arXiv:2601.05477v1 [math.AG] 9 Jan 2026

可构造层的范畴

VALERY A. LUNTS, OLAF M. SCHN ¨URER

Abstract. 给定一个分层拓扑空间，我们回答以下问题：从可构造层的导出范畴到具有可构造上同调的层的导出范畴的函子是否为等价。

我们还确立了关于局部常值层范畴和可构造层范畴的基本事实。

Contents

1. 引言 1
2. 主要结果的表述 2
3. 局部常值层：命题 2.5 的证明 6
4. 导出范畴 D(局部常值层范畴(X))：定理 2.7 的证明 11
5. 可构造层：命题 2.10 和定理 2.13 的证明 14
6. 具有正规结构的分层空间 27
7. 主定理的不同版本 31
参考文献 36

1. Introduction

设 $\mathcal{A}$ 为阿贝尔范畴，$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是它在 $\mathcal{A}$ 中关于扩张封闭的全阿贝尔子范畴。可以考虑有界导出范畴 $\mathrm{D}^b(\mathcal{A})$，以及它的满三角子范畴 $\mathrm{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{D}^b(\mathcal{A})$，后者由上同调取值于 $\mathcal{B}$ 的复形构成。我们有显然的实化函子

$$\mathrm{real} : \mathrm{D}^b(\mathcal{B}) \to \mathrm{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \tag{1.1}$$

而且，实化是否为等价往往是一个重要问题。这个问题过于一般：只有在 $\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的某些具体例子中，才有一些有意义的结果。（纯代数的例子见 [LaLu21]。）

事实上，也许最有趣的例子来自拓扑学，其中 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是某些层范畴。

例如，可以考虑带有一个（有限）分层 $\mathcal{S}$ 的拓扑空间 X。令 $\mathcal{A}$ 为阿贝尔群层全体构成的范畴 $\mathsf{Sh}(X)$，令 $\mathcal{B}$ 为其满子范畴 $\mathsf{Cons}(X, \mathcal{S})$，该子范畴由 $\mathcal{S}$-可构造层构成（也就是说，它们在每个层上的限制都是局部系统，其秩可以是无限的）。在本文中，我们找出能保证相应实现函子

$$\mathrm{real} : \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})) \to \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(\mathrm{Sh}(X)) \tag{1.2}$$

是一个等价。关于有限秩可构造层的类似问题更加微妙，我们目前只有部分结果。

如果不固定空间的分层，而是考虑相对于某种（例如代数）分层可构造的层，那么函子 (1.2) 成为等价的可能性会更大。据我们所知，论文 [Nor02] 包含了这一框架下最一般的结果。

作者谨向 J¨org Sch¨urmann 致谢，感谢他就这一主题进行了一次非常有益的讨论。

1.1. **约定**。 所有环均假定为结合的且含幺，但不一定是交换的。符号 R 始终表示一个环。模均为左模，Mod(R) 表示左 R-模范畴。

通常，拓扑空间 X 上的层指 R-模层。 X 上的层范畴记为 Sh(X)。如果指的是集合层，我们会明确说明。预层也遵循同样的约定。

若 X 是一个拓扑空间，则 $\mathrm{H}^{\mathrm{sing}}_q(X, A)$ 和 H^q 奇异(X, A) 分别表示 X 取值于阿贝尔群或R-模 A的 q 阶奇异同调和上同调；$\mathrm{H}^{\mathrm{sing}}(X, F)$ 表示 X取值于阿贝尔群层或 R-模层F 的层上同调。

若 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴，则其复形范畴记作 C($\mathcal{A}$)，其同伦范畴记作 K($\mathcal{A}$)。

给定一个阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，阿贝尔子范畴是一个严格满子范畴$\mathcal{B}$，它本身是阿贝尔范畴，且其包含函子 $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是正合的。

阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$的（无界）导出范畴记作 D($\mathcal{A}$)。我们用 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$、$\mathrm{D}^{+}(\mathcal{A})$、$\mathrm{D}^{-}(\mathcal{A})$ 分别表示 D($\mathcal{A}$) 中上同调有界、有下界、有上界的对象构成的满子范畴。

若 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$的满子范畴，则我们用 $\mathrm{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$表示 D($\mathcal{A}$) 中满足以下条件的对象 E 构成的满子范畴：对所有 $p \in \mathbb{Z}$，其上同调层 $\mathrm{H}^p(E)$都属于 $\mathcal{B}$。若 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$的弱 Serre 子范畴，则 $\mathrm{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$是 D($\mathcal{A}$)的厚三角子范畴（参见 [Sta18, 02MN, 06UQ]）。范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$、$\mathrm{D}^{+}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$、$\mathrm{D}^{-}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$的定义显而易见。

我们将 $\mathrm{D}(R) := \mathrm{D}(\mathrm{Mod}(R))$、$\mathrm{D}(X) := \mathrm{D}(\mathrm{Sh}(X))$、$\mathrm{K}(X) :=\mathrm{K}(\mathrm{Sh}(X))$ 和 $\mathrm{C}(X):= \mathrm{C}(\mathrm{Sh}(X))$ 分别简写为上述形式。

三角范畴的移位函子有时记作 Σ，有时记作 $[1]$。

2. Formulation of main results

2.1. **局部常值层**。

定义 2.1. 设 X 为一个拓扑空间。

(a) 若 M 是一个 R-模，则将与预层 $U \mapsto M$相关联的 X 上的层记作 $M = M_X$，并称其为**茎为** M的常值层。等价地，它可以描述为 $M \times X \to X$ 的局部截面层，其中 M 带有离散拓扑。(b) X 上的层若同构于形如M_X的层，则称其为**常值**层。(c) X 上的层 F 若对 X 中的每一点，都存在一个开邻域 U，使得 $F|_U$ 为常值层，则称其为**局部常值**层。

局部常值层范畴记作 Loc(X)。它是 Sh(X) 的一个全子范畴。

定义 2.2。 若拓扑空间 X 是**单连通**的，则 X 路径连通，且对任意 $x \in X$满足 $\pi_1(X,x) = 1$。若 X 是**无环**（分别地，**1-无环**）的，则对所有 R-模 M，层上同调 $\mathrm{H}^0(X,M) = M$和 $\mathrm{H}^{>0}(X,M) = 0$（分别地，$\mathrm{H}^1(X,M) = 0$）。

定义 2.3. 若 (P) 是拓扑空间的一个性质，我们称拓扑空间 X **局部具有性质 (P)**，如果任意点 $x \in X$ 的任意邻域都包含一个具有性质 (P) 的开邻域 U。等价地，这意味着 X 的拓扑有一个由具有性质 (P) 的开子集构成的基。

2.4. 每个（局部）可缩空间都是（局部）单连通且（局部）无环的。

命题 2.5. 设 X 是非空、道路连通、局部单连通的拓扑空间。设 $x \in X$。则有以下结论。

(1) 存在范畴的自然等价

$$\mathrm{Loc}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}(R\pi_1(X,x)).$$

因此，范畴 $\mathrm{Loc}(X)$ 是一个（完备且余完备的）*Grothendieck* 阿贝尔范畴。它有足够多的投射对象和内射对象。

(2) 包含函子 $\mathrm{Loc}(X) \hookrightarrow \mathrm{Sh}(X)$ 是正合、连续且余连续的（即保持逆极限和直极限）。

(3) 进一步假设 X 是局部 *1*-无环的。那么，$\mathrm{Loc}(X)$ 在 $\mathrm{Sh}(X)$中对扩张封闭。

2.6. 若 $\mathsf{Loc}(X)$ 在 $\mathsf{Sh}(X)$ 中对扩张封闭，则 $\mathsf{D}^{\mathrm{Loc}(X)}(\mathsf{Sh}(X))$ 是 $\mathsf{D}(\mathsf{Sh}(X))$ 的厚三角子范畴，并且可以问显然的三角函子 $\mathsf{D}(\mathsf{Loc}(X)) \to \mathsf{D}^{\mathrm{Loc}(X)}(\mathsf{Sh}(X))$ 是否为等价。

定理 2.7。 设 X 是局部单连通、局部无环的拓扑空间。设 X 为 X的所有道路连通分支的万有覆盖的不交并。则以下两个条件等价。

(a) 显然的三角函子是等价

$$\mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^+_{\mathrm{Loc}}(X). \tag{2.1}$$

(b) $\mathrm{H}^{>0}(\widetilde{X}, \underline{M}) = 0$对所有 R-模 M均成立，即 X 的每个道路连通分支的万有覆盖都是无环的。

2.2. **可构造层**。

定义 2.8. 设 X 是一个拓扑空间。 X 的**分层**是将 X 划分为有限个非空局部闭子集 $\mathcal{S}$，称为**层**，并满足每个层的闭包都是若干层的并，即对每个 $S \in \mathcal{S}$，$S = \bigcup_{T \subset S} T$。**分层空间**是带有一个分层的拓扑空间。分层 $\mathcal{S}$ 上的以下条件 X 将会用到。

(loc-sc) 每个层都是局部单连通的。(loc-sa) 每个层都是局部 1-无环的。

定义 2.9. 设 $(X,\mathcal{S})$ 是一个分层空间。若对所有 $S \in \mathcal{S}$，层 F在 X 上满足 $F|_S \in \mathsf{Loc}(S)$，则称其为 $\mathcal{S}$**-可构造**。我们用 $\mathsf{Cons}(X,\mathcal{S})$ 表示 $\mathsf{Sh}(X)$ 中由 $\mathcal{S}$-可构造对象构成的满子范畴。（因此 $\mathsf{Cons}(S,\{S\}) = \mathsf{Loc}(S)$。）

复形 F 属于 $\mathsf{Sh}(X)$，若其所有上同调层 $\mathrm{H}^p(F)$ 都是 $\mathcal{S}$-可构造的，则称其为 $\mathcal{S}$**-可构造的**。对于 $\mathsf{D}(X)$ 中由 $\mathcal{S}$-可构造对象构成的满子范畴，我们记作 $\mathsf{D}_{\mathcal{S}}(X) := \mathsf{D}^{\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})}(X)$。

命题 *2.10.* 设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个 *(*局部可缩*)*-分层空间。那么 $Cons(X, \mathcal{S})$ 是一个 *Grothendieck* 阿贝尔范畴，且包含函子 $Cons(X, \mathcal{S}) \to Sh(X)$ 是正合且余连续的；特别地，$Sh(X)$ 中由 $Cons(X, \mathcal{S})$ 内对象构成的族的余积仍属于 $Cons(X, \mathcal{S})$。

此外，假设该分层是*(loc-sa)*的。那么，$\mathrm{Cons}(X、\ \mathcal{S})$ 是$\mathrm{Sh}(X)$的弱 *Serre* 子范畴。特别地，$\mathrm{D}_{\mathcal{S}}(X)$ 是$\mathrm{D}(X)$ 的厚三角子范畴，并且在$\mathrm{D}(X)$中对余积封闭。

2.3. **实现函子**。 设 $(X,\ \mathcal{S})$ 是一个(loc-sc)-(loc-sa)-分层空间。那么，$\mathrm{Cons}(X,\ \mathcal{S})$ 是一个阿贝尔范畴，而 $\mathrm{D}_{\mathcal{S}}(X)$ 是 $\mathrm{D}(X)$ 的厚三角子范畴。人们可以问，显然的实现三角函子

$$\mathrm{real}\colon \mathrm{D}(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})) \to \mathrm{D}_{\mathcal{S}}(X). \tag{2.2}$$

是否是一个等价。

定义 2.11。 设 $(X,\ \mathcal{S})$ 是一个(loc-sc)-(loc-sa)-分层空间。若该分层 $\mathcal{S}$ 满足以下附加条件，则称其为(cons) 。

(cons) 若 $l\colon\ S \to X$ 是任意层 $S \in \mathcal{S}$ 的包含映射，则（参见 [BBD82，第 2.1.13 节，第 61] 页） $l_*\colon\ \mathrm{Sh}(S) \to \mathrm{Sh}(X)$ 的右导出函子 $\mathrm{R}l_*\colon\ \mathrm{D}^+(S) \to \mathrm{D}^+(X)$ 将 $\mathrm{Loc}(S)$ 中的对象（视为集中在零次的复形）映射到 $\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$。

引理 2.12。 设 $(X,\ \mathcal{S})$ 是一个 *(loc-sc)-(loc-sa)-(cons)* 分层空间，并设 $l\colon\ S \to X$ 是任意层 $S \in \mathcal{S}$的包含映射。则以下结论成立。

(1) 函子 $l_*\colon \mathrm{Sh}(S) \to \mathrm{Sh}(X)$ 限制为阿贝尔子范畴之间的左正合函子

$$l_*\colon \mathrm{Loc}(S) \to \mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})$$

记

$$\mathrm{R}_{\mathrm{cs}} l_*\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(S)) \to \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S}))$$

为其导出函子。

(2) 那么存在一个典范 *2*-态射

$$\sigma\colon \mathrm{real} \circ \mathrm{R}_{\mathrm{cs}} e_* \Rightarrow \mathrm{R}e_* \circ \mathrm{real} \tag{2.3}$$

在从 $\mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(S))$ 到 $\mathrm{D}^+(X)$的函子之间，如图表所示

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(S)) & \xrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{cs}} l_*} & \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}} & \overset{\sigma}{\swarrow} & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}} \\ \mathrm{D}^+(S) & \xrightarrow{\mathrm{R}l_*} & \mathrm{D}^+(X). \end{array}$$

定理 2.13。 对于一个 （局部可缩） -（局部半可缩） -（可构造层范畴）-分层空间 （$X,\ \mathcal{S}$），以下条件等价。

(a) The functor

$$\mathrm{real}\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})) \to \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X) \tag{2.4}$$

是一个等价。

(b) 对所有层 $S \in \mathcal{S}$，函子

$$\mathrm{real}\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(S)) \to \mathrm{D}^+_{\mathrm{Loc}}(S) \tag{2.5}$$

是一个等价（参见注*2.14*），并且

$$\sigma\colon \mathrm{real} \circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}} l_* \xRightarrow{(2.3)} \mathsf{R} l_* \circ \mathrm{real} \tag{2.6}$$

是一个 *2*-同构，其中 $l\colon S \to X$ 表示包含映射。

注 2.14。 由定理 2.7可知，上述定理中的函子（2.5）是一个等价，当且仅当 S局部单连通、局部无环，且对所有$^{>0}$（$\widetilde{S}$，M）$=0$和所有$\sim R$-模 M，其中 S 是 S 的道路连通分支的万有覆盖的不交并。

接下来，我们给出使 2-态射（2.6）成为同构的一些充分条件。

为简单起见，我们将讨论限制在具有正规结构的分层空间（$X,\mathcal{S}$）上（精确定义见 6.2）。这意味着所有层都是连通流形，并且对于每个层 T 和每个点 $x \in T$，都存在一个开邻域 $x \in U \subset X$，它与 T 在 x处的链接 L_x 之上的锥与 $U \cap T$ 的乘积同胚。若 S 是另一个满足$T \subset S$的层，则$L_{x,S} := L_x \cap S$是一个具有有限个连通分支 $L_{x,S,i}$的流形。下一个结果由定理 6.10 得出。

定理 2.15。 设 $(X,\mathcal{S})$ 是一个具有正规结构的分层空间。假设每个层 S 都是一个 $K(\pi,1)$ 流形，即其万有覆盖空间是可缩的。此外，假设对于任意满足 $T \subset S$ 的层 S,T 以及任意点 $x \in T$，流形 $L_{x,S}$ 的每个连通分支 $L_{x,S,i}$ 也都是一个 $K(\pi,1)$-空间。

若对于每对层 $T \subset S$、每个点 $x \in T$ 以及流形 $L_{x,S}$ 的每个连通分支 $L_{x,S,i}$，以下条件都成立，则定理 *2.13* 中的等价条件成立：同态 $\pi_1(L_{x,S,i}) \to \pi_1(S)$ 的核是一个有限子群，其阶与 R 的特征互素。（特别是，如果该同态是内射的）

例如，函子

$$\mathrm{real}\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})) \to \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$$

是一个等价，对于复托里克簇 X 按环面轨道分层的情形（推论 6.11），而对于 $X = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 按布鲁哈分层的情形则不是等价 $X = \mathbb{C} \sqcup \{pt\}$。

2.4. **有限秩局部系统**。 在第 7 节中，我们将针对有限型可构造层探讨一个相关问题。具体而言，假设系数环 R是一个域 k，并记 $\mathrm{Cons}_{ft}(X,\ \mathcal{S}) \subset \mathrm{Cons}(X,\ \mathcal{S})$ 为由具有有限维茎的可构造层构成的全阿贝尔子范畴。再令 $\mathrm{D}^b_{ft}(X) \subset \mathrm{D}^b_{\mathcal{S}}(X)$ 为相应的三角范畴。我们可以询问显然的函子何时……

$$\mathrm{D}^b(\mathrm{Cons}_{ft}(X,\mathcal{S})) \to \mathrm{D}^b_{ft}(X) \tag{2.7}$$

是一个等价。特别地，当（2.5）是等价时，（2.7）是否也是等价？如果显然的函子

$$\mathrm{D}^b(\mathrm{Cons}_{ft}(X,\mathcal{S})) \to \mathrm{D}^b_{\mathrm{Cons}_{ft}}(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})) \tag{2.8}$$

也为一个等价。我们将在第7 节研究这类问题，并在某些情况下得到肯定的答案（例如参见推论7.15）。

事实上，即使在只有一个层的情况下，（2.8）是否为等价也并不明确。这是一个纯粹的代数问题，我们将在第 7 节中解决若干特殊情况。

3. Locally constant sheaves: Proof of Proposition 2.5

3.1. 设 F 是拓扑空间 X 上的一个层，其 étalé 空间为 F。那么， F 是局部常值的，当且仅当 $F \to X$ 是覆盖映射。

3.2. 回顾一下，Sh(X) 是一个 Grothendieck 阿贝尔范畴 [Sta18，079V，01AH]。

命题 3.3。 设 X 是一个单连通、局部道路连通的拓扑空间。则以下陈述成立。

(a) 函子 $\mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Sh}(X)$，$M \mapsto M$ 是全忠实且正合的，其本质像为$\mathrm{Loc}(X)$，因此给出一个范畴等价

$$\mathrm{Mod}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}(X)$$

。整体截面函子是该函子的拟逆。（另一个拟逆是取任意一点处的茎。）特别地，$\mathrm{Loc}(X)$ 具有$\mathrm{Mod}(R)$的所有范畴性质，例如，它是一个（完备且余完备的）*Grothendieck* 阿贝尔范畴，且有足够多的内射对象和投射对象。

