图的正则嵌入的同调障碍

Shiquan Ren

摘要

在 [36, 第 8], 节中，作者提出了关于 k-正则嵌入存在性的超图障碍。本文具体发展了这一超图障碍，并利用独立复形的（$k-1$）骨架的子超图的嵌入同调，给出了图的 k-正则嵌入的一些同调障碍。图的正则嵌入可等价地视为独立复形的几何实现，因此也可等价地视为独立复形到向量拟阵中的单纯嵌入。我们证明，若一个图存在 k-正则嵌入，则从（有向）独立复形的（$k-1$）骨架的子超（有向）图的嵌入同调到（有向）拟阵的同调存在诱导同态。此外，若存在某组三个图，且其中每个图都有一个 k-正则嵌入，则超（有向）图的嵌入同调、（有向）独立复形的同调以及拟阵的同调的某些 Mayer-Vietoris 序列之间存在诱导的交换图。进一步地，若存在某一对图，且其中每个图都有一个 k-正则嵌入，则超（有向）图的嵌入同调、（有向）独立复形的同调以及拟阵的同调的某些 Künneth 型短正合列之间存在诱导的交换图。

arXiv:2601.05479v1 [math.AT] 9 Jan 2026

2020年数学主题分类。 主要 55U10，55U15；次要 55R80，05C65**关键词和短语**。 k-正则映射、构形空间、独立复形、超图、链复形、同调

1 引言

1.1 正则映射

设 X 为一个拓扑空间。设 $\mathbb{F}$为一个域。设 $\mathcal{T}$ 为 $\mathbb{F}$上的一个拓扑。则向量空间 $\mathbb{F}^N$具有乘积拓扑 $\prod_N \mathcal{T}$。若连续映射 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 满足：对于任意互异的k个顶点 $x_1, \ldots\ldots, x_k \in X$，它们的像 $f(x_1) \ldots\ldots, f(x_k)$ 在 $\mathbb{F}$上是线性无关的，则称其为 k-正则映射。对于任意 $k \geq 2$，这样的 k-正则映射都是一个嵌入。追溯至 Chebychev、Haar [22] 和 Kolmogorov [26] （参见 [20, 32]）， k-正则嵌入与插值问题有关。特别地，当 $X = \mathbb{R}^d$时，在 $\mathbb{R}^d$ 上存在一个 k维的 k-插值空间，被证明等价于存在一个将 $\mathbb{R}^d$ 嵌入 $\mathbb{R}^N$ 中的 N-正则嵌入（参见 [32, 定理 1.3]）。

1957 年，K. Borsuk [11] 研究了欧几里得空间的正则嵌入问题。1978 年，F.R. Cohen 和 D. Handel [20] 利用构形空间上的典范向量丛的 Stiefel-Whitney 类作为正则嵌入的障碍，并给出了 N 的下确界：对于任意满足存在 k-正则嵌入 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^N$的 $k \geq 2$ 。1979 年，M.E. Chisholm [16] 推广了 [20] ，并给出了 N 的下界，以保证存在将 $\mathbb{R}^d$ 嵌入 $\mathbb{R}^N$ 的 k-正则嵌入，其中 d 是 2 的幂。2016 年，P. Blagojević、W. Lück 和 G. Ziegler [6] 推广了 [20, 16] ，并给出了 N 的下界，以保证对于任意 $d \geq 2$，存在将$\mathbb{R}^d$ 嵌入 $\mathbb{R}^N$ 的 k-正则嵌入；P. Blagojević、F.R. Cohen、W. Lück 和 G. Ziegler [7] 利用任意奇素数 p对应的复化典范向量丛的模 p 陈类作为 $\mathbb{C}^d$ 嵌入 $\mathbb{C}^N$ 的障碍，并给出了 N 的下界，以保证存在将 $\mathbb{C}^d$ 嵌入 $\mathbb{C}^N$ 的复 k-正则嵌入，其中 d 是 p的幂。2017 年，M. Michalek 和 C. Miller[32] 运用代数几何工具，构造了从 $\mathbb{C}^3$ 到$\mathbb{C}^{11}$ 的复 4-正则多项式映射，以及从 $\mathbb{C}^3$ 到 $\mathbb{C}^{14}$的复 5-正则多项式映射。2019 年，J. Buczyński、T. Januszkiewicz、J. Jelisiejew 和 M. Michalek [13]构造了新的复 k-正则映射，并通过研究点式希尔伯特概形中某些 Gorenstein 概形轨迹的维数，研究了N 的上界，使得存在将 $\mathbb{C}^d$ 映射到 $\mathbb{C}^N$ 的复 k-正则映射。

除欧几里得空间的正则嵌入外，流形的正则嵌入也得到了研究。1980 年，D. Handel [21, 定理 2.4] 利用切丛的 Stiefel-Whitney 类，给出了 N 的下界，以保证存在将闭的连通流形的不交并嵌入$\mathbb{R}^N$的正则嵌入。2016 年，球面 S^N 到 $\mathbb{R}^{N+2}$ 的 3-正则嵌入见于 [6, 例 2.6 (3)]。2018 年，本文作者 [34] 应用 Stiefel-Whitney 类 [20] 以及构形空间上的典范向量丛的模 p 陈类 [7] ，给出了 N 的下界，以保证将实射影空间、复射影空间和四元数射影空间嵌入 $\mathbb{R}^N$ 的 2-正则嵌入存在；同时也给出了将复射影空间嵌入 $\mathbb{C}^N$的复 2-正则嵌入的下界。

设 $d\colon X\times X\longrightarrow[0,+\infty]$ 是 X 上的一个距离，使得 (X,d) 是一个度量空间。设 $f\colon (X,d)\longrightarrow\mathbb{F}^N$ 是一个连续映射。若对于任意互异的 k 个顶点 $x_1,\dots,x_k\in X$，只要 $d(x_i,x_j)>2r, 1\leq i<j\leq k$，其像 $f(x_1)\dots,f(x_k)$ 就在 $\mathbb{F}$ 上线性无关，我们便称 f 关于 r 是 k- 正则的。本文作者曾在 6] 节中考察过关于 r 的这类正则性。若 $\mathcal{F}$ 是由定义在 X 上、取值于 $\mathbb{F}$ 的连续函数构成的向量空间，并且对于任意互异的点 $x_1,\dots,x_k\in X$，只要 $d(x_i,x_j)>2r, 1\leq i<j\leq k$，以及任意标量 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{F}$，都存在一个取值于 $\mathbb{F}$ 的函数 $f\in\mathcal{F}$，使得对所有 $i=1,\dots,k$，均有 $f(x_i)=\lambda_i$，那么称其为关于 r 的 k-插值空间。类似于第 2 节定理 1 的证明，3], 可以证明：当且仅当存在一个关于 r 为 k-正则的连续映射 $f\colon X\longrightarrow\mathbb{F}^N$ 时，才存在一个定义在 X 上、关于 r 的 k-插值空间 $\mathcal{F}$，其维数为 N。

上述假设要求插值点 x_1、.....、 $x_k\in X$之间的两两距离大于 $2r$ （参见 [37, 第 6]节），其意义在于避免插值点过度集中。借助这一假设，可以减小插值点处取值的小扰动对插值函数全局行为的影响。

1.2 拓　　构形空间、独立复形与拟阵的拓扑 s

对于任意拓扑空间 X， k阶有序构形空间Conf$_k(X)$是 X 上的开子空间，由所有满足 $x_i\neq x_j$对任意 $i\neq j$均成立的有序 k元组（x_1、.....、 x_k）组成。 k阶对称群 Σ_k 通过从右侧置换坐标，在Conf$_k(X)$上自由且恰当地不连续作用。轨道空间Conf$_k(X)/\Sigma_k$ 称为 X上的 k阶无序构形空间，它由 X的所有 k元子集 $\{x_1,\dots,x_k\}$ 组成。

自 20 世纪 80 年代以来，构形空间的同调得到了广泛研究。1987 年和 1989 年，C.-F. Bödigheimer、F. Cohen 和 L. Taylor [10, 8] 研究了流形 M 的构形空间 Conf$_k(M)$ 和 Conf$_k(M)/\Sigma_k$ 在域系数下同调的加法结构。1988 年，C.-F. Bödigheimer 和 F.R. Cohen [9] 研究了有理上同调，即闭曲面 M_g （亏格为 g）的构形空间 Conf$_k(M_g)$ 和 Conf$_k(M_g)/\Sigma_k$ 的有理上同调。2012 年，T. Church [18] 证明了构形空间 Conf$_\bullet(M)/\Sigma_\bullet$ 在有理系数下的同调稳定性。2014 年，T. Church、J. S. Ellen- berg 和 B. Farb [19] 运用 FI-模理论以及对称群表示的稳定性，获得了有关构形空间上同调的结果。在研究 X的 k-正则嵌入问题时，利用构形空间 Conf$_k(X)/\Sigma_k$ 的上同调，为 k-正则嵌入的存在性提供障碍（参见 [20, 6, 7]）。由于 Conf$_k(X)/\Sigma_k$ 上的典范覆盖映射所对应的伴随向量丛具有平坦联络，若考虑 [20, 6, 7],中提出的示性类，那么对于 k-正则嵌入的障碍而言，Conf$_k(X)/\Sigma_k$ 上同调的挠元部分，或模 p 系数的上同调（其中 p 为素数），才是关键。

除了构形空间的同调外，构形空间的同伦型也备受关注。注意，同胚 $X\cong X'$ 会诱导一个同胚 Conf$_k(X)\cong$Conf$_k(X')$，而同伦等价 $X\simeq X'$ 却不一定会诱导同伦等价 Conf$_k(X)\simeq$Conf$_k(X')$。2005 年，R. Longoni 和 P. Salvatore [30] 给出了一个例子，并证明即使 X 是闭流形 M，其同伦型也无法确定 Conf$_k(M)$ 的同伦型。尽管如此，如果 X 是闭的单连通流形 M，那么在2008年，P. Lambrechts 和 D. Sta nley [29, 28] 构造了一些满足庞加莱对偶的显式 CDGA模型；2019年，N. Idrissi [24] 使用 Lambrechts-Stanley 模型并证明，Conf$_k(M)$ 的有理同伦型由 M 的有理同伦型决定。为了计算分类映射的示性类，从而为 k-正则嵌入 X提供障碍，人们研究了从 Conf$_k(X)/\Sigma_k$ 到格拉斯曼流形的映射的同伦类（参见 [20, 6, 7]）。因此，Conf$_k(X)/\Sigma_k$ 的同伦型对于 k-正则嵌入的障碍至关重要。

设 $r \geq 0$。对于任意度量空间 (X, d)， r 个球面的 k 阶有序构形空间 $\mathrm{Conf}_k(X, r)$ 是 $\mathrm{Conf}_k(X)$ 的开子空间，由所有满足如下条件的有序 k 元组 $(x_1, \ldots, x_k)$ 组成：对于任意 $i \neq j$，均有 $d(x_i, x_j) > 2r$（参见 [2, 3, 14]）。当 $r = 0$ 时，$\mathrm{Conf}_k(X, 0)$ 即为 $\mathrm{Conf}_k(X)$；当 $r \to +\infty$ 时，$\bigcap_{r \geq 0} \mathrm{Conf}_k(X, r) = \emptyset$。轨道空间 $\mathrm{Conf}_k(X, r)/\Sigma_k$ 是 r 个球面的无序构形空间。我们有 $\mathrm{Conf}_k(X, -)$ 对 $\mathrm{Conf}_k(X)$ 的一个 Σ_k-等变滤过，以及由此诱导的 $\mathrm{Conf}_k(X, -)/\Sigma_k$ 对 $\mathrm{Conf}_k(X)/\Sigma_k$ 的一个滤过。当 r 从 0 变化到 $+\infty$ 时，存在有限个或可数个点，在每个点处，$\mathrm{Conf}_k(X, -)$ 或 $\mathrm{Conf}_k(X, -)/\Sigma_k$ 的同伦型都会发生变化。应用同调函子，我们得到 $\mathrm{Conf}_k(X, -)$ 的 Σ_k-等变持久同调，以及 $\mathrm{Conf}_k(X, -)/\Sigma_k$ 的持久同调（参见 [37]）。通过考察 r 个球面的构形空间的同伦型的同调，我们可以类似于 [20, 6, 7]，利用 Stiefel-Whitney 类和模 p Chern 类，得到关于 r 的 (X, d) 的 k-正则嵌入存在性的障碍。

根据顶点集上图的测地距离所定义的 $1/2$-球面的无序构形空间，我们可以构造独立复形的骨架。2006 年，A.J. Berrick、F.R. Cohen、Y.L. Wong 和 J. Wu [5] 研究了构形空间的单纯结构，并给出了辫群与球面的同伦群之间的某些联系。设 $G = (V, E)$ 为一个图。设 d_G 为 G 的测地距离。我们得到一个度量空间 (V, d_G)。根据 (V, d_G) 的构形空间的单纯结构，可以构造独立复形 $\mathrm{Ind}(G)$，使得对于任意$k \geq 1$，$(k-1)$-单形是 $\mathrm{Conf}_k(V, 1/2)/\Sigma_k$ 的元素。$\mathrm{Ind}(G)$ 的同调（例如， [45]）和同伦型（例如， [1, 27]）在图论中被发现具有重要意义且十分有趣。

1935年，H. Whitney [44] 引入了拟阵，以捕捉线性相关的抽象本质。对于固定向量空间中的任意有限子集 S，若 S 的子集 σ 中的向量线性无关，则称其为独立集。所有独立集 $\sigma \subseteq S$ 的集合构成一个拟阵 $\mathcal{M}$，称为向量拟阵（参见 [43, 第 1.3] 节）。向量拟阵是斯蒂费尔流形以及射影空间的无序构形空间某些子空间的几何推论（参见 [31]）。具体而言，若向量空间为 $\mathbb{R}^N$ 或 $\mathbb{C}^N$，则 $\mathcal{M}$ 中的元素是斯蒂费尔流形 $V_k(\mathbb{R}^N)$ 或 $V_k(\mathbb{C}^N)$ 中元素的 Σ_k-轨道，其中 $1 \leq k \leq N$ 和 Σ_k 通过置换标架坐标的顺序作用于 $V_k(\mathbb{R}^N)$ 或 $V_k(\mathbb{C}^N)$。另一种说法是，$\mathcal{M}$ 中的元素是 $\mathbb{R}^N$ 或 $\mathbb{C}^N$ 中线性无关向量构成的集合，可视为 $\mathbb{R}P^{N-1}$ 或 $\mathbb{C}P^{N-1}$ 的无序构形空间中的某些点。斯蒂费尔流形与构形空间的单纯结构中，面映射和退化映射分别通过删除和添加坐标得到（参见 [5, 第 3] 节）；这些结构将给出向量拟阵的组合结构。

1.3 超图的嵌入同调

超图的嵌入同调是单纯同调的一种推广，其基本观点是将超图视为删去某些非极大单形的单纯复形。给定顶点集 V，超图 $\mathcal{H}$ on V 是 V 的非空有限子集族。$\mathcal{H}$ 的元素称为超边（参见 [4]）。1991 年，A. D. Parks 和 S. L. Lipscomb [33] 考察了超图的关联单纯复形 $\mathcal{H}$，即包含 $\mathcal{H}$的最小单纯复形，并研究了单纯同调。2019 年，S. Bres- san、J. Li、J. Wu 及本文作者 [12]证明，包含超边的分次模的最小链复形与包含于超边的分次模中的最大链复形是准同构的，从而将超图的嵌入同调定义为单纯复形通常同调的一种推广。在[12, 定理 3.10]中证明了嵌入同调的一个 Mayer-Vietoris 序列。2022 年，J. Wu、M. Zhang 和本文作者 [41] 证明了关于超图的嵌入同调以及（下）关联单纯复形同调的另外一些 Mayer-Vietoris 序列。2023 年，J. Wu 和本文作者 [40, 第 4 节4]研究了关于超图的嵌入同调以及（下）关联单纯复形同调的某些 Künneth 型公式的持久性；C. Wu、J. Wu 和本文作者 [39, 定理 1.3]证明了关于随机超图的嵌入同调以及随机（下）关联单纯复形同调的 Künneth 型公式的一些随机版本。

除了超图的嵌入同调，超有向图的嵌入同调以及流形上超（有向）图的双复形也得到了研究。2023 年，D. Chen、J. Liu、J. Wu 和 G.-W. Wei [15] 通过为超边赋予定向来研究超有向图，并研究了嵌入同调的持久性以及超有向图的拉普拉斯算子。2025 年，本文作者 [36]

研究了顶点在流形上移动的超（有向）图。因此， [36] 将超有向图嵌入为有序构形空间的分次子流形，并将超图嵌入为无序构形空间的分次子流形。构造了流形上超（有向）图的下确界双复形和上确界双复形，并证明它们关于由顶点删除诱导的边界映射准同构。对于不满足顶点删除运算封闭性的流形上的超（有向）图，例如流形的所有有限开覆盖的集合、流形的所有有限图册的集合、黎曼流形中固定半径测地球的所有有限紧密堆积的集合等，下确界双复形与上确界双复形并不相等。

流形上的 k 一致超图的典范覆盖映射的伴随向量丛，是 k 阶无序构形空间上的典范覆盖映射的伴随向量丛的限制。由于流形上的 k 一致超图的上同调所包含的信息多于 k 阶无序构形空间的上同调，因此可以合理地预期，流形上的 k 一致超图的上同调中的特征类有望为流形存在 k 正则嵌入提供更多障碍（参见 [36,第 8] 节）。

1.4 本文的结果

本文研究度量空间 (X,d) 到 $\mathbb{F}^N$ 的 k 正则嵌入问题的极端情形，其中 X 是离散集 V，而 $d=d_G$ 是 V 上的图 G 的测地距离，且嵌入相对于 $r>0$ 。我们利用（有向）独立复形的子超（有向）图的嵌入同调、Mayer-Vietoris 序列以及 Künneth 型公式，给出存在 k 正则嵌入的障碍。

