arXiv:2601.05454v1 [math.CA] 9 Jan 2026

双参数奇异积分的紧性

CODY B. STOCKDALE 和 CODY WATERS

Abstract. 我们建立了一个用于判定双参数 Calder´on- Zygmund 奇异积分算子紧性的新 $T1$ 定理。具体而言，我们证明，若双参数 Calderón–Zygmund 算子 T满足乘积弱紧性性质、混合弱紧性/CMO 性质以及 $T1, T^t1, T_t1, T_t^t1 \in$ CMO($\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$)，则 T在 L^2($\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$)上是紧算子。我们还为这些算子得到了端点紧性结果，并利用这些结果推导出大部分假设的必要性。特别是，我们的条件刻画了双参数 Calderón–Zygmund 算子及其部分转置同时具有 $L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$-紧性的情形。我们的假设改进了此前已知的充分条件；我们的证明比早先的论证更简短、更简单，并利用了一个新的抽象紧性判据，用于处理希尔伯特空间张量积上的部分局部化算子。

1. Introduction

奇异积分算子（SIO）的 Calder´ón-Zygmund 理论是调和分析中的核心课题。该领域的一个重要基石是 David 和 Journ´é 的著名定理$T1$ ： 该定理刻画了 $L^2(\mathbb{R}^n)$-有界 SIO， T 其依据是弱有界性性质以及属于 $T1$， $T^t1 \in$BMO($\mathbb{R}^n$)——此类 SIO 称为 Calder´ón-Zygmund 算子（CZO）。经典理论还进一步给出了 CZO 在加权空间 $L^p(w)$ 上的有界性，其中 $p \in (1, \infty)$, 权重为 $w \in A_p$；此外，还得到了从 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的端点估计，并通过对偶性得到从 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 BMO($\mathbb{R}^n$) 的端点估计。在本文中，我们研究这些结果在双参数情形下的紧算子类比。

双参数奇异积分的研究最初由 Fefferman 和 Stein 于 [12] 在卷积情形下开创，随后 Journ´é 将其扩展到一般的非卷积算子，并于 [18, 给出了如下双参数 $T1$-型定理：定理 4]。

定理 A。 若双参数奇异积分算子 T满足弱有界性性质，且 $T1T^t1T_t1T_t^t1 \in BMO(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, 则 T在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$上有界。

尽管假设 $T_t, T_t^t \in$BMO($\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$) 对一般的 T在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ 上有界并非必要，但定理 A 中的条件刻画了 T 及其部分转置 T_t同时有界；参见 [18, 第 76] 页的推论。这一观点在 [18, 第 75–76], 页得到进一步阐释，并促使人们将双参数 Calderón–Zygmund 算子定义为一个 $L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$-有界的双参数奇异积分算子，且其部分转置也有界。

尽管 [9] 的 $T1$ 定理讨论的是 Calder´on-Zygmund 奇异积分的有界性，Villarroya 最先在 [29]中研究了它们的 $L^2(\mathbb{R}^n)$-紧性。Mitkovski 与第一作者在 [21]中得到了紧 $T1$ 定理的以下更新版本。

定理 B. 设 T 是一个 *Calderón-Zygmund*算子。当且仅当 T 满足弱紧性性质，且 $T1$、$T^t1 \in$ 属于 *CMO*($\mathbb{R}^n$) 时， T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是紧算子。

2020 年数学主题分类。42B20、47B07。关键词和短语。奇异积分算子、双参数算子、紧算子、 $T1$ 定理。C. Waters 获得美国国家科学基金会 DGE 2139839 号资助。

目前，紧奇异积分算子的完整理论已经建立。特别是，在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的紧性可推广到所有 $p \in (1, \infty)$ [29], 对应的端点 [23,26],，也可推广到相对于 A_p 权 [4,13,16,28] 的加权勒贝格空间。另请参阅 [2,3,6]，了解伪微分算子背景下紧奇异积分算子的应用和示例。

Cao、Yabuta 和 Yang 最近在 [5]中将这两条研究路线联系起来，提出了以下关于双参数 Calderón–Zygmund 算子紧性的 $T1$型定理。

定理 C。 如果 T 是一个双参数 *Calderón–Zygmund* 算子，且满足

（1） T 满足乘积弱紧性性质，（2） T 具有紧全核表示，（3） T 具有紧部分核表示，（4） T 满足对角 *CMO* 性质，并且（5） $T1$、 T^t1、 T_t1、 $T_t^t1 \in$ *CMO*（$\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$），

则 T 在 L^2（$\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$）上是紧的。

本文旨在进一步发展紧双参数 Calderón–Zygmund 算子的理论。我们的第一个主要结果是以下紧双参数 $T1$ 定理的新版本。

定理 1.1。 若 T 是一个双参数 *Calderón–Zygmund* 算子，且

(1) T 满足乘积弱紧性性质，(2) T 满足混合弱紧性/*CMO* 性质，且(3) $T1, T^t1, T_t1, T_t^t1 \in$ 属于 *CMO*$(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$,

那么 T 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$上是紧的。此外，乘积弱紧性性质、混合弱紧性/*CMO* 性质，以及 $T1, T^t1 \in$ 属于 *CMO*$(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$，都是 T具有 $L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$-紧性的必要条件。

我们强调，定理 1.1 去除了定理 C 中对紧全核表示的假设，并以混合弱紧性/CMO 性质取代了紧部分核表示和对角 CMO 条件，从而细化了前述假设。此外，我们证明了定理 1.1 中各条件的必要性，而且证明这些条件充分性的论证比 [5]中的定理 C 的证明更短、更简洁。

与定理 A 的情形类似，定理 1.1 的条件刻画了 T 及其偏转置的同时紧性。

推论 1.2。 设 T 是一个双参数 *Calderón–Zygmund* 算子。那么， T 和 T_t 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ 上是紧的，当且仅当

(1) T 满足乘积弱紧性性质，(2) T 满足混合弱紧性/*CMO* 性质，并且(3) $T1$、 T^t1、 T_t1、 $T_t^t1 \in$ 属于 *CMO*$(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$。

我们还建立了以下关于 [26] 端点性质的双参数类比。

定理 1.3。 若 T 是一个 $L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$-紧的双参数 *Calderón–Zygmund* 算子，则 T 是从 $H^1(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ 到 $L^1(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ 以及从 $L^\infty(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ 到 *CMO*$(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ 的紧算子。

定理 1.3 的证明可由在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ 上进行紧性插值，并利用从 $H^p(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ 到 $L^p(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ 的有界性（对充分大的 $p < 1$），再结合对偶性得出。

正如 [5, 第 6262], 页所观察到的，根据 [4,16]中的论证，紧双参数奇异积分算子的紧性自动推广到任意 $L^p(w)$、任意 $p \in (1, \infty)$以及任意 $w \in A_p(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$的情形。类似地，我们根据定理 1.1 得出以下结论。

推论 1.4。若 $p \in (1,\ \infty)$、$w \in A_p(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$，且 T 是一个双参数 *Calderón–Zygmund* 算子，使得

(1) T 满足乘积弱紧性性质，(2) T 满足混合弱紧性/*CMO* 性质，并且(3) $T1$、T^t1、T_t1、$T_t^t1 \in \boldsymbol{CMO}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$，

则 T 在 $L^p(w)$上是紧的。

定理 1.1 的必要性方向中，对于乘积弱紧性性质可由柯西-施瓦茨不等式推出，对于条件 $T1$, $T^t1 \in$ CMO($\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$) 可由定理 1.3 推出，而对于混合弱紧性/CMO 性质则可采用与定理 1.3 的证明类似的论证。为证明充分性部分，我们首先从 T 中减去四个顶层副调和乘积，从而得到一个顶层消去型双参数 Calderón–Zygmund 算子，即满足以下条件的双参数 Calderón–Zygmund 算子 T'

$$\langle T'(1 \otimes 1), \cdot \otimes \cdot \rangle = \langle T'(1 \otimes \cdot), \cdot \otimes 1 \rangle = \langle T'(\cdot \otimes 1), 1 \otimes \cdot \rangle = \langle T'(\cdot \otimes \cdot), 1 \otimes 1 \rangle = 0.$$

顶层副调和乘积的紧性可通过归结为单参数拟乘积的紧性来证明，所用条件为 $T1$、T^t1、T_t1、$T_t^t1 \in$ CMO($\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$)，以及双参数拟乘子的有界性已知估计。接下来，我们进一步减去四个部分副积算子，从而得到一个完全消去双参数 Calderón–Zygmund 算子，即满足以下条件的顶层消去型双参数 Calderón–Zygmund 算子 T''

$$\langle T''(1 \otimes \cdot), \cdot \otimes \cdot \rangle = \langle T''(\cdot \otimes 1), \cdot \otimes \cdot \rangle = \langle T''(\cdot \otimes \cdot), 1 \otimes \cdot \rangle = \langle T''(\cdot \otimes \cdot), \cdot \otimes 1 \rangle = 0.$$

我们注意到，将双参数 Calderón–Zygmund 算子分解为完全消去双参数 Calderón–Zygmund 算子、顶层副调和乘积和部分副积算子之和，这种分解自然让人联想到 [10, 第 1833] 页上的定理所述的双参数表示定理。

部分副积算子以及剩余的完全消去双参数 Calderón–Zygmund 算子的紧性，由以下关于部分局部化算子的抽象结果推出。

定理 1.5. 设 H_1 和 H_2 为希尔伯特空间，且 T 是作用在 $H_1 \widehat{\otimes} H_2$ 上的部分局部化线性算子。若 T 弱紧，则 T 紧。

上文中，$H_1 \widehat{\otimes} H_2$ 表示 H_1 与 H_2 的代数张量积的完备化；部分局部化这一概念量化了算子相对于 H_2 的某个适当框架、并将 H_1 视为标量时，其矩阵系数的非对角衰减；弱紧性条件则断言这些作为 H_1 上算子的矩阵系数是紧的，并且沿对角线方向趋于零。我们通过证明剩余的完全消去双参数 Calderón–Zygmund 算子和部分副积算子相对于适当的小波框架是部分局部化的，并分别利用乘积弱紧性性质和混合弱紧性/CMO 性质，根据定理 1.5 推出它们的紧性，从而完成定理 1.1 的证明。

本文组织如下。在第 2 节中，我们定义双参数 Calderón–Zygmund 算子、乘积弱紧性性质、乘积 CMO 以及混合弱紧性/CMO 性质，并比较定理 1.1 与定理 C。在第 3 节中，我们证明端点结果，即定理 1.3。在第 4 节中，我们定义部分局部化算子并证明定理 1.5。在第 5 节中，我们讨论顶层副乘积和部分副积算子的紧性。在第 6 节中，我们刻画完全消去双参数 Calderón–Zygmund 算子的紧性。在第 7 节中，我们证明主要结果，即定理 1.1 和推论 1.2。

