P. Beard, 等, 《采用全光学检测方案进行三维皮肤形态成像的多模态光声与光学相干断层扫描仪》, 《生物医学光学快报》**2**, 2202 (2011).[13] N. Huynh, E. Zhang, O. Francies, F. Kuklis, T. Allen, J. Zhu, O. Abeyakoon, F. Lucka, M. Betcke, J. Jaros, 等, 《用于临床血管成像的快速全光学三维光声扫描仪

》，Nature Biomedical Engineering **9**, 638 (2025).[14] P. Burgholzer, C. Hofer, G. Paltauf, M. Haltmeier, and O. Scherzer, 《采用积分式面探测器和线探测器的热声断层成像》，IEEE 超声、铁电与频率控制汇刊**52**, 1577 (2005).[15] J. L. Johnson, K. van Wijk, J. N. Caron, and M. Timmerman, 《气体耦合激光声学探测：用于光声成像和超声成像的非接触式线探测器》，Journal of Optics **18**, 024005 (2016).[16] S. M. Maswadi, B. L. Ibey, C. C. Roth, D. A. Tsyboulski, H. T. Beier, R. D. Glickman, and A. A. Oraevsky, 《基于探测光束偏转技术的全光学光声显微术》，《光声学》**4**, 91 (2016).[17] X. Yan and G. J. Diebold, 《对具有对称性的光声波在一、二、三维空间中的光束偏转信号进行阿贝尔反演》，Journal of Applied Physics**130**(2021).[18] X. Yan, 《从液滴到成像的光声效应》，博士论文，布朗大学 (2022).[19] L. Xiong, W. Bai, F. Chen, X. Zhao, F. Yu, and G. J. Diebold, 《借助移动光栅实现千万亿分之一水平的气体光声痕量检测》，美国国家科学院院刊**114**, 7246 (2017).[20] X. Yan, S. Song, and G. J. Diebold, 《一维谐振腔中振荡源的光声效应》，Europhysics Letters **146**, 30001 (2024).[21] J. A. Guggenheim, J. Li, T. J. Allen, R. J. Colchester, S. Noimark, O. Ogunlade, I. P. Parkin, I. Papakonstantinou, A. E. Desjardins, E. Z. Zhang, 等, 《用于超声传感的超灵敏平凹光学微谐振腔》，Nature Photonics **11**, 714 (2017).[22] C. Li and L. V. Wang, 《生物医学中的光声层析成像与传感》，Physics in Medicine & Biology **54**, R59 (2009).[23] R. A. Barnes Jr, S. Maswadi, R. Glickman, and M. Shadaram, 《将探测光束偏转技术用作光声发射源的声发射方向性传感器》，Applied Optics**53**, 511 (2014).[24] M. Benning and M. Burger, 《逆问题的现代正则化方法》，Acta numerica **27**, 1 (2018).

[25] P. J. Westervelt 和 R. S. Larson，激光激发的宽边阵列，《美国声学学会杂志》**54**，121（1973年）。[26] G. J. Diebold、T. Sun 和 M. Khan，一、二维及三维中的光声单极辐射，《物理评论快报》**67**，3384（1991年）。[27] I. G. Calasso、W. Craig 和 G. J. Diebold，光声点源，《物理评论快报》**86**，3550（2001年）。[28] B. T. Cox、S. Kara、S. R. Arridge 和 P. C. Beard，声学非均匀介质的 k 空间传播模型：在生物医学光声学中的应用，《美国声学学会杂志》**121**，3453（2007年）。[29] B. E. Treeby 和 B. T. Cox，利用分数阶拉普拉斯算子对声传播中的幂律吸收和频散进行建模，《美国声学学会杂志》**127**，2741（2010年）。[30] B. E. Treeby 和 B. T. Cox，k-Wave：用于光声波场模拟与重建的 MATLAB 工具箱，《生物医学光学杂志》**15**，021314（2010年）。[31] J. Radon，关于从函数沿某些流形的积分值确定函数，《IEEE医学影像汇刊》**5**，170（2007年）。[32] Y. Xu、D. Feng 和 L. V. Wang，热声层析成像的精确频域重建。I. 平面几何，《IEEE医学影像汇刊》**21**，823（2002年）。[33] M. Xu 和 L. V. Wang，光声计算机断层成像的通用反投影算法，《物理评论E——统计、非线性与软物质物理》**71**，016706（2005年）。[34] P. Burgholzer、J. Bauer-Marschallinger、H. Gr¨un、M. Haltmeier 和 G. Paltauf，采用积分线探测器的光声层析成像时间反投影算法，《逆问题》**23**，S65（2007年）。[35] R. Clifton、S. Song 和 T. Jiao，PSPI实验的逆问题，载于*AIP*会议论文集，第2272卷（AIP出版社，2020年）。[36] S. R. Arridge、M. M. Betcke、B. T. Cox、F. Lucka 和 B. E. Treeby，光声层析成像中的伴随算子，《逆问题》**32**，115012（2016年）。[37] B. E. Treeby、E. Z. Zhang 和 B. T. Cox，利用时间反转在吸收性声学介质中进行光声层析成像，《逆问题》**26**，115003（2010年）。