设 $G=(V,E)$ 为一个图。对于任意 $v,u\in V$，若序列 $v_0v_1\dots v_l$ 是 G 中从 v 到 u 的长度为 l 的路径，则称之为路径；其中 $v_0,v_1,\dots,v_l\in V, v_0=v, v_l=u$，且对于任意 $1\le i\le l$ [1]，$(v_{i-1},v_i)\in E$。G 的测地距离是一个函数 $d_G\colon V\times V\longrightarrow[0,+\infty]$，对于任意 $v,u\in V$, d_G，(v,u) 定义为 G 中所有从 v 到 u 的路径长度 l 的下确界。特别地，(i) $d_G(v,u)=0$ 当且仅当 $v=u$；(ii) $d_G(v,u)=1$ 当且仅当 $(v,u)\in E$；(iii) $d_G(v,u)=+\infty$ 当且仅当 v 和 u 在 G 中不连通；(iv) 对任意 $l\ge1$，取 l 次距离幂 G^l（参见 [1]），有 $d_{G^l}(v,u)>1$ 当且仅当 $d_G(v,u)>l$。注意，(V,d_G) 是一个度量空间，而 V 赋有离散拓扑。因此，映射 $f\colon(V,d_G)\longrightarrow\mathbb{F}^N$ 关于 $r=1/2$ 是 k-正则的，当且仅当对于 G 中任意互异且两两不相邻的顶点 $v_1,\dots,v_k\in V$，其像 $f(v_1),\dots,f(v_l)$ 在 $\mathbb{F}^N$ 中线性无关。此外，根据 (iv)，(V,d_{G^l}) 关于 $r=1/2$ 嵌入 $\mathbb{F}^N$ 的 k- 正则嵌入问题，等价于 (V,d_G) 关于 $r=l/2$ 嵌入 $\mathbb{F}^N$ 的 k-正则嵌入问题。因此，为了研究任意图 G 在任意 $r>0$ 下关于 d_G 的 k-正则嵌入，只需考虑特殊情形 $r=1/2$。为简便起见，我们称 f 为 G 上的 k-正则映射，并记作 $f\colon G\longrightarrow\mathbb{F}^N$。此外，若 $f\colon G\longrightarrow\mathbb{F}^N$ 对任意$k\ge2$都是 k-正则的，则称 f 为 G-正则的。

G 的独立集是满足以下条件的集合 $\sigma\subseteq V$：其中的顶点两两不相邻。G 的独立复形是单纯复形 Ind(G)，其单形为 G的有限独立集。我们将有向独立复形 $\overrightarrow{\text{Ind}}(G)$定义为底层集合为 V 的超有向图，其有向超边 $\vec{\sigma}$是由互异且两两不相邻的顶点组成的有限有序元组（v_0，v_1，…，v_k），并且其底层集合 $\{v_0,v_1,\dots,v_k\}$是 G的独立集。于是，$\overrightarrow{\text{Ind}}(G)$是 $\Sigma_\bullet$-不变的，而 Ind(G)是 $\overrightarrow{\text{Ind}}(G)$的底层超图，其典范投影为 $\pi\colon\ \overrightarrow{\text{Ind}}(G)\longrightarrow\text{Ind}(G)$。将 k正则嵌入到 G 中的等价刻画，是在 $\mathbb{F}^N$中对 Ind(G)的（$k-1$）骨架进行几何实现；而将 G正则嵌入到 G 中的等价刻画，是在 $\mathbb{F}^N$中对 Ind(G)进行几何实现。

对于任意有限集 $S\subseteq\mathbb{F}^N$，令 $\mathcal{M}$ 为由 S 中所有向量线性无关的子集构成的拟阵。那么 $\mathcal{M}$ 是一个增广单纯复形（参见 [35, 第 5] 节），也就是说，$\mathcal{M}\setminus\{\emptyset\}$ 是一个$\overrightarrow{\ }$单纯复形。我们将有向拟阵 $\mathcal{M}$ 定义为由 S 中线性无关向量的所有有限有序元组组成的集合。那么 $\vec{\mathcal{M}}\setminus\{\emptyset\}$ 是一个超有向图。存在一个典范投影 $\vec{\ }\pi$：$\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$，将每个有序元组映射到其底层集合。因此，我们称 $\mathcal{M}$ 为底层

[1] E中的一条边是 2-集合 $\{v,u\}\subseteq V$。不过，作为一种记号上的滥用，我们也将 $\{v,u\}$ 写作 $(v,\ u)$ 或 $(u,\ v)$，并采用等价关系 $(v,\ u)\sim(u,\ v)$（参见例 4.6）。

拟阵 $\vec{\mathcal{M}}$。对于 Ind(G) 的（$k-1$）骨架在$\mathbb{F}^N$ 中的几何实现，其等价刻画是将 Ind(G) 的（$k-1$）骨架嵌入 $\mathcal{M}$ 的单纯嵌入；而 Ind(G) 在 $\mathbb{F}^N$ 中的几何实现，其等价刻画是将 Ind(G) 嵌入 $\mathcal{M}$ 的单纯嵌入。

令 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 为一个 k-正则嵌入，使得 $f(V) \subseteq S$。本文的第一个主要结果是：对于 $\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G))$ 的任意子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$，若其底层超图 $\mathcal{H}$ 是 $\mathrm{sk}^{k-1}\mathrm{Ind}(G)$ 的子超图，则存在一个由此诱导的同调群交换图

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(\vec{\mathcal{H}}) & \xrightarrow{f_*} & H_\bullet(\vec{\mathcal{M}}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ H_\bullet(\mathcal{H}) & \xrightarrow{f_*} & H_\bullet(\mathcal{M}) \end{array} \tag{1.1}$$

该交换图关于 $\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G))$ 的子超有向图之间的态射，以及它们在 $\mathrm{sk}^{k-1}\mathrm{Ind}(G)$ 的子超图之间诱导的态射，具有函子性（参见定理 8.6）。这里，$H_\bullet(\mathcal{H})$ 表示超图的嵌入同调（参见 [12]），而 $H_\bullet(\vec{\mathcal{H}})$ 表示超有向图的嵌入同调（参见 [15]）。特别地，存在一个由此诱导的同调群交换图（参见定理 8.6）

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G))) & \xrightarrow{f_*} & H_\bullet(\vec{\mathcal{M}}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ H_\bullet(\mathrm{sk}^{k-1}\mathrm{Ind}(G)) & \xrightarrow{f_*} & H_\bullet(\mathcal{M}). \end{array} \tag{1.2}$$

图式 (1.1) 和 (1.2) 给出了存在 k-正则嵌入的同调障碍：将 G嵌入到 $\mathbb{F}^N$ 中，且顶点的像属于 S。

设 G'、G'' 和 G''' 是顶点集互不相交的图。假设 $f'\colon G' \longrightarrow \mathbb{F}^N$、$f''\colon G'' \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 和 $f'''\colon G''' \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 是 k-正则映射，且顶点的像属于 S。令 $\tilde{*}$ 表示图的连接（参见例 4.6）。本文的第二个主要结果是：对于 $\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'\tilde{*}G'''))$ 的任意子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}'$，以及 $\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G''\tilde{*}G'''))$ 的任意子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}''$，若它们的底层超图分别为 $\mathcal{H}'$ 和 $\mathcal{H}''$，则（参见第 5.1 小节）

(I) $\vec{\mathcal{H}}'$ 和 $\vec{\mathcal{H}}''$ 均为 $\Sigma_\bullet$-不变，

(II) 对任意 $\sigma' \in \mathcal{H}'$ 和任意 $\sigma'' \in \mathcal{H}''$，要么 $\sigma' \cap \sigma''$ 为空集，要么 $\sigma' \cap \sigma'' \in \mathcal{H}' \cap \mathcal{H}''$，

存在一个由 Mayer-Vietoris 序列诱导的交换图（在 (1.3) 和 (1.4) 中，MV 表示 Mayer-Vietoris 型长同调群序列，箭头是这些序列之间的同态）

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MV}(\vec{\mathcal{H}}', \vec{\mathcal{H}}'') & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\vec{\mathcal{M}}', \vec{\mathcal{M}}'') \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ \mathrm{MV}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'') & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\mathcal{M}', \mathcal{M}'') \end{array} \tag{1.3}$$

其中，$\vec{\mathcal{M}}'$ 和 $\vec{\mathcal{M}}''$ 分别是 $f'(V') \cup f'''(V''')$ 和 $f'(V'') \cup f'''(V''')$ 中所有线性无关向量有限序列所构成的有向拟阵，其底层拟阵分别为 $\mathcal{M}'$和 $\mathcal{M}''$ [2]（参见定理 8.8）。特别地，存在一个由 Mayer-Vietoris 序列诱导的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MV}(\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'\tilde{*}G''')), \mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G''\tilde{*}G'''))) & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\vec{\mathcal{M}}', \vec{\mathcal{M}}'') \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ \mathrm{MV}(\mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G'\tilde{*}G''')), \mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G''\tilde{*}G'''))) & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\mathcal{M}', \mathcal{M}''). \end{array} \tag{1.4}$$

[2]图表 (1.3) 不一定满足关于超有向图之间态射以及它们所诱导的底层超图态射的函子性，因为假设 (I) 和 (II) 可能不具有函子性。

图表 (1.3) 和 (1.4) 给出了关于存在 k-正则嵌入的同调障碍：将 G'、G'' 和 G''' 嵌入 $\mathbb{F}^N$，且顶点的像位于 S 中（参见定理 8.7）。

设 G和 G' 是顶点集互不相交的图。设 S 和 S' 分别是 $\mathbb{F}^N$ 和 $\mathbb{F}^{N'}$的有限子集。假设 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 是 k-正则的，且 $f'\colon G' \longrightarrow \mathbb{F}^{N'}$是 k'-正则的，并满足 $f(V) \subseteq S$和 $f'(V') \subseteq S'$。本文的第三个主要结果是：对于 $\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G))$ 的任意子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$，以及 $\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'))$ 的任意子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}'$，若其底层超图分别为 $\mathcal{H}$和 $\mathcal{H}'$，则存在一个由此诱导的短正合列交换图（在 (1.5) 和 (1.6) 中，KU 表示同调群的 Künneth 型短正合列，箭头表示这些序列之间的同态）

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{KU}(\vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{H}}') & \longrightarrow & \mathrm{KU}(\vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{M}}') \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ \mathrm{KU}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathrm{KU}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') \end{array} \tag{1.5}$$

它关于 $\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G))$ 和 $\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'))$ 的子超有向图之间的态射，以及由此在 $\mathrm{sk}^{k-1}\mathrm{Ind}(G)$ 和 $\mathrm{sk}^{k-1}\mathrm{Ind}(G')$ 的子超图之间诱导的态射，具有函子性（参见定理 8.11）。特别地，存在一个由此诱导的短正合列交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{KU}(\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)), \mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'))) & \longrightarrow & \mathrm{KU}(\vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{M}}') \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ \mathrm{KU}(\mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G)), \mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G'))) & \longrightarrow & \mathrm{KU}(\mathcal{M}, \mathcal{M}'). \end{array} \tag{1.6}$$

图表 (1.5) 和 (1.6) 给出了存在 k-正则嵌入的同调障碍：将 G嵌入 $\mathbb{F}^N$，以及将 G' 嵌入 $\mathbb{F}^{N'}$，并使顶点的像分别位于 S 和 S' 中（参见定理 8.10）。

本文的结果有望应用于研究一般度量空间 (X, d) 的 k-正则嵌入所面临的同调障碍。在这类研究中，采用双复形而非通常的链复形，因此使用双重同调或 Dolbeault 同调，而非通常的同调（参见 [37]）。特别地，若 (X, d) 是黎曼流形 (M, g)，且其测地距离由 g 在 M 上诱导，那么可以从 $\mathrm{Conf}_\bullet(M)$ 的子超有向图上的微分形式构造双复形；这些子超有向图可视为单纯流形的分次子流形（参见 [36]）。

1.5 结构安排

第 2 节介绍图的正则嵌入的一些基本性质和例子。第 3 至 5 节回顾超（有向）图的嵌入同调，以及（下）关联单纯复形的同调。我们明确陈述了超（有向）图嵌入同调、（下）关联有向单纯复形的同调，以及（下）关联单纯复形的同调所满足的 Mayer-Vietoris 序列和 Künneth 型公式。在第 6 节，我们将第 4 节的结果应用于图的独立复形和有向独立复形，研究其同调，并给出（有向）独立复形的 Mayer-Vietoris 序列和 Künneth 型公式。在第 7 节，我们将第 4 节的结果应用于拟阵和有向拟阵，研究其同调，并给出（有向）拟阵的 Mayer-Vietoris 序列和 Künneth 型公式。在第 8 节，我们借助第 5 至 7 节证明本文的主要结果。我们在定理 8.3 中证明第一个主要结果，在定理 8.7 和定理 8.8 中证明第二个主要结果，并在定理 8.10 和定理 8.11 中证明第三个主要结果。

2 图上的正则映射

本节中，我们将给出图的（仿射）正则嵌入的定义，以及通过将独立复形单纯嵌入拟阵来刻画它的等价方式。我们还将给出一些

图的正则嵌入示例，进而说明独立复形的同伦类型如何构成图存在正则嵌入的障碍。

设 $G=(V,E)$ 为一个图。设 $\mathbb{F}$ 为一个域。设 $\mathbb{F}^N$ 为 $\mathbb{F}$ 上的 N 维向量空间。若对于任意互异的 k 个顶点 v_1、……、$v_k \in V$，它们在 G 中两两不相邻，且其像 $f(v_1)$、……、$f(v_k)$ 在 $\mathbb{F}$ 上（仿射）线性无关，则称映射 $f\colon V \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 是关于 G 的（仿射） k-正则映射。为简便起见，我们将关于 G 的（仿射） k-正则映射 $f\colon V \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 写作 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$，并称其为 G 上的（仿射） k-正则映射。若对于任意正整数 k，f 都是关于 G 的（仿射） k-正则映射，则称映射 $f\colon V \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 是（仿射） G-正则的。

我们注意到，当 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 时，总可以扰动各顶点像的位置，使得对于任意 v_1、……、$v_N \in V$，$f(v_1)$、……、$f(v_N)$ 在 $\mathbb{F}^N$ 中线性无关；并且对于任意 v_1、……、$v_{N+1} \in V$，$f(v_1)$、……、$f(v_{N+1})$ 在 $\mathbb{F}^N$ 中仿射无关。因此，对于任意图 G，都存在 N-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^N$ 以及复数 N-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}^N$。此外，还存在仿射（$N+1$）-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^N$ 以及复数仿射（$N+1$）-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}^N$。进一步地，对于任意 $N \geq 3$ 和任意图 G，由于 G 可以嵌入 $\mathbb{R}^N$ 中成为一个一维几何单纯复形，使得各边的像彼此不相交，因此总可以扰动各顶点像的位置，使得扰动后，G 在 $\mathbb{R}^N$ 中的无边相交嵌入是 G 上的 N-正则映射，或是 G 上的仿射（$N+1$）-正则映射。

设 S 是 $\mathbb{F}^N$ 的一个固定有限子集。设 $\mathrm{Ind}(G)$ 是 G 的独立复形。设 $\mathcal{M}$ 是拟阵，其独立集是由 S 中线性无关向量组成的子集，这些向量属于 $\mathbb{F}^N$。我们有以下结论

(1) 任何 k-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$，只要满足 $f(V) \subseteq S$，都会诱导一个单纯嵌入

$$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{sk}^{k-1}\mathrm{Ind}(G) \longrightarrow \mathcal{M}.$$

反过来，将 $\mathrm{sk}^{k-1}\mathrm{Ind}(G)$ 单纯嵌入到 $\mathcal{M}$ 中，会得到一个定义在 G 上的 k-正则映射（参见命题 8.1）；

(2) 任何 G-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$，只要满足 $f(V) \subseteq S$，都会诱导一个单纯嵌入 g

$$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(G) \longrightarrow \mathcal{M}.$$

反过来，将 $\mathrm{Ind}(G)$ 单纯嵌入到 $\mathcal{M}$ 中，会得到一个定义在 G 上的 G-正则映射（参见推论 8.2） .

令 $\mathcal{A}$ 为拟阵，其独立集是由 S 中仿射独立向量组成的子集（参见 [43, 第 1.3 节，仿射相关]）。那么 $\mathcal{A}$ 是一个单纯复形。类似于 (1) 和 (2)，分别可以得到以下结论

(1)' 任意仿射 k-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$，满足 $f(V) \subseteq S$，都将诱导一个单纯嵌入

$$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{sk}^{k-1}\mathrm{Ind}(G) \longrightarrow \mathcal{A}.$$

反之，将 $\mathrm{sk}^{k-1}\mathrm{Ind}(G)$ 嵌入 $\mathcal{A}$ 的任意单纯嵌入，都将给出 G 上的仿射 k-正则映射；

(2)' 任意仿射 G-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$，满足 $f(V) \subseteq S$，都将诱导一个单纯映射

$$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(G) \longrightarrow \mathcal{A}.$$

反之，将 $\mathrm{Ind}(G)$ 嵌入 $\mathcal{A}$ 的任意单纯嵌入，都将给出 G 上的仿射 G-正则映射。

为简洁起见，本文余下部分仅考虑正则性条件，并省略仿射正则性条件。

例 2.1. 设 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$。对于任意 $R>0$，令

$$S_R = \{(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1,\ldots,x_N \in \mathbb{Z} \text{ and } |x_1|,\ldots,|x_N| < R\}.$$

对于任意 $N \geq 3$、任意正整数 k 以及任意具有有限顶点集 V的有限图 G，我们声称存在一个 k-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^N$，使得 $f(V) \subseteq S_R$ 对于某个 $R>0$成立。事实上，我们任取一个映射

$f:\ G\longrightarrow\mathbb{R}^N$，并对 f 进行扰动，使得 f 是 k-正则的，且 f 的像具有有理坐标。因此，不失一般性，我们可以假设该 k-正则映射由 $f:\ G\longrightarrow\mathbb{Q}^N$给出。对于充分大的 c，存在一个由 c给出的标量乘法，使得 $cf(V)\subseteq\mathbb{Z}^N$，即复合映射

$$G\xrightarrow{f}\mathbb{Q}^N\xrightarrow{c(-)}\mathbb{Q}^N$$

映射 V到 $\mathbb{Z}^N$。由于 V是有限集，因此存在一个上界 R，使其成为 $cf(V)$坐标的上界。因此，$cf:G\longrightarrow\mathbb{R}^N$是一个满足 $cf(V)\subseteq S_R$的 k-正则映射。

在接下来的两个例子中，我们令 $G_1,\ldots,G_n$分别为定义在 $V_1,\ldots,V_n$上的图，其中 $V_1,\ldots,V_n$是不相交的顶点集。

例2.2。考虑约化连接图 $\tilde{*}_{i=1}^n G_i$，它是通过向不交并 $\bigsqcup_{i=1}^n G_i$添加所有边(v_k,v_l) 得到的，其中$v_k\in V_k$、$v_l\in V_l$和 $1\leq k<l\leq n$ 任取。则$\mathrm{Ind}(\tilde{*}_{i=1}^n G_i)=\bigsqcup_{i=1}^n\mathrm{Ind}(G_i)$。以下命题等价

(a) 存在一个从 $\bigsqcup_{i=1}^n\mathrm{sk}^{k-1}\mathrm{Ind}(G_i)$ 到 $\mathcal{M}$的单纯嵌入；

(b) 存在一个 k-正则嵌入 f，将$\tilde{*}_{i=1}^n G_i$ 嵌入到 $\mathbb{F}^N$ 中，使得 $\bigsqcup_{i=1}^n f(V_i)\subseteq S$。

以下条件等价

(a)' 存在一个单纯嵌入，将$\bigsqcup_{i=1}^n\mathrm{Ind}(G_i)$ 嵌入到 $\mathcal{M}$ 中；

(b)' 存在一个$(\tilde{*}_{i=1}^n G_i)$-正则嵌入 f，将 $\tilde{*}_{i=1}^n G_i$ 嵌入到 $\mathbb{F}^N$ 中，使得$\bigsqcup_{i=1}^n f(V_i)\subseteq S$。

例2.3。考虑图$\bigsqcup_{i=1}^n G_i$ 的（不交）并集。那么，$\mathrm{Ind}(\bigsqcup_{i=1}^n G_i)=*_{i=1}^n\mathrm{Ind}(G_i)$ 是 G_1、.....、G_n 的独立复形的连接，因此

$$\mathrm{sk}^{k-1}(*_{i=1}^n\mathrm{Ind}(G_i))=\bigcup_{\sum_{i=1}^n k_i=k}*_{i=1}^n\left(\mathrm{sk}^{k_i-1}\mathrm{Ind}(G_i)\right)$$

以下条件等价

(a) 存在一个从 $\bigcup_{\sum_{i=1}^n k_i=k}*_{i=1}^n\left(\mathrm{sk}^{k_i-1}\mathrm{Ind}(G_i)\right)$ 到 $\mathcal{M}$ 的单纯嵌入；

(b) 存在一个 k-正则嵌入 f，将$\bigsqcup_{i=1}^n G_i$ 嵌入 $\mathbb{F}^N$，使得$\bigsqcup_{i=1}^n f(V_i)\subseteq S$。

以下条件等价

(a)' 存在一个从 $*_{i=1}^n\mathrm{Ind}(G_i)$ 到 $\mathcal{M}$的单纯嵌入；

(b)' 存在一个$(\bigsqcup_{i=1}^n G_i)$-正则嵌入 f，将$\bigsqcup_{i=1}^n G_i$ 嵌入 $\mathbb{F}^N$，使得$\bigsqcup_{i=1}^n f(V_i)\subseteq S$.