此外，包含函子$\mathrm{Loc}(X) \to \mathrm{Sh}(X)$ 是正合的、连续的（= 保极限）且余连续的（= 保余极限）。*(b)* $\mathrm{Loc}(X)$在$\mathrm{Sh}(X)$中对扩张封闭（即$\mathrm{Loc}(X)$是$\mathrm{Sh}(X)$的弱 *Serre* 子范畴）当且仅当 X 是 *1*-无环。

证明。 (a) 设 $c\colon X \to \mathrm{pt}$ 是到单点空间的映射，将其视为环化空间之间的映射，其结构层分别为R 和 R。于是我们有一个伴随 $c^* : \mathrm{Mod}(R) \leftrightarrows \mathrm{Sh}(X) : c_*$。注意 $c^*(M) = M$以及 $c_*(F) = \Gamma(X, F)$。我们需要证明 c^* 是全忠实的，并且其本质像恰好由所有局部常值层组成。

给定 $F \in \mathrm{Loc}(X)$，考虑其 étalé 空间 ´etal´e F，它是拓扑空间范畴 Top$_{/X}$ 中 X上的环对象R 的一个模对象，参见 [MLM94, II.7]。由于 F 是局部常值的，任意 $x \in X$ 都有一个开邻域，使得 $F|_U$ 是常值的，也就是说，$F|_U \cong N \times U$（作为模对象）与到U的投影相容，其中 N 是一个配备离散拓扑的 R-模。这意味着 F 是局部道路连通的，且 $F \to X$ 是覆盖映射。因此， F 的每个连通分支（= 道路连通分支）在 F 中都是开的；而且，由于 X 是单连通且局部道路连通的，它同胚映射到 X。若 M 是 $\widetilde{F}$的道路连通分支集合，则通过将一点映射到由其在 X 中的像及其道路连通分支构成的有序对，可得到一个覆盖 X 的同胚 $\widetilde{F} \xrightarrow{\sim} M \times X$。考虑 R 的作用可知，M 具有自然的 R-模结构，且使得这实际上是 Top$_{/X}$中 R 上的模对象之间的同胚。因此，$M \cong F$ 作为层彼此同构。这证明了本质满性。

c^*的全忠实性等价于对每个 R-模 M， $M \to c_*c^*(M) = \Gamma(X, M)$ 是一个同构。但这一点显然，因为任意（整体）截面

$\underline{M} = M \times X \to X$ 都具有 $x \mapsto (x,\ m)$ 的形式，其中 $m \in M$ 固定，因为 X 连通且 M 具有离散拓扑。这证明了等价关系 $\mathbf{Mod}(R) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Loc}(X)$。

由 $c^*\colon \mathbf{Mod}(R) \to \mathbf{Sh}(X)$ 是正合且为左伴随这一事实可知，$\mathbf{Loc}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ 是正合且余连续的（= 保持余极限）。

为了证明包含函子保持极限，只需证明它 c^* 保持积。设 $(M_i)_{i\in I}$ 是一族 R-模。由于层的预层积本身已经是层，我们得到：对于 X 的开子集 U

$$(\prod_{i\in I} \underline{M_i})(U) = \prod_{i\in I} (\underline{M_i}(U)) = \prod_{i\in I} (\mathrm{Top}_{/U}(U, M_i \times U)) = \prod_{i\in I} (\mathrm{Top}(U, M_i)) = \mathrm{Top}(U, \prod_{i\in I} M_i)$$

其中 $T := \prod_{i\in I} M_i$ 赋有积拓扑（= 蒂霍诺夫拓扑）。另一方面，

$$\left(\prod_{i\in I} M_i\right)(U) = (\mathrm{Top}_{/U}(U, (\prod_{i\in I} M_i) \times U)) = \mathrm{Top}(U, \prod_{i\in I} M_i)$$

其中 $D := \overline{\prod_{i\in I} M_i}$ 赋有离散拓扑。恒等映射是一个连续映射$D \to T$。我们断言诱导映射

$$\mathrm{Top}(U, D) \to \mathrm{Top}(U, T)$$

是一个同构。单射性显然。为证明满射性，设 $s\colon U \to T$ 是一个连续映射。由于 U 是局部道路连通的，U 是其开道路连通分支的不交并，也就是说，是 **Top** 中这些道路连通分支的余积。因此不失一般性，可假设 U 是（道路）连通的。由于 M_i 赋有离散拓扑，每个复合映射 $U \xrightarrow{s} T \to M_i$ 都必须是常值映射。因此s 是常值的，并且作为映射 $U \to D$ 连续。这就证明了满射性。

(b) 假设对于所有 R-模 K，$\mathrm{H}^1(X, K) = 0$。设 $0 \to M \to E \to N \to 0$ 是 $\mathbf{Sh}(X)$ 中的一个短正合列，其中 $M, N \in \in \mathbf{Loc}(X)$。由 (a) 可知$\Gamma(X, M) \xrightarrow{\sim} M$，因此根据假设，$\mathrm{H}^1(X, M) = 0$。于是，关于导出函子 $\Gamma(X, -)$ 的长正合列表明，$0 \to \Gamma(X, M) \to \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, N) \to 0$ 是正合的。将正合函子 c^* 应用于这个短正合列，并考虑由伴随余单位给出的、到原短正合列的态射。由 (a) 可知，对于局部常值层 M 和 N，伴随余单位是同构，因此 $\Gamma(X, E) \to E$ 也是同构，即 $E \in \in \mathbf{Loc}(X)$。

反之，假设 $\mathbf{Loc}(X)$ 在 $\mathbf{Sh}(X)$ 中对扩张封闭。令 $\xi \in \mathrm{H}^1(X, M) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Sh}(X)}(R, M)$ 为一个元素。令 $0 \to M \to E \to R \to 0$ 为 $\mathbf{Sh}(X)$ 中的一个短正合列，其米田等价类对应于 ξ。由于根据假设 $\mathbf{Loc}(X)$ 对扩张封闭，我们的短正合列存在于 $\mathbf{Loc}(X)$ 中。由 (a) 部分中的等价 $\mathbf{Mod}(R) \cong \mathbf{Loc}(X)$ 可知，R 是 $\mathbf{Loc}(X)$ 中的投射对象。因此，我们的短正合列分裂。这意味着 $\xi = 0$。

□

命题 3.4。令 X 为一个局部单连通的拓扑空间。那么$\mathrm{Loc}(X)$ 是一个 *Grothendieck* 阿贝尔范畴，且包含函子 $\mathrm{Loc}(X) \to \mathrm{Sh}(X)$ 是正合、连续且余连续的；特别地，$\mathrm{Sh}(X)$ 中由 $\mathrm{Loc}(X)$中的对象组成的族的余积和积仍然属于 $\mathrm{Loc}(X)$。

此外，如果 X 是局部 *1*-无环的，那么$\mathrm{Loc}(X)$是$\mathrm{Sh}(X)$的弱 *Serre* 子范畴。

证明。设 X 是开局部单连通的。设 $K = \mathrm{Ker}(f)$是 $\mathrm{Sh}(X)$ 中态射 $f\colon M \to N$ 的核，其中 $M \to N$ 属于 $\mathrm{Loc}(X)$。为了证明 K 是局部常值的，取 $x \in X$。设 U 是 U中 x 的单连通开邻域。注意， $j^*\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(U)$是正合的，并将 $\mathrm{Loc}(X)$映到 $\mathrm{Loc}(U)$。因此，由于 U是单连通且局部单连通的，故也是局部道路连通的，根据命题 3.3 的 (a) 部分可得 $j^*(K) = \mathrm{Ker}(j^*(f))) \in \mathrm{Loc}(U)$。因此 $K \in$属于 $\mathrm{Loc}(X)$。类似地可证，$\mathrm{Sh}(X)$ 中任意 $\mathrm{Loc}(X)$内态射的余核都属于 $\mathrm{Loc}(X)$。这表明 $\mathrm{Loc}(X)$是 $\mathrm{Sh}(X)$的阿贝尔子范畴。

函子 $j^* = j^!\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(U)$ 有一个左伴随 $j_!$和一个右伴随j_*，因此保持积和余积。同样，根据命题(a)的第3.3 部分，我们推得 $\mathrm{Loc}(X)$ 在 $\mathrm{Sh}(X)$ 中对积和余积封闭，并且 $\mathrm{Loc}(X)$ 中的所有极限和余极限都存在，且与在 $\mathrm{Sh}(X)$ 中计算所得的相同。由于 $\mathrm{Sh}(X)$ 是一个 Grothendieck 阿贝尔范畴，因此 $\mathrm{Loc}(X)$ 也是如此。

为了验证 $\mathrm{Loc}(X)$ 对扩张封闭，我们也可以像上面那样在单连通开子集上局部检验。我们可以假设，对所有 U，$\mathrm{H}^1(U, M) = 0$ 成立，因此对所有 R-模 M，命题(b) 的第3.3 部分适用。□

—

3.1. G-空间与等变层。设 G 是一个群， X 是一个拓扑空间，且具有由同胚构成的 G-作用，即映射 $g\colon X \to X$对所有 $g \in G$ 均连续；或者等价地，作用映射 $G \times X \to X$ 是连续的，其中 G取离散拓扑。于是便有 G-等变层（集合层或 R-模层）在 X 上的概念（见 [Gro57, 5.1]）。我们通常通过其 étalé 空间来理解 G-等变层 F （集合层或 R-模层）在 X 上的含义；也就是说，存在一个~ ~连续作用 $G \times F \to F$，它在显然的映射下与给定作用 $G \times X \to X$ 相容。令 $\mathrm{Sh}_G(X)$ 表示 X 上 G- 等变层（ R- 模层）的范畴。这是一个 Grothendieck 阿贝尔范畴（见 [Gro57, 命题 5.1.1]）。遗忘函子 $\mathrm{Sh}_G(X) \to \mathrm{Sh}(X)$ 是正合、连续且余连续的。若一个 G-等变层的底层层是局部常值层，则称其为局部常值层。$\mathrm{Sh}_G(X)$ 中由 G-等变局部常值层构成的满子范畴记为 $\mathrm{Loc}_G(X)$。

令 RG 为 R 上的 G 群环。给定 $M \in \mathrm{Mod}(RG)$，令 M 为拓扑G-空间间态射 $M \times X \to X$ 的局部截面层，其中 M 具有离散拓扑，且 G 在 $M \times X$ 上对角作用。显然，$M \in \mathrm{Loc}_G(X)$。此 G-等变层的底层层是与 M 的底层 R-模相关联的常值层。

命题 3.5。设 X 是一个单连通、局部道路连通的拓扑空间。设 G 是一个通过同胚作用于 X 的群。则函子$\mathrm{Mod}(RG) \to \mathrm{Sh}_G(X)$， $M \mapsto M$，是全忠实的，其本质像为 $\mathrm{Loc}_G(X)$，因此给出一个等价

$$\mathrm{Mod}(RG) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}_G(X) \tag{3.1}$$

范畴。（取整体截面是此函子的拟逆。）特别地，局部常值层范畴$_G(X)$ 是一个（完备且余完备的）*Grothendieck* 阿贝尔范畴，并且有足够的内射对象和投射对象。此外，包含函子局部常值层范畴$_G(X)$ $\to$层$_G(X)$ 是正合、连续且余连续的。如果 X 是 *1*-无环的，那么局部常值层范畴$_G(X)$ 在层$_G(X)$中对扩张封闭。

证明。由命题 3.3（的证明）可知如下。给定 $F \in$局部常值层范畴$_G(X)$，我们知道，底层层 $F \in$ 局部常值层范畴(X) 的 étalé 空间 $´$ 与 $´$ 同构，且该同构是 F 典型地 的，其中 M 是 R 的道路连通分支所成的 M 模。由于 F 是 G-等变的， G 的作用会置换 F 的道路连通分支，即 G 作用于 M。此作用是 R-线性的，因此 M 是一个 RG模。显然， $M \xrightarrow{\sim} F$作为 G-等变层成立。因此，我们的函子是本质满的。给定 $M,N \in$模(RG)，我们有 $\mathrm{Hom}_{RG}(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N)^G$，并且 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_G(X)}(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(M,N)^G$，其中 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Sh}(X)}(M,N)$ 上带有显然的 G作用。因此，对 G-不变量取值后，$\mathrm{Mod}(R) \to$ 层(X) 的全忠实性蕴含了全忠实性。

命题 3.3 的 (b) 部分蕴含了关于在扩张下封闭这一断言。

□

定义 3.6。设 G 是一个群， X 是一个 G-空间。我们称 G-作用是**拓扑自由的**（参见 [Mun00，§81]），如果每个点 x 在 X 中都有一个邻域U，使得对于每个非恒等的 U， gU 与 $g \in G$不相交。

命题 3.7。设 G 是一个群， X 是一个 G-空间。假设 G的作用是拓扑自由的。令 $\pi\colon X \to Y := G\backslash X$ 为商映射。那么，任意层 $F \in \mathrm{Sh}(Y)$ 的拉回 π^*F 都自然地具有 G-等变层的结构，并由此定义了等价 $\pi^*\colon \mathrm{Sh}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_G(X)$ 以及

$$\pi^*\colon \mathrm{Loc}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}_G(X). \tag{3.2}$$

这些等价的一个（准）逆由以下映射给出：将 G-等变层F（定义在 X上）映到其推前 π_*F 中 G-不变截面构成的子层 $\pi_*^G(F)$。 $\pi_*^G(F)$ 的 ***étalé*** 空间是 F的 ***étalé*** 空间 $\widetilde{F}$的商空间 $G\backslash\widetilde{F}$。

证明。众所周知， $\pi^*\colon \mathrm{Sh}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_G(X)$ 是一个等价，参见例如 [Gro57，5.1，第 199], 页，而且很容易证明（连同逆函子的描述一起）。于是（3.2）成立，因为空间 Y 上的层是局部常值的，当且仅当其在 X 上的拉回是局部常值的；这里用到了 π 是一个覆盖映射。□

命题 3.8。设 G 是一个群， X 是一个 G-空间，其上有一个拓扑自由的 G作用，并且商映射为 $\pi\colon X \to G\backslash X =: Y$。假设 X 是单连通且局部道路连通的。那么，$\pi_!R$ 对（非等变）常值层 $R \in \mathrm{Loc}(X)$ 的具有紧支撑的直接像是局部常值的，并且是$\mathrm{Loc}(Y)$的一个投射生成元。更确切地说，在以下等价下，它对应于 $RG \in \mathrm{Mod}(RG)$

$$\mathrm{Mod}(RG) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}(Y) \tag{3.3}$$

由等价(3.1) 以及等价的拟逆 π_*^G 得到(3.2)。

证明。 G-等变局部常值层 RG 的étalé空间是 $RG \times X$。映射 $RG \to R$, $\sum r_g g \mapsto r_e$ 诱导一个态射 $RG \times X \to R \times X$，或者等价地，诱导一个态射 $\varepsilon\colon RG \to R \in \mathrm{Sh}(X)$。更准确地说，我们断言态射 $\pi_*\varepsilon\colon \pi_*RG \to \pi_*R$ 限制在指定的子层上是一个同构 $\pi_*^G RG \xrightarrow{\sim} \pi_!R$ 。

由于我们的作用是拓扑自由的， Y是局部道路连通的。此外， Y 中任意一点的任意开邻域都包含该点的一个开连通邻域

，使得存在一个同构 $\pi^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} G \times V$，它关于 G-作用 $g.(h,v) = (gh,v)$ 在 $G \times V$ 上是 G-等变的。因此，只需证明，对于任意这样的 V，$(\pi_*\varepsilon)(V) : (\pi_* RG)(V) \to (\pi_* R)(V)$ 将 $(\pi_*^G RG)(V)$ 与 $(\pi_! R)(V)$ 对应起来。固定如上所述的 V。那么——

$$\begin{aligned}(\pi_*^G \underline{RG})(V) &= \{s\colon \pi^{-1}(V) \to RG \text{ continuous } G\text{-equivariant}\}\\ &\cong \{s\colon G \times V \to RG \text{ continuous } G\text{-equivariant}\}\\ (V \text{ connected non-empty}) \quad &\cong \{s\colon G \to RG \ G\text{-equivariant}\}\\ (\text{evaluation at } e \in G) \quad &\xrightarrow{\sim} RG\end{aligned}$$

其中，元素 $\sum_{g\in G} r_g g \in RG$ 对应于连续的等变截面 $G\times V \to RG$，$(h,v) \mapsto \sum_{g\in G} r_g hg$。在 $(\pi_*\varepsilon)(V)$ 下，该截面映射为连续截面 $(h,v) \mapsto r_{h^{-1}}$，其支集由有限多个片组成（即满足 $r_{h^{-1}} \neq 0$ 的那些片 $h \times V$），属于 $G \times V \to V$。另一方面，我们有[1]

$$\begin{aligned}\pi_!(\underline{R})(V) &= \{s\colon \pi^{-1}(V) \to R \text{ continuous with } \operatorname{supp}(s) \to V \text{ proper}\}\\ &\cong \{s\colon G \times V \to R \text{ continuous with } \operatorname{supp}(s) \to V \text{ proper}\}\\ (V \text{连通且非空}) &\cong \{s\colon \ G \to R \text{ 其中 } \operatorname{supp}(s) \text{ 有限}\}\\ &= RG\end{aligned}$$

其中，元素 $\sum_{g\in G} t_g g \in RG$ 对应于连续截面 $G \times V \to R$，$(h,v) \mapsto t_h$，其支集位于有限多个片上。因此，$\pi_*\varepsilon(V)$ 将 $(\pi_*^G RG)(V)$ 双射到 $\pi_!(R)(V)$。（RG 的相应自同态将 $\sum r_g g \in RG \cong (\pi_*^G RG)(V)$ 映射到 $\sum r_{g^{-1}} g \in RG \cong \pi_!(R)(V)$。）□