[38] S. Antholzer、M. Haltmeier 和 J. Schwab，基于稀疏数据的光声层析成像深度学习，《科学与工程中的逆问题》**27**，987（2019年）。[39] A. Hauptmann 和 B. Cox，光声层析成像中的深度学习：当前方法与未来方向，《生物医学光学杂志》**25**，112903（2020年）。[40] H. Jin、E. Zhang 和 H. D. Espinosa，实验固体力学中机器学习的最新进展与应用：综述，《应用力学评论》**75**，061001（2023年）。[41] A. Beck 和 M. Teboulle，针对线性逆问题的快速迭代收缩阈值算法，《SIAM成像科学杂志》**2**，183（2009年）。[42] S. Arridge、P. Beard、M. Betcke、B. Cox、N. Huynh、F. Lucka、O. Ogunlade 和 E. Zhang，利用压缩感知加速高分辨率光声断层成像，Physics in Medicine & Biology**61**，8908（2016年）。[43] S. Van der Walt、J. L. Sch¨onberger、J. Nunez-Iglesias、F. Boulogne、J. D. Warner、N. Yager、E. Gouillart 和 T. Yu，scikit-image：用于 Python 的图像处理，PeerJ**2**，e453（2014年）。[44] S. Geman、E. Bienenstock 和 R. Doursat，神经网络与偏差-方差困境，《神经计算》**4**，1（1992年）。[45] Z. Wang、A. C. Bovik、H. R. Sheikh 和 E. P. Simoncelli，图像质量评估：从误差可见性到结构相似性，《IEEE图像处理汇刊》**13**，600（2004年）。[46] G. Diebold 和 P. Westervelt，流体中球形液滴产生的光声效应，《美国声学学会杂志》**84**，2245（1988年）。[47] G. Diebold、M. Khan 和 S. Park，颗粒物的光声“特征”：光学产生声学单极辐射，《科学》**250**，101（1990年）。[48] X. Yan 和 G. J. Diebold，光声激发液滴中高振幅压缩波与稀疏波的产生，《光声学》**23**，100289（2021年）。[49] J. W. S. Rayleigh 和 R. B. Lindsay，《声学理论》第一卷，第2版（Dover出版社，1945年）。[50] Y. Kai、S. Dhulipala、R. Sun、J. Lem、W. DeLima、T. Pezeril 和 C. M. Portela，通过激光诱导振动特征对超材料进行动态诊断，《自然》**623**，514（2023年）。[51] H. Jin、B. Zhang、Q. Cao、E. Zhang、A. Bora、S. Krishnaswamy、G. E. Karniadakis 和 H. D. Espinosa，利用神经算子对随机力学超材料进行表征与逆向设计，《先进材料》，2420063（2025年）。

[52] W. Bai、X. Yan 和 G. J. Diebold, 《振幅调制激光束中光学悬浮球体上的有质动力》, 非线性动力学**111**, 4017（2023）。[53] C. M. Portela、A. Vidyasagar、S. Kr¨odel、T. Weissenbach、D. W. Yee、J. R. Greer 和 D. M. Kochmann, 《自组装纳米迷宫材料的极端机械韧性》, 美国国家科学院院刊**117**, 5686（2020）。[54] X. Xia、C. M. Spadaccini 和 J. R. Greer, 《在时空中构筑的响应性材料》, 《自然综述：材料》**7**, 683（2022）。[55] X. Yan、P. Y. Yu、A. Srinivasan、S. Abdul Rehman、S. K. Sreenivas、J. B. Conway 和 M. B. Prigozhin, 《识别单分子定位显微术中的分子间相互作用》, 美国国家科学院院刊**122**, e2409426122（2025）。[56] B. E. Treeby、J. Jaros、A. P. Rendell 和 B. T. Cox, 《利用k空间伪谱法模拟幂律吸收下非均匀介质中的非线性超声传播》, 《美国声学学会杂志》**131**, 4324（2012）。[57] Y. Zhu、G. Xu、J. Yuan、J. Jo、G. Gandikota、H. Demirci、T. Agano、N. Sato、Y. Shigeta 和 X. Wang, 《基于发光二极管的光声成像及其潜在临床应用》, 《科学报告》**8**, 1（2018）。[58] K. J. Francis、Y. E. Boink、M. Dantuma、M. K. A. Singh、S. Manohar 和 W. Steenbergen, 《利用超声与基于LED的光声系统进行断层成像》, 《生物医学光学快报》**11**, 2152（2020）。[59] Y. Zhu、T. Feng、Q. Cheng、X. Wang、S. Du、N. Sato、J. Yuan 和 M. Kuniyil Ajith Singh, 《迈向基于LED的光声成像的临床转化：综述》, 传感器**20**, 2484（2020）。[60] A. Hariri、J. Lemaster、J. Wang、A. S. Jeevarathinam、D. L. Chao 和 J. V. Jokerst, 《经济便携式基于LED的光声成像系统的表征，以促进分子成像》, 《光声学》**9**, 10（2018）。[61] M. Raissi、P. Perdikaris 和 G. E. Karniadakis, 《物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题与逆问题的深度学习框架》, 《计算物理学杂志》**378**, 686（2019）。[62] Y. Bar-Sinai、S. Hoyer、J. Hickey 和 M. P. Brenner, 《学习偏微分方程的数据驱动离散化》, 美国国家科学院院刊**116**, 15344（2019）。