2. Preliminaries

我们使用记号 $A \lesssim B$ if $A \leq CB$ 表示存在某个常数 $C > 0$，并记 $A \approx B$ if$A \lesssim B$ and $B \lesssim A$。对于 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$，我们令 $B(x, r)$ 表示以 x 为中心、半径为 r的欧几里得球。我们用 $|A|$ 表示集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$的勒贝格测度。对于定义在 $\mathbb{R}^{n_i}$ 上的函数 f_i，我们记$f_1 \otimes f_2(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)$，并且 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$。

2.1. 双参数奇异积分算子。 </style}在 [18], Journ´e 中，首次使用向量值单参数核定义了双参数奇异积分算子。后来，Pott 和 Villarroya，以及 Martikainen，在 [19, 27] – 中将双参数奇异积分的框架重新表述为关于双参数核的混合型标量条件；这一观点也被用于 [5, 24, 25]，尤其是在定理 C 中。然而，Grau de la Herr´an 在 [14] 中证明了这些观点产生的是同一类算子；另见 [25, 第 329] 页。为便于我们的处理，我们采用 Journ´e 最初的向量值观点。

对于巴拿赫空间 B 和 $\delta \in (0, 1]$, 我们称 $K\colon \mathbb{R}^{2n} \setminus \{(x, x)\colon x \in \mathbb{R}^n\} \to B$ 是一个 B 值 δ-CZ 核，如果存在 $C > 0$ 使得

$$\|K(x, y)\|_B \leq \frac{C}{|x - y|^n} \tag{2.1}$$

每当 $x \neq y$，并且

$$\|K(x, y) - K(x, y')\|_B,\ \|K(y, x) - K(y', x)\|_B \leq C\frac{|y - y'|^\delta}{|x - y|^{n+\delta}} \tag{2.2}$$

每当 $|y - y'| \leq \frac{1}{2}|x - y|$。我们用$\|K\|_{B,\delta}$ 表示使 (2.1) 和 (2.2) 同时成立的最小 $C > 0$。若 $B = \mathbb{C}$，我们就称 K 为 δ-CZ 核，并将 $\|K\|_\delta$ 记作$\|K\|_{\mathbb{C},\delta}$。

令 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 表示紧支撑光滑函数空间，并令 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ 表示分布空间。δ-SIO 是一个连续算子 $T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$，满足

$$\langle Tf, g\rangle = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} K(x, y)f(y)g(x)\,dxdy$$

对于某个 δ-CZ 核 K，以及所有支集不相交的 $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$。若一个 δ-SIO 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有有界延拓，我们就称其为 δ-CZO。回顾一下， δ-CZO 的集合 $\delta\text{CZO}(\mathbb{R}^n)$ 是一个巴拿赫空间，其范数对 $T \in \delta\text{CZO}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\|T\|_{\delta\text{CZO}(\mathbb{R}^n)} := \|T\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)} + \|K\|_\delta.$$

连续算子 $T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2}) \to (\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2}))'$若存在 $\delta\text{CZO}(\mathbb{R}^{n_j})$ 值的 δ-CZ 核 $K_i\colon \mathbb{R}^{2n_i} \setminus \{(x, x)\colon x \in \mathbb{R}^{n_i}\} \to \delta\text{CZO}(\mathbb{R}^{n_j})$，则称其为双参数 δ-SIO

$$\langle T(f_1 \otimes f_2), g_1 \otimes g_2\rangle = \iint_{\mathbb{R}^{2n_i}} f_i(y)g_i(x)\langle K_i(x, y)f_j, g_j\rangle\,dxdy$$

当 $f_i, g_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_i})$ 对每个 $i, j \in \{1, 2\}$ 都具有不相交的支集，且 $i \neq j$ 时。T 的转置定义为

$$\begin{aligned}\langle T(f_1 \otimes f_2), g_1 \otimes g_2\rangle &= \langle T^t(g_1 \otimes g_2), f_1 \otimes f_2\rangle \\ &= \langle T_t(g_1 \otimes f_2), f_1 \otimes g_2\rangle \\ &= \langle T_t^t(f_1 \otimes g_2), g_1 \otimes f_2\rangle.\end{aligned}$$

我们称双参数 δ-SIO T 为双参数 δ-Calderón-Zygmund算子（CZO），如果

$$\|T\|_{\delta\mathrm{CZO}(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} := \|T\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\to L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} + \|T_t\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\to L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} + \sum_{\substack{i,j\in\{1,2\}\\ i\neq j}} \|K_i\|_{\delta\mathrm{CZO}(\mathbb{R}^{n_j}),\delta} < \infty.$$

2.2. 乘积弱紧性、CMO 与混合弱紧性/CMO。为了定义乘积弱紧性性质，我们沿用 [21] 在单参数情形下的方法，首先引入一个由 $ax+b$ 群标记的连续小波框架。回顾一下，$ax+b$ 群是群 $\mathbb{R}_+^{n+1}:=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$，其运算定义为

$$(x,t)*(y,s) := (ty+x, ts)$$

对于 $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ 和 $t,\ s>0$。$\mathbb{R}_+^{n+1}$的单位元为 $(0,\ 1)$，逆元为 $(x,\ t)^{-1}=\left(-\frac{x}{t},\ \frac{1}{t}\right)$。左哈尔测度 λ 定义为

$$d\lambda(z)=\frac{dxdt}{t^{n+1}}$$

对于 $z=(x,\ t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}$，左不变度量 d 是由下式给出的黎曼度量

$$ds^2=\frac{dx^2+dt^2}{t^2}.$$

令 $D(z,r):=\{w\in\mathbb{R}_+^{n+1}:\ d(z,w)<r\}$ 表示 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中的双曲球。我们将 f 的$L^2(\mathbb{R}^n)$-范数保持平移和伸缩记为

$$f_z := t^{-n/2} f\left(\frac{\cdot - x}{t}\right)$$

对于 $z=(x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}$.

固定一个满足以下条件的实值母小波 $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\operatorname{supp}\psi\subseteq B(0,1),\quad \int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,dx=0,\quad \text{and}\quad \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi t)|^2}{t}\,dt=1$$

对 $\xi\neq 0$。在这些条件下，$\{\psi_z\}_{z\in\mathbb{R}_+^{n+1}}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的连续帕塞瓦尔框架，即

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2=\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|\langle f,\psi_z\rangle|^2\,d\lambda(z)$$

对所有 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$。同样的思路可得乘积情形下的以下结果。下文中，我们将 $\psi_z:=\psi_{z_1}\otimes\psi_{z_2}$ 记为 $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}_+^{n_1+1}\times\mathbb{R}_+^{n_2+1}$。

引理 2.1。该集合 $\{\psi_z\}_{z\in\mathbb{R}_+^{n_1+1}\times\mathbb{R}_+^{n_2+1}}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的连续帕塞瓦尔框架.

证明。设 $f\in L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$。记 $\widetilde{\psi}_t(x)$ 为 $=t_1^{-n_1/2}\psi\left(-\frac{x_1}{t_1}\right)t_2^{-n_2/2}\psi\left(-\frac{x_2}{t_2}\right)$，应用 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$富比尼定理、帕塞瓦尔恒等式、事实 $\widetilde{\psi_t}(\xi)=(\psi)_{t^{-1}}(\xi)$，以及关于

ψ 的假设，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^{n_1+1}}\int_{\mathbb{R}_+^{n_2+1}}|\langle f,\psi_z\rangle|^2\,d\lambda(z) &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n_2}}|f*\tilde{\psi}_t(x)|^2\,dx_2\frac{dt_2}{t_2^{n_2+1}}dx_1\frac{dt_1}{t_1^{n_1+1}}\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}}|\widehat{f}(\xi)|^2|\widehat{\tilde{\psi}}_t(\xi)|^2\,d\xi_2d\xi_1\frac{dt_2}{t_2^{n_2+1}}\frac{dt_1}{t_1^{n_1+1}}\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}}|\widehat{f}(\xi)|^2\int_0^\infty\frac{|\widehat{\psi}(-\xi_1t_1)|^2}{t_1}\,dt_1\int_0^\infty\frac{|\widehat{\psi}(-\xi_2t_2)|^2}{t_2}\,dt_2\,d\xi_2d\xi_1\\ &= \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}^2\\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}^2,\end{aligned}$$

如所需。 □

回顾一下，算子 $T\colon\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ 满足弱有界性性质，当且仅当

$$\sup_{z\in\mathbb{R}_+^{n+1}}\sup_{f,g\in\mathcal{B}}|\langle Tf_z,g_z\rangle|<\infty$$

对每个 有界 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，且 T 满足弱紧性性质，当且仅当

$$\lim_{z\to\infty}\sup_{f,\ g\in\mathcal{B}}|\langle Tf_z,g_z\rangle|=0$$

对于每个有界的 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\lim_{z\to\infty}$ 表示 $\lim_{R\to\infty}\sup_{z\in D((0,1)\ R)^c}$。虽然这些性质由柯西-施瓦茨不等式可知，这些性质显然是 T 的 $L^2(\mathbb{R}^n)$-有界性/紧性的必要条件，但它们对于消去型奇异积分算子（即满足 $T1=T^t1=0$ 的奇异积分算子 T ）的有界性/紧性也足够。正如 [21], 中所观察到的， $L^2(\mathbb{R}^n)$-紧性只要求弱紧性性质的以下较弱版本：

$$\lim_{z\to\infty}\sup_{w\in D(z,R)}|\langle T\psi_z,\psi_w\rangle|=0.$$

对于每个 $R>0$。我们将这一表述推广到双参数情形如下。

定义 2.2。 算子 $T\colon\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})\otimes\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})\to(\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})\otimes\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2}))'$ 满足乘积弱紧性性质，当且仅当

$$\lim_{z\to\infty}\sup_{w\in D(z_1,R)\times D(z_2,R)}|\langle T\psi_z,\psi_w\rangle|=0$$

对于每个 $R>0$。

注意 乘积弱紧性在整体转置和部分转置下保持不变 .