定义 3.9. 若拓扑空间 X 中的任意一点$x \in X$ 都有一个邻域（可假设为开集） U，使得$\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$是平凡的，则称该空间为**半局部单连通**。

3.10. 回顾一下：非空、道路连通且局部道路连通的拓扑空间 X 存在万有覆盖，当且仅当它是半局部单连通的（参见 [Mun00，推论 82。2]）。

显然，任何局部单连通空间都是局部道路连通且半局部单连通的，而任何开子空间仍然是局部单连通的。因此，任何非空、道路连通且局部单连通的拓扑空间及其每个非空道路连通开子空间都有万有覆盖。

非空道路连通拓扑空间的任意两个万有覆盖彼此同构；若考虑带基点空间，则它们之间存在唯一同构。因此，尽管这种说法稍显不严谨，我们仍称之为万有覆盖。

命题 3.11. 设 X 是非空、道路连通且局部道路连通的拓扑空间。设 $x \in X$。则将 $L \in \operatorname{Loc}(X)$ 映到其纤维 L_x，并赋予其R-模结构以及通过在 $\pi_1(X,x)$ 处提升环路为 x 中的路径所诱导的左作用~*étale* ´空间´ L (参见 *3.1*)，定义了一个等价：“取 x处的纤维”

$$\operatorname{Loc}(X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}(R\pi_1(X,x)).$$

[1] $\pi_!$ 同理，只需增加“支集真”的要求。

~证明。由 3.10 可知，X 有一个万有覆盖 $X \to X$。群 G 由 ~ ~的覆盖变换组成，并在 X上适当不连续地作用；此外，存在规范同一化 $G = \pi_1(X, x)$。因此，$\mathrm{Mod}(\pi_1(X, x)) = \mathrm{Mod}(RG)$，并且不难看出，命题 3.8 中 (3.3) 的等价 $\mathrm{Mod}(RG) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}(X)$ 是“取 x处的纤维”这一函子的拟逆。□

3.2. **命题 2.5的证明。** 命题 2.5立即由命题3.11 和命题3.4得出。

4. Derived category D(局部常值层范畴(X)): proof of Theorem 2.7

设 X 是一个局部单连通的拓扑空间。根据命题 X，$\mathrm{Loc}(X)$ 是阿贝尔的，因此 $\mathrm{D}(\mathrm{Loc}(X))$ 有定义。此外，$\mathrm{Loc}(X) \to \mathrm{Sh}(X)$ 是正合的，故存在一个显然的函子 $\mathrm{D}(\mathrm{Loc}(X)) \to \mathrm{D}(X)$。它与任意余积交换，并且映入 $\mathrm{D}_{\mathrm{Loc}}(X)$。

此外，如果 X 是局部 1-无环的，那么根据命题 X，$\mathrm{Loc}(X)$ 是 $\mathrm{Sh}(X)$ 的弱 Serre 子范畴，于是 $\mathrm{D}_{\mathrm{Loc}}(X)$ 是 $\mathrm{D}(X)$ 的厚三角子范畴。它在 $\mathrm{D}(X)$ 中对任意余积封闭。显然的函子

$$\mathrm{D}(\mathrm{Loc}(X)) \to \mathrm{D}_{\mathrm{Loc}}(X)$$

是三角的。所有范畴 $\mathrm{D}(X)$、D(局部常值层范畴(X)) 和 $\mathrm{D}_{\mathrm{Loc}}(X)$ 都有所有余积，因此特别是幂等完备的。上述函子与余积交换。

定理 4.1。 *(=定理 2.7)* 设 X 是一个局部单连通、局部无环的~拓扑空间。设 X 为其所有道路连通分支的万有覆盖的不交并 X。那么以下两个条件等价。

(a) 显然的三角函子是一个等价

$$\mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^+_{\mathrm{Loc}}(X). \tag{4.1}$$

(b) $\mathrm{H}^{>0}(\widetilde{X}, \underline{M}) = 0$对所有 R-模 M 均成立，即 X 的每个道路连通分支的万有覆盖都是无环的。

~证明。 设 π: $X \to X$ 为显然的映射。我们再给出两个条件。

(a)’ 显然的三角函子是一个等价

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Loc}(X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{Loc}}(X).$$

(b)’ 映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{Loc}(X))}(\pi_! \underline{R}, [q]N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\pi_! \underline{R}, [q]N) \tag{4.2}$$

对于所有 $N \in \mathrm{Loc}(X)$ 和 $q \in \mathbb{Z}$，都是一个同构。

我们将证明给定的四个条件彼此等价。蕴含关系(a) $\Rightarrow$(a)’ 和(a)’ $\Rightarrow$ (b)’ 显然成立。不失一般性，我们可以假设 X 是~连通的，因此 π: $X \to X$ 是万有覆盖。令 G 为它的覆盖变换群~ ~。那么 G 在 X 上拓扑自由地作用，并且 $G \backslash X = X$ 是典范的。

(b)’ $\Longleftrightarrow$ (b)：显然，态射（4.2）对于 $q = 0$是一个同构；对于所有 $q \neq 0$，其源对象都为零，因为 $\pi_! R$ 在 $\mathrm{Loc}(X)$ 中是投射对象，这由命题3.8得出。

注意，在 $\mathrm{Sh}(X)$ 之间存在一个由正合函子构成的伴随 $(\pi_!, \pi^*)$ ~

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\widetilde{X})}(\underline{R}, [q]\pi^* N) \cong \mathrm{H}^q(\widetilde{X}, \pi^* N).$$

因此，只需证明（非等变）局部常值层 π^*N（$N \in \mathrm{Loc}(X)$ 中）的同构类集合，与常值层 M（$M \in \mathrm{Mod}(R)$ 中）的同构类集合相同。这由等价 $\pi^*\colon \mathrm{Loc}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}_G(X)$（命题 3.7）、$\mathrm{Loc}_G(X) \to \mathrm{Loc}(X)$ 的本质满性（使用平凡的 G-作用），以及等价 $\mathrm{Mod}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}(X)$（命题 3.3.(a)）显然可得。

(b)' $\Rightarrow$ (a)：局部常值层范畴(X) 中任一投射对象都是由投射生成元 $\pi_!R$ 的若干副本构成的余积的直和项。因此，映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{Loc}(X))}(P, [p]N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(P, [p]N) \tag{4.3}$$

对于所有投射对象 $P \in$ 局部常值层范畴(X)、所有对象 $N \in$局部常值层范畴(X) 以及所有$p \in \mathbb{Z}$，都是双射。利用维数归纳法（以及智能截断），通过标准论证可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{Loc}(X))}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(M, N) \tag{4.4}$$

对于所有 $M \in \mathrm{D}^-$(局部常值层范畴(X)) 和所有 $N \in \mathrm{D}^+$(局部常值层范畴(X))，都是同构。

现在我们证明（4.4）对于所有 $M \in$D(局部常值层范畴(X)) 以及所有$N \in \mathrm{D}^+$(局部常值层范畴(X))，甚至是同构。

由于局部常值层范畴$(X) \cong$Mod(RG) 中存在（可数）余积，且这些余积是正合的，因此任一对象 $M \in$D(局部常值层范畴(X)) 都可以表示为其截断 $(\tau_{\le n}M)_{n\in\mathbb{N}}$ 的同伦余极限，即存在一个三角

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \tau_{\le n}M \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \tau_{\le n}M \to M \to$$

在 D(Loc(X)) 中，根据 [BS19，引理 2.15、命题 2.16]（参见 [BN93，注记 2.3]）。这个三角在 D(X) 中的像当然仍是一个三角；此外，由于 D(Loc(X)) $\to$ D(X) 保持余积，它将 M 表示为其截断的同伦余极限（$\tau_{\le n}M$）$_{n\in\mathbb{N}}$。现在将上同调函子 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{D}(\mathrm{Loc}(X))}(-, N)$ 和 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{D}(X)}(-, N)$ 应用于这两个三角，并利用余积的泛性质、对象 $\tau_{\le n}M$ 的上方有界性以及我们先前得到的知识，即可证明该断言。

特别地，这表明 D^+（Loc(X)）$\to \mathrm{D}^+_{\mathrm{Loc}}(X)$ 是全忠实的。还需证明本质满。显然，Loc(X) 的所有对象及其平移都属于本质像。然后，通过智能截断和满性，我们看到 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{Loc}}(X)$ 包含于本质像中。现在任取 $F \in \mathrm{D}^+_{\mathrm{Loc}}(X)$ 中的对象。由于 Sh(X) 中的余积是正合的，根据 F BS19，引理 2.15、命题 2.$\tau_{\le n}F$，我们可以在 D(X) 中将其表示为其截断的同伦余极限（[) $_{n\in\mathbb{N}}$。

注意，所有对象 $\tau_{\le n}F$ 都属于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{Loc}}(X)$。因此，存在对象 $E_n \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}$(Loc$(X)$)，使得 $E \cong \tau_{\le n}F$ 属于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{Loc}}(X)$。此外，根据上文证明的满性（和忠实性），每个过渡态射 $\tau_{\le n}F \to \tau_{\le n+1}F$ 都是某个（唯一的）态射 $E_n \to E_{n+1}$的像。正向系统 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 按照 [BS19 第 2 节中的术语，是一个“正向截断系统”。3]这是因为系统 $(\tau_{\le n}F)_{n\in\mathbb{N}}$ 具有这一性质，而且我们的函子 D(Loc(X)) $\to \mathrm{D}_{\mathrm{Loc}}(X)$ 是 t-正合的。

令 E 表示 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 D(Loc(X)) 中的同伦余极限。它配有一个三角

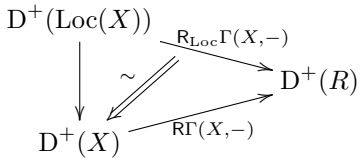
$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \to E \to$$

在 D(局部常值层范畴(X)) 中。它在保持余积的函子 D(局部常值层范畴(X)) $\to$D(X) 下的像，将 E 表示为系统 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的同伦余极限。由于 F 是该

同构系统 $(\tau_{\leq n}F)_{n\in\mathbb{N}}$ 的同伦余极限，我们得到一个同构$F \cong E$。因此， F 属于我们函子的本质像。□

推论 4.2. 设 X 是局部单连通、局部无环的拓扑空间，并假设定理 *(a)* 和 *(b)* 中的等价条件 *2.7* 成立。那么以下陈述成立。

(*i*) 由下图中右导出函子的泛性质得到的典范 *2*-态射是一个 *2*-同构



其中，$\mathrm{R}_{\mathrm{Loc}}\Gamma(X,-)$ 表示 $\Gamma(X,-)\colon \mathrm{Loc}(X) \to \mathrm{Mod}(R)$ 的右导出函子，而 $\mathrm{R}\Gamma(X,-)$ 表示 $\Gamma(X,-)\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Mod}(R)$的右导出函子。

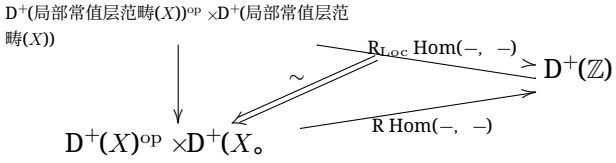
换言之，若 $I \to J$ 是从 $\mathrm{Loc}(X)$ 中的有下界内射对象复形 I 到 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的有下界内射对象复形 J 的拟同构，那么

$$\Gamma(X,I) \to \Gamma(X,J) \tag{4.5}$$

是一个拟同构。

换一种表达方式，就是说，$\mathrm{Loc}(X)$中的内射对象对 $\Gamma(X,-)\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Mod}(R)$是无环的。

(ii) 由下列图表中右导出函子的泛性质得到的典范 *2*-态射是一个 *2*-同构



特别地，给定 $L \in \mathrm{Loc}(X)$，则$\mathrm{Loc}(X)$中的任意内射对象对于 $\mathrm{Hom}(L,-)\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$都是无环的，而$\mathrm{Loc}(X)$ 中的任意投射对象对于 $\mathrm{Hom}(-,L)\colon \mathrm{Sh}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$都是无环的。

证明。 注意 (i) 是 (ii) 的特殊情形，因为 $\mathbf{Hom}(R_X,-) = \Gamma(X,-)$。因此我们来证明 (ii)。设 A 是局部常值层范畴 $\mathbf{Loc}(X)$中的有下界复形。设 $I \to J$ 是从局部常值层范畴 $\mathbf{Loc}(X)$中的有下界内射对象复形 I 到 $\mathbf{Sh}(X)$中的有下界内射对象复形 J 的拟同构。我们需要证明诱导的态射

$$\mathrm{Hom}(A,I) \to \mathrm{Hom}(A,J)$$

是一个拟同构。该态射的第 m 个上同调为

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathrm{Loc}(X))}(A,I[m]) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(X)}(A,J[m])$$

它与

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{Loc}(X))}(A,I[m]) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(A,J[m])$$

根据我们对 I 和 J 的假设。但这个态射可分解为

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{Loc}(X))}(A, I[m]) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(A, I[m]) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(A, J[m])$$

其中，第一个态射根据定理4.1 是同构，而第二个态射是同构，因为 $I \to J$ 是 $\mathrm{D}(X)$ 中的同构。□

注 4.3。设 X 如定理 4.1 所述，并假设 D^+(局部常值层范畴$(X)) \to \mathrm{D}^+$ 局部常值层范畴(X) 是一个等价，即条件 (a) 成立。我们不知道类似的函子 D(局部常值层范畴$(X) \to \mathrm{D}_{\mathrm{Loc}}(X)$ 是否也是一个等价。

5. Constructible sheaves: Proof of Proposition 2.10 and Theorem 2.13

5.1. 若 $(X, \mathcal{S})$ 是一个分层空间，则任意一层 $S \in \mathcal{S}$ 在其闭包 $\overline{S}$中都是开集，因为 S是 X的局部闭子集。给定 $S, T \in \mathcal{S}$，若 $S \subset T$，则记作 $S \leq T$。于是 $\leq$ 在 $\mathcal{S}$上定义了一个偏序。由于 $\mathcal{S}$ 是有限的，当 $X \neq \emptyset$时，存在极小元和极大元。特别地，当 $X \neq \emptyset$时，存在一个闭层和一个开层。

命题 *5.2*。（=命题 *2.10*）设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个 *(loc-sc)*-分层空间。那么 $\mathit{Cons}(X, \mathcal{S})$ 是一个 *Grothendieck* 阿贝尔范畴，且包含函子 $\mathit{Cons}(X, \mathcal{S}) \to \mathit{Sh}(X)$ 正合且余连续；特别地，$\mathit{Sh}(X)$ 中由 $\mathit{Cons}(X, \mathcal{S})$ 中对象组成的族的余积仍属于 $\mathit{Cons}(X, \mathcal{S})$。

进一步假设该分层是*(loc-sa)*。那么$\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})$ 是$\mathrm{Sh}(X)$的弱 *Serre* 子范畴。特别地，$\mathrm{D}_{\mathcal{S}}(X)$ 是$\mathrm{D}(X)$ 的厚三角子范畴，且在$\mathrm{D}(X)$中对余积封闭。

证明。若 $s\colon S \to X$是某个层的包含映射，则 $s^*\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(S)$ 正合且与余极限交换。由此可轻易从命题3.4推出所有结论。□

5.3. 假设 $(X, \mathcal{S})$ 是 $(loc - sc) - (loc - sa)$-分层空间。由命题 5.2 可构造层范畴$(X, \mathcal{S})$ 是一个 Grothendieck 阿贝尔范畴，并且是 $\mathrm{Sh}(X)$ 的弱 Serre 子范畴。因此，存在一个三角范畴 D^+(可构造层范畴$(X, \mathcal{S})$)，并且 $\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$ 是 $\mathrm{D}^+(X)$ 的厚三角子范畴。我们有显然的三角实现函子

$$\mathrm{real} : \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})) \to \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X) \tag{5.1}$$

并且定理 2.13 声称，在某些条件下，(5.1) 是一个等价。

5.1. **定理 2.13 的证明策略**。我们将通过对层数进行归纳来证明定理 2.13 。单层的情形已包含在定理陈述中。两个范畴 D^+(可构造层范畴$(X, \mathcal{S})$) 和 $\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$ 都可以通过粘合各个层所对应的范畴来构造。归纳步骤中，我们需要检验实现函子与两边的粘合相容。这种相容性由函子之间的一个 2-态射给出。我们将仔细构造这些 2-态射，并检验它们是同构。

5.4. 从现在起，我们假设所有分层空间都是 $(loc - sc) - (loc - sa)$-分层的。

定义 5.5。设 $(X,\mathcal{S})$ 是一个分层空间。局部闭嵌入$e\colon Z\to X$ 称为分层的，如果其像是 $\mathcal{S}$ 中若干元素的并。那么， Z连同诱导分层 $\mathcal{S}_Z:=\{e^{-1}(S)\mid S\in\mathcal{S}$ （其中 $S\subset e(Z)\}$）构成一个分层空间。显然，它也是 $(loc-sc)-(loc-sa)$-分层的。分层局部闭嵌入通常记作 $e\colon(Z,\mathcal{S}_Z)\to(X,\mathcal{S})$。

5.6. 设 $e\colon Z\to X$ 是拓扑空间之间的局部闭嵌入。那么存在两对伴随函子 (e^*,e_*) 和 $(e_!,e^!)$

$$e^*\colon \mathrm{Sh}(X)\rightleftarrows \mathrm{Sh}(Z)\colon e_*, \tag{5.2}$$

$$e_!\colon \mathrm{Sh}(Z)\rightleftarrows \mathrm{Sh}(X)\colon e^!. \tag{5.3}$$

我们强调，对于局部闭嵌入， $e^!$ 在阿贝尔层面上已经存在。左伴随函子 e^* 和 $e_!$ 是正合的，右伴随 e_* 和 $e^!$ 是左正合的。如果 e 是开嵌入，那么 $e^!=e^*$ 和 $(e_!,e^!=e^*,e_*)$ 构成一个伴随三元组。如果 e 是闭嵌入，那么 $e_!=e_*$ 和 $(e^*,e_*=e_!,e^!)$ 构成一个伴随三元组。一般而言，我们在导出层面上得到诱导的伴随

$$e^*\colon \mathrm{D}^+(X)\rightleftarrows \mathrm{D}^+(Z)\colon \mathsf{R}e_*, \tag{5.4}$$

$$e_!\colon \mathrm{D}^+(Z)\rightleftarrows \mathrm{D}^+(X)\colon \mathsf{R}e^! \tag{5.5}$$