分别将例2.2和例2.3应用于5-圈和4-路径，可得下面两个例子。

例2.4。令 C_5 为具有顶点 $\{v_i\mid 1\leq i\leq 5\}$ 和边 $\{(v_i,v_{i+1})\mid 1\leq i\leq 5\}$ 的5圈，其中$v_6=v_1$。则 $\mathrm{Ind}(C_5)=C_5$，其边集为 $\{(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_2,v_4),(v_2,v_5),(v_3,v_5)\}$。对于任意域$\mathbb{F}$、任意向量空间 $\mathbb{F}^N$ 和任意有限集 $S\subseteq\mathbb{F}^N$，以下各项等价

(a) 存在一个从 C_5 到 $\mathcal{M}$ 的单纯嵌入；

(b) 存在一个将 f 嵌入 $\mathbb{F}^N$ 的2-正则嵌入 C_5，使得 $f(V)\subseteq S$；

(c) 存在一个将 f 嵌入 $\mathbb{F}^N$ 的 C_5-正则嵌入 C_5，使得 $f(V)\subseteq S$。

根据例*2.2*，以下各项等价

(a)' 存在一个从 $\bigsqcup_n C_5$ 到 $\mathcal{M}$ 的单纯嵌入；

(b)' 存在一个 f从 $\tilde{*}_n C_5$到 $\mathbb{F}^N$的2-正则嵌入，使得 $\bigsqcup_n f(V(C_5))\subseteq S$；

(c)' 存在一个 f 从 $\tilde{*}_n C_5$ 到 $\mathbb{F}^N$ 的$(\tilde{*}_n C_5)$-正则嵌入，使得 $\bigsqcup_n f(V(C_5)) \subseteq S$。

根据例*2.3*，以下命题等价

(a) 存在一个从 $*_n C_5$ 到 $\mathcal{M}$的单纯嵌入；
(b) 存在一个$(\bigsqcup_n C_5)$-正则嵌入 f，将 $\bigsqcup_n C_5$ 嵌入到 $\mathbb{F}^N$ 中，使得 $\bigsqcup_n f(V(C_5)) \subseteq S$.[3]

例2.5. 设 P_4 是一个顶点为 $\{v_i \mid 1 \le i \le 4\}$ 、边为 $\{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \le i \le 3\}$的4-路径。那么，$\mathrm{Ind}(P_4) = P_4$ 的边集为 $\{(v_2, v_4),(v_1, v_4), (v_1, v_3)\}$。对于任意的域 $\mathbb{F}$、向量空间 $\mathbb{F}^N$和有限集 $S \subseteq \mathbb{F}^N$，以下命题等价

(a) 存在一个从 P_4 到 $\mathcal{M}$的单纯嵌入；

(b) 存在一个2-正则嵌入 f，将 P_4 嵌入到 $\mathbb{F}^N$ 中，使得 $f(V) \subseteq S$；

(c) 存在一个 P_4-正则嵌入 f，将 P_4 嵌入 $\mathbb{F}^N$，使得 $f(V) \subseteq S$。

根据例*2.2*，以下各项等价
(a)' 存在一个将 $\bigsqcup_n P_4$ 嵌入 $\mathcal{M}$ 的单纯嵌入；

(b)' 存在一个 2-正则嵌入 f，将 $\tilde{*}_n P_4$ 嵌入 $\mathbb{F}^N$，使得 $\bigsqcup_n f(V(P_4)) \subseteq S$；

(c)' 存在一个 $(\tilde{*}_n P_4)$-正则嵌入 f，将 $\tilde{*}_n P_4$ 嵌入 $\mathbb{F}^N$，使得$\bigsqcup_n f(V(P_4)) \subseteq S$。

根据例*2.3*，以下各项等价

*(a)"*存在从 $*_n P_4$ 到 $\mathcal{M}$ 的单纯嵌入；
*(b)"*存在一个 $(\bigsqcup_n P_4)$-正则嵌入 f，将 $\bigsqcup_n P_4$ 嵌入 $\mathbb{F}^N$，使得 $\bigsqcup_n f(V(P_4)) \subseteq S$。

对于任意域 $\mathbb{F}$、任意向量空间 $\mathbb{F}^N$ 和任意有限集 $S \subseteq \mathbb{F}^N$，令 $|\mathcal{M}|$ 为 $\mathcal{M} \setminus \{\emptyset\}$ 作为单纯复形的几何实现。考虑圈和路径的独立复形的同伦类型。下面给出两个例子。

例 2.6。令 C_n 为顶点为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$、边为 $\{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \le i \le n\}$ 的 n-圈，其中 $v_{n+1} = v_1$。令 P_n 为顶点为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 、边为 $\{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \le i \le n-1\}$ 的 n- 路径。在 *[27]*, 中已证明

$$\mathrm{Ind}(C_n) = \Sigma \mathrm{Ind}(C_{n-3}), \qquad \mathrm{Ind}(P_n) = \Sigma \mathrm{Ind}(P_{n-3}),$$

这与 *[1,*定理 *1.1]* 和 *[45,* 定理 *1.3]*一致。通过直接计算，

$$\begin{gathered}
\mathrm{Ind}(C_4) = \bigsqcup_2 P_2 \simeq S^0, \quad \mathrm{Ind}(C_5) = C_5 \simeq S^1, \\
\mathrm{Ind}(C_6) = \text{clique complex of } C_3 \square P_2 \simeq \bigvee_2 S^1, \\
\mathrm{Ind}(P_3) = P_2 \simeq *, \quad \mathrm{Ind}(P_4) = P_4 \simeq *, \\
\mathrm{Ind}(P_5) = C_3 \cup C_4 (C_3 \text{ and } C_4 \text{have a common edge}) \simeq \bigvee_2 S^1.
\end{gathered}$$

通过归纳法，对于任意 $m \ge 0$,

$$\mathrm{Ind}(C_n) \simeq \begin{cases} S^m, & n = 3m+4 \\ S^{m+1}, & n = 3m+5 \\ \bigvee_2 S^{m+1}, & n = 3m+6, \end{cases} \qquad \mathrm{Ind}(P_n) \simeq \begin{cases} *, & n = 3m \text{ or } 3m+1 \\ \bigvee_2 S^{m+1}, & n = 3m+2. \end{cases}$$

因此，如果满足以下条件之一

(a) 对于 $n = 3m+4$， S^m 无法连续嵌入到 $|\mathcal{M}|$ 中，

[3]（约化）连接 $\tilde{*}_n C_5$ （b）' 是一个图，而连接 $*_n C_5$ （a）" 是一个单纯复形。事实上， $\tilde{*}_n C_5$ 是 $*_n C_5$ 的 1-骨架（参见例 4.6）。

（*b*）对于 $n=3m+5$， S^{m+1} 无法连续嵌入到 $|\mathcal{M}|$ 中，
(c) 对于 $n=3m+6$， $\bigvee_2 S^{m+1}$ 无法连续嵌入到 $|\mathcal{M}|$ 中，

则不存在任何将 C_n 嵌入到 $\mathbb{F}^N$ 中的 C_n-正则嵌入 f，使得 $f(V)\subseteq S$。此外，若 $n=3m+2$ 和 $\bigvee_2 S^{m+1}$ 无法连续嵌入到 $|\mathcal{M}|$ 中，则不存在任何将 P_n 嵌入到 $\mathbb{F}^N$ 中的 P_n-正则嵌入 f，使得 $f(V)\subseteq S$。

例2.7。对于任意图 G，令 G^r 表示 G 的第 r 个距离幂，其顶点集与 G 相同；当且仅当 G 中两个顶点之间的距离小于或等于 r 时，它们在 G^r 中相邻。文献 *[1,*定理*1.1]* 证明了，对于任意 $r\geq 1$ 和任意 $n\geq 5r+4$,

$$\mathrm{Ind}(C_n^r)\simeq \Sigma^2\mathrm{Ind}(C^r_{n-(3r+3)})\bigvee X_{n,r},$$

其中 $X_{n,r}$ 可用某个 $n'\leq n$ 的 $\mathrm{Ind}(P^r_{n'})$ 显式表示，见 *[1,* 推论*6.5]*。令 $r=2$。通过归纳法，对于 $n=9m+h$，其中 $3\leq h\leq 11$,

$$\mathrm{Ind}(C_n^2)\simeq \Sigma^{2m}\mathrm{Ind}(C_h^2)\bigvee\cdots$$

由于

$$\mathrm{Ind}(C_h^2)=\begin{cases}\bigsqcup_3 P_2\simeq \bigvee_2 S^0, & h=6\\ C_7\simeq S^1, & h=7\\ \simeq \bigvee_5 S^1, & h=8,\end{cases}$$

我们有

$$\mathrm{Ind}(C_n^2)\simeq\begin{cases}(\bigvee_2 S^{2m})\bigvee\cdots, & n=9m+6\\ S^{2m+1}\bigvee\cdots, & n=9m+7\\ (\bigvee_5 S^{2m+1})\bigvee\cdots, & n=9m+8.\end{cases}$$

因此，若满足以下条件之一
(a) 对于 $n=9m+6$， $\bigvee_2 S^{2m}$ 无法连续嵌入到 $|\mathcal{M}|$ 中；*(b)* 对于 $n=9m+7$， S^{2m+1} 无法连续嵌入到 $|\mathcal{M}|$ 中；*(c)* 对于 $n=9m+8$, $\bigvee_5 S^{2m+1}$ 无法连续嵌入到 $|\mathcal{M}|$ 中，

那么不存在任何 C_n^2-正则嵌入 f，将 C_n^2 嵌入到 $\mathbb{F}^N$，使得 f（V） $\subseteq S$。

从最后两个例子中，我们可以看出，独立复形的同伦类型可以构成图的正则嵌入问题的障碍。在接下来的章节中，我们将利用（有向）独立复形的同调、（有向）独立复形的子超（有向）图的嵌入同调、一些 Mayer-Vietoris 序列以及一些 Künneth 型公式，给出图存在正则嵌入的障碍。

3 超图与超有向图

本节回顾超图和超有向图的定义，并介绍从超有向图到其底层超图的典范投影的一些预备知识。

设 V 是一个顶点集合。 V 上的有向 k-超边 $\vec{\sigma}$ 是一个有序的 k 元组 $(v_1,\ldots,v_k)$，满足 $v_1,\ldots,v_k\in V$ 互不相同。 V 上的 k-一致超有向图 $\mathcal{H}_k$ 是由有向 k-超边组成的集合。 V 上的超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$ 是一个并集 $\bigcup_{k\geq 1}\vec{\mathcal{H}}_k$，其中对于每个 $k\geq 1$， $\vec{\mathcal{H}}_k$ 都是 V 上的 k-一致超有向图。 V 上的 k-超边 σ 是一个无序的 k 元组 $\{v_1,\ldots,v_k\}$，满足 $v_1,\ldots,v_k\in V$ 互不相同。 V 上的 k-一致超图 $\mathcal{H}$ 是由 k-超边组成的集合。 V 上的超图 $\mathcal{H}$ 是一个并集 $\bigcup_{k\geq 1}\mathcal{H}_k$，其中对于每个 $k\geq 1$， $\mathcal{H}_k$ 都是 V 上的 k-一致超图。

设 $\vec{\sigma}=(v_1,\dots,v_k)$ 是一条有向 k-超边。 k 阶对称群 Σ_k 通过置换 $\vec{\sigma}$ 的顶点顺序作用于 $\vec{\sigma}$。对于任意 $s\in\Sigma_k$, 令 $s(\vec{\sigma})=(v_{s(1)},\dots,v_{s(k)})$。 $\vec{\sigma}$ 的 Σ_k-轨道为 $\Sigma_k(\vec{\sigma})=\{s(\vec{\sigma})\mid s\in\Sigma_k\}$, 它将被视为 k-超边 $\sigma=\{v_1,\dots,v_k\}$。

设 $\vec{\mathcal{H}}_k$ 是一个 k 一致的超有向图。若对任意 $\vec{\sigma}\in\vec{\mathcal{H}}_k$, 都有 $\Sigma_k(\vec{\sigma})\subseteq\vec{\mathcal{H}}_k$, 则称 $\vec{\mathcal{H}}_k$ 是 Σ_k-不变的。等价地, 若 $\mathcal{H}_k$ 是 Σ_k 轨道的不交并, 则称其为 Σ_k-不变的。对于任意 Σ_k-不变的超有向图 $\vec{\mathcal{H}}_k$, 其轨道空间 $\vec{\mathcal{H}}_k/\Sigma_k$ 是一个 k 一致超图 $\mathcal{H}_k$, 其超边为 $\mathcal{H}_k$ 的 $\sigma=\Sigma_k(\vec{\sigma})$, 其中 $\vec{\sigma}\in\mathcal{H}_k$。在这种情况下, 典范投影 π_k: $\mathcal{H}_k\longrightarrow\mathcal{H}_k$ 给出一个主 Σ_k 丛。

Let $\vec{\mathcal{H}}_k$ 是任意一个 k 一致的超有向图, 并不假设其为 Σ_k-不变的。我们选取包含 $\vec{\mathcal{H}}_k$ 的最小环境 Σ_k-不变 k 一致超有向图 $\mathrm{Sym}(\vec{\mathcal{H}}_k)$。于是, $\mathrm{Sym}(\vec{\mathcal{H}}_k)$ 由 $\mathcal{H}_k$ 中有向超边的 Σ_k-轨道组成。我们有典范投影

$$\pi_k:\mathrm{Sym}(\vec{\mathcal{H}}_k)\longrightarrow\mathrm{Sym}(\vec{\mathcal{H}}_k)/\Sigma_k. \tag{3.1}$$

借助 [15, 引理 3.1], , 将（3.1）限制在 $\vec{\mathcal{H}}_k$ 上可诱导出一个投影

$$\pi_k:\vec{\mathcal{H}}_k\longrightarrow\mathcal{H}_k, \tag{3.2}$$

其中

$$\mathcal{H}_k=\pi_k(\vec{\mathcal{H}}_k)=\mathrm{Sym}(\vec{\mathcal{H}}_k)/\Sigma_k. \tag{3.3}$$

注意, 在（3.2）中, 以下各项是等价的: （1） π_k 是一个主 Σ_k-丛; （2） $\vec{\mathcal{H}}_k$ 是 Σ_k-不变的; （3） $\vec{\mathcal{H}}_k=\mathrm{Sym}(\vec{\mathcal{H}}_k)$。我们称 k-一致超图 $\mathcal{H}_k$ 为 $\vec{\mathcal{H}}_k$ 的底层超图（根据 [15, 第3.2]小节, 也称为约化超图）。

一般地, 对于任意超有向图 $\vec{\mathcal{H}}=\bigcup_{k\geq1}\vec{\mathcal{H}}_k$, 令 $\mathcal{H}=\bigcup_{k\geq1}\mathcal{H}_k$, 其中, 对于每个 $k\geq1$, $\mathcal{H}_k$ 是由（3.3）给出的 $\vec{\mathcal{H}}_k$ 的底层超图。我们称 $\mathcal{H}$ 为 $\vec{\mathcal{H}}$ 的底层超图, 并记作 $\mathcal{H}=\pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}})$。如果对于每个 $k\geq1$, $\mathcal{H}_k$ 都是 Σ_k-不变的, 则称 $\mathcal{H}$ 是 $\Sigma_\bullet$-不变的。

设 V和 V'是互不相交的集合。假设 V和 V'都具有全序 $\prec$。那么我们可以在 $V\sqcup V'$上得到一个诱导全序, 使得 (1) 它是将原全序限制在 V或 V'上得到的全序, 并且 (2) 对任意$v\in V$和任意 $v'\in V'$, 都有 $v\prec v'$。设 $\vec{\sigma}=(v_1、\ \dots\dots、\ v_k)$ 是 V 上的一个有向 k- 超边, 设 $\vec{\sigma}'=(v'_1、\ \dots\dots、\ v'_l)$ 是 V'上的一个有向 l-超边。定义它们的 连接 为 $V\sqcup V'$上的一个有向 $(k+l)$-超边, 其各坐标由笛卡尔积给出

$$\vec{\sigma}*\vec{\sigma}'=(v_1,\dots,v_k,v'_1,\dots,v'_l).$$

设 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 分别是定义在 V和 V' 上的超有向图。定义 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 的 连接 为 $V\sqcup V'$ 上的一个超有向图, 由下式给出

$$\vec{\mathcal{H}}*\vec{\mathcal{H}}'=\vec{\mathcal{H}}\sqcup\vec{\mathcal{H}}'\sqcup\{\vec{\sigma}*\vec{\sigma}'\mid\sigma\in\vec{\mathcal{H}},\sigma'\in\vec{\mathcal{H}}'\}. \tag{3.4}$$