命题 2.3。 如果线性算子在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$上是紧的，那么它满足乘积弱紧性性质。

证明。 设 T在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$上是紧的。由于 $\psi_z\to0$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$中弱收敛于 $z\to\infty$， T 的紧性意味着

$$\limsup_{z\to\infty}\sup_{w\in D(z_1,R)\times D(z_2,R)}|\langle T\psi_z,\psi_w\rangle|\lesssim\limsup_{z\to\infty}\|T\psi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}=0$$

对任意 $R>0$。 □

在讨论紧性时，BMO($\mathbb{R}^n$) 的作用由其子空间 CMO($\mathbb{R}^n$) 承担。Coifman 和 Weiss 于 [8, p. 638] 最初将该空间定义为在 BMO($\mathbb{R}^n$) 中对无穷远处消失的连续函数 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 取闭包。我们利用 [7] 的 Chang-Fefferman 乘积有界平均振荡 BMO($\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$) 将此定义推广到双参数情形。

定义 2.4. 空间 $CMO(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 是 $C_0(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 在空间 $BMO(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$中的闭包。

接下来，我们引入混合弱紧性/CMO 性质，其动机源自 Ou 在 [25]中提出的弱有界性/BMO 条件。

定义 2.5. 若双参数 *Calderón–Zygmund* 算子 T 满足 $\langle T(1\otimes\psi_z)\cdot\otimes\psi_w\rangle\in CMO(\mathbb{R}^{n_1})$ 对任意 $z, w\in\mathbb{R}_+^{n_2+1}$均成立，则称其满足混合弱紧性/*CMO* 性质，

$$\lim_{z\to\infty}\sup_{w\in D(z,M)}\|\langle T(1\otimes\psi_z),\cdot\otimes\psi_w\rangle\|_{BMO(\mathbb{R}^{n_1})}=0$$

对任意 $M\geq 0$, $\langle T(\psi_z\otimes 1)\ \psi_w\otimes\cdot\rangle\in CMO(\mathbb{R}^{n_2})$ 以及任意 $z, w\in\mathbb{R}_+^{n_1+1}$,

$$\lim_{z\to\infty}\sup_{w\in D(z,M)}\|\langle T(\psi_z\otimes 1),\psi_w\otimes\cdot\rangle\|_{BMO(\mathbb{R}^{n_2})}=0$$

for 每个 $M\geq 0$，并且将 T替换为 T^t 后，同样满足这四个条件 .

注意，混合弱紧性/CMO 性质在整体转置和部分转置下保持不变。

命题 2.6. 若双参数 *Calderón–Zygmund* 算子 T 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$上是紧算子，则它满足混合弱紧性/*CMO* 性质。

证明。 由于由 $T_{z,w}f=\langle T(f\otimes\psi_z)\cdot\otimes\psi_w\rangle$ 给出的算子 $T_{z,w}$ 是一个紧的一参数 Calderón-Zygmund 算子，根据定理 B，有 $\langle T(1\otimes\psi_z)\cdot\otimes\psi_w\rangle\in$ CMO($\mathbb{R}^{n_1}$)。

对于第二个条件，注意到 $\{T_{z,w}\}_{z,w\in\mathbb{R}_+^{n_2+1}}$ 是 δCZO($\mathbb{R}^{n_1}$)的一个有界子集，因为 $T_{z,w}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1})$ 上显然一致有界，而 $T_{z,w}$ 的核由 $\langle K(x,y)\psi_z,\psi_w\rangle$ 给出，其中值于 δCZO 的核 K 在 $z, w\in\mathbb{R}_+^{n_2+1}$上满足一致的大小与光滑性估计。因此，由 [1] 的估计可得

$$\sup_{z,w\in\mathbb{R}_+^{n_2+1}}\|(T_{z,w})^t\|_{H^p(\mathbb{R}^{n_1})\to L^p(\mathbb{R}^{n_1})}\lesssim 1$$

for $\frac{n_1}{n_1+\delta}<p<1$, 其中 $H^p(\mathbb{R}^{n_1})$ 表示经典实 Hardy 空间。我们还可以得到

$$\sup_{w\in\mathbb{R}_+^{n_2+1}}\|(T_{z,w})^t\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})\to L^2(\mathbb{R}^{n_1})}\leq V(z),$$

其中 $V(z)\to 0$ as $z\to\infty$，因为如果存在 $z_n\to\infty$ 和 $w_n\in\mathbb{R}_+^{n_2+1}$使得$\|(T_{z_n,\ w_n})^t\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})\to L^2(\mathbb{R}^{n_1})}\geq\delta>0$，那么存在满足$|\langle T(f_n\otimes\psi_{z_n})\ g_n\otimes\psi_{w_n}\rangle|\geq\frac{\delta}{2}$的 $L^2(\mathbb{R}^{n_1})$-归一化 f_n 和 g_n ，但此时 $f_n\otimes\psi_{z_n}\to 0$ 弱收敛，违背了 T的紧性。 –

现在我们声称，对于满足 $p\theta+2(1-\theta)=1$ 的 $p\in(\frac{n_1}{n_1+\delta},\ 1)$ 和 $\theta\in(0,\ 1)$，有

$$\sup_{w\in\mathbb{R}_+^{n_2+1}}\|(T_{z,w})^t\|_{H^1(\mathbb{R}^{n_1})\to L^1(\mathbb{R}^{n_1})}\lesssim V(z)^{2(1-\theta)}=:V'(z).$$

事实上，若 a 是关于 $H^1(\mathbb{R}^{n_1})$ 的一个 $L^\infty(\mathbb{R}^{n_1})$ 原子，即 $\operatorname{supp} a \subseteq Q$, $\int a = 0$，且 $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n_1})} \leq |Q|^{-1}$，其中 Q 是一个立方体，那么 $\|a\|_{H^p(\mathbb{R}^{n_1})} \lesssim |Q|^{\frac{1}{p}-1}$ 且 $\|\underline{a}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})} \leq |Q|^{-\frac{1}{2}}$。考虑全纯函数 $\zeta \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |(T_{z,\ w})^t a(x)|^\zeta \, dx$，我们得到以下估计

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} |(T_{z,w})^t a(x)|^\zeta \, dx \right| \lesssim \|(T_{z,w})^t\|^p_{H^p(\mathbb{R}^{n_1}) \to L^p(\mathbb{R}^{n_1})} |Q|^{1-p} \lesssim |Q|^{1-p}$$

and

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} |(T_{z,w})^t a(x)|^\zeta \, dx \right| \lesssim \|(T_{z,w})^t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n_1}) \to L^2(\mathbb{R}^{n_1})} |Q|^{-1} \lesssim V(z)^2 |Q|^{-1}$$

当 $\Re\zeta = p$ 和 $\Re\zeta = 2$ 时，分别。由 Hadamard 三线引理可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(T_{z,w})^t a(x)| \, dx \lesssim |Q|^{(1-p)\theta} |Q|^{\theta-1} V(z)^{2(1-\theta)} = V(z)^{2(1-\theta)},$$

由此，根据 $H^1(\mathbb{R}^{n_1})$ 的原子分解可得所声称的估计。

现在，由 H^1-有界平均振荡对偶性可得

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^{n_2+1}_+} \|T_{z,w}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n_1}) \to \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1})} \lesssim V'(z).$$

特别地,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^{n_2+1}_+} \|\langle T(1 \otimes \psi_z), \cdot \otimes \psi_w \rangle\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1})} = \sup_{w \in \mathbb{R}^{n_2+1}_+} \|T_{z,w} 1\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1})} \lesssim V'(z),$$

因此

$$\lim_{z \to \infty} \sup_{w \in D(z,M)} \|\langle T(1 \otimes \psi_z), \cdot \otimes \psi_w \rangle\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1})} = 0.$$

关于形式 $\langle T(\psi_z \otimes 1)\ \psi_w \otimes \cdot \rangle$ 的其他条件也可类似处理，而紧性在全转置下的不变性则给出关于 T^t的相应条件。□

2.3. 定理 1.1 与定理 C 的比较。我们在定理 1.1 的论证中，主要着眼于将双参数 Calderón–Zygmund 算子分解为顶层副调和乘积、部分副积算子以及一个完全消去双参数 Calderón–Zygmund 算子。这一视角使我们能够将新的部分局部化算子抽象形式体系（定理 1.5）应用于部分副积算子和双参数 Calderón–Zygmund 算子的完全消去部分，同时单独处理顶层副调和乘积。通过下文的引理 5.7 和引理 6.4，我们利用著名的单参数估计，得到部分副积算子和完全消去双参数 Calderón–Zygmund 算子的部分局部化。我们将这一方法与 [5], 中的定理 C 证明作对比，后者基于直接应用涉及二进矩形的复杂估计。此外，定理 C 的论证要求根据双参数核上的混合型标量条件来表述双参数奇异积分算子，而我们采用 Journ´e 最初提出的向量值定义。

除了我们证明了定理 1.1 中各条件的必要性之外，定理 1.1 与定理 C 的表述之间首要的重大区别在于，我们没有对 T 的核施加任何额外的消失假设，例如要求其具有紧支撑全核与部分核表示。另一方面，我们注意到，定理 C 的乘积弱紧性性质是对角条件的一种非光滑、非消去版本。

$$\lim_{z \to \infty} |\langle T\psi_z, \psi_z \rangle| = 0,$$

显然，定义 2.2 中的乘积弱紧性蕴含这一性质，因为我们的条件同时包含对角线处和近对角线处的矩阵系数 $\langle T\psi_z,\ \psi_w\rangle$。

定理 1.1 与定理 C 的表述之间第二个主要区别在于，我们的混合弱紧性/CMO 条件要求对形如 $\|\langle T(1\otimes\psi_z)\cdot\otimes\psi_w\rangle\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1})}$ 的项进行消失估计，而不是对以下形式的项进行估计

$$\sup_a |\langle T(1_Q\otimes 1_R), a\otimes 1_R\rangle| \approx \|\langle T(1_Q\otimes 1_R),\cdot\otimes 1_R\rangle\|_{L^1(Q)/\text{constants}}, \tag{2.3}$$

其中 $Q\subseteq\mathbb{R}^{n_1}$ 和 $R\subseteq\mathbb{R}^{n_2}$ 是立方体，上确界取遍定义在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的函数 a，这些函数满足 $\operatorname{supp} a\subseteq Q$, $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n_1})}\le 1$，且 $\int a=0$ 与定理 C 的对角 CMO 性质中的条件相同。我们说明，额外的紧部分核假设以及类似于 (2.3) 的假设，如何推出混合弱紧性/CMO 性质中的消失估计。令

$$\operatorname{osc}_\lambda(f;Q):=\inf_{c\in\mathbb{C}}\inf_{\substack{E\subseteq Q\\ |E|\le\lambda|Q|}}\|(f-c)1_{Q\setminus E}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

并注意到

$$\operatorname{osc}_\lambda(f;Q)\le\lambda^{-\frac{1}{p}}\inf_{c\in\mathbb{C}}|Q|^{-\frac{1}{p}}\|f-c\|_{L^{p,\infty}(Q)}$$

对任意 $p\in(0,\ \infty)$，其中 $\|f\|_{L^{p,\ \infty}(Q)}:=\sup_{\lambda>0}\lambda|\{x\in Q:\ |f(x)|>\lambda\}|^{1/p}$ 是通常的弱-L^p 拟范数。特别地，这种振荡概念小于 (2.3) 中使用的 $L^1(Q)$/常数范数。关于振荡的一般讨论，参见第 [17, 11] 章。