在导出层面上。

5.7. 设 $e\colon(Z,\mathcal{S}_Z)\to(X,\mathcal{S})$ 是一个分层局部闭嵌入。那么，两个正合函子 e^* 和 $e_!$ 显然保持可构造层和可构造复形（相对于分层 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}_Z$），即它们诱导函子

$$e^*\colon \mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})\to\mathrm{Cons}(Z,\mathcal{S}_Z),\qquad e_!\colon 可构造层范畴(Z,\mathcal{S}_Z)\to 可构造层范畴(X,\mathcal{S}),$$

$$e^*\colon \mathrm{D}^+(可构造层范畴(X,\ \mathcal{S}))\to\mathrm{D}^+(可构造层范畴(X,\ \mathcal{S}))\quad e_!\colon \mathrm{D}^+(可构造层范畴(Z,\ \mathcal{S}_Z))\to\mathrm{D}^+(可构造层范畴(X,\ \mathcal{S})),$$

$$e^*\colon \mathrm{D}_{\mathcal{S}}(X)\to\mathrm{D}_{\mathcal{S}_Z}(Z),\qquad e_!\colon \mathrm{D}_{\mathcal{S}_Z}(Z)\to\mathrm{D}_{\mathcal{S}}(X)).$$

若 $d\colon(Y,\ \mathcal{S}_Y)\to(Z,\ \mathcal{S}_Z)$ 是另一个分层局部闭嵌入，那么显然

$$d^*\circ e^*\xrightarrow{\sim}(e\circ d)^*\quad\text{and}\quad e_!\circ d_!\xrightarrow{\sim}(e\circ d)_! \tag{5.6}$$

在阿贝尔范畴层面和三角范畴层面上。

5.8. 设 $e\colon(Z,\ \mathcal{S}_Z)\to(X,\ \mathcal{S})$ 是一个分层局部闭嵌入。那么相应的恒等变换是 2-同构

$$e^*\circ\mathrm{real}\overset{\mathrm{id}}{\underset{=}{\Longrightarrow}}\mathrm{real}\circ e^* \tag{5.7}$$

从 D^+(可构造层范畴$(X,\ \mathcal{S})$) 到 $\mathrm{D}^+(Z)$ 的函子之间，以及

$$e_!\circ\mathrm{real}\overset{\mathrm{id}}{\underset{=}{\Longrightarrow}}\mathrm{real}\circ e_! \tag{5.8}$$

从 D^+(可构造层范畴$(Z,\ \mathcal{S}_Z)$) 到 $\mathrm{D}^+(X)$ 的函子之间，如交换图表所示

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S}))&\xrightarrow{e^*}&\mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z,\mathcal{S}_Z))\\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{real}}&&\downarrow{\scriptstyle\mathrm{real}}\\ \mathrm{D}^+(X)&\xrightarrow{e^*}&\mathrm{D}^+(Z),\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}\mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z,\mathcal{S}_Z))&\xrightarrow{e_!}&\mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S}))\\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{real}}&&\downarrow{\scriptstyle\mathrm{real}}\\ \mathrm{D}^+(Z)&\xrightarrow{e_!}&\mathrm{D}^+(X)\end{array}$$

定义 5.9. 如果一个拓扑空间 X 的分层 $\mathcal{S}$ 满足以下条件，则称其为（可构造的）：若 $l\colon S\to X$ 是任意一层 $S\in\mathcal{S}$ 的包含映射，那么（参见 [BBD82，2.1.13，p. 61]）函子 $l_*\colon \mathrm{Sh}(S)\to\mathrm{Sh}(X)$ 的右导出函子 $\mathrm{R}l_*\colon \mathrm{D}^+(S)\to\mathrm{D}^+(X)$ 将局部常值层范畴 $\mathrm{Loc}(S)$ 中的对象（视为集中在零次的复形）映射到 $\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$。

引理 *5.10.* 设 $(X,\mathcal{S})$ 是一个（可构造层范畴）分层空间，且 $e\colon (Z,\mathcal{S}_Z)\to(X,\mathcal{S})$ 是一个分层局部闭嵌入。那么，诱导分层 $\mathcal{S}_Z$ 是（可构造层范畴）的；此外，除函子 e^*、$e_!$ 外，函子 e_*、$e_!$ 也保持可构造层（其中可构造性分别是相对于分层 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}_Z$ 而言的）。特别地，伴随 *(5.2)* 和 *(5.3)* 限制为伴随

$$e^*\colon \mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})\rightleftarrows\mathrm{Cons}(Z,\mathcal{S}_Z)\colon e_*, \tag{5.9}$$

$$e_!\colon \mathrm{Cons}(Z,\mathcal{S}_Z)\rightleftarrows\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})\colon e^!. \tag{5.10}$$

此外，四个函子 e^*、$\mathrm{R}e^!$、$\mathrm{R}e_*$、$e_!$ 保持具有下有界上同调的可构造复形（相对于分层 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}_Z$）。特别地，伴随 (5.4)和 (5.5)限制为伴随

$$e^*\colon \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)\rightleftarrows\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z)\colon \mathrm{R}e_*, \tag{5.11}$$

$$e_!\colon \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z)\rightleftarrows\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)\colon \mathrm{R}e^!. \tag{5.12}$$

证明。设 $S\in\mathcal{S}$ 是包含于 Z 中的一个层，且 $l\colon S\hookrightarrow Z$ 是局部闭嵌入。那么函子

$$\mathrm{R}l_*\colon \mathrm{D}^+(S)\to\mathrm{D}^+(Z)$$

同构于函子的复合

$$\mathrm{R}l_*\simeq e^*\circ\mathrm{R}(e\circ l)_*$$

根据我们的假设，函子 $\mathrm{R}(e\circ l)_*$ 将 $\mathrm{D}^+(S)$ 映射到 $\mathrm{D}_{\mathcal{S}}(X)$。此外（如上所述），函子 e^* 将 $\mathrm{D}_{\mathcal{S}}(X)$ 映射到 $\mathrm{D}_{\mathcal{S}_Z}(Z)$。因此，诱导分层 $\mathcal{S}_Z$是 (可构造层范畴)。

关于正合函子 e^* 和 $e_!$ 的断言显然成立，且上文已讨论过。我们只考虑函子 e_* 和 $e^!$ 及其导出函子。

步骤 1。函子 e_* 和 $e^!$ 是左正合的。因此，如果能证明对于任意$A\in\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z)$，对象 $\mathrm{R}e_*A$ 属于范畴 $\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$，这就意味着函子 e_* 将范畴 $\mathrm{Cons}(Z,\ \mathcal{S}_Z)$ 映射到 $\mathrm{Cons}(X,\ \mathcal{S})$。类似地，对于函子 $e^!$，只需证明对于任意 $B\in\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$，对象 $\mathrm{R}e^!B$ 属于 $\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z)$。我们首先考虑函子 $\mathrm{R}e_*$。

步骤2。我们将对 X 和 Z 中层的数量进行归纳。假设 Z 由一个层组成。根据假设，对于任意 $F\in\mathrm{Loc}(Z)$，我们有 $\mathrm{R}e_*(F)\in D^+_{\mathcal{S}}(X)$。由于 e_* 是左正合的，因此可推出 $\mathrm{R}e_*(A)\in\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$

第3步。令 $\overline{Z}\subset X$ 为 Z 的闭包。那么嵌入 $e:\ Z\hookrightarrow X$ 是分层局部闭嵌入的复合

$$Z\xrightarrow{t}\overline{Z}\xrightarrow{\bar{e}}X \tag{5.13}$$

其中 t 是一个开嵌入，而 e 是一个闭嵌入。函子 $e_*=e_!$ 是正合的，这显然

$$\bar{e}_*\colon \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_{\overline{Z}}}(\overline{Z})\to D^+_{\mathcal{S}}(X)$$

因此我们可以假设 $e\colon Z\to X$ 是一个开嵌入。

步骤 4. 选取一个（在 Z 中）闭层 $F\subset Z$。令

$$F\xrightarrow{s} Z\xleftarrow{j} U:=Z-F$$

为相应的分层闭嵌入与开嵌入。对于 $A\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z)$，我们有 $\mathrm{D}^+(Z)$ 中的正合三角：

$$s_*\mathrm{R}s^!A\to A\to \mathrm{R}j_*j^*A \tag{5.14}$$

在 X 中的层数多于 Z中的层数。因此，按层数归纳，我们可以假设 $\mathrm{R}s^!A\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_F}(F)$。于是 $s_*\mathrm{R}s^!A\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z)$。由同一归纳法，我们可以假设 $\mathrm{R}j_*j^*A\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z)$。现在利用正合三角（5.14），只需证明

$$\mathrm{R}e_*s_*\mathrm{R}s^!A,\ \mathrm{R}e_*\mathrm{R}j_*j^*A\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X) \tag{5.15}$$

这由以下同构可得

$$\mathrm{R}e_*s_*\mathrm{R}s^!A=\mathrm{R}(es)_*\mathrm{R}s^!A,\quad \mathrm{R}e_*\mathrm{R}j_*j^*A=\mathrm{R}(ej)_*j^*A$$

以及对层数的归纳法可得（这次我们比较 Z、 F 和 U 中层的数目）。

步骤 5。现在给定 $B\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$，我们要证明 $\mathrm{R}e^!B\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z)$。再次考虑分解（5.13）。于是 $t^!=t^*$，因此我们可以假设 $e\colon Z\to X$是一个闭嵌入。令 $\alpha\colon V:=X-Z\to X$ 为补开嵌入。我们有 $\mathrm{D}^+(X)$ 中的正合三角：

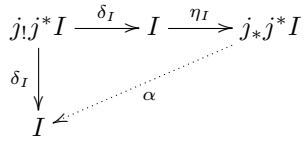
$$e_!\mathrm{R}e^!B\to B\to \mathrm{R}\alpha_*\alpha^*B$$

显然 $\alpha^*B\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_V}(V)$，因此根据我们上面的证明，$\mathrm{R}\alpha_*\alpha^*B\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$。由此可得 $e_!\mathrm{R}e^!B\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$。但显然 $\mathrm{R}e^!B\in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z)$。□

5.11. 从现在起，我们假设所有分层空间都是 $(loc-sc)-(loc-sa)-(cons)$-分层的。

引理 5.12。 设 $(X,\mathcal{S})$ 是一个分层空间，$j\colon (U,\mathcal{S}_U)\to (X,\mathcal{S})$ 是一个分层开嵌入，并且 I 是 可构造层范畴$(X,\mathcal{S})$中的一个内射对象。那么伴随单位$I\to j_*j^*I$ 是内射对象之间的分裂满射。

证明。我们使用引理 5.10。令 $\eta\colon \mathrm{id}\to j_*j^*$ 为伴随 $j^*\colon$ 可构造层范畴$(X,\mathcal{S})\rightleftarrows$ 可构造层范畴$(U,\mathcal{S}_U)$：j_*的单位，$\varepsilon\colon j^*j_*\to \mathrm{id}$ 为其余单位。令 $\zeta\colon \mathrm{id}\to j^!j_!=j^*j_!$ 为伴随$j_!\colon$ 可构造层范畴$(X,\mathcal{S})\rightleftarrows$可构造层范畴$(U,\mathcal{S}_U)$：$j^!=j^*$的单位，$\delta\colon j_!j^!=j_!j^*\to \mathrm{id}$ 为其余单位。由于下图第一行中的复合是单射，且 I 在可构造层范畴$(X,\mathcal{S})$中是内射的，因此存在虚线箭头 α，使图表交换。



我们断言 $\eta_I \circ \alpha = \mathrm{id}_{j_*j^*I}$。将 j^* 应用于我们的图表，得到

$$\begin{array}{ccccc} j^*j_!j^*I & \xrightarrow[\sim]{j^*\delta_I} & j^*I & \xrightarrow[\sim]{j^*\eta_I} & j^*j_*j^*I \\ {\scriptstyle j^*\delta_I}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & & \nearrow_{j^*\alpha} & \\ j^*I, & & & & \end{array}$$

其中 $j^*\delta_I$ 和 $j^*\eta_I$ 是同构；这由伴随定义中的交换三角以及 ζ 和 ε 是 2-同构这一事实可得。因此，$j^*\alpha$ 是 $j^*\eta_I$的逆。这意味着

$$j^*(\eta_I \circ \alpha) = j^*\eta_I \circ j^*\alpha = \mathrm{id}_{j^*j_*j^*I}. \tag{5.16}$$

对于任意对象 A，$B \in \mathsf{Cons}(U, \mathcal{S}_U)$，在

$$\mathrm{Hom}(j_*A, j_*B) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}(j^*j_*A, j^*j_*B) \xrightarrow{\varepsilon_B \circ ?} \mathrm{Hom}(j^*j_*A, B)$$

中，第一个箭头是双射，因为其复合映射就是伴随双射，且 ε_B 是一个同构。将此图表特化到 $A = B = j^*I$，可见（5.16）推出了我们的断言 $\eta_I \circ \alpha = \mathrm{id}_{j_*j^*I}$。因此 η_I 是一个分裂满射。□

注5.13。引理5.12 的证明很容易加以改编，从而得到以下结论：设 $j\colon U \to X$ 是一个开嵌入，且 I 是 $\mathsf{Sh}(X)$ 中的一个内射对象。那么 $I \to j_*j^*I$ 是一个分裂满射（众所周知，它是一个满射，参见例如 [BBD82]中包含公式 (1.4.1.1) 的句子）。稍一般地，给定一个阿贝尔子范畴 I 中的内射对象 $\mathcal{X}$，该子范畴是 $\mathsf{Sh}(X)$ 的子范畴，并且 $j_!j^*I$和 j_*j^*I 都属于 $\mathcal{X}$，则 $I \to j_*j^*I$ 是一个分裂满射。

5.14. 设 $(X, \mathcal{S})$ 为一个分层空间，且 $e\colon (Z, \mathcal{S}_Z) \to (X, \mathcal{S})$ 是一个分层局部闭嵌入。则 (5.9) 和 (5.10) 中的范畴是 Grothendieck 阿贝尔范畴，左伴随函子 e^*、$e_!$ 是正合的，而它们的右伴随 e_*、$e^!$ 是左正合的。若 e 是开嵌入，则 $e^! = e^*$ 与 $(e_!, e^! = e^*, e_*)$ 构成一个伴随三元组。若 e 是闭嵌入，则 $e_! = e_*$ 与 $(e^*, e_* = e_!, e^!)$ 构成一个伴随三元组。一般而言，e_* 和 $e^!$ 具有右导出函子

$$\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z, \mathcal{S}_Z)) \to \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})),$$
$$\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})) \to \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z, \mathcal{S}_Z)).$$

索引 cs 用于可构造 以避免与通常的函子 $\mathsf{R}e_*$ 和 $\mathsf{R}e^!$ 混淆，它们作为 (5.4) 和 (5.5) 中的右伴随出现。此外，伴随 (5.9) 和 (5.10) 导出伴随

$$e^*\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})) \rightleftarrows \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z, \mathcal{S}_Z))\colon \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*, \tag{5.17}$$
$$e_!\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z, \mathcal{S}_Z)) \rightleftarrows \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S}))\colon \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!, \tag{5.18}$$

引理 5.15. 设$(X, \mathcal{S})$ 是一个分层空间，并设 $e\colon (Z, \mathcal{S}_Z) \to (X, \mathcal{S})$ 和$d\colon (Y, \mathcal{S}_Y) \to (Z, \mathcal{S}_Z)$ 是分层局部闭嵌入。那么典范 2-态射是 2-同构

$$\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}(e \circ d)_* \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_* \circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}d_* \quad \textit{and} \quad \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}(e \circ d)^! \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}d^! \circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!.$$

证明。二者 e_* 和 $e^!$ 都保持单射可构造层，因为它们具有正合左伴随（引理 5.10）。因此，该陈述由通常的同构 $(e \circ d)_* \xrightarrow{\sim} e_* \circ d_*$（甚至是相等）以及 $(e \circ d)^! \xrightarrow{\sim} d^! \circ e^!$得出。□

5.16. 设 $(X,\mathcal{S})$ 是一个分层空间，且 $e\colon (Z,\mathcal{S}_Z)\to(X,\mathcal{S})$ 是一个分层局部闭嵌入。则存在一个典范 2-态射

$$\sigma\colon \mathrm{real}\circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*\Rightarrow \mathsf{R}e_*\circ \mathrm{real} \tag{5.19}$$

在从 $\mathsf{D}^+(\mathsf{Cons}(Z,\ \mathcal{S}_Z))$ 到 $\mathsf{D}^+(X)$ 的函子之间，如图表所示

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z,\mathcal{S}_Z)) & \xrightarrow{\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*} & \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}} & \overset{\sigma}{\swarrow} & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}} \\ \mathrm{D}^+(Z) & \xrightarrow{\mathsf{R}e_*} & \mathrm{D}^+(X). \end{array}$$

记号中省略了 σ 对 e 的依赖性。当记住右导出函子 σ 与一个 2-态射一同给出，并且这一对满足泛性质时，其构造是直接的（参见例如 [KS94，定义 1.8。1]）。下面说明如何计算 σ_A，对于 $A\in \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z,\ \mathcal{S}_Z))$。设 $A\to I$ 是 $\mathsf{K}^+(\mathrm{Cons}(Z,\mathcal{S}_Z))$ 中的一个拟同构，其中 I 是 $\mathsf{Cons}(Z,\ \mathcal{S}_Z)$ 的内射对象构成的有下界复形。那么

$$\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*A\xrightarrow{\sim}\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*I\xleftarrow{\sim}e_*I$$