设 $\sigma=\{v_1,\dots,v_k\}$ 是 V 上的一个 k-超边, $\sigma'=\{v'_1,\dots,v'_l\}$ 是 V'上的一个 l-超边。它们的 连接 是一个由它们的不交并给出的、定义在 $V\sqcup V'$ 上的 $(k+l)$-超边

$$\sigma*\sigma'=\{v_1,\dots,v_k,v'_1,\dots,v'_l\}.$$

设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 分别是定义在 V 和 V' 上的超图。它们的 连接 是一个定义在 $V\sqcup V'$ 上的超图, 由下式给出

$$\mathcal{H}*\mathcal{H}'=\mathcal{H}\sqcup\mathcal{H}'\sqcup\{\sigma*\sigma'\mid\sigma\in\mathcal{H},\sigma'\in\mathcal{H}'\}. \tag{3.5}$$

显然, 超（有向）图的连接满足交换律

$$\vec{\mathcal{H}}*\vec{\mathcal{H}}'\cong\vec{\mathcal{H}}'*\vec{\mathcal{H}},\qquad\mathcal{H}*\mathcal{H}'\cong\mathcal{H}'*\mathcal{H} \tag{3.6}$$

和结合律

$$(\vec{\mathcal{H}}*\vec{\mathcal{H}}')*\vec{\mathcal{H}}''=\vec{\mathcal{H}}*(\vec{\mathcal{H}}'*\vec{\mathcal{H}}''),\qquad(\mathcal{H}*\mathcal{H}')*\mathcal{H}''=\mathcal{H}*(\mathcal{H}'*\mathcal{H}''). \tag{3.7}$$

引理 3.1. *(1)* 设 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 是定义在 V 上的超有向图。则

$$\pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}} \cup \vec{\mathcal{H}}') = \pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}}) \cup \pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}}'), \tag{3.8}$$

$$\pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}} \cap \vec{\mathcal{H}}') \subseteq \pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}}) \cap \pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}}') \tag{3.9}$$

并且，当 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 均为 $\Sigma_\bullet$-不变时，等式 *(3.9)* 成立；

(2) 设 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 分别是定义在 V 和 V' 上的超有向图，其中 V 和 V' 互不相交。那么

$$\pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}} * \vec{\mathcal{H}}') = \pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}}) * \pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}}'). \tag{3.10}$$

证明。 (1) 直接可得 (3.8)–(3.10)。此外，假设 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 均为 $\Sigma_\bullet$-不变。那么 $\vec{\mathcal{H}} \cup \vec{\mathcal{H}}'$ 和 $\vec{\mathcal{H}} \cap \vec{\mathcal{H}}'$ 均为 $\Sigma_\bullet$-不变。因此，我们有一个主 Σ_k-丛

$$\Sigma_k \longrightarrow \vec{\mathcal{H}}_k \cap \vec{\mathcal{H}}'_k \longrightarrow \pi_k(\vec{\mathcal{H}}_k) \cap \pi_k(\vec{\mathcal{H}}'_k)$$

对任意 $k \geq 1$均成立。因此，对任意 $k \geq 1$，有 $\pi_k(\vec{\mathcal{H}}_k \cap \vec{\mathcal{H}}'_k) = \pi_k(\vec{\mathcal{H}}_k) \cap \pi_k(\vec{\mathcal{H}}'_k)$，这就推出了等式 (3.9)。 □

设 $\vec{\mathcal{H}}$ 是定义在 V 上的超有向图，$\vec{\mathcal{H}}'$ 是定义在 V' 上的超有向图。我们将超有向图的 态射 $\vec{\varphi}$: $\vec{\mathcal{H}} \longrightarrow \vec{\mathcal{H}}'$ 定义为映射 $\varphi\colon V \longrightarrow V'$，使得对于任意有向超边 $\vec{\sigma} \in \vec{\mathcal{H}}$，例如 $\vec{\sigma} = (v_1, \ldots\ldots, v_k)$，其像

$$\vec{\varphi}(\vec{\sigma}) = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k))$$

是 $\vec{\mathcal{H}}'$ 的有向超边（参见 [15, 第3.1]小节）。设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 分别是 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 的底层超图。超图的 态射 $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ 是映射 $\varphi : V \longrightarrow V'$，使得对于任意超边 $\sigma \in \mathcal{H}$，其中 $\sigma = \{v_1, \ldots, v_k\}$，其像

$$\varphi(\sigma) = \{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)\}$$

是 $\mathcal{H}'$ 的超边。任意超有向图态射 $\vec{\varphi} : \vec{\mathcal{H}} \longrightarrow \vec{\mathcal{H}}'$ 都会诱导底层超图之间的态射 $\varphi\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$，使得该图表交换

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{H}} & \xrightarrow{\vec{\varphi}} & \vec{\mathcal{H}}' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H}'. \end{array} \tag{3.11}$$

4 单纯复形、有向单纯复形及其同调

本节将介绍单纯复形和有向单纯复形同调的一些预备知识。我们将在命题 4.3 中讨论从有向单纯复形的同调到其底层单纯复形的同调的典范同态，并在命题 4.7 中形式化一些 Mayer-Vietoris 序列，以及在命题 4.8 中给出一些 Künneth 型公式。

$\vec{\text{A}}$ 有向单纯复形 $\mathcal{K}$ 在 V 上是一个超有向图，满足：若 $\vec{\sigma} \in \mathcal{K}$ 是一个有向超边，且 $\vec{\tau}$是 $\vec{\sigma}$的非空子序列，则 $\vec{\tau} \in \vec{\mathcal{K}}$。我们称 $\vec{\mathcal{K}}$ 中的一个有向 k-超边为一个有向$(k-1)$-单形。单纯复形 $\mathcal{K}$ 在 V 上是一个超图，满足：若 $\sigma \in \mathcal{K}$ 是一个超边，且 τ 是 σ的非空子集，则 $\tau \in \mathcal{K}$（参见 [23, 第 107]页）。我们称 $\mathcal{K}$ 中的一个 k-超边为一个（$k-1$）-单形（参见 [23, 第 103]页）。

Let $\mathcal{K}$ 和 $\vec{\mathcal{K}}'$ 分别是 V 和 V' 上的有向单纯复形。我们称超有向图 $\vec{\varphi}\colon \vec{\mathcal{K}} \longrightarrow \vec{\mathcal{K}}'$ 的态射为有向单纯映射。设 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}'$ 分别是 $\vec{\mathcal{K}}$和 $\vec{\mathcal{K}}'$ 的底层单纯复形。由 (3.11)，任意有向单纯映射 $\vec{\varphi}\colon \vec{\mathcal{K}} \longrightarrow \vec{\mathcal{K}}'$ 都会在底层单纯复形之间诱导一个单纯映射 $\varphi\colon \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$，使得该图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{K}} & \xrightarrow{\vec{\varphi}} & \vec{\mathcal{K}}' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathcal{K} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{K}'. \end{array}$$

引理 4.1。设 $\vec{\mathcal{H}}$ 是一个超有向图，并设 $\mathcal{H}=\pi_\bullet(\vec{\mathcal{H}})$ 。

(1) 如果 $\vec{\mathcal{H}}$ 是有向单纯复形，那么 $\mathcal{H}$ 是单纯复形；*(2)* 如果 $\vec{\mathcal{H}}$ 是 $\Sigma_\bullet$-不变的，且 $\mathcal{H}$ 是单纯复形，那么 $\vec{\mathcal{H}}$ 是有向 单纯复形 .

证明。 (1) 假设 $\vec{\mathcal{H}}$ 是有向单纯复形。令 $\sigma\in\mathcal{H}$。选取 $\vec{\sigma}\in\vec{\mathcal{H}}$ 使得 $\pi(\vec{\sigma})=\sigma$。那么对于 σ的任意非空子集 τ，存在 $\vec{\sigma}$ 的一个非空子序列 $\vec{\tau}$，使得 $\pi(\vec{\tau})=\tau$。因此 $\vec{\tau}\in\vec{\mathcal{H}}$。从而 $\tau\in\mathcal{H}$。 consequently， $\mathcal{H}$ 是单纯复形。

(2) 假设 $\vec{\mathcal{H}}$ 是 $\Sigma_\bullet$-不变的。那么对于任意 $\eta\in\mathcal{H}$ 以及 V上的任意有向超边 $\vec{\eta}$，若 $\pi(\vec{\eta})=\eta$，则有 $\vec{\eta}\in\vec{\mathcal{H}}$。假设 $\mathcal{H}$ 是单纯复形。令 $\vec{\sigma}\in\vec{\mathcal{H}}$ ，并令 $\sigma=\pi(\vec{\sigma})$。那么 $\sigma\in\mathcal{H}$。对于 σ的任意非空子序列 $\vec{\tau}$，$\tau=\pi(\vec{\tau})$ 是 σ的一个非空子集。因此 $\tau\in\mathcal{H}$，这意味着 $\vec{\tau}\in\vec{\mathcal{H}}$。¯由此， $\mathcal{H}$ 是有向单纯复形。 □

设 R是一个主理想整环。设 $\vec{\mathcal{K}}$是定义在 V上的有向单纯复形。令 $C_k(\vec{\mathcal{K}};R)$ 为由 $\vec{\mathcal{K}}$的所有有向 k-单形生成的自由 R-模。考虑如下的 R-线性映射 $\vec{\partial}_k\colon C_k(\vec{\mathcal{K}};R)\longrightarrow C_{k-1}(\vec{\mathcal{K}};R)$:

$$\vec{\partial}_k(v_0,\dots,v_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_k). \tag{4.1}$$

引理 4.2。 $\vec{\partial}_{k-1}\circ\vec{\partial}_k=0$ 因此 $C_\bullet(\vec{\mathcal{K}};R)=\{C_k(\vec{\mathcal{K}};R)\ \partial_k\}_{k\geq 0}$ 是一个链复形。

证明。 设 $(v_0,v_1,\dots,v_k)$ 是 $C_k(\vec{\mathcal{K}};R)$ 的一个生成元。显然,

$$\begin{aligned}
\vec{\partial}_{k-1}\circ\vec{\partial}_k(v_0,v_1,\dots,v_k) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\vec{\partial}_{k-1}(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_k)\\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(v_0,\dots,\widehat{v_j},\dots,\widehat{v_i},\dots,v_k)\\
&\quad+\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sum_{j=i+1}^{k}(-1)^{j-1}(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_k)\\
&= \sum_{0\leq j<i\leq k}(-1)^{i+j}(v_0,\dots,\widehat{v_j},\dots,\widehat{v_i},\dots,v_k)\\
&\quad+\sum_{0\leq i<j\leq k}(-1)^{i+j-1}(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_k)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

→ ¯借助 R的线性性，证明即得。 □

根据引理 4.1 (1)， $\vec{\mathcal{K}}$ 的底层超图是 V 上的单纯复形 $\mathcal{K}$。令 $C_k(\mathcal{K};R)$ 为由 $\mathcal{K}$ 的所有 k-单形张成的自由 R-模。令 $\prec$ 为 V 上的一个全序。我们有一个链复形$C_\bullet(\mathcal{K};R)=\{C_k(\mathcal{K};R)\ \partial_k\}_{k\geq 0}$，其边界映射 $\partial_k\colon C_k(\mathcal{K};R)\longrightarrow C_{k-1}(\mathcal{K};R)$ 定义为

$$\partial_k\{v_0,\dots,v_k\}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\{v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_k\} \tag{4.2}$$

对于任意满足 $v_0\prec\cdots\prec v_k$ 的 k-单形 $\{v_0,\dots,v_k\}\in\mathcal{K}$。投影 $\pi_k\colon\vec{\mathcal{K}}_k\longrightarrow\mathcal{K}_k$ 诱导出一个 R-线性投影

$$(\pi_k)_*:C_{k-1}(\vec{\mathcal{K}};R)\longrightarrow C_{k-1}(\mathcal{K};R) \tag{4.3}$$

由.....给出

$$(\pi_k)_\#(v_{s(0)},\dots,v_{s(k-1)})=\operatorname{sgn}(s)\{v_0,\dots,v_{k-1}\} \tag{4.4}$$

对于任意满足 $v_0 \prec \cdots \prec v_{k-1}$ 的有向 $(k-1)$-单形 $(v_0、\ldots\ldots、v_{k-1}) \in \vec{\mathcal{K}}_k$，以及任意将 0、……、$k-1$ 的顺序重新排列的 $s \in \Sigma_k$。这里，若 s 是偶置换，则 sgn(s) 为 1；若 s 是奇置换，则为 -1。下一个命题摘自 [15]。

命题 4.3。设 $\mathcal{K}$ 是定义在 V 上的有向单纯复形，$\mathcal{K}$ 是其底层单纯复形。那么存在一个满射链映射

$$(\pi_{\bullet+1})_{\#} : C_\bullet(\vec{\mathcal{K}}; R) \longrightarrow C_\bullet(\mathcal{K}; R) \tag{4.5}$$

因此也存在一个诱导的同调同态

$$(\pi_{\bullet+1})_* : H_\bullet(\vec{\mathcal{K}}; R) \longrightarrow H_\bullet(\mathcal{K}; R). \tag{4.6}$$

此外，*(4.5)* 和 *(4.6)* 关于有向单纯复形之间的有向单纯映射，以及它们在底层单纯复形之间诱导的单纯映射，具有函子性。

证明。证明与 [15, 引理 3.8 和定理 3.9]类似。为完整起见，我们给出详细证明。设 $v_0 \prec v_1 \prec \cdots \prec v_k$ 是 V 中的顶点。令 $s \in \Sigma_{k+1}$ 对 v_0、v_1、……、v_k的顺序进行置换。假设($v_{s(0)}$、$v_{s(1)}$、……、$v_{s(k)}$) $\in \vec{\mathcal{K}}$。对于任意 $0 \le i \le k$，通过计算(s(0)……、$\widehat{s\ i}$ ( )……、s(k))中的逆序数，我们得到

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 0, \ldots, \widehat{s(i)}, \ldots, k \\ s(0), \ldots, \widehat{s(i)}, \ldots, s(k) \end{pmatrix} = (-1)^{2k-i-s(i)} \operatorname{sgn}(s).$$

Thus

$$\begin{aligned} (\pi_k)_{\#}(v_{s(0)}, \ldots, \widehat{v_{s(i)}}, \ldots, v_{s(k)}) &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 0, \ldots, \widehat{s(i)}, \ldots, k \\ s(0), \ldots, \widehat{s(i)}, \ldots, s(k) \end{pmatrix} \{v_0, \ldots, \widehat{v_{s(i)}}, \ldots, v_k\} \\ &= (-1)^{(k-i)+(k-s(i))} \operatorname{sgn}(s) \{v_0, \ldots, \widehat{v_{s(i)}}, \ldots, v_k\} \\ &= (-1)^{i-s(i)} \operatorname{sgn}(s) \{v_0, \ldots, \widehat{v_{s(i)}}, \ldots, v_k\}. \end{aligned}$$

借助 (4.1)、(4.2) 和 (4.4)，下图是可交换的

$$\begin{array}{ccc} (v_{s(0)}, \ldots, v_{s(k)}) & \xrightarrow{\vec{\partial}_k} & \sum_{i=0}^k (-1)^i (v_{s(0)}, \ldots, \widehat{v_{s(i)}}, \ldots, v_{s(k)}) \\ \downarrow{\scriptstyle (\pi_{k+1})_{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_k)_{\#}} \\ \operatorname{sgn}(s)\{v_0, \ldots, v_k\} & \xrightarrow{\partial_k} & \sum_{i=0}^k (-1)^i \operatorname{sgn}(s) \{v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k\}. \end{array}$$

因此，下图是可交换的

$$\begin{array}{ccc} C_k(\vec{\mathcal{K}}; R) & \xrightarrow{\vec{\partial}_k} & C_{k-1}(\vec{\mathcal{K}}; R) \\ \downarrow{\scriptstyle (\pi_{k+1})_{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_k)_{\#}} \\ C_k(\mathcal{K}; R) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(\mathcal{K}; R). \end{array} \tag{4.7}$$

因此，(4.5) 是一个链映射，故它诱导出一个同调同态 (4.6)。由于$\mathcal{K} = \pi_\bullet(\vec{\mathcal{K}})$，显然 (4.5) 是满射。

设 $\vec{\mathcal{K}}$ 和 $\vec{\mathcal{K}}'$ 分别是定义在 V 和 V' 上的有向单纯复形。设 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}'$ 分别是 $\vec{\mathcal{K}}$ 和 $\vec{\mathcal{K}}'$ 的底层单纯复形。假设 $\vec{\varphi} : \vec{\mathcal{K}} \longrightarrow \vec{\mathcal{K}}'$ 是一个有向单纯映射。设 $\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ 是由 $\vec{\varphi}$ 诱导的单纯映射。由 (4.1)，我们得到一个诱导的链映射

$$\vec{\varphi}_{\#} : C_\bullet(\vec{\mathcal{K}}; R) \longrightarrow C_\bullet(\vec{\mathcal{K}}'; R).$$

根据（4.2），我们得到一个诱导的链映射

$$\varphi_{\#} : C_\bullet(\mathcal{K}; R) \longrightarrow C_\bullet(\mathcal{K}'; R).$$

根据（4.4），我们得到一个链复形的交换图

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet(\vec{\mathcal{K}};R) & \xrightarrow{\vec{\varphi}_\#} & C_\bullet(\vec{\mathcal{K}}';R) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_\#} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\#} \\ C_\bullet(\mathcal{K};R) & \xrightarrow{\varphi_\#} & C_\bullet(\mathcal{K}';R) \end{array} \tag{4.8}$$

使得所有箭头都是链映射。因此，(4.5) 具有函子性。将同调函子作用于 (4.8)，可得到一个由同调群构成的诱导交换图

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(\vec{\mathcal{K}};R) & \xrightarrow{\vec{\varphi}_*} & H_\bullet(\vec{\mathcal{K}}';R) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ H_\bullet(\mathcal{K};R) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_\bullet(\mathcal{K}';R). \end{array} \tag{4.9}$$

因此，(4.6) 具有函子性。 □

推论 4.4。设 $\mathcal{K}$ 是定义在 V 上的有向单纯复形，$\mathcal{K}$ 是其底层单纯复形。若对于所有 $k\geq 1$，$\mathcal{K}_k$ 都是 Σ_k-不变的，则

$$C_{k-1}(\vec{\mathcal{K}};R)\cong C_{k-1}(\mathcal{K};R)^{\oplus k!} \tag{4.10}$$

从而

$$H_{k-1}(\vec{\mathcal{K}};R)\cong H_{k-1}(\mathcal{K};R)^{\oplus k!} \tag{4.11}$$