命题 2.7。 设 $T\in\delta$-*Calderón-Zygmund*算子$(\mathbb{R}^n)$。若对每个立方体 Q，都存在一个函数 ϕ_Q，使得 $\|\phi_Q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le 1$, $\phi_Q 1_Q\equiv 1_Q$，且

$$\sup_Q osc_{2^{-3-n}}(T\phi_Q;Q)\le A,$$

then

$$\|T1\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}\lesssim A+\|K\|_\delta.$$

证明。 令 $\lambda=2^{-3-n}$。设 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个立方体，$\mathcal{F}$ 是与 Q 相邻的 3^n-1 立方体所组成的集合。于是，由于 $\phi_Q 1_Q\equiv 1_Q$，我们有

$$1=\phi_Q+(1-\phi_Q)=\phi_Q+1_{(3Q)^c}(1-\phi_Q)+\sum_{Q'\in\mathcal{F}}1_{Q'}(1-\phi_Q),$$

因此我们可以估计

$$\begin{aligned}\operatorname{osc}_{2\lambda}(T1;Q)&\le\operatorname{osc}_\lambda(T\phi_Q;Q)+\operatorname{osc}_\lambda(T(1-\phi_Q);Q)\\ &\lesssim A+|Q|^{-1}\|T(1_{(3Q)^c}(1-\phi_Q))\|_{L^1(Q)/\text{constants}}+\sum_{Q'\in\mathcal{F}}|Q|^{-1}\|T(1_{Q'}(1-\phi_Q))\|_{L^1(Q)}.\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{supp}(1_{(3Q)^c}(1-\phi_Q))\subseteq(3Q)^c$，由标准估计可得

$$|Q|^{-1}\|T(1_{(3Q)^c}(1-\phi_Q))\|_{L^1(Q)/\text{constants}}\lesssim\|K\|_\delta\|1-\phi_Q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|K\|_\delta.$$

对于涉及相邻立方体 Q' 的项，我们看到

$$|Q|^{-1}\|T(1_{Q'}(1-\phi_Q))\|_{L^1(Q)}\le|Q|^{-1}\|1-\phi_Q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_Q\int_{Q'}|K(x,y)|\,dydx\lesssim\|K\|_\delta.$$

由 [17, 命题 11.1.24], 可得

$$\|T1\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \sup_Q \mathrm{osc}_{2\lambda}(T1;Q) \lesssim A + \|K\|_\delta,$$

如所需。 □

Prop命题 2.7 立即给出了双参数 Calderón-Zygmund 算子的以下估计。

推论 2.8。 设 T 是一个双参数 δ*Calderón-Zygmund* 算子，使得 $\langle K_1(x、y)\psi_z、\psi_w\rangle$ 的核常数由 $V(z、w)$ 有界。若对于每个立方体 Q 以及 $z、w \in \mathbb{R}_+^{n_2+1}$，存在函数 $\phi_{Q,\,z,\,w}$ 定义在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上，使得 $\|\phi_{Q,\,z,\,w}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n_1})} \le 1$、 $\phi_{Q,\,z,\,w}1_Q \equiv 1_Q$，并且

$$\sup_Q osc_{2^{-3-n_1}}(\langle T(\phi_{Q,z,w}\otimes\psi_z), \cdot\otimes\psi_w\rangle; Q) \le V(z,w),$$

then

$$\|\langle T(1\otimes\psi_z), \cdot\otimes\psi_w\rangle\|_{BMO(\mathbb{R}^{n_1})} \lesssim V(z,w).$$

当 V 满足 $\lim_{z\to\infty}\sup_{w\in D(z,M)} V(z,\ w)\ = 0$ 时，推论 2.8 给出了混合弱紧性/CMO 性质的一部分；特别地，当类似于 (2.3) 的表达式趋于零时更是如此。其他混合弱紧性/CMO 估计可由类似的假设得到。

3. Endpoint Compactness and necessity of $T1,\ T^t1 \in \mathrm{CMO}(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$

接下来我们证明定理 1.3，并证明 $T1,\ T^t1 \in \mathrm{CMO}(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的必要性。

引理 3.1。 若算子 T 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上有界，并且当 $p<1$ 足够大时，从 $H^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 到$L^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 有界，且 $\theta\in(0,\ 1)$ 满足 $\theta p+(1-\theta)2=1$，那么 T从 $H^1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 到 $L^1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 有界，且

$$\|T\|_{H^1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\to L^1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} \lesssim \|T\|^{\theta p}_{H^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\to L^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}\|T\|^{(1-\theta)2}_{L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\to L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}.$$

证明。 我们采用 [15, 定理 B] 中关于 $H^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的原子分解刻画。设 a 是开集 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$上的 H^1 原子。由于 p 足够大， $|\Omega|^{1-\frac{1}{p}}a$是一个 H^p原子，并且根据定义，$\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} \le |\Omega|^{-1/2}$。考虑全纯函数即可得到结论

$$\zeta \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}} |Ta(x)|^\zeta\,dx$$

并重复命题 2.6 中的论证。 □

我们将 $\mathbb{R}^n$ 上的标准二进网格记为 $\mathcal{D}$，并对 $N\in\mathbb{N}$ 定义有限集 $\mathcal{D}_N\colon=\{Q\in\mathcal{D}\colon Q\subseteq[-2^N,2^N)^n$ 和 $|Q|\ge 2^{-N}\}$。给定 C^1 个分别适用于 $L^2(\mathbb{R}^{n_1})$ 和 $L^2(\mathbb{R}^{n_2})$ 的紧支撑正交小波基 $\{\psi_Q\}_{Q\in\mathcal{D}}$ 和 $\{\psi_S\}_{S\in\mathcal{D}}$，我们定义有限秩投影算子 P_N^1 和 P_N^2：

$$P_N^1 f = \sum_{Q\in\mathcal{D}_N}\langle f,\psi_Q\rangle\psi_Q \quad\text{and}\quad P_N^2 f = \sum_{S\in\mathcal{D}_N}\langle f,\psi_S\rangle\psi_S,$$

这里，在小波基的指标中，我们省略了关于辅助变量 $\gamma\in\{1,\dots,2^{n_1}-1\}$ 和 $\delta\in\{1,\dots,2^{n_2}-1\}$ 的有限求和。定义 $P_N\colon=P_N^1\otimes P_N^2$。

引理 3.2。 *Ea ch* P_N 是一个范数与 N无关的完全消去双参数 *Calderón–Zygmund* 算子 .

证明。 注意到每个 P_N^i 都是一个范数与 N 无关的单参数奇异积分算子，这一点在 [20, 第 6] 章中已有说明，也可通过对秩一项的核求和并利用小波的支集性质得出。因此，它们的张量积是一个范数与 N无关的双参数 Calderón–Zygmund 算子。 P_N 是完全消去的这一事实，直接源于每个 ψ_Q 和 ψ_S的零均值消去。□

定理 *1.3* 的证明。 由 T 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上的紧性，我们有

$$\lim_{N\to\infty}\|TP_N^{\perp}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\to L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}=0.$$

由引理 3.2 和 [15, 定理 1]， P_N和 $P_N^{\perp}$在 $H^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上一致有界，其中 $p\in\left(\max\left\{\frac{n_1}{n_1+1},\frac{n_2}{n_2+1}\right\},\ 1\right]$。我们还知道，根据 [11], ，当 $p<1$ 充分大时， T是从 $H^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 到$L^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的有界算子，因此

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\|TP_N^{\perp}\|_{H^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\to L^p(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}<\infty$$

对于这样的 p。由引理 3.1 可得

$$\lim_{N\to\infty}\|TP_N^{\perp}\|_{H^1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})\to L^1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}=0,$$

这意味着，当 $TP_N\to T$ 时，作为从 $H^1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 到 $L^1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的算子，它们一致收敛；因此 T 是从 $H^1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 到 $L^1(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的紧算子。将 T替换为 T^* 并取 T^*P_N的伴随算子，我们得到 $P_NT\to T$在从 $L^\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 到有界平均振荡$(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的算子范数下收敛。又由于每个 P_N 都是值域包含于 $C_0(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 中的有限秩算子，因此 T 是从 $L^\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 到 CMO$(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 的紧算子。□

推论 3.3. 如果 T 是一个 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$-紧双参数 *Calderón–Zygmund* 算子，那么 $T1$, $T^t1\in$*CMO*$(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$。

4. Compactness of abstract partially localized operators

本节介绍部分局部化算子的概念，并利用弱紧性性质刻画其紧性，从而推广定义 2.2 中的概念。我们在希尔伯特空间张量积的抽象框架下发展这一理论，随后将其应用于特例，推导满足乘积弱紧性性质的双参数部分副调和算子以及完全消去型双参数 Calderón–Zygmund 算子的紧性。

设 H_1 和 H_2 是可分希尔伯特空间， G 是带有左哈尔测度 dz 的可分局部紧群。我们构造 G 的一个合适穷竭 $\{E_N\}_{N\in\mathbb{N}}$。设 U 是单位元的一个开且相对紧的邻域，设 $\{p_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 是 G 的一个稠密子集，且满足 $p_1=e$，并定义 $F_N:=\bigcup_{n=1}^N(p_nU\cup U^{-1}p_n^{-1})$。注意， $F_{N+1}\supseteq F_N\supseteq\{p_1,\dots,p_N\}$ 和 $F_N^{-1}=F_N$。现在定义 $E_N:=F_N^N=F_N*F_N*\cdots*F_N(N$ 倍)。于是每个 E_N 都是开且相对紧的。还要注意，由于 $F_N\subseteq F_{N+1}$ 和 $F_N\ni e$，我们有 $F_N\subseteq E_N\subseteq E_{N+1}$。此外，$E_N*E_M\subseteq E^2_{\max\{N,M\}}\subseteq E_{2\text{最大值}\{N,M\}}$。由于 $E_N^{-1}=E_N$，可知 $E:=\bigcup_{N\in\mathbb{N}}E_N$ 是 G 的一个开子群。由于 E^c 是其陪集的并集， E 也是闭的。根据构造， E 包含 G 的一个稠密子集，因此可知 $E=G$。$\{E_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 的重要性质是 $E_N^2\subseteq E_{2N}$、 $E_N\subseteq E_{N+1}$，并且每个 E_N 都是开且相对紧的。

设 $\{\psi_z\}_{z\in G}\subseteq H_2$ 是一个有界集合，使得 $z\mapsto\psi_z$ 在范数意义下连续，并且构成 H_2 的一个连续帕塞瓦尔框架，其含义是

$$\langle f,g\rangle_{H_2}=\int_G\langle f,\psi_z\rangle_{H_2}\langle\psi_z,g\rangle_{H_2}\,dz$$