在 $\mathsf{D}^+(\mathsf{Cons}(X,\ \mathcal{S})$ 中，因而也在 $\mathsf{D}^+(X)$ 中。设 $A\to J$ 是 $\mathsf{K}^+(Z)$ 中的一个拟同构，其中 J 是 $\mathsf{Sh}(Z)$ 的内射对象构成的有下界复形。那么

$$\mathsf{R}e_*A\xrightarrow{\sim}\mathsf{R}e_*J\xleftarrow{\sim}e_*J$$

在 $\mathsf{D}^+(X)$ 中。现在存在唯一的态射 $\kappa\colon\ I\to J$，位于 $K^+(Z)$ 中，使得复合 $A\to I\xrightarrow{\kappa}J$ 是拟同构 $A\to J$。显然，κ 是拟同构。于是该态射

$$\sigma_A\colon \mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*(A))\to \mathsf{R}e_*(\mathrm{real}(A)) \tag{5.20}$$

经由上述同构，对应于态射

$$e_*(\kappa)\colon e_*I\to e_*J. \tag{5.21}$$

特别是，如果 e 是闭嵌入，那么 σ 是一个 2-同构。对于一般的 e，有时也会如此，参见定理 5.25 和命题 5.24。

类似地，存在一个典范 2-态射

$$\tau\colon \mathrm{real}\circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!\Rightarrow \mathsf{R}e^!\circ \mathrm{real} \tag{5.22}$$

在从 $\mathsf{D}^+(\mathsf{Cons}(X,\ \mathcal{S}))$ 到 $\mathsf{D}^+(Z)$ 的函子之间，如图表所示

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})) & \xrightarrow{\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!} & \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z,\mathcal{S}_Z)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}} & \overset{\tau}{\swarrow} & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}} \\ \mathrm{D}^+(X) & \xrightarrow{\mathsf{R}e^!} & \mathrm{D}^+(Z). \end{array}$$

记号中省略了 τ 对 e 的依赖。给定 $B\in \mathsf{D}^+(\mathsf{Cons}(X,\ \mathcal{S}))$ 以及拟同构 $B\to I'\xrightarrow{\kappa'}J'$，其中 I' 和 J' 分别是 $\mathsf{Cons}(X,\ \mathcal{S})$ 和 $\mathsf{Sh}(X)$ 中由内射对象构成的有下界复形，

$$\tau_B\colon \mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!(B)\to \mathsf{R}e^!(\mathrm{real}(B)) \tag{5.23}$$

通过显然的同构，对应于态射

$$e^!(\kappa')\colon e^!I'\to e^!J'. \tag{5.24}$$

特别地，若 e 是一个开嵌入，则 τ 是一个 2-同构。对于一般的 e，有时情况也是如此，参见定理 5.25 和命题 5.24。

引理 5.17 (实化与导出 $*$-伴随的单位和余单位的相容性)。设 $(X,\mathcal{S})$ 是一个 *(局部可缩)-(可构造层范畴)*-分层空间，且 $e\colon (Z,\mathcal{S}_Z)\to(X,\mathcal{S})$ 是一个分层局部闭嵌入（如 *5.16* 中所述）。则图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{real}(A) & \xrightarrow{\mathrm{real}(\eta_{\mathrm{cs},A})} & \mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*(e^*(A))) \\
{\scriptstyle\mathrm{id}}\big\downarrow{\scriptstyle =} & & \big\downarrow{\scriptstyle \sigma_{e^*A}}\ {\scriptstyle(5.19)} \\
\mathrm{real}(A) & & \mathsf{R}e_*(\mathrm{real}(e^*(A))) \\
{\scriptstyle\eta_{\mathrm{real}(A)}}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}}\ {\scriptstyle =}\ {\scriptstyle(5.7)} \\
\mathsf{R}e_*(e^*(\mathrm{real}(A))), & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{real}(e^*(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*(B))) & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{real}(\varepsilon_{\mathrm{cs},B})} & \mathrm{real}(B) \\
\big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}}\ {\scriptstyle =}\ {\scriptstyle(5.7)} & & \\
e^*(\mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*(B))) & & {\scriptstyle\mathrm{id}}\big\downarrow{\scriptstyle =} \\
{\scriptstyle e^*(\sigma_B)}\big\downarrow\ {\scriptstyle(5.19)} & & \\
e^*(\mathsf{R}e_*(\mathrm{real}(B))) & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_{\mathrm{real}(B)}} & \mathrm{real}(B)
\end{array}$$

对所有 $A\in \mathrm{D}^+(\text{可构造层范畴}(X,\mathcal{S}))$ 和 $B\in \mathrm{D}^+(\text{可构造层范畴}(Z,\mathcal{S}_Z))$ 均交换（并且关于 A 和 B 自然），其中 η_{cs} 和 $\varepsilon_{\mathrm{cs}}$ 分别表示伴随 $(e^*,\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*)$ 的单位和余单位，而 η 和 ε 分别表示伴随 $(e^*,\mathsf{R}e_*)$的单位和余单位。

证明。设 $e^*A\xrightarrow{\alpha} I\xrightarrow{\kappa} J$ 是拟同构，其中 I 和 J 分别是可构造层范畴$(Z,\mathcal{S}_Z)$ 和 $\mathsf{Sh}(Z)$ 中由内射对象组成的有下界复形。则方块

$$\begin{array}{ccccc}
A & \longrightarrow & e_*e^*A & \xrightarrow{e_*(\alpha)} & e_*I \\
{\scriptstyle\mathrm{id}}\big\downarrow{\scriptstyle =} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}}\ {\scriptstyle =} & & \big\downarrow{\scriptstyle e_*(\kappa)} \\
A & \longrightarrow & e_*e^*A & \xrightarrow{e_*(\kappa\circ\alpha)} & e_*J
\end{array}$$

是交换的，并且根据 σ 在 5.16 （方程（5.21））中的明确描述，可知引理中的第一个图表是交换的。

设 $B\to I'\xrightarrow{\kappa'} J'$ 为拟同构，其中 I 和 J 分别是 $\mathsf{Cons}(Z,\ \mathcal{S}_Z)$ 和 $\mathsf{Sh}(Z)$ 中由内射对象构成的有下界复形。那么，由方块图的交换性可知

$$\begin{array}{ccc}
e^*e_*I & \longrightarrow & I \\
{\scriptstyle e^*(e_*(\kappa'))}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \kappa'} \\
e^*e_*J & \longrightarrow & J
\end{array}$$

可知引理中的第二个图表是交换的，同样是根据 σ 在5.16中的明确描述。□

引理 *5.18*（ $*$-伴随双射与实化的相容性）。设 *$(X,\mathcal{S})$* 是一个 *(局部可缩)-(可构造层范畴)*-分层空间，且 *$e\colon (Z,\mathcal{S}_Z)\to(X,\mathcal{S})$* 是一个分层局部闭嵌入（如 *5.16* 所述）。设 *$A\in D^+$(可构造层范畴$(X,\mathcal{S})$)* 且 *$B\in D^+$(可构造层范畴$(Z,\mathcal{S}_Z)$)*。那么

图表

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{Cons}(Z,\mathcal{S}_Z))}(e^*A,B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S}))}(A,\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*(B)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}} \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(Z)}(\mathrm{real}(e^*A),\mathrm{real}(B)) & & \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\mathrm{real}(A),\mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*(B))) \\
{\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow{\scriptstyle =\ (5.7)} & & {\scriptstyle ?\circ\sigma_B}\downarrow{\scriptstyle (5.19)} \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(Z)}(e^*(\mathrm{real}(A)),\mathrm{real}(B)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\mathrm{real}(A),\mathsf{R}e_*(\mathrm{real}(B)))
\end{array}
\tag{5.25}
$$

是交换的，其中水平箭头是伴随双射。

证明。 设 $f\colon e^*A \to B$ 是 $\mathsf{D}^+(\mathsf{Cons}(Z,\ \mathcal{S}_Z))$ 中的一个态射。沿着经过左下角的路径，它在图表右下角的像是如下复合

$$\mathrm{real}(A) \xrightarrow{\eta_{\mathrm{real}(A)}} \mathsf{R}e_*(e^*(\mathrm{real}(A))) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathsf{R}e_*(\mathrm{real}(e^*A)) \xrightarrow{\mathsf{R}e_*(\mathrm{real}(f))} \mathsf{R}e_*(\mathrm{real}(B)),$$

而沿着经过右上角的路径，它的像是如下复合

$$\mathrm{real}(A) \xrightarrow{\mathrm{real}(\eta_{\mathrm{cs},A})} \mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*(e^*A)) \xrightarrow{\mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*(f))} \mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*(B)) \xrightarrow{\sigma_B} \mathsf{R}e_*(\mathrm{real}(B)),$$

其中 η 和 η_{cs} 是伴随单位。但根据引理 5.17 以及等式 $\sigma_B \circ$实化$(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*(f)) = \mathsf{R}e_*($实化$(f)) \circ \sigma_{e^*A}$，这两个复合相等；该等式成立是因为 σ 是一个 2-态射。 □

引理 5.19 (导出 !-伴随的单位和余单位与实化的相容性)。设 $(X,\ \mathcal{S})$ 是一个 *(局部可缩)-(可构造层范畴)*-分层空间，并且 $e\colon (Z,\ \mathcal{S}_Z) \to (X,\ \mathcal{S})$ 是一个分层局部闭嵌入（如 *5.16* 中所述）。那么图表

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{real}(A) & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{real}(\zeta_{\mathrm{cs},A})} & \mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!(e_!(A))) & \qquad & \mathrm{real}(e_!(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!(B))) \xrightarrow{\mathrm{real}(\delta_{\mathrm{cs},B})} \mathrm{real}(B) \\
 & & {\scriptstyle \tau_{e_!A}}\downarrow{\scriptstyle (5.22)} & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow{\scriptstyle =\ (5.8)} \\
{\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow{\scriptstyle =} & & \mathsf{R}e^!(\mathrm{real}(e_!(A))) & & e_!(\mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!(B))) \qquad {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow{\scriptstyle =} \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow{\scriptstyle =\ (5.8)} & & {\scriptstyle e_!(\tau_B)}\downarrow{\scriptstyle (5.22)} \\
\mathrm{real}(A) & \xrightarrow[\sim]{\zeta_{\mathrm{real}(A)}} & \mathsf{R}e^!(e_!(\mathrm{real}(A))), & & e_!(\mathsf{R}e^!(\mathrm{real}(B))) \xrightarrow{\delta_{\mathrm{real}(B)}} \mathrm{real}(B)
\end{array}
$$

在所有 $A \in \mathrm{D}^+($可构造层范畴$(Z,\mathcal{S}_Z))$ 和 $B \in \mathrm{D}^+($可构造层范畴$(X,\mathcal{S}))$ 上均可交换（且关于 A 和 B自然），其中 ζ_{cs} 和 δ_{cs} 分别表示伴随$(e_!,\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!)$的单位和余单位，而 ζ 和 δ 分别表示伴随$(e_!,\mathsf{R}e^!)$的单位和余单位。

证明。 形式上与引理 5.17的证明相同；使用 $(e_!, e^!)$ 而非 (e^*, e_*)，并使用 τ 在5.16 中的显式描述（方程式 (5.24)）。 □

严格来说，下一个引理对我们并非必需。

引理 5.20 (!-伴随双射与实化的相容性)。 设 $(X,\ \mathcal{S})$ 是一个 *(局部可缩)-(可构造)*-分层空间，且 $e\colon (Z,\ \mathcal{S}_Z) \to (X,\ \mathcal{S})$ 是一个分层局部闭

嵌入（如 5.16 中所述）。设 $A \in \mathrm{D}^+$(可构造层范畴$(Z,\ \mathcal{S}_Z)$) 和 $B \in \mathrm{D}^+$(可构造层范畴$(X,\ \mathcal{S})$)。那么图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S}))}(e_!A, B) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{Cons}(Z,\mathcal{S}_Z))}(A, \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!(B)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(\mathrm{real}(e_!A), \mathrm{real}(B)) & & \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(Z)}(\mathrm{real}(A), \mathrm{real}(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!(B))) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow{\scriptstyle =\ (5.8)} & & {\scriptstyle \tau_B\circ ?}\downarrow{\scriptstyle (5.22)} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(X)}(e_!(\mathrm{real}(A)), \mathrm{real}(B)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(Z)}(\mathrm{real}(A), \mathsf{R}e^!(\mathrm{real}(B))) \end{array} \tag{5.26}$$

图表是交换的，其中水平箭头是伴随双射。

证明。 这可由引理 5.18 结合引理 5.19证明。 □

5.21. 以下内容基本取自 [BBD82, 1.4。1]。我们将其列出，以便在5.23中引用。设 X 是一个拓扑空间，其有一个开子空间 U 及其闭补集 F。设 $F \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} U$ 为这些包含映射。那么我们有以下六个函子

$$\mathrm{Sh}(F) \underset{i^!}{\overset{i^*}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}}} \mathrm{Sh}(X) \underset{j_*}{\overset{j_!}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}}} \mathrm{Sh}(U) \tag{5.27}$$

其中每个函子都是其正下方函子的左伴随，也就是说，存在四个伴随（$i^*,\ i_*$）、（$i_!,\ i^!$）、（$j^*,\ j_*$）、（$j_!,\ j^!$）；四个“上方”函子 i^*、$i_* = i_!$、$j_!$、$j^! = j^*$ 是正合的，而右伴随 $i^!$ 和 j_* 是左正合的。两个顶部（分别是中部和底部）函子的复合为零，即 $i^*j_! = 0$、$j^*i_* = 0$、$i^!j_* = 0$。函子 $i_* = i_!$、$j_!$ 和 j_* 是全忠实的；这意味着四个伴随态射 $i^*i_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{id} \xrightarrow{\sim} i^!i_!$、$j^*j_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{id} \xrightarrow{\sim} j^!j_!$ 都是同构。此外，伴随态射构成正合列

$$0 \to j_!j^!A = j_!j^*A \to A \to i_*i^*A \to 0,$$
$$0 \to i_!i^!A = i_*i^!A \to A \to j_*j^*A,$$

对于每个 $A \in \mathsf{Sh}(X)$。若 A 是 $\mathsf{Sh}(X)$ 中的内射对象（或柔软对象），则第二个序列中的最后一个态射是一个（分裂）满射。

5.22. 沿用5.21中的设定。5.27）诱导出一个类似的图表

$$\mathrm{D}^+(F) \underset{\mathsf{R}i^!}{\overset{i^*}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}}} \mathrm{D}^+(X) \underset{\mathsf{R}j_*}{\overset{j_!}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}}} \mathrm{D}^+(U), \tag{5.28}$$

导出范畴和函子，其中 i^*、$i_* = i_!$、$j_!$、$j^! = j^*$ 由相应的正合函子平凡诱导，而 $\mathsf{R}i^!$、$\mathsf{R}j_*$ 是左正合函子 $i^!$ 和 j_*的右导出函子。存在诱导的伴随 $(i^*,\ i_*)$、$(i_!,\ \mathsf{R}i^!)$、$(j^*,\ \mathsf{R}j_*)$、$(j_!,\ j^!)$。两个顶部（分别为中部、底部）函子的水平复合为零，即 $i^*j_! = 0$、$j^*i_* = 0$、$\mathsf{R}i^!\mathsf{R}j_* = 0$（最后一个等式利用了 $j_*\colon \mathsf{Sh}(U) \to \mathsf{Sh}(X)$ 保持内射对象，因为其左伴随 j^* 是正合的）。函子 $i_* = i_!$、$j_!$ 和 $\mathsf{R}j_*$ 是全忠实的，因为四个伴随

态射 $i^*i_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{id} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{R}i^!)i_!$、$j^*(\mathrm{R}j_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{id} \xrightarrow{\sim} j^!j_!$ 是同构（注意，$i_!\colon \mathrm{Sh}(F) \to \mathrm{Sh}(X)$ 保持内射对象，因为其左伴随 i^* 是正合的）。此外，伴随态射可以通过唯一的态射 d 和 d' 补全为三角

$$j_!j^*A \to A \to i_*i^*A \xrightarrow{d} [1]j_!j^*A, \tag{5.29}$$

$$i_*(\mathrm{R}i^!A) \to A \to \mathrm{R}j_*(j^*A) \xrightarrow{d'} [1]i_*(\mathrm{R}i^!A), \tag{5.30}$$

称为标准三角，对于每个 A 属于 $\mathrm{D}^+(X)$（参见 [BBD82，（1.4.3.4）]）。

5.23. 设 $(X,\mathcal{S})$ 是一个 (loc-sc)-(cons)-分层空间，$j\colon (U,\mathcal{S}_U) \to (X,\mathcal{S})$ 是一个分层开嵌入，而 $i\colon (F,\mathcal{S}_F) \to (X,\mathcal{S})$ 是互补的分层闭嵌入。于是，将 5.21 中的 $\mathrm{Sh}(-)$ 替换为 $\mathrm{Cons}(-,\mathcal{S}_{(-)})$ 后，其中的所有陈述均成立。这由命题 5.2、引理 5.10 和引理 5.12 得出。类似地，将 5.22 中的 $\mathrm{D}^+(-)$ 替换为 $\mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(-,\mathcal{S}_-))$，并将 R 替换为 R_{cs} 后，其中的所有陈述也均成立。特别地，我们有标准三角

$$j_!j^*A \to A \to i_*i^*A \to [1]j_!j^*A, \tag{5.31}$$

$$i_*(\mathrm{R}_{\mathrm{cs}}i^!A) \to A \to \mathrm{R}_{\mathrm{cs}}j_*(j^*A) \to [1]i_*(\mathrm{R}_{\mathrm{cs}}i^!A), \tag{5.32}$$

对于每个 A 属于 $\mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S}))$。让我们将这两个三角与三角（5.29）和（5.30）进行比较。

一方面，（5.31）在 real 函子下的像与 $\mathrm{real}(A)$ 的三角（5.29）重合，（根据恒等式（5.7）和（5.8））， 也就是说，恒等态射定义了一个三角

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{real}(j_!j^*A) & \longrightarrow & \mathrm{real}(A) & \longrightarrow & \mathrm{real}(i_*i^*A) & \longrightarrow & \Sigma\mathrm{real}(j_!j^*A) \\
{\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow{\scriptstyle =} & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow{\scriptstyle =} & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow{\scriptstyle =} & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow{\scriptstyle =} \\
j_!j^*\mathrm{real}(A) & \longrightarrow & \mathrm{real}(A) & \longrightarrow & i_*i^*\mathrm{real}(A) & \longrightarrow & \Sigma j_!j^*\mathrm{real}(A)
\end{array} \tag{5.33}$$

对于任意 $A \in \mathrm{D}^+$(可构造层范畴$(X,\ \mathcal{S})$) 的三角同构 .