对于所有 $k\geq 1$。

证明。对于每个 $k\geq 1$，令 $\pi_k:\mathcal{K}_k\longrightarrow\mathcal{K}_k$ 为典范投影。由于 $\mathcal{K}_k$ 是 Σ_k-不变的，π_k 是一个主 Σ_k-丛，因此它是 $k!$-层覆盖。分别取由 $\vec{\mathcal{K}}_k$ 中的有向（$k-1$）-单形生成的链模 $C_{k-1}(\vec{\mathcal{K}};R)$，以及由 $\mathcal{K}_k$中的（$k-1$）-单形生成的链模 $C_{k-1}(\mathcal{K};R)$，即可由 (4.5) 得到 (4.10)。借助 (4.7)，

$$\mathrm{Ker}(\vec{\partial}_{k-1})\cong\mathrm{Ker}(\partial_{k-1})^{\oplus k!},\qquad \mathrm{Im}(\vec{\partial}_k)\cong\mathrm{Im}(\partial_k)^{\oplus k!}.$$

因此，我们由 (4.6) 得到 (4.11)。 □

下一个　例子部分说明了 [15, 引理 3.8 和定理 3.9] 以及命题 4.3。

例 4.5。令 $V=\{v_0,v_1,v_2\}$ 使得 $v_0\prec v_1\prec v_2$。令

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{K}} &= \{(v_1,v_2,v_0),(v_1,v_0),(v_2,v_0),(v_1,v_2),(v_0),(v_1),(v_2)\},\\ \vec{\mathcal{K}}' &= \{(v_1,v_2,v_0),(v_2,v_0,v_1),(v_0,v_1,v_2),\\ &\quad (v_1,v_0),(v_0,v_1),(v_2,v_0),(v_0,v_2),(v_1,v_2),(v_2,v_1),(v_0),(v_1),(v_2)\},\\ \mathcal{K} &= \{\{v_0,v_1,v_2\},\{v_0,v_1\},\{v_0,v_2\},\{v_1,v_2\},\{v_0\},\{v_1\},\{v_2\}\}. \end{aligned}$$

则 $\pi_\bullet(\vec{\mathcal{K}})=\pi_\bullet(\vec{\mathcal{K}}')=\mathcal{K}$。$C_\bullet(\vec{\mathcal{K}};R)$ 的边界映射 $\vec{\partial}_\bullet$ 满足

$$\begin{gathered} \vec{\partial}_2(v_1,v_2,v_0)=(v_2,v_0)-(v_1,v_0)+(v_1,v_2),\\ \vec{\partial}_1(v_2,v_0)=(v_0)-(v_2),\quad \vec{\partial}_1(v_1,v_0)=(v_0)-(v_1),\quad \vec{\partial}_1(v_1,v_2)=(v_2)-(v_1); \end{gathered}$$

$\vec{\partial}'_\bullet$ $C_\bullet$的边界映射（$\vec{\mathcal{K}}'$；R）满足

$$\begin{gathered} \vec{\partial}'_2(v_1,v_2,v_0)=(v_2,v_0)-(v_1,v_0)+(v_1,v_2),\\ \vec{\partial}'_2(v_2,v_0,v_1)=(v_0,v_1)-(v_2,v_1)+(v_2,v_0),\\ \vec{\partial}'_2(v_0,v_1,v_2)=(v_1,v_2)-(v_0,v_2)+(v_0,v_1),\\ \vec{\partial}'_1(v_2,v_0)=(v_0)-(v_2),\quad \vec{\partial}'_1(v_0,v_2)=(v_2)-(v_0),\\ \vec{\partial}'_1(v_1,v_0)=(v_0)-(v_1),\quad \vec{\partial}'_1(v_0,v_1)=(v_1)-(v_0),\\ \vec{\partial}'_1(v_1,v_2)=(v_2)-(v_1),\quad \vec{\partial}'_1(v_2,v_1)=(v_1)-(v_2); \end{gathered}$$

并且 $\partial_\bullet$ $C_\bullet$的边界映射（$\mathcal{K}$； R）满足

$$\partial_2\{v_0,v_1,v_2\}=\{v_1,v_2\}-\{v_0,v_2\}+\{v_0,v_1\},$$
$$\partial_1\{v_0,v_2\}=\{v_2\}-\{v_0\},\quad \partial_1\{v_0,v_1\}=\{v_0\}-\{v_1\},\quad \partial_1\{v_1,v_2\}=\{v_2\}-\{v_1\}.$$

注意，在链层面，

$$(\pi_3)_\#(v_1,v_2,v_0)=(\pi_3)_\#(v_2,v_0,v_1)=(\pi_3)_\#(v_0,v_1,v_2)=\{v_0,v_1,v_2\},$$
$$(\pi_2)_\#(v_1,v_2)=-(\pi_2)_\#(v_2,v_1)=\{v_1,v_2\},$$
$$(\pi_2)_\#(v_0,v_2)=-(\pi_2)_\#(v_2,v_0)=\{v_0,v_2\},$$
$$(\pi_2)_\#(v_0,v_1)=-(\pi_2)_\#(v_1,v_0)=\{v_0,v_1\},$$
$$\pi_1(v_0)=\{v_0\},\quad \pi_1(v_1)=\{v_1\},\quad \pi_1(v_2)=\{v_2\}.$$

例 4.6。 有向图是一个1维有向单纯复形 $G=V\cup E$，其中 V 是顶点集， E 是有向边集。图是一个1维单纯复形 $G=V\cup E$，其中E 是边集。设 V和 V' 是两个不相交的顶点集。设 $\vec{G}$ 和 $\vec{G}'$ 分别是定义在 V和 V'上的有向图。设 G 和 G' 分别是 $\vec{G}$ 和 $\vec{G}'$ 的底层图。我们将$\vec{G}$ 和 $\vec{G}'$ 的约化连接定义为定义在 $V\sqcup V'$ 上的有向图，其定义如下：

$$\vec{G}\tilde{*}\vec{G}'=\mathrm{sk}^1(\vec{G}*\vec{G}')=(V\sqcup V')\cup(\vec{E}\sqcup\vec{E}'\sqcup\{(v,v')\mid v\in V,v'\in V'\})$$

并将 G 和 G' 的约化连接定义为定义在 $V\sqcup V'$ 上的图，其定义如下（参见例*2.2*）

$$G\tilde{*}G'=\mathrm{sk}^1(G*G')=(V\sqcup V')\cup(\vec{E}\sqcup\vec{E}'\sqcup\{\{v,v'\}\mid v\in V,v'\in V'\}).$$

借助 *(3.10)*， $G\tilde{*}G'$ 是 $\vec{G}\tilde{*}\vec{G}'$的底层图。借助 *(3.6)*，（有向）图的约化连接满足交换律。借助 *(3.7)*，（有向）图的约化连接满足结合律。

4.1 Mayer-Vietoris 序列

命题 4.7. 对于定义在 V 上的任意两个有向单纯复形 $\vec{\mathcal{K}}$ 和 $\vec{\mathcal{K}}'$ ，其底层单纯复形分别为 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}'$ ，我们有如下同调群交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\longrightarrow & H_n(\vec{\mathcal{K}}\cap\vec{\mathcal{K}}';R) & \longrightarrow & H_n(\vec{\mathcal{K}};R)\oplus H_n(\vec{\mathcal{K}}';R) & \longrightarrow & \\
& \downarrow{\scriptstyle (\pi_{n+1})_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{n+1})_*} & & \\
\cdots\longrightarrow & H_n(\mathcal{K}\cap\mathcal{K}';R) & \longrightarrow & H_n(\mathcal{K};R)\oplus H_n(\mathcal{K}';R) & \longrightarrow &
\end{array}\tag{4.12}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H_n(\vec{\mathcal{K}}\cup\vec{\mathcal{K}}';R) & \longrightarrow & H_{n-1}(\vec{\mathcal{K}}\cap\vec{\mathcal{K}}';R) & \longrightarrow & \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle (\pi_{n+1})_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_n)_*} & & \\
\longrightarrow & H_n(\mathcal{K}\cup\mathcal{K}';R) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathcal{K}\cap\mathcal{K}';R) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

使得两行都是长正合序列。此外，图 *(4.12)* 关于有向单纯复形之间的有向单纯映射，以及它们在底层单纯复形之间诱导的单纯映射是自然的。

证明。 设 $\vec{\mathcal{K}}$和 $\vec{\mathcal{K}}'$是定义在 V上的有向单纯复形。设 $\mathcal{K}=\pi_\bullet(\vec{\mathcal{K}})$ 和 $\mathcal{K}'=\pi_\bullet(\vec{\mathcal{K}}')$ 分别是 $\vec{\mathcal{K}}$ 和 $\vec{\mathcal{K}}'$ 的底层单纯复形。借助命题 4.3，我们得到一个

链复形的交换图 [4]

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_\bullet(\vec{\mathcal{K}}\cap\vec{\mathcal{K}}';R) & \longrightarrow & C_\bullet(\vec{\mathcal{K}};R)\oplus C_\bullet(\vec{\mathcal{K}}';R) & \longrightarrow & C_\bullet(\vec{\mathcal{K}}\cup\vec{\mathcal{K}}';R) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{\bullet+1})_\#} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{\bullet+1})_\#} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{\bullet+1})_\#} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_\bullet(\mathcal{K}\cap\mathcal{K}';R) & \longrightarrow & C_\bullet(\mathcal{K};R)\oplus C_\bullet(\mathcal{K}';R) & \longrightarrow & C_\bullet(\mathcal{K}\cup\mathcal{K}';R) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4.13}$$

使得所有箭头都是链映射，且两行都是短正合列。对 (4.13) 应用同调函子，可得同调群的交换图 (4.12)。(4.13) 中的链复形短正合列诱导出 (4.12) 中的同调群长正合列。

□

为简便起见，我们将 (4.12) 第一行的长正合列记作 MV($\vec{\mathcal{K}}$, $\vec{\mathcal{K}}'$)，并将 (4.12) 第二行的长正合列记作 MV($\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$)。我们简记 (4.12) 为 π_* : MV($\vec{\mathcal{K}}$, $\vec{\mathcal{K}}'$) ⟶MV($\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$)，它是长正合列的一个态射（参见 [35, 第 7] 节）。

4.2 Künneth 型公式

命题 4.8。对于 V 上的任意有向单纯复形 $\vec{\mathcal{K}}$，以及 V' 上的任意有向单纯复形 $\vec{\mathcal{K}}'$，其底层单纯复形分别为 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}'$，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} H_{p+1}(\vec{\mathcal{K}};R)\otimes H_{q+1}(\vec{\mathcal{K}}';R) & \longrightarrow & H_{n+1}(\vec{\mathcal{K}}*\vec{\mathcal{K}}';R) & \longrightarrow & \\ \downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{p+q+1=n}(\pi_{p+2})_*\otimes(\pi_{q+2})_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{n+2})_*} & & \\ 0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} H_{p+1}(\mathcal{K};R)\otimes H_{q+1}(\mathcal{K}';R) & \longrightarrow & H_{n+1}(\mathcal{K}*\mathcal{K}';R) & \longrightarrow & \end{array} \tag{4.14}$$

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} \mathrm{Tor}_R(H_{p+1}(\vec{\mathcal{K}};R), H_q(\vec{\mathcal{K}}';R)) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \\ \longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} \mathrm{Tor}_R(H_{p+1}(\mathcal{K};R), H_q(\mathcal{K}';R)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中两行均为短正合列。此外，图 *(4.14)* 关于有向单纯复形之间的有向单纯映射，以及它们在底层单纯复形之间诱导的单纯映射，具有自然性。

证明。设 V和 V'为不相交集合。设 $\vec{\mathcal{K}}$和 $\vec{\mathcal{K}}'$分别是定义在 V和 V'上的有向单纯复形。设 $\mathcal{K}$和 $\mathcal{K}'$分别是 $\vec{\mathcal{K}}$和 $\vec{\mathcal{K}}'$的底层单纯复形。借助引理 3.1 (2) 和命题 4.3，我们得到一个 R-模的交换图

$$\begin{array}{ccc} C_k(\vec{\mathcal{K}};R)\otimes C_l(\vec{\mathcal{K}}';R) & \xrightarrow{\cong} & C_{k+l+1}(\vec{\mathcal{K}}*\vec{\mathcal{K}}';R) \\ \downarrow{\scriptstyle (\pi_{k+1})_\#\otimes(\pi_{l+1})_\#} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{k+l+2})_\#} \\ C_k(\mathcal{K};R)\otimes C_l(\mathcal{K}';R) & \xrightarrow{\cong} & C_{k+l+1}(\mathcal{K}*\mathcal{K}';R) \end{array} \tag{4.15}$$

对任意 k，$l\geq -1$，令 $C_{-1}(\vec{\mathcal{K}};R)=C_{-1}(\vec{\mathcal{K}}';R)=R$。直接验证可知，(4.15) 中的所有映射都与边界映射交换。因此我们得到一个链复形的交换图

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet(\vec{\mathcal{K}};R)\otimes C_\bullet(\vec{\mathcal{K}}';R) & \xrightarrow{\cong} & C_{\bullet+1}(\vec{\mathcal{K}}*\vec{\mathcal{K}}';R) \\ \downarrow{\scriptstyle (\pi_{\bullet+1})_\#\otimes(\pi_{\bullet+1})_\#} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{\bullet+2})_\#} \\ C_\bullet(\mathcal{K};R)\otimes C_\bullet(\mathcal{K}';R) & \xrightarrow{\cong} & C_{\bullet+1}(\mathcal{K}*\mathcal{K}';R). \end{array} \tag{4.16}$$

[4]借助引理 3.1 (1)，(4.13) 中最后两个竖直映射是满射；此外，若 $\vec{\mathcal{K}}$ 和 $\vec{\mathcal{K}}'$ 都具有 $\Sigma_\bullet$不变性，那么 (4.13) 中第一个竖直映射也为满射。

将 [23, 定理 3B.5] 应用于交换图 (4.16)。(4.16) 的两行给出了 (4.14) 中的两个短正合列。根据 [23, 定理 3B.5], 的自然性，(4.16) 中的竖直链映射推出了 (4.14) 中的竖直同态。

□

为简便起见，我们将 (4.14) 第一行中的短正合列记为 KU($\vec{\mathcal{K}}$, $\vec{\mathcal{K}}'$)，将第二行中的短正合列记为 KU($\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$)。我们将 (4.14) 简记为 π_*: KU($\vec{\mathcal{K}}$, $\vec{\mathcal{K}}'$) $\longrightarrow$KU($\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$)，这是短正合列的一个态射。

5 超（有向）图、其嵌入同调及相关的（有向）单纯复形

本节介绍超图和超有向图的嵌入同调，以及相关（有向）单纯复形和下相关（有向）单纯复形的同调的一些预备知识。我们在定理 5.1 中讨论从超有向图的嵌入同调到其底层超图的嵌入同调的一个典范同态。在定理 5.2 中，我们给出一些 Mayer-Vietoris 序列的交换图；在定理 5.3 中，我们给出一些 Künneth 型短正合列的交换图。

设 $\vec{\mathcal{H}}$ 是定义在 V上的超有向图。关联有向单纯复形 $\Delta\vec{\mathcal{H}}$ 是包含 $\vec{\mathcal{H}}$ 的最小有向单纯复形，而下关联有向单纯复形 $\delta\vec{\mathcal{H}}$ 是包含于 $\vec{\mathcal{H}}$ 的最大有向单纯复形（参见 [36]）。设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$的底层超图。关联单纯复形 $\Delta\mathcal{H}$ 是包含 $\mathcal{H}$ 的最小单纯复形，而下关联单纯复形 $\delta\mathcal{H}$ 是包含于 $\mathcal{H}$ 的最大单纯复形（参见 [38, 39, 41]）。典范投影π : $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ 诱导出投影 $\Delta\pi$: $\Delta\mathcal{H} \longrightarrow \Delta\mathcal{H}$ 和 $\delta\pi : \delta\mathcal{H} \longrightarrow \delta\mathcal{H}$ ，将有向单纯复形映射到底层单纯复形，使得下图可交换

$$\begin{array}{ccccc} \delta\vec{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \Delta\vec{\mathcal{H}} \\ \downarrow{\scriptstyle \delta\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta\pi} \\ \delta\mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \Delta\mathcal{H}, \end{array} \tag{5.1}$$

其中所有水平映射都是典范包含。

对于每个 $k \geq 1$，令 $R(\vec{\mathcal{H}}_k)$ 为由 $\vec{\mathcal{H}}_k$张成的自由 R-模。借助 [12, 第 2], 节，下确界链复形

$$\mathrm{Inf}_{k-1}(\vec{\mathcal{H}}; R) = R(\vec{\mathcal{H}}_k) \cap (\vec{\partial}_{k-1})^{-1} R(\vec{\mathcal{H}}_{k-1}) \tag{5.2}$$

是包含于 $R(\vec{\mathcal{H}}_\bullet)$ 中的 $C_\bullet(\Delta\vec{\mathcal{H}}; R)$ 的最大子链复形，也是上确界链复形

$$\mathrm{Sup}_{k-1}(\vec{\mathcal{H}}; R) = R(\vec{\mathcal{H}}_k) + \vec{\partial}_k R(\vec{\mathcal{H}}_{k+1}) \tag{5.3}$$

是包含 $R(\vec{\mathcal{H}}_\bullet)$ 的 $C_\bullet(\Delta\vec{\mathcal{H}}; R)$ 的最小子链复形。根据 [12, 第 3], 节，下确界链复形

$$\mathrm{Inf}_{k-1}(\mathcal{H}; R) = R(\mathcal{H}_k) \cap (\partial_{k-1})^{-1} R(\mathcal{H}_{k-1}) \tag{5.4}$$

是最大 大子链复形，包含于 $R(\mathcal{H}_\bullet)$ 中，且为上确界链复形

$$\mathrm{Sup}_{k-1}(\mathcal{H}; R) = R(\mathcal{H}_k) + \partial_k R(\mathcal{H}_{k+1}) \tag{5.5}$$

是包含 $R(\mathcal{H}_\bullet)$ 的 $C_\bullet(\Delta\mathcal{H}; R)$ 的最小子链复形。令 $\vec{\mathcal{K}}$ 为 $\Delta\vec{\mathcal{H}}$，因此 $\mathcal{K}$ 为$\Delta\mathcal{H}$ （参见 (5.1)），位于 (4.7) 中。于是

$$\pi_\# \circ \vec{\partial} = \partial \circ \pi_\#. \tag{5.6}$$

由（5.2）、（5.4）和（5.6）可知，存在一个诱导投影

$$\mathrm{Inf}(\pi) : \mathrm{Inf}_\bullet(\vec{\mathcal{H}}; R) \longrightarrow \mathrm{Inf}_\bullet(\mathcal{H}; R). \tag{5.7}$$

同样地，由（5.3）、（5.5）和（5.6）可知，存在一个诱导投影

$$\mathrm{Sup}(\pi):\mathrm{Sup}_\bullet(\vec{\mathcal{H}};R)\longrightarrow \mathrm{Sup}_\bullet(\mathcal{H};R). \tag{5.8}$$