对所有 $f,\ g\in H_2$。

我们将 $\mathcal{H}=H_1\widehat{\otimes}H_2$ 表示为代数张量积 $H_1\otimes H_2$ 关于以下内积的完备化，该内积由.....的线性延拓定义

$$\langle a_1\otimes b_1,a_2\otimes b_2\rangle_{H_1\otimes H_2}:=\langle a_1,a_2\rangle_{H_1}\langle b_1,b_2\rangle_{H_2}$$

对于 $a_1,\ a_2\in H_1$ 和 $b_1,\ b_2\in H_2$。对于 $f=\sum_{n=1}^N c_n(a_n\otimes b_n)\in H_1\otimes H_2$ 和 $g\in H_2$，我们定义$\langle f,\ g\rangle_{H_2}\in H_1$ 为

$$\langle f,g\rangle_{H_2}:=\sum_{n=1}^N c_na_n\langle b_n,g\rangle_{H_2},$$

并使用相同的记号表示其自然且良定义的延拓，使其适用于所有 $f\in\mathcal{H}$。

我们定义小波变换 $\mathcal{W}\colon\mathcal{H}\to L^2(G;H_1)$ 为

$$\mathcal{W}f(z):=\langle f,\psi_z\rangle_{H_2}.$$

注意，由于假设取值于标量的小波变换 $H_2\ni f\mapsto\langle f,\psi_z\rangle_{H_2}$ 在 $L^2(G)$ 上是等距映射，因此 $\mathcal{W}$ 是等距映射——通过展开为正交归一基，这一事实可推广到上述取值于希尔伯特空间的版本。由于 $\mathcal{W}$ 是等距映射，我们有

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}}=\int_G\langle\mathcal{W}f(z),\mathcal{W}g(z)\rangle_{H_1}\,dz=\int_G\langle\mathcal{W}f(z)\otimes\psi_z,g\rangle_{\mathcal{H}}\,dz$$

对所有 $f,g\in\mathcal{H}$，均成立。

给定线性算子 $T\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 以及 $z,w\in G$，对于 $h\in H_1$，我们定义限制算子$T_{(z,w)}\colon H_1\to H_1$ 为

$$T_{(z,w)}h:=\langle T(h\otimes\psi_z),\psi_w\rangle_{H_2}.$$

定义 4.1。 </style}有界线性算子： $\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 称为部分局部化的，若

$$\sup_{z\in G}\omega(z)^{-1}\int_G\|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1}\omega(w)\,dw<\infty,$$

$$\sup_{w\in G}\omega(w)^{-1}\int_G\|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1}\omega(z)\,dz<\infty,$$

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{z\in G}\omega(z)^{-1}\int_{G\setminus zE_N}\|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1}\omega(w)\,dw=0,\quad and$$

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{w\in G}\omega(w)^{-1}\int_{G\setminus wE_N}\|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1}\omega(z)\,dz=0$$

存在某个连续函数 $\omega\colon G\to\mathbb{R}_+$ 满足 $\omega(zw)\le\omega(z)\omega(w)$ 对所有 $z,w\in G$ 均成立。

注意，由于每个 E_N 都是开且相对紧的，条件

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{z\in G}\omega(z)^{-1}\int_{G\setminus zE_N}\|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1}\omega(w)\,dw=0$$

等价于　等价于断言：对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个紧集 $K \subseteq G$，使得　　h

$$\sup_{z\in G} \omega(z)^{-1} \int_{G\setminus zK} \|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1} \omega(w)\, dw < \epsilon,$$

另一种消失条件也类似，因此部分局部化的定义与穷竭 $\{E_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 的选择无关。

我们将使用以下部分局部化的充分条件。

引理 4.2. 若 T: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是一个有界线性算子，满足

$$\|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1} \le L(z^{-1}w)$$

对所有 $z, w \in G$，其中 $L(\cdot^{-1}) = L(\cdot)$，且 $L \in L^1(G, \omega(z)dz)$，对于某个连续函数$\omega$: $G \to \mathbb{R}_+$，它满足 $\omega(zw) \le \omega(z)\omega(w)$ 对所有 $z, w \in G$ 均成立，则 T是部分局部化的。

证明。设 $S \subseteq G$ 可测。那么

$$\int_S \|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1} \omega(w)\, dw \le \int_S L(z^{-1}w)\omega(w) \le \omega(z) \int_{z^{-1}S} L(w)\, \omega(w)\, dw.$$

若 $S = G$，则可得

$$\sup_{z\in G} \omega(z)^{-1} \int_G \|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1} \omega(w)\, dw \le \int_G L(w)\, \omega(w)\, dw < \infty.$$

若 $S = G \setminus zE_N$，则由控制收敛定理

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{z\in G} \omega(z)^{-1} \int_{G\setminus zE_N} \|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1} \omega(w)\, dw \le \lim_{N\to\infty} \int_{G\setminus E_N} L(w)\omega(w)\, dw = 0.$$

其余估计可由相同的论证以及假设 $L(\cdot^{-1}) = L(\cdot)$ 得出。 □

接下来，我们定义这一情形下的弱紧性。

定义 4.3。若线性算子 T: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 对所有 z、$w \in G$，其在 H_1上的 $T_{(z,w)}$ 均为紧算子，则称其为弱紧的，并且

$$\lim_{z\to\infty} \sup_{w\in zE_M} \|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1} = 0$$

对每个 $M > 0$。

与定义 4.1 类似，我们可以将 E_M 等价地替换为任意紧集 $K \subseteq G$，因此该定义不依赖于穷竭 $\{E_N\}_{N\in\mathbb{N}}$。

只要 $\psi_z \to 0$ 弱收敛，T 的紧性就要求弱紧性。

命题 4.4。若线性算子 T: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是紧的，且 $\psi_z \to 0$ 在 H_2 中关于 $z \to \infty$ 弱收敛，则 T 是弱紧的。

证明。每个 $T_{(z,w)}$ 的紧性显而易见。对于另一条件，设 $f_n \to 0$ 在 H_2 中弱收敛，且 g_n 在 H_2 中有界。若 $\limsup_{n\to\infty} \|\langle T(\cdot \otimes f_n) \cdot \otimes g_n\rangle\|_{H_1\to H_1} > 0$，则存在 a_n，$b_n \in H_1$，使得 $\|a_n\|_{H_1} = \|b_n\|_{H_1} = 1$ 且

$$\limsup_{n\to\infty} \|T(a_n \otimes f_n)\|_{\mathcal{H}} \gtrsim \limsup_{n\to\infty} |\langle T(a_n \otimes f_n), b_n \otimes g_n\rangle| > 0.$$

但是 $a_n \otimes f_n \to 0$ 在 $\mathcal{H}$中弱收敛，因此由 T的紧性可知这是一个矛盾。最后，我们利用 $\psi_z \to 0$ 在 H_2 中弱收敛，并将序列替换为指标集 G，作出显然的相应修改。□

我们为$\mathcal{H}$的相对紧子集建立如下黎斯-柯尔莫哥洛夫型判据，这将是定理 1.5证明的关键。

命题 4.5。 有界集 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ 是相对紧的，当且仅当对于每个 $z \in G$， $\{\mathcal{W}f(z)\colon \ f \in \mathcal{K}\} \subseteq H_1$是相对紧的，并且

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{K}} \int_{G\setminus E_N} \|\mathcal{W}f(z)\|_{H_1}^2 \, dz = 0.$$

证明。 对于正向，首先注意到，由映射 $f \mapsto \mathcal{W}f(z)$ 从 $\mathcal{H}$ 到 H_1 的连续性，每个 $\{\mathcal{W}f(z)\colon \ f \in \mathcal{K}\}$ 在 H_1 中都是相对紧的。此外，由 $\mathcal{W}$ 的连续性： $\mathcal{H} \to L^2(G;\ H_1)$，我们有 $\mathcal{W}(\mathcal{K})$ 在 $L^2(G;\ H_1)$ 中是相对紧的，这意味着

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{K}} \int_{G\setminus E_N} \|\mathcal{W}f(z)\|_{H_1}^2 \, dz = 0.$$

对于反向，不妨设 $\mathcal{K}$ 是闭的。设 $\{f_n\} \subseteq \mathcal{K}$ 弱收敛到 f。根据第一个假设、对角化、G 的可分性以及 $z \mapsto \psi_z$ 的强连续性，我们可以取一个子列，该子列仍记为 $\{f_n\}$，使得

$$\|\mathcal{W}(f_m - f_n)(z)\|_{H_1} \to 0$$

对每个 $z \in G$，当 n时，$m \to \infty$。由于 $f_n \to f$弱收敛，我们有 $\mathcal{W}f_n(z) \to \mathcal{W}f(z)$ 弱收敛；又由于弱极限是唯一的，因此可得

$$\|\mathcal{W}(f - f_n)(z)\|_{H_1} \to 0.$$

注意，对于任意 $M \in \mathbb{N}$,

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{E_M} \|\mathcal{W}(f - f_n)(z)\|_{H_1}^2 \, dz + \int_{G\setminus E_M} \|\mathcal{W}(f - f_n)(z)\|_{H_1}^2 \, dz.$$

现在令 $\epsilon > 0$，并选择 $M = M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ 足够大，使得

$$\sup_{g\in\mathcal{K}} \int_{G\setminus E_M} \|\mathcal{W}g(z)\|_{H_1}^2 \, d\mu(z) < \epsilon.$$

Then

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{G\setminus E_M} \|\mathcal{W}(f - f_n)(z)\|_{H_1}^2 \, dz < 4\epsilon.$$

还需注意

$$\int_{E_M} \|\mathcal{W}(f - f_n)(z)\|_{H_1}^2 \, dz \to 0$$

根据支配 收敛定理，因此我们可以选择 n 足够大，使得 $\|f - f_n\|_{\mathcal{H}}^2 < 5 \qquad \epsilon.$ □

我们将在定理 1.5 的证明中使用以下结果。

引理 4.6. 若有界线性算子 $T\colon \ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是部分局部化的且弱收敛紧的，则

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\substack{f\in\mathcal{H}\\ \|f\|_{\mathcal{H}}\le 1}} \int_{G\setminus E_N} \|\mathcal{W}Tf(z)\|_{H_1}^2 \, dz = 0.$$

证明. 我们首先证明

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{z\in G}\omega(z)^{-1}\int_{G\setminus E_N}\|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1}\omega(w)\,dw=0. \tag{4.1}$$

部分局部化使我们只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{z\in G}\omega(z)^{-1}\int_{(G\setminus E_N)\cap zE_M}\|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1}\,\omega(w)\,dw=0$$

对每个 $M\geq 0$ 都成立。设 $N'\geq M$ 和 $N=2N'$。若积分域非空，则 $z\notin E_{N'}$。事实上，否则 $w\in E_{N'}E_M\subseteq E_{N'}^2\subseteq E_{2N'}=E_N$。因此，令$C(M)=\int_{E_M}\omega(w)\,dw$，我们得到估计

$$\sup_{z\in G}\omega(z)^{-1}\int_{(G\setminus E_N)\cap zE_M}\|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1}\,\omega(w)\,dw\leq C(M)\sup_{\substack{z\notin E_{N'}\\ w\in zE_M}}\|T_{(z,w)}\|_{H_1\to H_1},$$