另一方面，（5.32）在 real 函子下的像与 $\mathrm{real}(A)$ 的三角（5.30）可以作如下比较。我们断言

(5.34)

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{real}(i_*(\mathrm{R}_{\mathrm{cs}}i^!A)) & \xrightarrow{\mathrm{real}(\delta_{\mathrm{cs},A})} & \mathrm{real}(A) & \xrightarrow{\mathrm{real}(\eta_{\mathrm{cs},A})} & \mathrm{real}(\mathrm{R}_{\mathrm{cs}}j_*(j^*A)) & \longrightarrow & \Sigma\mathrm{real}(i_*(\mathrm{R}_{\mathrm{cs}}i^!A)) \\
{\scriptstyle i_*(\tau_A)}\vdots & \textcircled{1} & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow{\scriptstyle =} & \textcircled{2} & {\scriptstyle \sigma_{j^*A}}\vdots & & {\scriptstyle \Sigma i_*(\tau_A)}\downarrow \\
i_*(\mathrm{R}i^!(\mathrm{real}(A))) & \xrightarrow{\delta_{\mathrm{real}(A)}} & \mathrm{real}(A) & \xrightarrow{\eta_{\mathrm{real}(A)}} & \mathrm{R}j_*(j^*(\mathrm{real}(A))) & \longrightarrow & \Sigma i_*(\mathrm{R}i^!(\mathrm{real}(A)))
\end{array}$$

是一个三角形态射。事实上，首先注意到，根据引理 5.19，虚线箭头 $i_*(\tau_A)$ 使方块 ① 交换；根据引理 5.17，虚线箭头 σ_{j^*A} 使方块 ② 交换。其次，实化与 i_* 交换（见 (5.8)），且从 i_* 的本质像到 $\mathrm{R}j_*$ 的本质像的每个态射都为零（使用 $j^*i_* = 0$）。因此，从 $\mathrm{real}(i_*(\mathrm{R}_{\mathrm{cs}}i^!A))$ 到 $\mathrm{R}j_*(j^*(\mathrm{real}(A)))$ 的任意平移的每个态射都为零。因此，[BBD82，命题 1.1.9] 表明，使方块 ①（分别是 ②）交换的左侧（分别是右侧）虚线箭头别无选择，并且三元组 $(i_*(\tau_A), \mathrm{id}^{\sigma_{j^*A}})$ 确实如所述是一个三角形态射。

命题 5.24。假设

$$\sigma\colon \mathrm{real}\circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}s_* \xrightarrow{(5.19)} \mathsf{R}s_*\circ \mathrm{real}$$

对每个 $S\in\mathcal{S}$， $s\colon S\to X$ 是包含映射。设 $e\colon (Z,\mathcal{S}_Z)\to(X,\mathcal{S})$ 是一个分层局部闭嵌入。那么， σ 和 τ 中解释的 *2*-态射*5.16* *(*参见 (5.19) 和 (5.22)*)* 均为 *2*-同构

$$\sigma\colon \mathrm{real}\circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_* \xRightarrow{\sim} \mathsf{R}e_*\circ \mathrm{real},$$
$$\tau\colon \mathrm{real}\circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^! \xRightarrow{\sim} \mathsf{R}e^!\circ \mathrm{real}.$$

特别地，若 $j\colon (U,\mathcal{S}_U)\to(X,\mathcal{S})$ 是一个分层开嵌入，且 $i\colon (F,\mathcal{S}_F)\to(X,\mathcal{S})$ 是其互补分层闭嵌入，那么 (5.34) 中的三角形态射*5.23* 是一个同构。

证明。 我们分几个步骤进行。

步骤 1。（归约到开嵌入与闭嵌入）设 $j\colon (U,\mathcal{S}_U)\to(X,\mathcal{S})$ 是一个分层开嵌入， $i\colon (F,\mathcal{S}_F)\to(X,\mathcal{S})$ 是其互补分层闭嵌入。我们断言，只需证明这两个 2- 态射

$$\sigma\colon \mathrm{real}\circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}j_* \Rightarrow \mathsf{R}j_*\circ \mathrm{real}, \tag{5.35}$$
$$\tau\colon \mathrm{real}\circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}i^! \Rightarrow \mathsf{R}i^!\circ \mathrm{real} \tag{5.36}$$

是 2-同构。

事实上，局部闭嵌入 e可分解为一个分层开嵌入$f\colon (Z,\mathcal{S}_Z)\to(Z,\mathcal{S}_Z)$（其像稠密），随后接一个分层闭嵌入 $g\colon (Z,\mathcal{S}_Z)\to(X,\mathcal{S})$。于是 $\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e_*=\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}g_*\circ\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}f_*$ 且 $\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!=\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}f^!\circ\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}g^!$（引理 5.15）；并且我们已经知道，对于分层闭嵌入， σ 是一个 2-同构（见 (5.21) 后的句子），而对于分层开嵌入， τ 是一个 2-同构（见 (5.24) 后的句子）。因此结论显然成立。

步骤2。我们断言，(5.36) 是 2-同构，当且仅当 (5.35) 是 2-同构。

事实上，这可由 5.23 中的三角形态射 (5.34) 得出， $j^*\colon \mathrm{D}^+$(可构造层范畴$(X,\mathcal{S})\to D^+$(可构造层范畴$(U,\mathcal{S}_U)$) 是本质满的这一事实，以及 $i_*\colon D^+$(可构造层范畴$(F,\mathcal{S}_F)$) $\to D^+$(可构造层范畴$(X,\mathcal{S})$) 是全忠实的这一事实。

第3步。根据上述步骤，只需证明（5.35）是一个2-同构。我们对 U中的层数目进行归纳， $U=\emptyset$ 的情形是平凡的，而基例，即 U 恰好由一个（开）层组成的情形，则由假设显然成立。

现在假设 U 由 ≥ 2 个层组成。设 $\kappa\colon I\to J$ 是 $\mathsf{C}(U)$ 中的一个拟同构，其中 I 和 J 分别是 $\mathsf{Cons}(U,\mathcal{S}_U)$ 和 $\mathsf{Sh}(U)$ 中的有下界内射对象复形。根据 5.16 中对 σ 的明确描述（见公式（5.20）和（5.21）），我们需要证明 $j_*(\kappa)\colon j_*(I)\to j_*(J)$ 是一个拟同构。

令 E 为 U 的一个非空真闭子集，且它是若干层的并（例如，在 U中闭的一个层；其存在性由5.1推出）。令 $V:=U-E$

为它在 U 中的（非空）开补集。我们得到交换图

$$\begin{array}{ccccc} X-V & \xrightarrow{d} & X & & \\ \uparrow{\scriptstyle k} & & \uparrow{\scriptstyle j} & & \\ E & \xrightarrow{e} & U & \xleftarrow{v} & V \end{array}$$

其中该方形是笛卡尔方形，v、j 和 k 是分层开嵌入，而 d 和e是分层闭嵌入。

考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & e_*e^!I & \longrightarrow & I & \longrightarrow & v_*v^*I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle e_*(e^!(\kappa))} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa} & & \downarrow{\scriptstyle v_*(v^*(\kappa))} & & \\ 0 & \longrightarrow & e_*e^!J & \longrightarrow & J & \longrightarrow & v_*v^*J & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

在 $\mathsf{C}^+(U)$ 中（该图在 $\mathsf{D}^+(U)$ 中的像，本质上就是闭开分解 5.34的图（$E \xrightarrow{e} U \xleftarrow{v} V$）。注意，由引理 5.12 以及所有函子 e_*、$e^!$、v^*、v_* 都具有正合左伴随这一事实，该图的上行是 $\mathsf{Cons}(U, \mathcal{S}_U)$ 中内射对象复形的逐项分裂短正合列。同样地，利用注记 5.13，下行是 $\mathsf{Sh}(U)$ 中内射对象复形的逐项分裂短正合列。

如果我们将 κ 应用于该图，就再次得到短正合列（逐项分裂）的态射。相应的上同调长正合列表明，当两个态射均为时，$j^*(\kappa)$ 是一个拟同构

$$j_*(e_*(e^!(\kappa))) \colon j_*e_*e^!I \to j_*e_*e^!J, \tag{5.37}$$

$$j_*(v_*(v^*(\kappa))) \colon j_*v_*v^*I \to j_*v_*v^*J \tag{5.38}$$

是拟同构。

由于 $v^*(\kappa)\colon\ v^*I \to v^*J$ 分别是可构造层范畴 $\mathsf{Cons}(V, \mathcal{S}_V)$ 和 $\mathsf{Sh}(V)$ 中有下界内射对象复形之间的拟同构，因此，根据归纳假设，沿分层开嵌入 $j \circ v$ 的 $*$-推前是拟同构，因为 V 所含的层严格少于 U。这表明 (5.38) 是拟同构。

同样，由于 V所含的层少于 U，归纳假设表明 $\mathsf{real} \circ \mathrm{R}_{\mathrm{cs}} v_* \Rightarrow \mathrm{R}v_* \circ \mathsf{real}$ 是一个 2-同构。因此，步骤2表明 $e^!(\kappa)\colon\ e^!I \to e^!J$ 是拟同构。注意，$e^!I$ 和 $e^!J$ 分别是可构造层范畴 $\mathsf{Cons}(E, \mathcal{S}_E)$ 和 $\mathsf{Sh}(E)$ 中的有下界单射对象复形。因此，针对分层开嵌入 k应用归纳假设，并利用 E 所含的层严格少于 U这一点，可知 $k_*(e^!(\kappa))$ 是拟同构。由于 d 是闭嵌入，$d_*(k_*(e^!(\kappa)))$ 是拟同构。由于 $d_* \circ k_* \cong j_* \circ e_*$，我们得到 (5.37) 是拟同构。这就完成了归纳步骤。□

5.2. **定理证明的完成2.13。**

定理 5.25。 *(=定理 2.13)* 对于一个 *(loc-sc)-(loc-sa)-(可构造层范畴)*-分层空间$(X,\ \mathcal{S})$，以下条件等价。

(a) 函子

$$\mathsf{real}\colon \mathsf{D}^+(\mathsf{Cons}(X, \mathcal{S})) \to \mathsf{D}^+_{\mathcal{S}}(X) \tag{5.39}$$

是一个等价。

(b) 对所有层 $S \in \mathcal{S}$，函子

$$\mathrm{real}\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(S)) \to \mathrm{D}^+_{\mathrm{Loc}}(S) \tag{5.40}$$

是一个等价（参见注5.26），并且

$$\sigma\colon \mathrm{real} \circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}} s_* \xrightarrow{(5.19)} \mathsf{R}s_* \circ \mathrm{real} \tag{5.41}$$

is a 2-isomorphism, where $s\colon S \to X$ *denotes the inclusion (cf. Proposition 5.24).*

若这些等价条件成立，则

$$\mathrm{real}\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z, \mathcal{S}_Z)) \to \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z) \tag{5.42}$$

对于所有分层局部闭嵌入 $e\colon (Z, \mathcal{S}_Z) \to (X, \mathcal{S})$，都是一个等价，

注 5.26。若所有层均局部单连通且局部奇异无环，则（5.40）对于 $S \in \mathcal{S}$是一个等价这一条件，等价于 S 的每个道路连通分支的万有覆盖无环这一条件（见定理4.1）。稍后将分析（5.41）是一个 2-同构这一条件。

证明。假设 (a) 成立。令 $e\colon (Z, \mathcal{S}_Z) \to (X, \mathcal{S})$ 为一个分层局部闭嵌入，并考虑交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(Z, \mathcal{S}_Z)) & \xrightarrow{e_!} & \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{real}_X} \\ \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z) & \xrightarrow{e_!} & \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X) \end{array} \tag{5.43}$$

由正合函子 $e_!$ (5.8) 定义。我们断言 real_Z 是一个等价。注意，两个水平函子都是全忠实的，因为 e 分解为分层开嵌入 $j\colon Z \to Z$，随后接分层闭嵌入 $i\colon Z \to X$；根据 5.22 和 5.23，$e_! = i_! \circ j_!$、$i_!$ 和 $j_!$ 在可构造层导出范畴层面以及层的导出范畴层面都是全忠实的。由于根据假设，$\mathsf{real} = \mathsf{real}_X$ 是一个等价，我们可推得 real_Z是全忠实的。令 $B \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_Z}(Z)$。由于 real_X 本质满，存在对象 $A \in \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S}))$ 以及一个同构 $\mathsf{real}(A) \cong e_!(B)$。于是

$$\mathrm{real}_Z(e^*A) \xleftarrow[=]{(5.7)} e^*\mathrm{real}(A) \cong e^*e_!(B) \cong j^*i^*i_*j_!(B) \xrightarrow{\sim} j^*j_!(B) \xleftarrow{\sim} B.$$

这表明 real_Z 本质满，因而是一个等价。

由于（5.43）中的竖直箭头都是等价，上方水平函子 $\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}e^!$ 的右伴随 $e_!$ 与下方水平函子$\mathsf{R}e^!$ 的右伴随 $e_!$“相同”，因而 τ （5.16）是一个 2-同构。下面利用引理 5.26中的图表（5.20）给出形式化论证。在我们的情形中，除标记为 ? 的箭头 $\circ\, \tau_B$ 外，其余所有箭头都是双射。因此，利用米田引理以及 $\mathsf{real} = \mathrm{real}_Z$ 是一个等价这一事实，可得 τ_B 是一个同构。

对 $e_!$ 采用相同的论证，对 e_* 也成立，并且可证明 σ 是一个 2-同构。

这表明 (a)蕴含 (5.42) 是一个等价，并且 σ 和 τ 是 2-同构。

特别地，(a) 蕴含 (b)，因为 $(S,\ \{S\}) \to (X,\ \mathcal{S})$ 对所有层 $S \in \mathcal{S}$而言，都是分层局部闭嵌入。

反之，假设(b) 成立。我们要证明（5.39）是一个等价。

给定层 $S,\ T \in \mathcal{S}$，令 $s\colon S \to X$和 $t\colon T \to X$分别表示相应的分层局部闭嵌入。考虑以下对象类

$$\mathcal{A} := \{s_!(A) \mid S \in \mathcal{S}, A \in \mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(S)) = \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(S, \mathcal{S}_S))\},$$
$$\mathcal{B} := \{\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}t_*(B) \mid T \in \mathcal{S}, B \in \mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(T)) = \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(T, \mathcal{S}_T))\}$$

D^+(可构造层范畴$(X,\ \mathcal{S})$)中的对象。为了证明

$$\mathrm{real}\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S}) \to \mathrm{D}(X) \tag{5.44}$$

是全忠实的，只需通过显然的 d′使用形如（5.31）和（5.32）的标准三角进行剥离，

证明

实化：$\mathrm{Hom}^{\mathrm{D}(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S}))}(s_!(A),\ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}t_*(B)) \to \mathrm{Hom}^{\mathrm{D}(X)}$(实化$(s_!(A))$，实化$(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}t_*(B))$)

对所有 S、$T \in \mathcal{S}$和 $A,\ B \in \mathrm{D}^+$(可构造层范畴$(X,\ \mathcal{S})$) 都是双射。引理 5.18 连同我们的假设 σ_B：实化$(\mathsf{R}_{\mathrm{cs}}t_*(B)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{R}t_*$(实化$(B)$) 是一个同构，表明只需证明

$$\mathrm{real}\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathrm{Loc}(T))}(t^*(s_!(A)), B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(T)}(\mathrm{real}(t^*(s_!A)), \mathrm{real}(B))$$

是双射。但这由函子（5.40）是全忠实的假设立即得到。

显然，（5.44）落在 $\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$ 中，因此还需证明 $\mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X)$ 是（5.44）的本质像。

D′利用形如（5.29）的三角进行分解表明，只需证明形如 $s_!(A)$ 的所有对象，其中 $S \in \mathcal{S}$ 和 $A \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}_S}(S) = \mathrm{D}^+$ 局部常值层范畴(S)，都属于（5.44）的本质像。但根据（5.40）本质满的假设，以及 $e_! \circ$实化 $=$实化$\circ e_!$（见（5.8））这一事实，这一点显然成立。这表明（5.39）是一个等价。□

6. Stratified spaces with normal structure

我们希望更仔细地考察定理2.13在具有以下将要定义的正规结构的分层空间中的等价条件。为简单起见，我们只讨论每个层都是流形的情形。

定义 6.1。拓扑空间 L上的**锥**是空间

$$\mathrm{Cone}(L) = \frac{L \times [0,1)}{L \times \{0\}}$$

定义 6.2。设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个分层空间。若满足以下条件，我们就称其具有**正规结构**

- 每个层都是连通流形，并且层的数量有限。
- 对于每个层 $T \in \mathcal{S}$ 和每个点 $x \in T$，都存在一个开邻域 $x \in V_x \subset X$，它与乘积同胚

$$V_x \simeq \mathrm{Cone}(L_x) \times (V_x \cap T)$$

其中 $V_x \cap T$ 与一个球同胚，而 L_x 称为 T 在x处的**链接**。

- 链接 $\_L_x$ 具有一个由各层 $S \in \mathcal{S}$ 索引的分层，使得$T \subset S$

$$L_x = \bigcup_{T \subset \overline{S}} L_{x,S}$$

它具有如下性质：$S \cap V_x = L_{x,\ S} \times (0,\ 1) \times (V_x \cap T)$。层 $L_{x,\ S}$（因此交集 $S \cap V_x$ 也）可能有有限多个连通分支。我们将层 $L_{x,\ S}$ 称为 T **在** S中的**链接**。