因此，借助 (5.7) 和 (5.8)，图 (5.1) 诱导出一个链复形的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} C_\bullet(\delta\vec{\mathcal{H}};R) & \longrightarrow & \mathrm{Inf}_\bullet(\vec{\mathcal{H}};R) & \xrightarrow{\vec{\iota}} & \mathrm{Sup}_\bullet(\vec{\mathcal{H}};R) & \longrightarrow & C_\bullet(\Delta\vec{\mathcal{H}};R) \\ \downarrow{\scriptstyle (\delta\pi)_\#} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Inf}(\pi)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sup}(\pi)} & & \downarrow{\scriptstyle (\Delta\pi)_\#} \\ C_\bullet(\delta\mathcal{H};R) & \longrightarrow & \mathrm{Inf}_\bullet(\mathcal{H};R) & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{Sup}_\bullet(\mathcal{H};R) & \longrightarrow & C_\bullet(\Delta\mathcal{H};R) \end{array} \tag{5.9}$$

其中所有映射都是链映射，所有水平映射都是典范包含，所有垂直映射都是投影。由 [12, 节 3] 和 [15, 定理 3.9] 可知，(5.9) 中的 $\vec{\iota}$ 和 ι 都是拟同构。$\mathrm{Inf}_\bullet(\vec{\mathcal{H}};R)$ 的同调以及 $\mathrm{Sup}_\bullet(\vec{\mathcal{H}};R)$ 的同调记作 $H_\bullet(\vec{\mathcal{H}};R)$，称为超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$ 的嵌入同调。$\mathrm{Inf}_\bullet(\mathcal{H};R)$ 的同调以及 $\mathrm{Sup}_\bullet(\mathcal{H};R)$ 的同调记作 $H_\bullet(\mathcal{H};R)$，称为超图 $\mathcal{H}$ 的嵌入同调。

设 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 分别是定义在 V 和 V' 上的超有向图。设 $\vec{\varphi}:\vec{\mathcal{H}}\longrightarrow\vec{\mathcal{H}}'$ 是超有向图的一个态射。由 (3.11)，可得底层超图之间诱导出的态射 $\varphi:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}'$。此外，还可得诱导出的有向单纯映射 $\Delta\vec{\varphi}:\Delta\vec{\mathcal{H}}\longrightarrow\Delta\vec{\mathcal{H}}'$ 和 $\delta\vec{\varphi}:\delta\vec{\mathcal{H}}\longrightarrow\delta\vec{\mathcal{H}}'$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} \delta\vec{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \Delta\vec{\mathcal{H}} \\ \downarrow{\scriptstyle \delta\vec{\varphi}} & & \downarrow{\scriptstyle \vec{\varphi}} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta\vec{\varphi}} \\ \delta\vec{\mathcal{H}}' & \longrightarrow & \vec{\mathcal{H}}' & \longrightarrow & \Delta\vec{\mathcal{H}}'. \end{array} \tag{5.10}$$

此外，还可得诱导出的单纯映射 $\Delta\varphi:\Delta\mathcal{H}\longrightarrow\Delta\mathcal{H}'$ 和 $\delta\varphi:\delta\mathcal{H}\longrightarrow\delta\mathcal{H}'$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} \delta\mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \Delta\mathcal{H} \\ \downarrow{\scriptstyle \delta\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta\varphi} \\ \delta\mathcal{H}' & \longrightarrow & \mathcal{H}' & \longrightarrow & \Delta\mathcal{H}'. \end{array} \tag{5.11}$$

交换图 (5.1) 关于超（有向）图的态射具有函子性，即 (5.1) 中的竖直映射 $\delta\pi$、π 和 $\Delta\pi$，以及在 (5.1) 中用 $\vec{\mathcal{H}}'$ 替换 $\vec{\mathcal{H}}$ 后得到的 $\delta\pi'$、π' 和 $\Delta\pi'$，均与图 (5.10) 和 (5.11) 中的映射交换。因此，按照 [12,命题 3.7] 和 [15, 引理 3.8], 的类似论证，交换图 (5.9) 关于超（有向）图的态射也具有函子性。下一个定理是对 [12, 命题 3.7] 、 [15,命题 3.7 和定理 3.9]的直接改进。

定理 5.1. 我们有一个同调群的交换图

$$\begin{array}{ccccc} H_\bullet(\delta\vec{\mathcal{H}};R) & \longrightarrow & H_\bullet(\vec{\mathcal{H}};R) & \longrightarrow & H_\bullet(\Delta\vec{\mathcal{H}};R) \\ \downarrow{\scriptstyle (\delta\pi)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\Delta\pi)_*} \\ H_\bullet(\delta\mathcal{H};R) & \longrightarrow & H_\bullet(\mathcal{H};R) & \longrightarrow & H_\bullet(\Delta\mathcal{H};R) \end{array} \tag{5.12}$$

其中 $H_\bullet(\vec{\mathcal{H}};R)$ 是超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$ 的嵌入同调，而 $H_\bullet(\mathcal{H};R)$ 是超图 $\mathcal{H}$的嵌入同调。此外，图 *(5.12)* 关于超有向图的态射以及底层超图之间诱导的态射具有函子性。

证明。 将同调函子应用于 (5.9)。我们得到交换图 (5.12)。由于 (5.1) 和 (5.9) 关于超有向图的态射以及底层超图之间诱导的态射具有函子性，因此 (5.12) 也具有函子性。

□

5.1 Mayer-Vietoris 序列

设 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 是定义在 V 上的超有向图。设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 是它们的底层超图。假设

(I) $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 均为 $\Sigma_\bullet$-不变。

由与 (4.10) 类似的论证可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Inf}_{k-1}(\vec{\mathcal{H}};R) &\cong \mathrm{Inf}_{k-1}(\mathcal{H};R)^{\oplus k!}, \\ \mathrm{Sup}_{k-1}(\vec{\mathcal{H}};R) &\cong \mathrm{Sup}_{k-1}(\mathcal{H};R)^{\oplus k!} \end{aligned}$$

因此

$$H_{k-1}(\vec{\mathcal{H}};R) \cong H_{k-1}(\mathcal{H};R)^{\oplus k!}. \tag{5.13}$$

设

(II) 对任意 $\sigma \in \mathcal{H}$ 和任意 $\sigma' \in \mathcal{H}'$，要么 $\sigma \cap \sigma'$ 为空集，要么 $\sigma \cap \sigma' \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$。

由 [12, 定理 3.10], ，我们有一个长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{H}\cap\mathcal{H}';R) \longrightarrow H_n(\mathcal{H};R)\oplus H_n(\mathcal{H}';R) \longrightarrow \tag{5.14}$$

$$\longrightarrow H_n(\mathcal{H}\cup\mathcal{H}';R) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{H}\cap\mathcal{H}';R) \longrightarrow \cdots$$

记作 MV($\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$)。下一个定理是对 [40, 第 5 节3]以及 [15, 命题 3.7 和定理 3.9]的直接改进。

定理 5.2。 设 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 是超有向图。

(1) 我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MV}(\delta\vec{\mathcal{H}},\delta\vec{\mathcal{H}}') & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\Delta\vec{\mathcal{H}},\Delta\vec{\mathcal{H}}') \\ \downarrow{\scriptstyle (\delta\pi)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\Delta\pi)_*} \\ \mathrm{MV}(\delta\mathcal{H},\delta\mathcal{H}') & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\Delta\mathcal{H},\Delta\mathcal{H}') \end{array} \tag{5.15}$$

其中箭头是长正合序列的态射。此外，*(5.2)* 关于超有向图的态射以及由此诱导的底层超图的态射具有函子性。

(2) 假设 *(I)* 和 *(II)* 成立。则我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{MV}(\delta\vec{\mathcal{H}},\delta\vec{\mathcal{H}}') & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\vec{\mathcal{H}},\vec{\mathcal{H}}') & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\Delta\vec{\mathcal{H}},\Delta\vec{\mathcal{H}}') \\ \downarrow{\scriptstyle (\delta\pi)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\Delta\pi)_*} \\ \mathrm{MV}(\delta\mathcal{H},\delta\mathcal{H}') & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\mathcal{H},\mathcal{H}') & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\Delta\mathcal{H},\Delta\mathcal{H}') \end{array} \tag{5.16}$$

其中箭头是长正合序列的态射。此外，*(5.16)* 关于 $\Sigma_\bullet$-不变超有向图的态射以及底层超图所诱导的态射具有函子性。

证明。 将命题 4.7 应用于（5.1）的第一列和第三列，我们得到（5.15）。假设（I）和（II）成立。由（5.13）和（5.14），我们得到 π_* 在（5.16）的中间列中。将嵌入同调函子应用于（5.1），并取长正合列（5.14），我们得到（5.16）。 □

5.2 Künneth 型公式

设 V 和 V' 为不相交集合。设 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$ 分别为定义在 V 和 V' 上的超有向图，其底层超图分别为 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$。那么借助 [42, 第 3], 节

$$\mathrm{Inf}_{\bullet+1}(\vec{\mathcal{H}} * \vec{\mathcal{H}}'; R) \cong \mathrm{Inf}_{\bullet}(\vec{\mathcal{H}}; R) \otimes \mathrm{Inf}_{\bullet}(\vec{\mathcal{H}}'; R), \tag{5.17}$$

$$\mathrm{Inf}_{\bullet+1}(\mathcal{H} * \mathcal{H}'; R) \cong \mathrm{Inf}_{\bullet}(\mathcal{H}; R) \otimes \mathrm{Inf}_{\bullet}(\mathcal{H}'; R). \tag{5.18}$$

因此，由 (5.17) 可得一个短正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} H_{p+1}(\vec{\mathcal{H}}; R) \otimes H_{q+1}(\vec{\mathcal{H}}'; R) \longrightarrow H_{n+1}(\vec{\mathcal{H}} * \vec{\mathcal{H}}'; R) \longrightarrow \tag{5.19}$$

$$\longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} \mathrm{Tor}_R(H_{p+1}(\vec{\mathcal{H}}; R), H_q(\vec{\mathcal{H}}'; R)) \longrightarrow 0,$$

记为 KU($\vec{\mathcal{H}}$, $\vec{\mathcal{H}}'$)；由 (5.18) 可得一个短正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} H_{p+1}(\mathcal{H}; R) \otimes H_{q+1}(\mathcal{H}'; R) \longrightarrow H_{n+1}(\mathcal{H} * \mathcal{H}'; R) \longrightarrow \tag{5.20}$$

$$\longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} \mathrm{Tor}_R(H_{p+1}(\mathcal{H}; R), H_q(\mathcal{H}'; R)) \longrightarrow 0,$$

记为 KU($\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$)。投影 $\pi\colon \vec{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$ 和 $\pi\colon \vec{\mathcal{H}}' \longrightarrow \mathcal{H}'$ 诱导出一个短正合列的态射

$$\pi_* : \mathrm{KU}(\vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{H}}') \longrightarrow \mathrm{KU}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'). \tag{5.21}$$

下一个定理是对 [40, 第 5 节4]以及 [15, 命题 3.7 和定理 3.9]的直接改进。

定理 5.3。对于分别定义在 V 和 V' 上的任意超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$，其中 V 和 V' 不相交，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{KU}(\delta\vec{\mathcal{H}}, \delta\vec{\mathcal{H}}') & \longrightarrow & \mathrm{KU}(\vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{H}}') & \longrightarrow & \mathrm{KU}(\Delta\vec{\mathcal{H}}, \Delta\vec{\mathcal{H}}') \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ \mathrm{KU}(\delta\mathcal{H}, \delta\mathcal{H}') & \longrightarrow & \mathrm{KU}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') & \longrightarrow & \mathrm{KU}(\Delta\mathcal{H}, \Delta\mathcal{H}') \end{array} \tag{5.22}$$

其中箭头是短正合列的态射。此外，*(5.22)* 关于超有向图的态射及其诱导的底层超图态射具有函子性。

证明。分别将 (5.1) 应用于 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$，并取连接，得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \delta\vec{\mathcal{H}} * \delta\vec{\mathcal{H}}' & \longrightarrow & \vec{\mathcal{H}} * \vec{\mathcal{H}}' & \longrightarrow & \Delta\vec{\mathcal{H}} * \Delta\vec{\mathcal{H}}' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \delta\mathcal{H} * \delta\mathcal{H}' & \longrightarrow & \mathcal{H} * \mathcal{H}' & \longrightarrow & \Delta\mathcal{H} * \Delta\mathcal{H}'. \end{array} \tag{5.23}$$

将 (4.14) 应用于第一列和第三列，并将 (5.19) - (5.21) 应用于中间列，即得 (5.22)。借助 [23, 定理 3B.5], ，可得 (5.22) 的函子性。 □

6 独立复数、定向独立复数及其同调

本节将第 4 节的结果应用于独立复形和有向独立复形，并研究其同调。在定理 6.2 中，我们给出了从有向独立复形的同调

到独立复形同调的典范同态，并证明了它关于顶点滤过的函子性。在定理 6.5 中，我们证明了图的连接所对应的（有向）独立复形同调的一些 Mayer-Vietoris 序列。在定理 6.8 中，我们证明了图的不交并所对应的（有向）独立复形同调的一些 Künneth 型公式。此外，我们将第 5 节的结果应用于（有向）独立复形的子超（有向）图。在定理 6.3、定理 6.7 和定理 6.10 中，我们分别将定理 6.2、定理 6.5 和定理 6.8 推广到子超（有向）图的情形。

设 $G = (V, E)$ 是一个图。令有序构形空间 $\mathrm{Conf}_k(G)$ 为所有有序 k 元组 $(v_1, \ldots, v_k)$ 的集合，其中对于任意 $1 \le i < j \le k$，$v_1, \ldots, v_k \in V$，$v_i \neq v_j$ 和 v_i, v_j 在 G 中均不相邻。对称群 Σ_k 通过置换坐标从左侧自由作用于 $\mathrm{Conf}_k(G)$。作为一个 k 一致超有向图，$\mathrm{Conf}_k(G)$ 是 Σ_k 不变的。令无序构形空间为轨道空间 $\mathrm{Conf}_k(G)/\Sigma_k$，它是所有无序 k 元组 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 的集合，其中对于任意 $1 \le i < j \le k$，$v_1, \ldots, v_k \in V$,$v_i \neq v_j$ 和 v_i, v_j 在 G 中均不相邻。我们有一个主 Σ_k 丛

$$\Sigma_k \longrightarrow \mathrm{Conf}_k(G) \xrightarrow{\pi_k(G)} \mathrm{Conf}_k(G)/\Sigma_k \tag{6.1}$$

其中 $\pi_k(G)$是一个 k层覆盖映射。令

$$\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G) = \bigcup_{k\ge 1} \mathrm{Conf}_k(G), \qquad \mathrm{Ind}(G) = \bigcup_{k\ge 1} \mathrm{Conf}_k(G)/\Sigma_k.$$

则 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$是 V上的有向单纯复形，而$\mathrm{Ind}(G)$是$\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$的底层单纯复形。单纯复形$\mathrm{Ind}(G)$称为 G的独立复形，它由 G的所有有限独立集组成。我们将 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$称为 G 的有向独立复形，并将$\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$中的每个元素称为 G上的独立序列。令 $\prec$ 为 V上的全序。注意，$\mathrm{Conf}_k(G)/\Sigma_k$中的一个元素可唯一地写成 $\{v_1, \ldots, v_k\}$的形式，其中 $v_1 \prec \cdots \prec v_k$属于 V。

令 $\{V_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 为 V的一个滤过，使得对于任意 $s \le t$ 和 $\bigcup_{t\in\mathbb{Z}} V_t = V$，都有 $V_s \subseteq V_t$。对每个 $t \in \mathbb{Z}$，令

$$E_t = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V_t\}.$$

那么，对于任意 $s \le t$ 和$\bigcup_{t\in\mathbb{Z}} E_t = E$，都有 $E_s \subseteq E_t$。图族

$$\{G_t = (V_t, E_t) \mid t \in \mathbb{Z}\} \tag{6.2}$$

给出了 G 的一个滤过，其典范包含为 $i_{s,\,t}$：对于任意 $s \le t$ 和 $i_{t,\,\infty}$：对于任意$t \in \mathbb{Z}$。

引理 6.1。有向单纯复形族

$$\{\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G_t) \mid t \in \mathbb{Z}\} \tag{6.3}$$

给出了 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$ 的一个滤过，而单纯复形族

$$\{\mathrm{Ind}(G_t) \mid t \in \mathbb{Z}\} \tag{6.4}$$

给出了$\mathrm{Ind}(G)$ 的一个滤过，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G_s) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G_t) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\cdots & \longrightarrow & \mathrm{Ind}(G_s) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{Ind}(G_t) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{Ind}(G)
\end{array} \tag{6.5}$$

对于任意 $s \le t$。

证明。令 $u, v \in V_t$。那么 u 与 v 在 G_t 中相邻，当且仅当它们在 G 中相邻。因此，对于任意互异的顶点 $v_1, \ldots, v_k \in V_t$，$(v_1, \ldots, v_k)$ 是 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G_t)$ 中的有向单纯形，当且仅当它是 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$ 中的有向单纯形；并且 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 是 $\mathrm{Ind}(G_t)$ 中的单形，当且仅当它是 $\mathrm{Ind}(G)$ 中的单形。因此，(6.3) 是 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$ 的一个滤过，而 (6.4) 是 $\mathrm{Ind}(G)$ 的一个滤过，并且图 (6.5) 可交换。 □

定理 6.2。 我们有一个满射链映射

$$\pi_{\#} : C_\bullet(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G); R) \longrightarrow C_\bullet(\mathrm{Ind}(G); R) \tag{6.6}$$

从而得到一个诱导的同调同态

$$\pi_* : H_\bullet(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G); R) \longrightarrow H_\bullet(\mathrm{Ind}(G); R). \tag{6.7}$$

此外，对于由 G 的顶点滤过所诱导的有向独立复形之间的有向单纯映射，以及底层独立复形之间相应的诱导单纯映射，*(6.6)* 和 *(6.7)* 都具有函子性。

证明。 证明可由命题 4.3 和引理 6.1 得出。令 $\vec{\mathcal{K}}$ 为 (4.5) 和 (4.6) 中的 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$。我们分别得到 (6.6) 和 (6.7)。令 $\{V_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 为 V 的一个滤过。根据引理 6.1，$\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$ 有一个诱导滤过 (6.3)，而 $\mathrm{Ind}(G)$ 也有一个诱导滤过 (6.4)。由 (6.5) 的交换性可知，(6.6) 和 (6.7) 分别关于 (6.3) 和 (6.4) 中的典范包含具有函子性。 □

定理 6.3. 对于由 G 上某些独立序列构成的任意超有向图 $\mathcal{H}$，设 $\mathcal{H}$ 为其底层超图。那么存在链复形的交换图 *(5.9)*，其中垂直映射为满射链映射，水平映射为典范包含。因此，我们得到由此诱导的同调群交换图 *(5.12)*。此外，*(5.9)* 和 *(5.12)* 按定理 *6.2* 的意义具有函子性。