由弱紧性可知，当 N' 时该式趋于零，从而证明了 (4.1)。

现在我们逐点估计

$$\|\mathcal{W}Tf(z)\|_{H_1}=\sup_{\|g\|_{H_1}\leq 1}|\langle Tf,g\otimes\psi_z\rangle_{\mathcal{H}}|$$

对任意这样的 g，我们有

$$\begin{aligned}
|\langle Tf,g\otimes\psi_z\rangle_{\mathcal{H}}|^2&=\left|\int_G\langle T(\mathcal{W}f(w)\otimes\psi_w),g\otimes\psi_z\rangle_{\mathcal{H}}\,dw\right|^2\\
&\leq\left(\int_G\|\mathcal{W}f(w)\|_{H_1}\|T_{(w,z)}\|_{H_1\to H_1}\,dw\right)^2\\
&\leq\omega(z)\int_G\|\mathcal{W}f(w)\|_{H_1}^2\|T_{(w,z)}\|_{H_1\to H_1}\omega(w)^{-1}\,dw\\
&\qquad\times\omega(z)^{-1}\int_G\|T_{(w,z)}\|_{H_1\to H_1}\omega(w)\,dw\\
&\leq C\int_G\|\mathcal{W}f(w)\|_{H_1}^2\omega(w)^{-1}\|T_{(w,z)}\|_{H_1\to H_1}\omega(z)\,dw.
\end{aligned}$$

由富比尼定理和 (4.1) 可得结论，注意到 z 和 w 的作用已互换。□

定理 *1.5* 的证明。由命题 4.5 和引理 4.6，只需证明对于每个 $z\in G$，$\{\mathcal{W}Tf(z)\}_{\|f\|_{\mathcal{H}}\leq 1}$ 在 H_1 中是紧的。为此，设 $P_N\colon H_1\to H_1$ 是一列有限秩正交投影，且递增趋于单位元。我们将证明

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\|f\|_{\mathcal{H}}\leq 1}\|P_N^{\perp}\mathcal{W}Tf(z)\|_{H_1}=0$$

对所有 $z\in G$ 均成立；根据 [22, 定理 B]，这等价于 $\{\mathcal{W}Tf(z)\}_{\|f\|_{\mathcal{H}}\leq 1}$ 的预紧性。

根据引理 4.6 证明中最后一个估计所用的相同论证，我们有

$$\|P_N^{\perp}\mathcal{W}Tf(z)\|_{H_1}^2\lesssim\int_G\|\mathcal{W}f(w)\|_{H_1}^2\omega(w)^{-1}\|P_N^{\perp}T_{(w,z)}\|_{H_1\to H_1}\omega(z)\,dw.$$

注意，由于$z \mapsto \psi_z$ 是范数连续的，且 $\{\psi_w\}_{w\in G}$ 有界，因此当 w和 N一致时， $P_N^\perp T_{(w,\zeta)} \to P_N^\perp T_{(w,z)}$在算子范数下趋于 $\zeta \to z$。再结合 ω的连续性，我们可以选取一个开相对紧集 $U = U(z) \ni z$，使得

$$\begin{aligned}\omega(w)^{-1}\|P_N^\perp T_{(w,z)}\|_{H_1\to H_1}\omega(z) &\lesssim \omega(w)^{-1}\inf_{\zeta\in U}\|P_N^\perp T_{(w,\zeta)}\|_{H_1\to H_1}\omega(\zeta)\\ &\lesssim \omega(w)^{-1}\int_U \|P_N^\perp T_{(w,\zeta)}\|_{H_1\to H_1}\omega(\zeta)\,d\zeta.\end{aligned}$$

只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\|f\|_{\mathcal{H}}\le 1}\int_G \|\mathcal{W}f(w)\|_{H_1}^2\omega(w)^{-1}\int_U \|P_N^\perp T_{(w,\zeta)}\|_{H_1\to H_1}\omega(\zeta)\,d\zeta dw = 0.$$

设 $\epsilon > 0$、 $\|f\|_{\mathcal{H}} \le 1$，并选取足够大的 M，使得

$$\sup_{w\in G}\omega(w)^{-1}\int_{G\setminus wE_M}\|T_{(w,\zeta)}\|_{H_1\to H_1}\omega(\zeta)\,d\zeta < \epsilon.$$

Then

$$\begin{aligned}&\int_G \|\mathcal{W}f(w)\|_{H_1}^2\omega(w)^{-1}\int_U \|P_N^\perp T_{(w,\zeta)}\|_{H_1\to H_1}\omega(\zeta)\,d\zeta\,dw\\ &\quad\le \epsilon + \int_G \|\mathcal{W}f(w)\|_{H_1}^2\omega(w)^{-1}\int_{U\cap wE_M}\|P_N^\perp T_{(w,\zeta)}\|_{H_1\to H_1}\omega(\zeta)\,d\zeta dw.\end{aligned}$$

注意， w 中的被积函数的支集包含在某个 $E_{M'}$中。事实上，由于 U 是相对紧的，存在某个 M''，使得$U \subseteq E_{M''}$。如果 $\zeta \in U \cap wE_M \subseteq E_{M''} \cap wE_M$，那么 $w \in E_{M''}E_M^{-1} \subseteq E_{M''}E_{M'''} \subseteq E_{2\max(M'',M''')} =: E_{M'}$。因此，我们可以估计

$$\begin{aligned}&\int_G \|\mathcal{W}f(w)\|_{H_1}^2\omega(w)^{-1}\int_{U\cap wE_M}\|P_N^\perp T_{(w,\zeta)}\|_{H_1\to H_1}\omega(\zeta)\,d\zeta dw\\ &\qquad\le \int_{E_{M'}} \|\mathcal{W}f(w)\|_{H_1}^2\omega(w)^{-1}\int_U \|P_N^\perp T_{(w,\zeta)}\|_{H_1\to H_1}\omega(\zeta)\,d\zeta dw\\ &\qquad\le C\int_{E_{M'}}\int_U \|P_N^\perp T_{(w,\zeta)}\|_{H_1\to H_1}\,d\zeta dw,\end{aligned}$$

其中 $C = \|\omega^{-1}\|_{L^\infty(E_{M'})}\|\omega\|_{L^\infty(U)}\|\|\psi_z\|_{H_2}^2\|_{L^\infty(E_{M'})} < \infty$。随后，我们可以选取 N，使得根据每个 $T_{(w,\zeta)}$ 的紧性和控制收敛定理，上式有界于 ϵ。□

5. Compactness of Bi-Parameter Paraproducts

本节讨论双参数拟乘子的紧性。我们首先引入顶层副调和乘积，并利用假设$T1$， T^t1， T_t1， $T_t^t1 \in$CMO$(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$证明它们是紧的。随后，我们定义部分副积算子，并根据定理 1.5 和混合弱紧性/CMO 性质推导其紧性。

5.1. 顶层副调和乘积。 下文中，令 $\phi_z^1 := \varphi_{z_1}^1 \otimes \varphi_{z_2}^1$，其中 $\varphi_{z_i}^1 = t_i^{-n_i}\varphi\big(\frac{\cdot - x_i}{t_i}\big)$ for$z_i = (x_i, t_i) \in \mathbb{R}_+^{n_i+1}$以及某个固定的非负 $L^1(\mathbb{R}^{n_i})$-归一化的 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_i})$。

定义 5.1。 给定 $b \in$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$，顶层副乘积 Π_b 定义为

$$\Pi_b f = \iint_{\mathbb{R}_+^{n_1+1}\times\mathbb{R}_+^{n_2+1}} \langle b,\psi_z\rangle\langle f,\phi_z^1\rangle\psi_z\,dz.$$

注意

$$\Pi_b 1 = b \qquad \text{and} \qquad \Pi_{b,t} 1 = \Pi_{b,t}^t 1 = \Pi_b^t 1 = 0.$$

我们回顾一下，顶层副调和乘积是双参数 Calderón–Zygmund 算子，参见 [18, 第 78] 页。

命题 5.2。 若 $b \in$ 有界平均振荡$(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$，则 Π_b 是一个双参数 1-*Calderón–Zygmund* 算子，且

$$\|\Pi_b\|_{1CZO(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} \lesssim \|b\|_{BMO(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})}.$$

定理 5.3。 若 $b \in \mathit{CMO}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$，则 Π_b、 Π_b^t、 $\Pi_{b,t}$和 $\Pi_{b,t}^t$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$上是紧的。

证明。 注意到

$$\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})}^{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} \supseteq \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})}^{L^\infty(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} = C_0(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}),$$

这意味着 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} = \mathrm{CMO}(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$。根据稠密性论证和命题 5.2，只需证明 $\Pi_{f\otimes g}$ 对于 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$ 和 $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$ 是紧的。由于 ψ 是两个单参数小波的张量积，而 ϕ 是单参数鼓包函数的张量积，因此有

$$\Pi_{f\otimes g} = \pi_f \otimes \pi_g,$$

其中， π_b 是一个经典单参数抛物乘子。由于对于 $f \in \mathcal{D}$（$\mathbb{R}^{n_1}$）和 $g \in \mathcal{D}$（$\mathbb{R}^{n_2}$）， π_f、 π_f^t、 π_g和 π_g^t 显然在 L^2（$\mathbb{R}^{n_i}$）上是紧的，因此$\Pi_{f\otimes g} = \pi_f \otimes \pi_g$ 的任何部分转置在 L^2（$\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$）上也都是紧的。□

5.2. **部分副积算子**。 从一个双参数 Calderón–Zygmund 算子中减去顶层副调和乘积后，剩下一个顶层消去型双参数 Calderón–Zygmund 算子，其定义如下。

定义 5.4。 若双参数 *Calderón–Zygmund* 算子 T 满足

$$\langle T(1\otimes 1), \cdot\otimes\cdot\rangle = \langle T(1\otimes\cdot), \cdot\otimes 1\rangle = \langle T(\cdot\otimes 1), 1\otimes\cdot\rangle = \langle T(\cdot\otimes\cdot), 1\otimes 1\rangle = 0.$$

接下来定义部分副积算子。下文中， π_b 表示符号为 b的单参数副调和子。

定义 5.5。 与顶层消去型双参数 δ-*CZO* T 相关联的部分副积算子 $\varpi_{1,\ T}, \varpi_{2,\ T}$： $\mathcal{D}$（$\mathbb{R}^{n_1}$）$\otimes\mathcal{D}$（$\mathbb{R}^{n_2}$）$\to$（$\mathcal{D}$（$\mathbb{R}^{n_1}$）$\otimes\mathcal{D}$（$\mathbb{R}^{n_2}$））′定义如下：

$$\langle \varpi_{1,T}(f_1\otimes f_2), g_1\otimes g_2\rangle = \langle \pi_{\langle T(1\otimes f_2),\cdot\otimes g_2\rangle} f_1, g_1\rangle$$

and

$$\langle \varpi_{2,T}(f_1\otimes f_2), g_1\otimes g_2\rangle = \langle \pi_{\langle T(f_1\otimes 1), g_1\otimes\cdot\rangle} f_2, g_2\rangle.$$