6.3. 在定义 6.2 中，显然，对于任意点 $x \in T$ 具有所述性质的开邻-域 V_x 构成了 x的开邻域基本系。

6.4. 任何惠特尼分层空间都具有正规结构 [McP]。

6.5. 对于许多具有正规结构的分层空间，层 T 在点 x 处的链接 L_x （在同胚意义下）与点 $x \in T$ 无关。

引理 6.6. 具有正规结构的分层空间 $(X, \mathcal{S})$ 是一个*(局部可缩)-(loc-sa)-(可构造层范畴)* 分层空间。

证明。 由于每个层都是流形，因此显然是局部单连通且局部无环的。我们只需验证 （可构造层范畴）条件。

设 $l: S \to X$ 是一个层的嵌入， $F \in$ 局部常值层范畴（S），并选取一个层 T 使得$T \subset S$。我们需要证明，复形 $\mathsf{R}l_*F \in \mathrm{D}^+(X)$ 限制到 T 后的上同调层是局部常值的。设 $x \in T$且设 $V_x \subset X$ 为定义 6.2中所述的一个开邻域。层 $\mathrm{H}^i(\mathsf{R}l_*F)|_T$ 与预层

$$V_x \cap T \mapsto \mathrm{H}^i(V_x \cap S, F) \tag{6.1}$$

我们有 $V_x \cap S = L_{x,\ S} \times (0,\ 1) \times (V_x \cap T)$。由于 $F \in$局部常值层范畴（S）以及空间 $(0,\ 1)$ 和 $V_x \cap T$ 都是可缩的，因此我们有

$$\mathrm{H}^i(V_x \cap S, F) = \mathrm{H}^i(L_{x,S}, F)$$

因此预层（6.1）是局部常值的。 □

6.7. 因此，对于具有正规结构的分层空间（X， $\mathcal{S}$，探究定理 2.13 中的等价条件是否成立是有意义的。以下推论给出了部分答案。

推论 6.8。 设（$X, \mathcal{S}$）是具有正规结构的分层空间。设 $l: S \to X$ 是一个层的包含映射。那么以下条件等价：

(1) 定理 (2.6) 中的态射 *2.13*

$$\sigma\colon \mathrm{real} \circ \mathsf{R}_{\mathrm{cs}}l_* \xrightarrow{(2.3)} \mathsf{R}l_* \circ \mathrm{real} \tag{6.2}$$

是一个 *2*-同构。

(2) 固定一个内射对象 $I \in$ 局部常值层范畴(S)。那么对于任意层 $T \subset S$、任意点 $x \in T$以及定义 *6.2* 中的任意开邻域 $x \in V_x \subset X$， 层$I|_{L_{x,\ S}}$ 对于函子而言是无环的

$$\Gamma(L_{x,S}, -)\colon \mathrm{Sh}(L_{x,S}) \to \mathrm{Mod}(R)$$

证明。(1) ⇒(2)：设 $I \in$ 局部常值层范畴(S) 是内射的。则 $\mathrm{R}_{\mathrm{cs}} l_*(I) = l_*(I)$。因此同样有 $\mathrm{R}l_*(I) = l_*(I)$。取一个层 $T \subset S$ 和 $x \in T$。在引理 6.6 的证明中，我们证明了茎 $\mathrm{H}^i(\mathrm{R}l_*(I))_x$ 同构于上同调 $\mathrm{H}^i(L_{x,S}, I)$。因此，对于 $i > 0$，$\mathrm{H}^i(L_{x,S}, I) = 0$，即 $I|_{L_{x,S}}$ 对于函子 $\Gamma(L_{x,S}, -)$ 是无环的。

(2) ⇒ (1)：令 $A \in \mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(S))$。取一个拟同构 $A \simeq I^\bullet$，其中 $I^\bullet$ 是 $\mathrm{Loc}(S)$ 中由内射对象组成的有下界复形。根据定义，$\mathrm{R}_{\mathrm{cs}} l_*(A) = l_*(I^\bullet)$。只需证明 $\mathrm{Loc}(S)$ 中的内射对象 $I \in$ 对函子

$$l_* : \mathrm{Sh}(S) \to \mathrm{Sh}(X) \tag{6.3}$$

为此，我们再次回顾引理 6.6 的证明。

取一个层 $T \subset S$，并令 $x \in T$。在引理 6.6 的证明中，我们证明了茎 $\mathrm{H}^i(\mathrm{R}l_*(I))_x$ 同构于上同调 $\mathrm{H}^i(L_{x,S}, I)$。根据我们的假设，对象 I 对函子 $\Gamma(L_{x,S}, -)$ 是无环的。因此，对于 $i > 0$，$\mathrm{H}^i(L_{x,S}, I) = 0$。所以 I 对函子 (6.3) 是无环的。□

6.9. 我们希望描述一类一般的例子，使得定理 2.13中的等价条件成立。

定理 6.10. 设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个具有正规结构的分层空间。假设每个层 S 都是一个 $K(\pi,1)$ 流形，即其万有覆盖空间是可缩的。此外，假设对于任意满足 $T \subseteq S$ 的层 S, T 以及任意点 $x \in T$，流形 $L_{x,S}$ 的每个连通分支 $L_{x,S,i}$ 也是一个 $K(\pi, 1)$-空间。

(1) 那么，如果对于每对层 $T \subset S$、每个点 $x \in T$ 以及流形 $L_{x,S}$ 的每个连通分支 $L_{x,S,i}$，以下条件成立，则定理*2.13* 中的等价条件成立：

(*) 由自然同态 $\pi_1(L_{x,S,i}) \to \pi_1(S)$ 诱导的限制函子 $r\colon \mathrm{Mod}(R\pi_1(S)) \to \mathrm{Mod}(R\pi_1(L_{x,S,i}))$ 将内射对象映为左正合不变量函子下的无环对象

$$\mathrm{Hom}_{R\pi_1(L_{x,S,i})}(R, -) = (-)^{\pi_1(L_{x,S,i})}$$

where R 是增广左 $R\pi_1(L_{x,\,S,\,i})$-模 。

(2) 以下任一情形中特别满足条件 *(*)*：

(a) 同态 $\pi_1(L_{x,\,S,\,i}) \to \pi_1(S)$ 是内射的。

(b) 同态 $\pi_1(L_{x,\,S,\,i}) \to \pi_1(S)$ 的核是一个阶数与 R 的特征互素的有限子群。

证明。由于 $(X, \mathcal{S})$ 是具有正规结构的分层空间，根据引理 6.6，它是一个 (局部可缩)-(局部半可缩)-(可构造层范畴)-分层空间，因此定理 2.13的假设成立。

(1)：是可缩的对于因此实现函子 $\sim \mathcal{S}$，其万有覆盖空间

$$\mathrm{real} : \mathrm{D}^+(\mathrm{Loc}(S)) \to \mathrm{D}^+_{\mathrm{Loc}}(S)$$

是一个等价（定理 2.7）。因此，假设条件（$*$）成立，只需证明函子态射

$$\sigma\colon \mathrm{real} \circ \mathrm{R}_{\mathrm{cs}} l_* \xRightarrow{(2.3)} \mathrm{R}l_* \circ \mathrm{real} \tag{6.4}$$

对于层 $l\colon S \to X$ 的任意包含映射，这都是一个 2-同构。

设 $I \in \mathrm{Loc}(S)$ 是一个内射对象。选取一个层 $T \subset S$、一个点 $x \in \overline{T}$及其邻域 $x \in V_x \subset X$，如定义6.2所述。由推论6.8 可知，只需证明层 $I|_{L_{x,\,S}}$ 对函子是无环的

$$\Gamma(L_{x,S}, -) = \mathrm{Hom}(\underline{R}_{L_{x,S}}, -)\colon \mathrm{Sh}(L_{x,S}) \to \mathrm{Mod}(R)$$

只需对 $L_{x,S}$ 的每个连通分支 $L_{x,S,i}$ 进行验证。

自然函子 $\mathsf{D}^+(\mathrm{Loc}(L_{x,S,i})) \to \mathsf{D}^+\,{}_{\mathrm{Loc}}(\mathrm{Sh}(L_{x,S,i}))$ 是一个等价（定理 2.7）。因此，只需证明层 $I|_{L_{x,S,i}}$ 对函子是无环的

$$\mathrm{Hom}(\underline{R}_{L_{x,S,i}}, -)\colon \mathrm{Loc}(L_{x,S,i}) \to \mathrm{Mod}(R)$$

设 $\beta : L_{x,S,i} \to S$ 为该嵌入。我们有如下交换函子图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Loc}(S) & \xrightarrow{\beta^*} & \mathrm{Loc}(L_{x,S,i}) \\ \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\ \mathrm{Mod}(R\pi_1(S)) & \xrightarrow{r} & \mathrm{Mod}(R\pi_1(L_{x,S,i})) \end{array}$$

其中竖直函子均为等价（命题 2.5）。现在，假设 n
(*) 意味着层 $I|_{L_{x,S,i}} = \beta^*(I)$ 对函子是无环的

$$\mathrm{Hom}(\underline{R}_{L_{x,S,i}}, -)\colon \mathrm{Loc}(L_{x,S,i}) \to \mathrm{Mod}(R)$$

这就证明了 (1)。

(2)(a)：假设同态 $\pi_1(L_{x,\,S,\,i}) \to \pi_1(S)$ 是内射的。那么群环 $R\pi_1(S)$ 是一个自由的 $R\pi_1(L_{x,\,S,\,i})$-模。因此，限制标量函子 $r\colon \mathrm{Mod}(R\pi_1(S)) \to \mathrm{Mod}(R\pi_1(L_{x,\,S,\,i}))$ 保持内射对象，因为它是正合函子 $R\pi_1(S)\otimes_{R\pi_1(L_{x,\,S,\,i})}(-)$ 的右伴随。

(2)(b)：令 K 为该同态的核

$$H := \pi_1(L_{x,S,i}) \to G := \pi_1(S)$$

并假设 K 是有限的，且其阶与环 R 的特征互质。令 $I \in \mathrm{Mod}(RG)$ 为一个内射对象，令 $r(I) \in \mathrm{Mod}(RH)$ 为相应的 RH-模。我们需要证明，对于取 H-不变量的函子 $\mathrm{Hom}_{RH}(R, -) = (-)^H$，$r(I)$ 是无环的。根据 (a) 部分，我们可以假设同态 $H \to G$ 是满射。令

$$0 \to r(I) \to J^0 \to J^1 \to \cdots \tag{6.5}$$

是范畴 $\mathrm{Mod}(RH)$ 中的一个内射分解。对于任意 $M \in \mathrm{Mod}(RH)$，我们有 $M^H = (M^K)^G$。首先注意到复形

$$0 \to r(I)^K \to (J^0)^K \to (J^1)^K \to \cdots \tag{6.6}$$

是正合的。事实上，由于 K 是一个阶与 $charR$互素的有限群，RK-模的满射 $RK \to R$ 有一个分裂（这些都是自由 R-模），因此函子 $(-)^K = \mathrm{Hom}_{RK}(R, -)\colon \mathrm{Mod}(RK) \to \mathrm{Mod}(R)$ 是正合的。由于 $r(I)^K = r(I)$，正合复形 (6.6) 是内射 RG-模 I 的一个分解，因此取 G-不变量后仍然正合。□

6.1. **示例**。

命题 6.11。 设 X 是一个复正规分离托里克簇。考虑X 作为带有经典拓扑和自然分层的解析空间 $\mathcal{S}$，其分层由环面轨道给出。分层空间 $(X, \mathcal{S})$ 具有正规结构（定义 *6.2*），满足定理 *6.10* 的条件，因此函子 (5.39) 是一个等价。

证明。众所周知（例如见 [CLS]），正规分离环面簇来自一个扇。令 T 为相应的复环面。取一个轨道$O \subset X$。令 $St(O) \subset X$ 为 O的星，即它是满足 $O \subset S$ 的轨道 $S \subset X$–的并。由于 X 来自一个扇， $St(O)$是 X的一个开仿射子簇，而 O是 $St(O)$中的一个极小轨道。此外，存在子环面 T'、$T'' \subset T$，使得

- T'是轨道 O 的稳定子，且 $O \simeq T''$。
- 存在一个带有不动点的仿射 T'-环面簇 X'，以及一个 T-环面簇同构 $X \simeq X' \times O$。

为考察 X 沿轨道 O 的正规结构，我们首先考虑如上所述带有固定 p 的仿射 T'-环面簇 X'。于是存在一个一参数子群 $\lambda_t \subset T'$，当 $t \to \infty$时将 X' 收缩到 p。这意味着，如果 $B_\varepsilon \subset X'$ 是以 p为中心的小球面，那么对于任意 T'-轨道 $S' \subset T'$，交集 $B_\varepsilon \cap S'$与 S'同伦等价，并且 $B_\varepsilon \cap S'$ 是 p 在 S'中的链接。特别地，该链接 $B_\varepsilon \cap S'$ 是连通的，是一个 $K(\pi, 1)$-空间，相应的基本群映射

$$\pi_1(B_\varepsilon \cap S') \to \pi_1(S')$$

是一个同构。

现在设 $S \subset St(O)$ 是一个 T-轨道。于是，对于一个 T'-轨道 $S' \subset X'$，有 $S = O \times S'$，并且 O 在 S 中的链接等于上述 p 在 S' 中的链接 $B_\varepsilon \cap S'$。因此，该链接是一个 $K(\pi, 1)$-空间，相应的基本群映射

$$\pi_1(B_\varepsilon \cap S') \to \pi_1(S)$$

是内射的。这证明了该命题。 □

备注 6.12: 对于 $X = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 配备布鲁哈分层 $X = \mathbb{C} \sqcup \{pt\}$ 的函子（5.39）不是等价。这里的层是可缩的，但链接同伦等价于S^1，因此定理 6.10 的条件不成立。

7. Versions of the main theorem

假设（X, $\mathcal{S}$）是一个 (loc-sc)-(loc-sa)-(cons)-分层空间，并且我们处于定理 2.13的情形，即自然函子

$$\text{real}\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})) \to \mathrm{D}^+_{\mathcal{S}}(X) \tag{7.1}$$

是一个等价。

定义 7.1。 考虑满子范畴 $\mathsf{Cons}^{ft}(X, \mathcal{S}) \subset \mathsf{Cons}(X, \mathcal{S})$，它由 **有限型**可构造层组成，即满足以下条件的层 F：对于任意 $x \in X$，茎F_x 是有限生成的 R-模。

引理 7.2. 假设环 R 是左诺特的。那么 可构造层范畴$^{ft}(X, \mathcal{S})$ 是 可构造层范畴$(X, \mathcal{S})$ 的一个阿贝尔子范畴，并且对扩张和直和项封闭。

证明。给定一个态射 $\gamma\colon F\to G$ 属于可构造层范畴$ft(X,\mathcal{S})$，该茎态射 $\gamma_x\colon F_x\to G_x$ 的核和余核都是有限生成的 R-模，因此$ker(\gamma)$ $coker(\gamma)$ $\in$属于可构造层范畴$ft(X,\mathcal{S})$。同样，显然可构造层范畴$ft(X,\mathcal{S})$在可构造层范畴$(X,\mathcal{S})$中对扩张和直和项封闭。□

7.3. 当且仅当对于任意层 $S\in\mathcal{S}$，对应于局部系统 $F|_S$ 的 $R\pi_1(S)$ 模是有限生成的 R-模时，可构造层 $F\in\mathsf{Cons}(X,\mathcal{S})$ 才是有限型的。

定义 7.4。假设 R 是左诺特的。记 $\mathrm{D}^+_{ft}(\mathsf{Cons}(X,\mathcal{S}))$ 为 $\mathrm{D}^+(\mathsf{Cons}(X,\mathcal{S}))$ 的厚三角子范畴，其中的上同调层属于 $\mathsf{Cons}ft(X,\mathcal{S})$。

下面的推论是显然的。

推论 7.5。假设 R 是左诺特的，且函子 (7.1) 是一个等价。则它诱导出等价

$$\mathrm{real}\colon \mathrm{D}^+_{ft}(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S}))\to \mathrm{D}^+_{\mathrm{Cons}_{ft}(X,\mathcal{S})}(X) \tag{7.2}$$

于是可以提出下面的自然问题。

问题（*）。假设 R 是左诺特的。自然函子何时

$$\mathrm{D}^b(\mathrm{Cons}_{ft}(X,\mathcal{S}))\to \mathrm{D}^b_{\mathrm{Cons}_{ft}(X,\mathcal{S})}(X) \tag{7.3}$$

是等价？这是一个有趣且微妙的问题，我们无法给出一般性的答案。问题在于，即使函子（7.1）是等价，我们也不知道函子何时

$$\mathrm{D}^b(\mathrm{Cons}_{ft}(X,\mathcal{S}))\to \mathrm{D}^b_{ft}(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})) \tag{7.4}$$

是等价。事实上，即使在一般情况下只有一个层时，这一点也并不明确。下面，我们将在一些特殊情形下对问题（*）给出肯定答案。我们先给出一个一般结果。

命题 7.6。设 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔范畴，$\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是其在扩张下封闭的严格全阿贝尔子范畴。假设满足以下条件：对于任意 $M\in\mathcal{A}$，都存在一个子对象 $N\subset M$，使得

(i) $M/N\in\mathcal{B}$; *(ii)* N 没有属于 $\mathcal{B}$ 的非零子对象。

那么，典范函子 $\Psi:\mathrm{D}^b(\mathcal{B})\to\mathrm{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ 是等价。

证明。 Ψ是本质满的：令

$$A^\bullet:=0\to A^i\xrightarrow{d^i}A^{i+1}\to\cdots\xrightarrow{d^{n-1}}A^n\to 0$$