证明. 由于 $\Delta\vec{\mathcal{H}}$ 是 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$ 的有向单纯子复形，我们将 (6.6) 限制到 (5.9) 第一行中 $C_\bullet(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G); R)$ 的子链复形上。由此得到 (5.9) 和 (5.12)。(6.3) 中的滤过诱导出一个滤过 $\{\vec{\mathcal{H}}_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$，其中 $\vec{\mathcal{H}}_t = \vec{\mathcal{H}} \cap \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G_t)$；(6.4) 中的滤过则诱导出一个滤过 $\{\mathcal{H}_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$，其中$\mathcal{H}_t = \mathcal{H} \cap \mathrm{Ind}(G_t)$。(5.9) 和 (5.12) 的函子性由定理 5.1 和定理 6.2 得出。 □

6.1 Mayer-Vietoris 序列

设 V'、V'' 和 V''' 是两两不相交的顶点集。设 G'、G'' 和 G''' 分别是定义在 V'、V'' 和 V''' 上的图。借助例 4.6，它们的约化连接是一个图

$$G = G' \tilde{*} G'' \tilde{*} G'''. \tag{6.8}$$

考虑这些图

$$L' = G' \tilde{*} G''', \qquad L'' = G'' \tilde{*} G'''. \tag{6.9}$$

Then

$$L' \cap L'' = G'''.$$

引理 6.4。我们有

$$\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G''') = \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L') \cap \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L''), \tag{6.10}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G) = \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L') \cup \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L''). \tag{6.11}$$

证明。由于 L' 是由 G' 和 G''' 的不交并连接每一对顶点 (v', v''') 得到的，其中 v' 是 G' 的一个顶点，v''' 是 G''' 的一个顶点，因此我们有一个不交并

$$\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L') = \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G') \sqcup \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'''). \tag{6.12}$$

类似地，

$$\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L'') = \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'') \sqcup \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'''). \tag{6.13}$$

由 (6.12) 和 (6.13)，我们得到 (6.10)。由 (6.8)，可得一个不交并

$$\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G) = \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G') \sqcup \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'') \sqcup \mathrm{Ind}(G'''). \tag{6.14}$$

由 (6.12) - (6.14)，我们得到 (6.11)。 □

定理 6.5. 对于任何给定为约化连接 *(6.8)* 的图 G，我们都有一个同调群的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow H_n(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'''); R) & \longrightarrow & H_n(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G' \tilde{*} G'''); R) \oplus H_n(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'' \tilde{*} G'''); R) & \longrightarrow & \\
\downarrow{\scriptstyle (\pi_{n+1})_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{n+1})_*} & & \\
\cdots \longrightarrow H_n(\mathrm{Ind}(G'''); R) & \longrightarrow & H_n(\mathrm{Ind}(G' \tilde{*} G'''); R) \oplus H_n(\mathrm{Ind}(G'' \tilde{*} G'''); R) & \longrightarrow &
\end{array} \tag{6.15}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow H_n(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G); R) & \longrightarrow & H_{n-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'''); R) & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle (\pi_{n+1})_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_n)_*} & & \\
\longrightarrow H_n(\mathrm{Ind}(G); R) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathrm{Ind}(G'''); R) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

使得这两行都是长正合列。此外，图表 *(6.15)* 关于有向独立复形之间的有向单纯映射，以及它们在底层独立复形之间诱导的单纯映射，具有函子性；这两类映射均由 G'、G'' 和 G''' 的顶点滤过所诱导。

证明。令 $\vec{\mathcal{K}}$ 为命题 4.7 中的 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L')$，并令 $\vec{\mathcal{K}}'$ 为 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L'')$。由 (3.8) 和 (6.11),

$$\mathrm{Ind}(G) = \mathrm{Ind}(L') \cup \mathrm{Ind}(L''). \tag{6.16}$$

由 (3.9) 和 (6.12) - (6.14),

$$\mathrm{Ind}(G''') = \mathrm{Ind}(L' \cap L'') = \mathrm{Ind}(L') \cap \mathrm{Ind}(L''). \tag{6.17}$$

借助引理 6.4、(6.16) 和 (6.17)，我们从交换图 (4.12) 得到交换图 (6.15)。

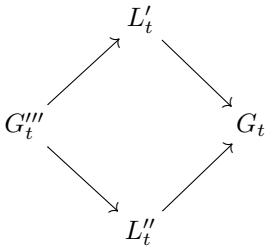
令 $\{V'_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$、$\{V''_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 和 $\{V'''_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 分别为 V'、V'' 和 V''' 的滤过。由 (6.2)，我们得到 G'、G'' 和 G''' 的滤过 $\{G'_t, G''_t, G'''_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$，使得该图交换

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow (G'_s, G''_s, G'''_s) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & (G'_t, G''_t, G'''_t) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & (G', G'', G''') \\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{*}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{*}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{*}} \\
\cdots \longrightarrow G'_s \tilde{*} G''_s \tilde{*} G'''_s & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & G'_t \tilde{*} G''_t \tilde{*} G'''_t & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & G' \tilde{*} G'' \tilde{*} G'''
\end{array}$$

对于任意 $s \le t$。令

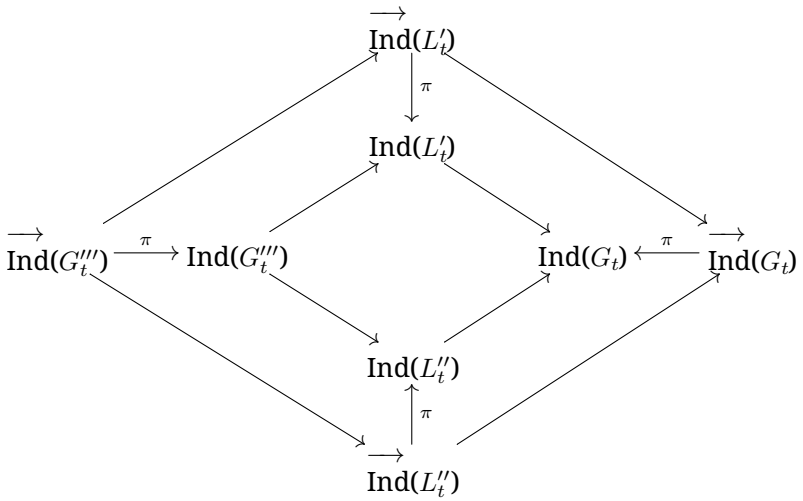
$$G_t = G'_t \tilde{*} G''_t \tilde{*} G'''_t, \qquad L'_t = G'_t \tilde{*} G'''_t, \qquad L''_t = G''_t \tilde{*} G'''_t$$

对于任意 $t \in \mathbb{Z}$，它们分别给出 G、L' 和 L'' 的滤过。交换图



关于由 G'''、G、L' 的滤过诱导的图的典范包含具有函子性，并且

L''。因此，我们有一个交换图



(6.18)

其中，所有未标记的箭头都是有向单纯复形及单纯复形的典范包含，使得该图表关于由 G'''、G、L' 和 L'' 的滤过所诱导的（有向）独立复形的典范包含具有函子性。因此，我们得到 (6.15) 的函子性。

□

根据第 4.1 小节，(6.15) 第一行的长正合序列记为 $\mathrm{MV}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L') \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L''))$，第二行的长正合序列记为 $\mathrm{MV}(\mathrm{Ind}(L'), \mathrm{Ind}(L''))$。(6.15) 的图表记为长正合列的态射

$$\pi_* : \mathrm{MV}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L'), \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L'')) \longrightarrow \mathrm{MV}(\mathrm{Ind}(L'), \mathrm{Ind}(L'')). \tag{6.19}$$

推论 6.6. 对于任意 $k \geq 0$ 以及任意表示为约化连接 *(6.8)* 的图 G，我们有一个长正合列的态射

$$\pi_* : \mathrm{MV}(\mathrm{sk}^k(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L')), \mathrm{sk}^k(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(L''))) \longrightarrow \mathrm{MV}(\mathrm{sk}^k(\mathrm{Ind}(L')), (\mathrm{sk}^k\mathrm{Ind}(L''))) \tag{6.20}$$

它在定理 *6.5* 的意义下具有函子性。

证明。 该证明与定理 6.5 的证明类似。 □

定理 6.7。 对于由 *(6.8)* 中分别给定的 G'、G'' 和 G''' 上的某些独立序列组成的任意超有向图 $\vec{\mathcal{H}}'$、$\vec{\mathcal{H}}''$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'''$，设 $\mathcal{H}'$、$\mathcal{H}''$ 和 $\mathcal{H}'''$ 为其底层超图。则存在长正合序列的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MV}(\delta\vec{\mathcal{H}}' \sqcup \delta\vec{\mathcal{H}}''', \delta\vec{\mathcal{H}}'' \sqcup \delta\vec{\mathcal{H}}''') & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\Delta\vec{\mathcal{H}}' \sqcup \Delta\vec{\mathcal{H}}''', \Delta\vec{\mathcal{H}}'' \sqcup \Delta\vec{\mathcal{H}}''') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{MV}(\delta\mathcal{H}' \sqcup \delta\mathcal{H}''', \delta\mathcal{H}'' \sqcup \delta\mathcal{H}''') & \longrightarrow & \mathrm{MV}(\Delta\mathcal{H}' \sqcup \Delta\mathcal{H}''', \Delta\mathcal{H}'' \sqcup \Delta\mathcal{H}'''). \end{array} \tag{6.21}$$

此外，若超有向图 $\vec{\mathcal{H}}' \sqcup \vec{\mathcal{H}}'''$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'' \sqcup \vec{\mathcal{H}}'''$ 满足第 *5.1* 小节中的 *(I)* 和 *(II)*，则存在长正合序列的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{MV}(\delta\vec{\mathcal{H}}' \sqcup \delta\vec{\mathcal{H}}''', \ \delta\vec{\mathcal{H}}'' \sqcup \delta\vec{\mathcal{H}}''') & \to & \mathrm{MV}(\vec{\mathcal{H}}' \sqcup \vec{\mathcal{H}}''', \ \vec{\mathcal{H}}'' \sqcup \vec{\mathcal{H}}''') & \to & \mathrm{MV}(\Delta\vec{\mathcal{H}}' \sqcup \Delta\vec{\mathcal{H}}''', \ \Delta\vec{\mathcal{H}}'' \sqcup \Delta\vec{\mathcal{H}}''') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{MV}(\mathcal{H}' \sqcup \mathcal{H}''', \ \mathcal{H}'' \sqcup \mathcal{H}''') & \to & \mathrm{MV}(\Delta\mathcal{H}' \sqcup \Delta\mathcal{H}''', \ \Delta\mathcal{H}'' \sqcup \Delta\mathcal{H}''') & \to & \mathrm{MV}(\delta\mathcal{H}' \sqcup \delta\mathcal{H}''', \ \delta\mathcal{H}'' \sqcup \delta\mathcal{H}''') \end{array} \tag{6.22}$$

(6.21) 和 *(6.22)* 都具有定理 *6.5* 所述的函子性。

证明。 该证明可由定理 5.2、定理 6.3 和定理 6.5 得出。 □

6.2 Künneth 型公式

设 V 和 V' 是不相交的顶点集。设 G 是一个顶点属于 V 的图， G' 是一个顶点属于 V' 的图。 G 和 G' 的不交并是图

$$G \sqcup G' = (V \sqcup V', E_G \sqcup E_{G'}).$$

显然,

$$\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G \sqcup G') = \mathrm{Sym}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G) * \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G')), \tag{6.23}$$

$$\mathrm{Ind}(G \sqcup G') = \mathrm{Ind}(G) * \mathrm{Ind}(G'). \tag{6.24}$$

因此，由 (4.11)、(6.23) 和 (6.24) 可知，对于任意 $k \geq 1$,

$$H_{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G \sqcup G'); R) = H_{k-1}(\mathrm{Ind}(G \sqcup G'); R)^{\oplus k!} = H_{k-1}(\mathrm{Ind}(G) * \mathrm{Ind}(G'); R)^{\oplus k!}.$$

定理 6.8. 对于任意一个顶点属于 V 的图 G，以及任意一个顶点属于 V' 的图 G'，若 V 与 V' 不相交，则有交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} H_{p+1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G); R) \otimes H_{q+1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'); R) & \longrightarrow & H_{n+1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G) * \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'); R) & \longrightarrow & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{p+q+1=n} (\pi_{p+2})_* \otimes (\pi_{q+2})_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{n+2})_*} & & & & \\
0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} H_{p+1}(\mathrm{Ind}(G); R) \otimes H_{q+1}(\mathrm{Ind}(G'); R) & \longrightarrow & H_{n+1}(\mathrm{Ind}(G \sqcup G'); R) & \longrightarrow & & & \\
& & & \longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} \mathrm{Tor}_R(H_{p+1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G); R), H_q(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'); R)) & \longrightarrow & 0 & \\
& & & \downarrow & & & \\
& & & \longrightarrow \bigoplus_{p+q+1=n} \mathrm{Tor}_R(H_{p+1}(\mathrm{Ind}(G); R), H_q(\mathrm{Ind}(G'); R)) & \longrightarrow & 0 &
\end{array} \tag{6.25}$$

其中两行都是短正合列。此外，图 *(6.25)* 对有向独立复形之间的有向单纯映射，以及它们在底层独立复形之间所诱导的单纯映射具有函子性；这两类映射均由 G 和 G' 的顶点滤过所诱导。

证明. 令 $\vec{\mathcal{K}}$ 为命题 4.8 中的 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$，令 $\vec{\mathcal{K}}'$ 为 $\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G')$。借助 (6.24)，我们可由交换图 (4.14) 得到交换图 (6.25)。

设 $\{V_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 和 $\{V'_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ 分别是 V 和 V' 的滤过。由 (6.2)，我们得到 G 和 G' 的诱导滤过 $\{G_t, G'_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$。交换图

$$\begin{array}{ccc}
(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G_t), \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'_t)) & \xrightarrow{*} & \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G_t) * \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'_t) \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
(\mathrm{Ind}(G_t), \mathrm{Ind}(G'_t)) & \xrightarrow{*} & \mathrm{Ind}(G_t \sqcup G'_t)
\end{array}$$

对于由 G 和 G' 的滤过所诱导的（有向）独立复形的典范包含，该交换图具有函子性。因此，我们得到 (6.25) 的函子性。 □

根据第 4.2 小节，(6.25) 第一行的短正合列记为 $\mathrm{KU}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)\ \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'))$，第二行的短正合列记为 $\mathrm{KU}(\mathrm{Ind}(G), \mathrm{Ind}(G'))$。(6.25) 中的图记为短正合列的态射

$$\pi_* : \mathrm{KU}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G), \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G')) \longrightarrow \mathrm{KU}(\mathrm{Ind}(G), \mathrm{Ind}(G')). \tag{6.26}$$

推论 6.9。 设 G 和 G' 是定理 *6.8* 中的图。对于任意 $k \geq 0$，我们有一个短正合列的态射

$$\pi_* : \mathrm{KU}(\mathrm{sk}^k(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)), \mathrm{sk}^k(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G'))) \longrightarrow \mathrm{KU}(\mathrm{sk}^k(\mathrm{Ind}(G)), (\mathrm{sk}^k \mathrm{Ind}(G'))) \tag{6.27}$$

其具有定理 *6.8* 意义下的函子性。

证明。 该证明与定理 6.8 的证明类似。 □

定理 6.10。 设 G 和 G' 是定理 *6.8* 中的图。对于由分别位于 G 和 G' 上的某些独立序列构成的任意超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$，令 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 为它们的底层超图。则我们得到交换图 *(5.22)* 中的短正合列，该图在定理 *6.8* 的意义下具有函子性。

证明。 由于 $\vec{\mathcal{H}}$ 是 $\overrightarrow{\text{Ind}}(G)$ 的子超有向图，且 $\vec{\mathcal{H}}'$ 是 $\overrightarrow{\text{Ind}}(G')$ 的子超有向图，因此 (5.23) 的第一行是 $\overrightarrow{\text{Ind}}(G) * \overrightarrow{\text{Ind}}(G')$ 的子超有向图。由定理 5.3，我们得到交换图 (5.22)。由定理 6.3 和定理 6.8，我们得到函子性。 □

7 拟阵、有向拟阵及其同调

本节将第 4 节的内容应用于拟阵和有向拟阵，并研究其同调。定理 7.4 给出了从有向拟阵的同调到拟阵的同调的典范同态。定理 7.6 证明了若干关于（有向）拟阵同调的 Mayer-Vietoris 序列。定理 7.9 证明了若干关于（有向）拟阵同调的 Künneth 型公式。此外，我们将第 5 节的内容应用于（有向）拟阵的子超（有向）图。在定理 7.5、定理 7.8 和定理7.10中，我们分别将定理 7.4、定理 7.6 和定理 7.9 推广到子超（有向）图的情形。

一个拟阵 $\mathcal{M}$ 由有限集 S 以及 S 的子集族 $\mathcal{I}$（称为独立集）构成，并满足：(I1)$\emptyset \in \mathcal{I}$；(I2) 若 $\sigma \in \mathcal{I}$ 且 $\tau \subseteq \sigma$，则 $\tau \in \mathcal{I}$；(I3) 若 σ_1，$\sigma_2 \in \mathcal{I}$且 $|\sigma_2| = |\sigma_1| + 1$，则存在 $x \in \sigma_2 - \sigma_1$，使得 $\sigma_1 \cup x \in \mathcal{I}$（[43, 第 1 节2]）。我们称拟阵 $\mathcal{M}' =$（S'，$\mathcal{I}'$）是 $\mathcal{M}$ 的子拟阵，若 $S' \subseteq S$ 且 $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$。特别地，若令 $\mathcal{I} = [2^S]$ 为 S 的所有子集组成的集合，则 $[S] =$（S，$[2^S]$）是一个拟阵。对于任意拟阵 $\mathcal{M} =$（S，$\mathcal{I}$），$\mathcal{I}$ 必须是 $[2^S]$ 的子集，因此 $\mathcal{M}$ 必须是 $[S]$ 的子拟阵。

极大的独立集称为 $\mathcal{I}$ 的基（$\mathcal{M}$，第 [43, 页 7]）。令 $\mathbb{B}(\mathcal{M})$ 为 $\mathcal{M}$ 的基集 . 对偶拟 拟阵 $\mathcal{M}^*$ 是 $\mathcal{M}$ 的拟阵，其基集为（[43,第 2 节。1]）

$$\mathbb{B}(\mathcal{M}^*) = \{S - B \mid B \in \mathbb{B}(\mathcal{M})\}. \tag{7.1}$$

$\mathcal{M}$ 的秩为 $r(\mathcal{M}) = \max\{|\sigma| \mid \sigma \in \mathcal{I}\}$。注意，$r(\mathcal{M}) + r(\mathcal{M}^*) = |S|$（参见 [43, 第 2 节。1]）。