在本节余下部分，我们聚焦于 $\varpi := \varpi_{1,\ T}$，另一个情形完全对称。算子 ϖ 的相关性质为 $\varpi_{(z,w)} = \pi_{\langle T(1\otimes\psi_z)\ \ \cdot\otimes\psi_w\rangle}$,

$$\langle \varpi(1\otimes\cdot), \cdot\otimes\cdot\rangle = \langle T(1\otimes\cdot), \cdot\otimes\cdot\rangle,$$

and

$$\langle \varpi(\cdot\otimes 1), \cdot\otimes\cdot\rangle = \langle \varpi(\cdot\otimes\cdot), 1\otimes\cdot\rangle = \langle \varpi(\cdot\otimes\cdot), \cdot\otimes 1\rangle = 0.$$

我们需要知道，与顶层消去型双参数 Calderón–Zygmund 算子相关的部分副调和子也是双参数 Calderón–Zygmund 算子，这样才能证明减去部分副调和子后得到的完全消去型算子也是双参数 Calderón–Zygmund 算子。以下结果在 [18, 第 7] 节中得到了证明。

命题 5.6。 该部分副调和子 ϖ 是一个双参数 δ-*Calderón–Zygmund* 算子。

下述估计 给出了部分副积算子的部分局部化。

引理 5.7。若 z， $w \in \mathbb{R}_+^{n_2+1}$则

$$\|\varpi_{(z,w)}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})\to L^2(\mathbb{R}^{n_1})} \lesssim L(z^{-1}w),$$

其中

$$L((x,t)) = \begin{cases} \frac{1}{t^{n_2/2+\delta}} & t \geq 1, |x| \leq t \\ \frac{t^{n_2/2}}{|x|^{n_2+\delta}} & t \geq 1, |x| > t \\ t^{n_2/2+\delta} & t < 1, |x| \leq 1 \\ \frac{t^{n_2/2+\delta}}{|x|^{n_2+\delta}} & t < 1, |x| > 1 \end{cases}.$$

证明。 我们首先断言

$$\|\langle T(1\otimes\psi_z), \cdot\otimes\psi_w\rangle\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1})} \lesssim L(z^{-1}w)$$

对所有 z， $w \in \mathbb{R}_+^{n_2+1}$。事实上，由于 H^1-有界平均振荡对偶性，我们有

$$\|\langle T(1\otimes\psi_z), \cdot\otimes\psi_w\rangle\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1})} \approx \sup_{\|a\|_{H^1(\mathbb{R}^{n_1})}\leq 1} |\langle T(1\otimes\psi_z), a\otimes\psi_w\rangle|.$$

由于 T 是顶层消去的，我们有 $\langle T(1\otimes\cdot)\ a\otimes\cdot\rangle$ 是一个消去型单参数δ-Calderón-Zygmund算子，其δCalderón-Zygmund算子$(\mathbb{R}^{n_1})$ 范数由 $\|a\|_{H^1(\mathbb{R}^{n_1})}$ 控制，对每个 $a \in H^1(\mathbb{R}^{n_1})$ 都成立，因此结论由 [21, 引理 4.1] 推出。我们利用关系式 $\varpi_{(z,w)} = \pi_{\langle T(1\otimes\psi_z)\,\cdot\otimes\psi_w\rangle}$ 以及单参数副乘积的性质，得出

$$\|\varpi_{(z,w)}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})\to L^2(\mathbb{R}^{n_1})} \lesssim \|\langle T(1\otimes\psi_z), \cdot\otimes\psi_w\rangle\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1})} \lesssim L(z^{-1}w).$$

□

下一个结果表明，部分副积算子是部分局部化的。特别地，我们将第 4 节的抽象理论应用于 $H_1 = L^2(\mathbb{R}^{n_1})$、 $H_2 = L^2(\mathbb{R}^{n_2})$、 $G = \mathbb{R}_+^{n_2+1}$、$\psi_z = \psi_z$ 和 $E_N = D((0,\ 1)\ N)$。注意， $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}) \cong L^2(\mathbb{R}^{n_1})\ \widehat{\otimes} L^2(\mathbb{R}^{n_2})$。

推论 5.8. 若 T 是顶层消去型双参数 *Calderón–Zygmund* 算子，则相应的部分副乘积 ϖ 关于框架 $\{\psi_z\}_{z\in\mathbb{R}_+^{n_2+1}}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 上是部分局部化的。

证明. 由引理 5.7 和引理 4.2 可得结论，因为

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n_2+1}} L(z)\omega(z)\,dz < \infty$$

其中 $\omega(x,t) = t^{n_2/2}$。 □

定理 5.9. 若 T 是满足混合弱紧性/*CMO* 条件的顶层消去型双参数 *Calderón–Zygmund* 算子，则 ϖ 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$上是紧的。

证明. 由于 ϖ 根据推论 5.8 是部分局部化的，只需证明 ϖ 是弱紧的，并应用定理 1.5。回忆 $\varpi_{(z,w)} = \pi_{\langle T(1\otimes\psi_z)\,\cdot\otimes\psi_w\rangle}$，并且对每个 w 和 z，假设该符号属于 $\mathrm{CMO}(\mathbb{R}^{n_1})$，因此每个 $\varpi_{(z,w)}$ 都是紧的。此外，

$$\|\varpi_{(z,w)}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})\to L^2(\mathbb{R}^{n_1})} = \|\pi_{\langle T(1\otimes\psi_z)\,\cdot\otimes\psi_w\rangle}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})\to L^2(\mathbb{R}^{n_1})} \lesssim \|\langle T(1\otimes\psi_z)\cdot\otimes\psi_w\rangle\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n_1})},$$

因此消失于

关于 $\langle T(1\otimes\psi_z)\ \cdot\otimes\psi_w\rangle$ 的假设给出了 ϖ 弱紧性的其余部分。 □

6. Compactness of fully cancellative bi-parameter SIOs

本节中，我们在 $H_1 = \mathbb{C}$, $H_2 = L^2(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, $G = \mathbb{R}_+^{n_1+1} \times \mathbb{R}_+^{n_2+1}$, $\psi_z = \psi_{z_1} \otimes \psi_{z_2}$ 和 $E_N = D((0,1)^N) \times D((0,1)^N)$ 的情形下，应用第 4 节的抽象理论。注意，$\psi_z = \mathfrak{U}(z)\psi := U(z_1) \otimes U(z_2)\psi$，其中 $U(x_i, t_i)$ 是由 $U(x_i, t_i)f = t_i^{-n_i/2} f\left(\frac{\cdot - x_i}{t_i}\right)$ 给出的作用在 $L^2(\mathbb{R}^{n_i})$ 上的酉算子。另请注意，$\mathfrak{U}(z)^* = \mathfrak{U}(z)^t = \mathfrak{U}(z^{-1})$。

定义 6.1. 若双参数 *Calderón–Zygmund* 算子 T 是顶层消去的，且

$$\langle T(1 \otimes \cdot), \cdot \otimes \cdot \rangle = \langle T(\cdot \otimes 1), \cdot \otimes \cdot \rangle = \langle T(\cdot \otimes \cdot), 1 \otimes \cdot \rangle = \langle T(\cdot \otimes \cdot), \cdot \otimes 1 \rangle = 0.$$

我们注意到，这一性质在经 $\mathfrak{U}(z)$ 共轭后保持不变，并且完全消去型算子的核在单参数意义下是可消去的。

命题 6.2. 若 T 是完全消去型双参数 δ-*Calderón-Zygmund*算子，且 $w \in G$，则$\mathfrak{U}(w)\,{}^tT\mathfrak{U}(w)$ 以及 T 的所有部分转置也都是完全消去型双参数 δ-*Calderón-Zygmund*算子，且其 δ*Calderón-Zygmund*算子（$\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$）范数相等。此外，$T$ 的两个核都是逐点消去的单参数 δ-*Calderón-Zygmund*算子。

证明。第一条结论显然。对于第二条，设 $a \in H^1(\mathbb{R}^{n_1})$ 和f，$g \in L^2(\mathbb{R}^{n_2})$ 的紧支集互不相交。于是

$$0 = \langle T(1 \otimes f), a \otimes g \rangle = \iint_{\mathbb{R}^{2n_2}} f(y)g(x)\langle K_2(x,y)1, a\rangle \, dxdy.$$

由于 f和 g是任意的，因此 $\langle K_2(x,y)\mathbf{1}, a\rangle = 0$ 几乎处处成立；又由 K_2的连续性可知，它处处成立。也就是说，对每个满足 $x \neq y$的 $x, y \in \mathbb{R}^{n_2}$，都有 $K_2(x,y)1 = 0$。核的其余消去性质可由对称论证得出。□

在证明完全可消去算子的部分局部化之前，我们先回顾一个类似的单参数估计，例如见 [21, 引理 4.1]。

命题 6.3。 若 T是满足 $T1 = T^t1 = 0$ 的 δ-*Calderón-Zygmund*算子，且 $(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$，则

$$|\langle T\psi, \psi_{(x,t)}\rangle| \lesssim \|T\|_{\delta CZO(\mathbb{R}^n)} \begin{cases} \frac{1}{t^{n/2+\delta}} & t \geq 1,\ |x| \leq t \\ \frac{t^{n/2}}{|x|^{n+\delta}} & t \geq 1,\ |x| > t \\ t^{n/2+\delta} & t < 1,\ |x| \leq 1 \\ \frac{t^{n/2+\delta}}{|x|^{n+\delta}} & t < 1,\ |x| > 1 \end{cases}.$$

引理 6.4。 若 T 是完全可消去的双参数 δ-*Calderón-Zygmund*算子，则

$$|\langle T\psi, \psi_z\rangle| \lesssim \|T\|_{\delta CZO(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} L(z),$$

其中 $L(z) = L_1(z_1)L_2(z_2)$ 对于 $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^{n_1+1} \times \mathbb{R}_+^{n_2+1}$成立，并且

$$L_i(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{n_i/2+\delta}} & t \geq 1, |x| \leq t \\ \frac{t^{n_i/2}}{|x|^{n_i+\delta}} & t \geq 1, |x| > t \\ t^{n_i/2+\delta} & t < 1, |x| \leq 1 \\ \frac{t^{n_i/2+\delta}}{|x|^{n_i+\delta}} & t < 1, |x| > 1 \end{cases}.$$