为 $\mathrm{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ 中的一个复形。令 t 为满足 $A^t\notin\mathcal{B}$的最低指标。选取一个子对象 $P\subset A^t$，使得 $A^t/P\in\mathcal{B}$，且 P 没有来自$\mathcal{B}$的非零子对象。我们声称 $P\cap ker(d^t)=0$。事实上，由于 $H^t(A\bullet)$ $A^{t-1}\in\mathcal{B}$，我们有$ker(d^t)\in\mathcal{B}$，因此 $P\cap ker(d^t)=0$。所以 $A\bullet$ 包含无环复形

$$\widetilde{P}:=P\xrightarrow{\sim}d^t(P)$$

而且，指标为 $\leq t$ 的 $A^\bullet/P$ 的各分量属于 $\mathcal{B}$。通过归纳法，我们最终得到一个拟同构 $A^\bullet\to B^\bullet$，其中 $B^\bullet\in\mathsf{C}^b(\mathcal{B})$。

Ψ 是全忠实的：令 $C^\bullet$，$D^\bullet \in \mathrm{D}^b(\mathcal{B})$。一个态射 $\Psi(D^\bullet) \to \Psi(C^\bullet)$ 由 $\mathrm{C}^b(\mathcal{A})$ 中复形的态射图表表示

$$D^\bullet \to A^\bullet \xleftarrow{s} C^\bullet$$

其中 s 是一个拟同构。如上所示，存在一个复形 $B^\bullet \in \mathrm{C}^b(\mathcal{B})$ 以及一个复形态射 $A^\bullet \to B^\bullet$，它是一个拟同构。这证明了 Ψ 是全忠实的。□

7.7. 设 A 是域上的诺特交换代数。设 $J \subset A$ 是一个理想。令 $B := A/J$，并考虑阿贝尔范畴 $\mathcal{A} := \mathrm{Mod}(A)$ 及其由有限生成模构成的阿贝尔子范畴 $\mathcal{A}_{fg} \subset \mathcal{A}$。类似地，我们有由有限生成 B-模构成的阿贝尔子范畴 $\mathcal{B}_{fg} \subset \mathcal{A}$。

推论 7.8. 典范函子 $\mathrm{D}^b(\mathcal{B}_{fg}) \to \mathrm{D}^b_{\mathcal{B}_{fg}}(\mathcal{A})$ 是一个等价。

证明。 首先回顾一个众所周知的事实：典范函子

$$\mathrm{D}^b(\mathcal{A}_{fg}) \to \mathrm{D}^b_{\mathcal{A}_{fg}}(\mathcal{A}).$$

是一个等价。显然，它诱导出等价

$$\mathrm{D}^b_{\mathcal{B}_{fg}}(\mathcal{A}_{fg}) \to \mathrm{D}^b_{\mathcal{B}_{fg}}(\mathcal{A}).$$

因此，只需证明典范函子

$$\Psi : \mathrm{D}^b(\mathcal{B}_{fg}) \to \mathrm{D}^b_{\mathcal{B}_{fg}}(\mathcal{A}_{fg})$$

是一个等价。由命题 7.6可得这一点。事实上，对于任意有限生成的 A-模 M，其 J-挠子模 M^J 都是有限生成的，因此对于$n >> 0$我们有 $J^n M^J = 0$，所以可以取 $N := J^n M$。□

注 7.9。 推论 7.8可以推广到某些非交换诺特环（Larsen-Lunts“李代数上同调”）。

7.10。 推论 7.8 的一个版本如下。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}_{fg}$ 如推论 7.8。设 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_{fg}$ 为具有零维支集的模所构成的阿贝尔子范畴 y l 。

推论 7.11. 典范函子 $\mathrm{D}^b(\mathcal{C}) \to \mathrm{D}^b_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ 是一个等价。

证明. 与推论 7.8 的证明类似。 □

7.1. **函子** D^b(可构造层范畴$_{ft}(X, \mathcal{S})) \to \mathrm{D}^b_{ft}$(可构造层范畴$(X, \mathcal{S})$) **何时是等价?**

定义 7.12. 设 A 是域 k上的一个代数。若 A-模 M 在 k 上有限维（分别地，若它是有限型模的并），则称其为**有限型**（分别地，**归纳有限型**）。令

$$\mathrm{Mod}_{ft}(A) \subset \mathrm{Mod}_{ift}(A) \subset \mathrm{Mod}(A)$$

是相应的全子范畴。我们称代数 A满足条件（！），如果任意一个 $M \in \mathrm{Mod}^{ift}(A)$ 都是某个内射 A-模 I的子模，且该模属于 $\mathrm{Mod}^{ift}(A)$。

定理 7.13. 假设系数环 R 是一个域 k。

设 $(X,\mathcal{S})$ 是一个具有正规结构的分层空间（定义 6.2）。假设对于任意层 $S\in\mathcal{S}$， k-代数 $k\pi_1(S)$ 满足定义 7.12中的条件（！）。那么自然函子

$$\mathrm{D}^b(\mathrm{Cons}_{ft}(X,\mathcal{S}))\to\mathrm{D}^b_{ft}(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})) \tag{7.5}$$

是一个等价。（可构造层范畴$_{ft}(X,\mathcal{S})$ 中的对象是茎具有 k-有限维性的可构造层。）

证明。 步骤 1。注意，由于 $(X,\mathcal{S})$ 是一个具有正规结构的分层空间，因此有：

(a) 对于任意（连通）层 S，存在一个等价（命题 3.11）

$$\mathrm{Loc}(S)\simeq\mathrm{Mod}(k\pi_1(S)) \tag{7.6}$$

记

$$\mathrm{Loc}_{ft}(S)\subset\mathrm{Loc}_{ift}(S)\subset\mathrm{Loc}(S)$$

在此等价下对应于 $\mathrm{Mod}(k\pi_1(S))$ 中类似子范畴的子范畴。另令

$$\mathrm{Cons}_{ft}(X)\subset\mathrm{Cons}_{ift}(X)\subset\mathrm{Cons}(X)$$

为由如下层组成的全子范畴：这些层在任意层 S 上的限制都属于 $\mathrm{Loc}(S)$ 中对应的子范畴。

(b) 对于任意层的嵌入 $l\colon S\to X$，函子 $l_*:\mathrm{Loc}(S)\to\mathrm{Cons}(X)$（引理 6.6）限制到以下函子

$$l_*:\mathrm{Loc}_{ft}(S)\to\mathrm{Cons}_{ft}(X),\quad\text{and}\quad l_*:\mathrm{Loc}_{ift}(S)\to\mathrm{Cons}_{ift}(X)$$

事实上，这由引理 6.6 的证明以及任意链接 $L_{x,S}$都有有限多个连通分支这一事实得出。

步骤2。任意 $G\in\mathrm{Cons}_{ift}(X)$ 都是其属于 $\mathrm{Cons}_{ft}(X)$ 的子层之并。事实上，令 $W\subset X$ 为 G的支集（因此 W 是若干层之并），并令$j\colon U\hookrightarrow W\hookleftarrow Z\colon i$ 为一个（在 W 中）开层及其闭补集的嵌入。我们在 $\mathrm{Cons}_{ift}(X)$ 中有正合序列

$$0\to j_!j^*G\to G\to i_*i^*G\to 0 \tag{7.7}$$

根据等价（7.6），层 $j^*G\in\mathrm{Loc}_{ift}(U)$ 是其来自 Loc 的子层的并。因此，层 $j_!j^*G$ 是其来自可构造层范畴的子层的并$_{it}(X)$。因此，我们可以将层 G 替换为支集更小的层 i_*i^*G，并根据支集的大小进行归纳法，从而得出结论。

第3步。对于任意 $G\in$ 可构造层范畴$_{ift}(X)$，存在一个嵌入 $G\hookrightarrow I$，其中 $I\in$可构造层范畴(X) 是内射的，且属于可构造层范畴$_{ift}(X)$。事实上，令 $l\colon S\to X$ 为一个层的包含映射。那么局部常值层 $G|_S$ 属于局部常值层范畴$_{ift}(S)$。因此，由等价 (7.6) 以及我们对代数 $k\pi_1(S)$ 的假设 (!) 可知，存在一个嵌入 $G|_S\hookrightarrow I_S$，其中 $I_S\in$局部常值层范畴(S) 是内射的，且属于局部常值层范畴$_{ift}(S)$。注意，层 $l_*I_S\in$ 可构造层范畴(X) 是内射的，且属于可构造层范畴$_{ift}(X)$。接下来只需取 $I:=\bigoplus_S l_*I_S$，使其带有对角嵌入

$$G\hookrightarrow\bigoplus_S l_*(G|_S)\hookrightarrow\bigoplus_S l_*I_S.$$

步骤 4。对于任意 $G^\bullet \in \mathrm{C}^b(Cons_{ift})$，存在一个拟同构

$$G^\bullet \to J^\bullet \in \mathrm{C}^+(\mathrm{Cons}_{ift}(X))$$

其中，复形 $J^\bullet$ 由在 Cons(X) 中是内射的层构成。事实上，对于复形 $G^\bullet$ 中的每个成员 G^i，我们可以反复使用步骤2，构造一个分解 $G^i \to I^{\bullet,\,i}$，它由 Cons^{ift}(X) 中的层组成，且这些层在 Cons(X) 中是内射的。然后可以用标准方法由复形 $I^{\bullet,\,i}$ 构造复形 $J^\bullet$。

步骤 5。假设 $J^\bullet \in \mathrm{C}^+(\mathrm{Cons}^{ift}(X))$ 由单射可构造层构成，具有有界上同调，并且每个 $\mathrm{H}^i(J^\bullet) \in \mathrm{Cons}^{ft}(X)$。那么存在一个有界子复形 $K^\bullet \subset J^\bullet$，使得

(i) $K^\bullet \in \mathrm{C}^b$(可构造层范畴$^{ft}(X)$);

(ii) 嵌入 $K^\bullet \hookrightarrow J^\bullet$ 是拟同构。

我们从最高指标 n开始，通过降指标归纳法构造子复形 $K^\bullet$，其中 $\mathrm{H}^n(J^\bullet) \neq 0$。由于 $J^n \in \mathrm{Cons}^{ift}(X)$ 且 $\mathrm{H}^n(J^\bullet) \in \mathrm{Cons}^{ft}(X)$，利用步骤2很容易看出，我们可以找到一个子层 $K^n \subset Z^n(J^\bullet)$，它映射到 $\mathrm{H}^n(J^\bullet)$ 上，并且属于 Cons^{ft}(X)。

$$\cdots \to J^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} J^n \to \cdots$$

接下来，令 $K^{n-1} \subset J^{n-1}$ 为 Cons^{ft}(X) 中具有以下 2 个性质的一个子层：(1)d^{n-1} 将 K^{n-1}满射到 $d^{n-1}(J^{n-1}) \cap K^n$，(2) $K^{n-1} \cap Z^{n-1}(J^\bullet)$ 满射投影到 $\mathrm{H}^{n-1}(J^\bullet)$。然后，选择具有上述性质的 $K^{n-2} \subset J^{n-2}$，将 K^n 替换为 K^{n-1}，依此类推。

步骤 6。注意，在步骤 4 中，所需的子复形 $K^\bullet \subset J^\bullet$ 可以选为包含 C^b(Cons^{ft}) 中任意给定的子复形 $F^\bullet \subset J^\bullet$。事实上，先将 $J^\bullet$ 替换为 $J^\bullet/F^\bullet$，并找到具有所需性质的 $K^\bullet \subseteq \overline{J^\bullet}/F^\bullet$。然后令 $K^\bullet$ 为 $K^\bullet$ 的原像。

步骤7。三角范畴 D^b(Cons^{ft}(X)) 和 D^b_{ft}(Cons(X)) 均由 Cons^{ft}(X) 生成。因此，只需证明，对于任意 F，$G \in$ Cons^{ft}(X) 以及任意整数 m，两个范畴中的态射空间 Hom(F，$G[m]$) 同构。选择一个分解 s： $G[m] \to J^\bullet$，如步骤 4 所述。D^b_{ft}($Cons$(X)) 中的一个态射 α： $F \to G[m]$ 可由以下复形的态射图表表示

$$F \xrightarrow{f} J^\bullet \xleftarrow{s} G[m]$$

选取一个子复形 $K^\bullet \subset J^\bullet$，如步骤 5 中所示，它还包含 $f(F)$ 和$s(G[m])$（步骤 6）。那么 $s : G[m] \to K^\bullet$ 是一个拟同构，并且态射α 也可由下图表示

$$F \xrightarrow{f} K^\bullet \xleftarrow{s} G[m]$$

这表明 Hom($F, G[m]$) 在范畴 D^b(可构造层范畴$^{ft}(X)$) 与 D^b_{ft}(可构造层范畴(X)) 中相同，并证明了定理7.13。□

推论 7.14。 假设系数环 R 是一个域 k。

设$(X, \mathcal{S})$ 是一个带有正规结构的分层空间。假设对任意层 $S \in \mathcal{S}$，基本群 $\pi_1(S)$ 都是有限生成阿贝尔群。那么自然函子

$$\mathrm{D}^b(\mathrm{Cons}_{ft}(X, \mathcal{S})) \to \mathrm{D}^b_{ft}(\mathrm{Cons}(X, \mathcal{S})) \tag{7.8}$$

是一个等价。

证明。 由定理7.13 只需证明，任意有限生成交换的k-代数 A 都满足定义 7.12 中的条件（！）。这由 Mod(A) [Hart] 中不可分解内射对象的结构得出。 □

推论 7.15。 设 R 是一个域。设 $(X,\ \mathcal{S})$ 是一个带有轨道分层的复托里克簇。那么函子 *7.3* 是一个等价。

证明。 由于所有层都是复环面，它们的基本群都是有限生成阿贝尔群。因此，由推论 7.14 可知函子

$$\mathrm{D}^b(\mathrm{Cons}_{ft}(X,\mathcal{S})) \to \mathrm{D}^b_{ft}(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S}))$$

是一个等价。但由命题 6.11 函子

$$\mathrm{real}\colon \mathrm{D}^b_{ft}(\mathrm{Cons}(X,\mathcal{S})) \to \mathrm{D}^b_{\mathrm{Cons}_{ft}(X,\mathcal{S})}(X)$$

也是一个等价。 □

References

[BBD82] A. A. Be
ˇ
ılinson、J. Bernstein 和 P. Deligne。反常层。载于，，，第 – 页。法国数学会，巴黎，1982 年。[Be ˇı87] A. A. Be ˇılinson。论反常层的导出范畴。载于 *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, *Lecture Notes in Math.*第 1289 卷，第 27–41 页。施普林格，柏林，1987 年。[BGS96] Alexander Beilinson、Victor Ginzburg 和 Wolfgang Soergel。表示论中的 Koszul 对偶模式。 *J. Amer. Math. Soc.*，9(2):473–527，1996 年。[BL94] Joseph Bernstein 和 Valery Lunts。 *Equivariant sheaves and functors*, *Lecture Notes in Mathematics*第 1578 卷。施普林格出版社，柏林，1994 年。[BN93] Marcel B ¨okstedt 和 Amnon Neeman。三角范畴中的同伦极限。*Compositio Math.*，86(2):209–234，1993 年。[BS19] Daniel Bergh 和 Olaf M. Schn ¨urer。gerbe 和 Brauer-Severi 簇族的导出范畴分解，2019 年。arXiv:1901.08945。[CLS] David A. Cox、John B. Little、Henry K. Schenck。环面簇 *Grad. Stud. Math.* 124 美国数学会，普罗维登斯，RI，2011 年，xxiv+841 页。[Fre64] Peter Freyd。 *Abelian categories. An introduction to the theory of functors*。现代数学 Harper 丛书。Harper & Row 出版社，纽约，1964 年。[Gro57] Alexander Grothendieck。关于同调代数的若干问题。，：–。[Hart] Robin Hartshorne。留数与对偶 *Lecture Notes in Math.*，第 20 号，施普林格出版社，柏林—纽约，1966 年，vii+423 页。[KS94] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira。 *Sheaves on manifolds*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*第 292 卷。施普林格出版社，柏林，1994 年。[LaLu21] Michael J. Larsen；Valery A. Lunts。 *A note on Lie algebra cohomology* *Algebra Number*，（），*Theory* 15 2021 3, 773 783 第 – 期。[McP] Robert MacPherson。 *Intersection Homology and Perverse sheaves*，手稿。[MLM94] Saunders Mac Lane 和 Ieke Moerdijk。 *Sheaves in geometry and logic*。Universitext。施普林格出版社，纽约，1994 年。topos 理论的初步介绍，1992 年版的修订重印本。[Mun00] J ames R. Munkres。 *Topology*。普伦蒂斯·霍尔公司，上萨德尔河，NJ，2000 年。[的第二版。0464128]MR[Nee01] Amnon Neeman。论流形上层的导出范畴。 *Doc. Math.*，6:483–488（电子版），2001 年。[Nor02] Madhav V. Nori。可构造层。载于 *Algebra, arithmetic and geometry, Part I, II (Mumbai, 2000)* 16 *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.* 471 491 ，{v}第 卷，第 – 页。Tata 基础研究所，孟买，2002 年。

[SS16] Olaf M. Schn¨urer 和 Wolfgang Soergel。分离的局部适当映射的适当基变换。 *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*，135:223–250，2016 年。[Sta18] Stacks Project 作者。Stacks Project。 http://stacks.math.columbia.edu，2018 年。[Tre09] David Treumann。出口路径与可构造叠。 *Compos. Math.*，145(6):1504–1532，2009 年。[TT90] R. W. Thomason 和 Thomas Trobaugh。概形与导出范畴的高阶代数 KK 理论。载于 *The Grothendieck Festschrift Vol. III* 88 *Progr.* , , {v}第 *Math.* 247 435 ¨ 1990 卷，第 – 页。Birkhauser Boston，波士顿，MA，。[Ver96] Jean-Louis Verdier。阿贝尔范畴的导出范畴。 *Astérisque*，（239）：xii+253 页。（1997），1996 年。Luc Illusie 作序，Georges Maltsiniotis 编，附编者按。[Woo09] Jon Woolf。分层空间的基本范畴。 *J. Homotopy Relat. Struct.*, 4 1 359( ): –387，2009 年。

Department of Mathematics, Indiana University, 831 East 3rd Street, Bloomington,IN 47405, USA. National Research University Higher School of Economics, Moscow,Russia

Email address: vluntsiu.edu

Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Warburger Strasse 100, 33098Paderborn, Germany*Email address*: olaf.schnuererath.uni-paderborn.de