证明。 假设$\|T\|_{\delta\mathrm{CZO}(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})} = 1$。我们首先声称

$$\|\langle T(\cdot \otimes \psi), \cdot \otimes \psi_{z_2}\rangle\|_{\delta\mathrm{CZO}(\mathbb{R}^{n_1})} \lesssim L_2(z_2).$$

为估计 $L^2(\mathbb{R}^{n_1})$ 范数，固定 $f,\ g \in L^2(\mathbb{R}^{n_1})$，使得 $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})}\ \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})} \le 1$。那么 $\langle T(f\otimes\cdot)\ g\otimes\cdot\rangle$ 是一个消去型 δ-Calderón-Zygmund算子，因此由命题 6.3，得

$$\sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})},\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n_1})}\le 1} |\langle T(f\otimes\psi), g\otimes\psi_{z_2}\rangle| \lesssim L_2(z_2).$$

$\langle T(\cdot\otimes\psi)\cdot\otimes\psi_{z_2}\rangle$ 的核由 $\langle K_1(x,\ y)\psi,\ \psi_{z_2}\rangle$ 给出。由于对于每个 $x\neq y,\ K_1(x,\ y)$ 都是可消去的，我们再次根据命题 6.3 得到 $|\langle K_1(x,\ y)\psi,\ \psi_{z_2}\rangle| \lesssim |x-y|^{-n_1}L_2(z_2)$。通过类似的论证可得光滑性估计，因此结论成立。由于该算子是可消去的，再次应用命题 6.3 可得

$$|\langle T\psi,\psi_z\rangle| \lesssim L_1(z_1)L_2(z_2),$$

如所需。 □

推论 6.5。 如果 T 是完全消去双参数 *Calderón–Zygmund* 算子，那么 T 关于 $H_1=\mathbb{C}$、$H_2=L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 是部分局部化的，并且具有 $\{\psi_z\}_{z\in\mathbb{R}_+^{n_1+1}\times\mathbb{R}_+^{n_2+1}}$ 框架。

证明。 注意到 $L(\cdot^{-1}) = L(\cdot)$，因此根据引理 4.2，取 $\omega((x_1,t_1),(x_2,t_2)) = t_1^{n_1/2}t_2^{n_2/2}$，只需证明

$$|\langle T\mathfrak{U}(w)\psi,\mathfrak{U}(z)\psi\rangle| \lesssim L_1(w_1^{-1}z_1)L_2(w_2^{-1}z_2)$$

或者，等价地，证明

$$\sup_{w\in G}|\langle T_w\psi,\mathfrak{U}(z)\psi\rangle| \lesssim L_1(z_1)L_2(z_2),$$

其中 $T_w := \mathfrak{U}(w)^tT\mathfrak{U}(w)$。该估计由引理 6.4 和命题 6.2 得出。 □

定理 6.6。 若完全可消去双参数 *Calderón–Zygmund* 算子 T 满足乘积弱紧性性质，则 T 在 $L^2(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$上是紧算子。

证明。由于 $H_1=\mathbb{C}$, $T_{(z,w)}$ 是一个标量，对每个$z,w\in\mathbb{R}_+^{n_1+1}\times\mathbb{R}_+^{n_2+1}$而言，它在 $\mathbb{C}$ 上自动是紧的。因此，在这种情形下，弱紧性性质恰好归结为乘积弱紧性性质，结论由定理 1.5 得出。□

7. Proof of Theorem 1.1

现在我们证明主要结果定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。定义

$$T' := T - \Pi_{T1} - \Pi_{T^t1,t} - \Pi^t_{T_t^t1,t} - \Pi^t_{T^t1}.$$

注意，T' 是顶层消去型双参数 Calderón–Zygmund 算子。由定理 5.3 以及假设 $T1,\ T^t1,\ T_t1,\ T_t^t1\in$属于 CMO$(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$，每个副乘积都是紧的双参数 1CZO，因此只需证明 T'的紧性。注意，根据命题 2.6 和命题 2.3，由于每个顶层副乘积都是紧的，T'也满足与 T相同的假设。

现在定义

$$T'' := T' - \varpi_{1,T'} - \varpi^t_{1,T't} - \varpi_{2,T'} - \varpi^t_{2,T't}.$$

由定理 5.9 可知，部分副积算子是紧的，因此只需证明 T'' 的紧性。此外，注意到每个 ϖ 的紧性都由命题 2.3 推出其乘积弱紧性，进而推出 T'' 的乘积弱紧性。最后，由于 T'' 完全可消去且满足乘积弱紧性性质，根据定理 6.6，它是紧的。

所述条件的必要性由命题 2.3、命题 2.6 和推论 3.3 得出。□

推论 *1.2* 的证明。 这立即由定理 1.1 得出，因为 T_t 也是一个双参数 Calderón-Zygmund算子。□

8. Acknowledgements

感谢 Anastasios Fragkos 和 A. Walton Green 富有启发性的讨论与反馈。

本材料基于美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划在 DGE 2139839 号资助下支持的工作。本文所表达的任何观点、研究结果、结论或建议均属于作者个人意见，不一定反映美国国家科学基金会的观点。

References

[1] J. Alvarez 和 M. Milman， H^p Calder ´on-Zygmund 型算子的连续性性质，《数学分析与应用杂志》118（1986），第 1 期，63–79。MR0849442[2] ´A. B´enyi、G. Li、T. Oh 和 R. H. Torres，紧性 $T(1)$ 定理： `仿 Stein，《泛函分析杂志》289（2025），第 7 期，论文编号 111052，共 30 页。MR4910488[3] ´A. B´enyi、T. Oh 和 R. H. Torres，一类伪微分算子的符号演算及其在紧性中的应用，《几何分析杂志》10（2025），论文编号 301。MR4941980[4] M. Cao、A. Olivo 和 K. Yabuta，多线性紧算子的外推及其应用，Trans. Amer. Math. Soc 375（2022），第 7 期，5011–5070。MR4439498[5] M. Cao、K. Yabuta 和 D. Yang，Jorun ´e 乘积空间定理的紧扩张，Trans. Amer. Math. Soc. 377（2024），第 9 期，6251–6309。MR4855312[6] M. J. Carro、J. Soria 和 R. H. Torres，某些伪微分算子的紧性外推，《阿根廷数学联合会杂志》66（2023），第 1 期，177–186。MR4653690[7] S-Y. A. Chang 和 R. Fefferman，双圆盘上 H^1 与有界平均振荡对偶性的连续版本，《数学年刊》（第 2 辑）112（1980），第 1 期，179–201。MR0584078[8] R. Coifman 和 G. Weiss，Hardy 空间的扩张及其在分析中的应用，Bull. Amer. Math. Soc 83（1977），第 4 期，569–645。MR0447954[9] G. David 和 J.-L. Journ´e，广义 Calder ´on-Zygmund 算子的有界性判据，《数学年刊》（第 2 辑） 120 （ 1984 ），第 2 期，371–397。MR0763911[10] F. Di Plinio、B. D. Wick 和 T. Williams，奇异积分算子的小波表示，《数学年刊》386（2023），第 3–4 期，1829–1889。MR4612408[11] R. Fefferman，乘积区域上的 Calder ´on-Zygmund 理论： H^p 空间，《美国国家科学院院刊》83（1986），第 4 期，840–843。MR0828217[12] R. Fefferman 和 E. M. Stein，乘积空间上的奇异积分，Adv. Math. 45（1982），第 2 期，117–143。MR0664621[13] A. Fragkos、A. W. Green 和 B. D. Wick，多线性小波紧性 $T(1)$ 定理，arXiv:2312.09185（2023）。[14] A. Grau de la Herr´an，多参数算子的 $T1$ 条件比较，《美国数学会会刊》144（2016），第 6 期，2437–2443。MR3477059[15] Y. Han、M.-Y. Lee、C.-C. Lin 和 Y.-C. Lin，乘积 Hardy 空间上的 Calder ´on-Zygmund 算子，《泛函分析杂志》258（2010），第 8 期，2834–2861。MR2593346[16] T. P. Hyt¨onen 和 S. Lappas，加权空间上的紧性外推，Rev. Mat. Iberoam. 39（2023），第 1 期，91–122。MR4571600[17] T. Hyt¨onen、J. van Neerven、M. Veraar 和 L. Weis，《巴拿赫空间中的分析》第 III 卷：调和分析与谱理论， [数学及相关领域成果。 3rd 丛书：现代数学综述系列],Springer，Cham，2023。MR4696978[18] J.-L. Journ´e，乘积空间上的 Calder ´on-Zygmund 算子，Rev. Mat. Iberoam. 1（1985），第 3 期，55–91。MR0836284

[19] H. Martikainen，双参数奇异积分的二进算子表示，Adv. Math. 229（2012），第 3 期，1734–1761。MR2871155[20] Y. Meyer，《小波与算子》，剑桥高等数学研究，37，剑桥大学出版社，剑桥，1992。MR1228209[21] M. Mitkovski 和 C. B. Stockdale，关于紧性 Calder $T1$ on-Zygmund 算子的 ´定理，arXiv:2309.15819（2023）。[22] M. Mitkovski、C. B. Stockdale、N. A. Wagner 和 B. D. Wick，函数空间中的 Riesz-Kolmogorov 型紧性判据及其应用，Complex Anal. Oper. Theory 17（2023），第 3 期，论文编号 40。MR4569081[23] J-F. Olsen 和 P. Villarroya，紧 Calder ´on-Zygmund 算子的端点估计，Rev. Mat. Iberoam. 33（2017），1285—1308。MR3729600[24] Y. Ou，乘积空间上的一个 $T(b)$ 定理，Trans. Amer. Math. Soc. 367（2015），第 9 期，6159–6197。MR3356933[25] ,多参数奇异积分算子与表示定理，Rev. Mat. Iberoam. 33（2017），第 1 期，325–350。MR3615454[26] K-M. Perfekt、S. Pott 和 P. Villarroya，奇异积分的端点紧性及柯西积分的扰动，Kyoto J. Math. 57（2017），第 2 期，365–393。MR3648054[27] S. Pott 和 P. Villarroya，乘积空间上的一个 $T(1)$ 定理，arXiv:1105.2516（2011）。[28] C. B. Stockdale、P. Villarroya 和 B. D. Wick，加权空间上紧性的稀疏支配结果，Collect. Math. 73（2022），第 3 期，535–563。MR4467913[29] P. Villarroya，奇异积分紧性的刻画，《数学分析纯粹与应用杂志》（第 9 辑）104（2015），第 3 期，485–532。MR3383175Cody B. Stockdale, School of Mathematical Sciences and Statistics, Clemson University,Clemson, SC 29634, USA电子邮箱：cbstock@clemson.eduCody Waters, Department of Mathematics, Washington University in St. Louis, St. Louis,MO 63130, USA电子邮箱：codyw@wustl.edu