类似于拟阵的定义，我们定义有向拟阵 S 上一种由可以互异元素构成的有限序列组成的集合$\vec{\mathcal{I}}$（我们称这些序列为独立序列），满足：(I1)' 空序列 $\vec{\emptyset} \in \vec{\mathcal{I}}$；(I2)' 若 $\vec{\sigma} \in \vec{\mathcal{I}}$ 且 $\vec{\tau}$ 是 $\vec{\sigma}$的子序列，则 $\vec{\tau} \in \vec{\mathcal{I}}$；(I3)' 若 $\vec{\sigma}_1$、$\vec{\sigma}_2 \in \vec{\mathcal{I}}$ 且$|\vec{\sigma}_2| = |\vec{\sigma}_1| + 1$，则存在 $x \in \vec{\sigma}_2$ 和 $\vec{\sigma} \in \vec{\mathcal{I}}$，使得 $x \notin \vec{\sigma}_1$，并且 $\vec{\sigma}$ 可通过将 x 添加到 $\vec{\sigma}_1$[5]中得到。我们称有向拟阵 $\vec{\mathcal{M}}' =$（S'，$\vec{\mathcal{I}}'$）是 $\vec{\mathcal{M}}$ 的有向子拟阵，若 $S' \subseteq S$ 且 $\vec{\mathcal{I}}' \subseteq \vec{\mathcal{I}}$。特别地，若令 $\vec{\mathcal{I}} = \vec{2}^S$ 为 S中所有互异元素构成的有限序列的集合，则（S）$=$（S，$\vec{2}^S$）是一个有向拟阵。对于任意有向拟阵 $\vec{\mathcal{M}} =$（S，$\vec{\mathcal{I}}$），有 $\vec{\mathcal{I}}$必为 $\vec{2}^S$ 的子集，因此 $\vec{\mathcal{M}}$必为（S）的有向子拟阵。

我们有一个典范投影 $\pi : (S) \longrightarrow [S]$，它将 S 中每个由互异元素组成的序列映射为该序列中元素构成的集合。设 $\vec{\mathcal{M}} = (S, \vec{\mathcal{I}})$ 是任意一个有向拟阵。我们定义 $\vec{\mathcal{M}}$ 的底层拟阵 $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$，令 $\mathcal{I} = \pi(\vec{\mathcal{I}})$。直接验证可知，$\mathcal{M}$ 是一个拟阵。将其限制在 $\vec{\mathcal{M}}$ 上，π 会导出一个典范投影

$$\pi : \vec{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}. \tag{7.2}$$

如果 $\vec{\mathcal{I}} = \pi^{-1}(\mathcal{I})$，我们就称 $\vec{\mathcal{M}}$ 是 $\Sigma_\bullet$-不变的 。记作

$$\vec{\mathcal{M}} = \{\emptyset\} \bigcup \bigcup_{k \geq 1} \vec{\mathcal{M}}_k \tag{7.3}$$

其中 $\vec{\mathcal{M}}_k$ 是由 S 中所有含有 k 个互异元素的序列构成的 k 一致超有向图，并记

$$\mathcal{M} = \{\emptyset\} \bigcup \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{M}_k \tag{7.4}$$

[5]这里，将 x 添加到 $\vec{\sigma}_1$ 中得到 $\vec{\sigma}$，这意味着：如果我们写作 $\vec{\sigma}_1 = v_1 v_2 \dots v_k$，其中 v_1，v_2、.....、$v_k \in S$ 互异，那么存在 $1 \leq i \leq k+1$ 使得 $\vec{\sigma} = v_1 \dots v_{i-1} x v_i \dots v_k$。

其中 $\mathcal{M}_k$ 是 $\mathcal{M}_k$ 的底层 k 一致超图。则 $\mathcal{M}$ 是 $\Sigma_\bullet$ 不变的，当且仅当对每个 $k \geq 1$， $\mathcal{M}_k$ 都是 Σ_k 不变的。由 (I2) 和 (I2)' 可知，$\vec{\mathcal{M}} - \{\emptyset\} = \bigcup_{k\geq 1} \vec{\mathcal{M}}_k$ 是定义在 S 上的有向单纯复形，而 $\mathcal{M} - \{\emptyset\} = \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{M}_k$ 是底层单纯复形。

例 7.1。设 S 是 $\mathbb{F}^N$ 中的任意有限集。

(1) 对于任意子集 $\sigma \subseteq S$，如果向量 $\{v \mid v \in \sigma\}$ 在 $\mathbb{F}^N$ 中线性无关，则定义 $\sigma \in \mathcal{I}$。已知 $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ 是一个拟阵，称为向量拟阵（参见 *[43,* 第 *1.3]* 节）。*(2)* 对于任意有限序列 $\vec{\sigma}$，其元素在 S 中互异，如果向量 $\{v \in S \mid v$ 是 $\vec{\sigma}\}$ 的一个元素且在 $\mathbb{F}^N$ 中线性无关，则定义 $\vec{\sigma} \in \vec{\mathcal{I}}$。那么 $\vec{\mathcal{M}} = (S, \vec{\mathcal{I}})$ 是一个有向拟阵。事实上，若 $\vec{\sigma}_1$、$\vec{\sigma}_2 \in \vec{\mathcal{I}}$ 满足 $|\vec{\sigma}_2| = |\vec{\sigma}_1| + 1$，则存在 $x \in \vec{\sigma}_2$，使得 $x \notin \vec{\sigma}_1$，并且 $\vec{\sigma} \in \vec{\mathcal{I}}$ 可通过在序列中的任意位置将 x 添加到 $\vec{\sigma}_1$ 中得到。显然，$\mathcal{M}$ 是 $\Sigma_\bullet$-不变的。我们称 $\mathcal{M}$ 为向量有向拟阵。*(3)* 假设 $\mathbb{F}$ 上存在一个全序 $\prec$。对于任意有限序列 $\vec{\sigma}$，其元素在 S 中互异，如果

$$\vec{\sigma} = (v_1, \ldots, v_k) = \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^N & \cdots & v_k^N \end{pmatrix}$$

秩为 k（即 v_1、.....、$v_k \in \mathbb{F}^N$ 线性无关），且 $v_1^1 \preceq v_2^1 \preceq \cdots \preceq v_k^1$。那么 $\vec{\mathcal{M}}' = (S, \vec{\mathcal{I}}')$ 是一个有向拟阵。事实上，若 $\vec{\sigma}_1$、$\vec{\sigma}_2 \in \vec{\mathcal{I}}'$ 满足 $|\vec{\sigma}_2| = |\vec{\sigma}_1| + 1$，则存在 $x \in \vec{\sigma}_2$，使得 $x \notin \vec{\sigma}_1$，并且 $\vec{\sigma} \in \vec{\mathcal{I}}'$ 是在序列中相对于 $\mathbb{F}^N$ 中向量第一坐标的全序 $\prec$，于某些位置将 x 添加到 $\vec{\sigma}_1$ 中得到的。若 S 中元素的第一坐标至少有 $\vec{}$ 个互异值，则 $\mathcal{M}$ 不是 $\Sigma_\bullet$-不变的。

设 $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ 和 $\mathcal{M}' = (S', \mathcal{I}')$ 是拟阵。若映射 $\varphi\colon S \longrightarrow S'$ 诱导出单纯复形之间的单纯映射 $\varphi\colon \mathcal{M} \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathcal{M}' \setminus \{\emptyset\}$，则称 φ 为单纯映射，并记作 $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$。设 $\vec{\mathcal{M}} = (S, \vec{\mathcal{I}})$ 和 $\vec{\mathcal{M}}' = (S', \vec{\mathcal{I}}')$ 是有向拟阵。若映射 $\vec{\varphi}\colon S \longrightarrow S'$ 诱导出有向单纯复形之间的有向单纯映射 $\vec{\varphi}\colon \vec{\mathcal{M}} \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \vec{\mathcal{M}}' \setminus \{\emptyset\}$，则称 $\vec{\varphi}$ 为有向单纯映射，并记作 $\vec{\varphi}\colon \vec{\mathcal{M}} \longrightarrow \vec{\mathcal{M}}'$。对于任意有向单纯映射 $\vec{\varphi}\colon \vec{\mathcal{M}} \longrightarrow \vec{\mathcal{M}}'$，都存在一个在底层拟阵之间诱导出的单纯映射 $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\vec{\varphi}} & \vec{\mathcal{M}}' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}'. \end{array} \tag{7.5}$$

例 7.2. 设 S 是 $\mathbb{F}^N$ 中的任意有限集，S' 是 $\mathbb{F}^{N'}$ 中的任意有限集。假设 $N \leq N'$ 和 $\varphi\colon \mathbb{F}^N \longrightarrow \mathbb{F}^{N'}$，并且存在一个单射线性映射，使得 $\varphi(S) \subseteq S'$。

(1) 设 $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ 和 $\mathcal{M}' = (S', \mathcal{I}')$ 是例 *7.1 (1)* 中的向量拟阵。则 φ 诱导出一个单纯映射 $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$。*(2)* 设 $\vec{\mathcal{M}} = (S, \vec{\mathcal{I}})$ 和 $\vec{\mathcal{M}}' = (S', \vec{\mathcal{I}}')$ 是例 *7.1 (2)* 中的向量有向拟阵。则 φ 诱导出一个有向单纯映射 $\vec{\varphi}$: $\vec{\mathcal{M}} \longrightarrow \vec{\mathcal{M}}'$，使得 *(1)* 中的 φ 和 *(2)* 中的 $\vec{\varphi}$ 满足交换图 *(7.5)*。*(3)* 设 $\vec{\mathcal{M}} = (S, \vec{\mathcal{I}})$ 和 $\vec{\mathcal{M}}' = (S', \vec{\mathcal{I}}')$ 是例 *7.1 (3)* 中的有向拟阵。此外，假设对于 S 中任意满足 $v^1 \preceq u^1$ 的 $(v^1, \ldots, v^N)$ 和 $(u^1, \ldots, u^N)$，它们在 S' 中的像 $(v'^1, \ldots, v'^N) = \varphi(v^1, \ldots, v^N)$ 和 $(u'^1, \ldots, u'^N) = \varphi(u^1, \ldots, u^N)$ 满足 $v'^1 \preceq u'^1$。则 φ 诱导出一个有向单纯映射 $\vec{\varphi}$: $\vec{\mathcal{M}} \longrightarrow \vec{\mathcal{M}}'$，使得 *(1)* 中的 φ 和 *(3)* 中的 $\vec{\varphi}$ 满足交换图 *(7.5)*。*(4)* 设 $\vec{\mathcal{M}} = (S, \vec{\mathcal{I}})$ 和 $\vec{\mathcal{M}}' = (S', \vec{\mathcal{I}}')$ 是例 *7.1 (3)* 中的有向拟阵。对于任意 $(v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{H}$，若 $\varphi(v_1)^1 \preceq \cdots \preceq \varphi(v_k)^1$，则定义 $\vec{\varphi}(v_1, \ldots, v_k) = (\varphi(v_1) \ldots, \varphi(v_k))$；否则定义 $\vec{\varphi}(v_1, \ldots, v_k) = \emptyset$。则 $\vec{\varphi}$ 不一定是有向单纯映射，因为 $\emptyset \notin \mathcal{M} \setminus \{\emptyset\}$。

令 $C_{k-1}(\vec{\mathcal{M}};R)$ 为由 $\vec{\mathcal{M}}_k$ 的元素生成的自由 R-模，并令 $C_{k-1}(\mathcal{M};R)$ 为由 $\mathcal{M}_k$ 的元素生成的自由R-模，其中 $k\geq 1$ 任意。我们有一个链复形

$$C_\bullet(\vec{\mathcal{M}};R)=\{C_k(\vec{\mathcal{M}};R)\mid k\geq 0\}$$

其边界映射

$$\vec{\partial}_k : C_k(\vec{\mathcal{M}};R)\longrightarrow C_{k-1}(\vec{\mathcal{M}};R)$$

is g $\vec{}$由 (4.1) 给出，适用于任意 $k\geq 1$；而对于任意 $v\in\mathcal{M}_0$，则由 $\partial_0(v)=0$ 给出。我们还有一个链复形

$$C_\bullet(\mathcal{M};R)=\{C_k(\mathcal{M};R)\mid k\geq 0\}$$

其边界映射

$$\partial_k : C_k(\mathcal{M};R)\longrightarrow C_{k-1}(\mathcal{M};R)$$

对于任意 $k\geq 1$，由 (4.2) 给出；对于任意 $v\in\mathcal{M}_0$，则由 $\partial_0(v)=0$ 给出。

例 7.3。*(1)* 例 *7.2 (1)* 中的单纯映射 φ 诱导出链映射 $\varphi_\#: C_\bullet(\mathcal{M};R)\longrightarrow C_\bullet(\mathcal{M}';R)$。

(2) 例 *7.2 (2)* 和 *(3)* 中的有向单纯映射 $\vec{\varphi}$ 诱导出链映射 $\vec{\varphi}_\#: C_\bullet(\vec{\mathcal{M}};R)\longrightarrow C_\bullet(\vec{\mathcal{M}}';R)$(;)。

(3) 例 *7.2 (4)* 中的映射 $\vec{\varphi}$ 诱导出链映射 $\vec{\varphi}_\#: C_\bullet(\vec{\mathcal{M}};R)\longrightarrow C_\bullet(\vec{\mathcal{M}}';R)$。

定理 7.4. 典范投影 *(7.2)* 诱导出一个满射链映射

$$\pi_\# : C_\bullet(\vec{\mathcal{M}};R)\longrightarrow C_\bullet(\mathcal{M};R) \tag{7.6}$$

并因此诱导出一个同调同态

$$\pi_* : H_\bullet(\vec{\mathcal{M}};R)\longrightarrow H_\bullet(\mathcal{M};R). \tag{7.7}$$

此外，*(7.6)* 和 *(7.7)* 关于有向拟阵之间的有向单纯映射及其在底层拟阵之间诱导的单纯映射具有函子性。

证明. 设 $\vec{\mathcal{K}}=\vec{\mathcal{M}}\setminus\{\emptyset\}$，且令 $\mathcal{K}=\mathcal{M}\setminus\{\emptyset\}$ 为命题 4.3 中的对象。于是，(7.6) 和 (7.7) 分别由 (4.5) 和 (4.6) 得出。 □

定理 7.5. 对于任意子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$，令 $\mathcal{H}$ 为 $\vec{\mathcal{H}}$ 的底层超图。则存在链复形的交换图 *(5.9)* 和同调群的交换图 *(5.12)*，并且它们关于由定理 *7.4* 中的有向单纯映射诱导的子超有向图态射，以及由定理 *7.4* 中的单纯映射诱导的子超图态射，具有函子性。

证明。 图式 (5.9) 和 (5.12) 由定理 5.1 得出。将定理 7.4 中的有向单纯映射限制到 $\vec{\mathcal{M}}\setminus\{\emptyset\}$ 的子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$ 上，可得到超有向图之间的态射 $\vec{\varphi}: \vec{\mathcal{H}}\longrightarrow\vec{\mathcal{H}}'$。底层超图之间的态射 $\varphi: \mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}'$ 是将定理 7.4 中的单纯映射限制到 $\mathcal{M}\setminus\{\emptyset\}$ 的子超图 $\mathcal{H}$ 上所得。因此，我们得到了函子性。 □

7.1 Mayer-Vietoris 序列

设 $\vec{\mathcal{M}}$ 和 $\vec{\mathcal{M}}'$ 是定义在 S 上的有向拟阵，其底层拟阵分别为 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$。那么交集 $\vec{\mathcal{M}}\cap\vec{\mathcal{M}}'$ 是定义在 S 上的有向拟阵，其底层拟阵为 $\mathcal{M}\cap\mathcal{M}'$。然而，并集 $\vec{\mathcal{M}}\cup\vec{\mathcal{M}}'$ 未必是定义在 S 上的有向拟阵，并集 $\mathcal{M}\cup\mathcal{M}'$ 也未必是定义在 S 上的拟阵。尽管如此，$\vec{\mathcal{M}}\cup\vec{\mathcal{M}}'$ 是一个增广有向单纯复形（即一个有向单纯复形与赋予维数 -1 的空集 $\emptyset$ 的并集），而 $\mathcal{M}\cup\mathcal{M}'$ 是一个增广单纯复形（即一个单纯复形与赋予维数 -1 的空集 $\emptyset$ 的并集，参见 [35, 第 5] 节）。因此，链复形 $C_*(\vec{\mathcal{M}}\cup\vec{\mathcal{M}}';R)$、链复形 $C_*(\mathcal{M}\cup\mathcal{M}';R)$ 以及链映射

$$\pi_\# : C_*(\vec{\mathcal{M}}\cup\vec{\mathcal{M}}';R)\longrightarrow C_*(\mathcal{M}\cup\mathcal{M}';R)$$

也有相应的定义。

定理 7.6。对于定义在 S 上、底层拟阵分别为 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 的有向拟阵 $\vec{\mathcal{M}}$ 和 $\vec{\mathcal{M}}'$，我们有如下同调群的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_n(\vec{\mathcal{M}} \cap \vec{\mathcal{M}}'; R) & \longrightarrow & H_n(\vec{\mathcal{M}}; R) \oplus H_n(\vec{\mathcal{M}}'; R) & \longrightarrow & \\
& \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \\
\cdots \longrightarrow & H_n(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'; R) & \longrightarrow & H_n(\mathcal{M}; R) \oplus H_n(\mathcal{M}'; R) & \longrightarrow &
\end{array} \tag{7.8}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H_n(\vec{\mathcal{M}} \cup \vec{\mathcal{M}}'; R) & \longrightarrow & H_{n-1}(\vec{\mathcal{M}} \cap \vec{\mathcal{M}}'; R) & \longrightarrow & \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \\
\longrightarrow & H_n(\mathcal{M} \cup \mathcal{M}'; R) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'; R) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

使得两行都是长正合列。此外，该图关于有向拟阵之间的有向单纯映射及其在底层拟阵之间诱导的单纯映射是自然的。

证明。设 $\vec{\mathcal{K}} = \vec{\mathcal{M}} \setminus \{\emptyset\}$，并令 $\vec{\mathcal{K}}' = \vec{\mathcal{M}}' \setminus \{\emptyset\}$ 属于命题 4.7。它们的底层单纯复形分别为$\mathcal{K} = \mathcal{M} \setminus \{\emptyset\}$ 和 $\mathcal{K}' = \mathcal{M}' \setminus \{\emptyset\}$。定理 7.6 的证明可由命题 4.7 得出。 □

与第 4.1 小节类似，(7.8) 第一行的长正合列记为 MV($\vec{\mathcal{M}}$, $\vec{\mathcal{M}}'$)，第二行的长正合列记为 MV($\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$)。图 (7.8) 记为长正合列的态射

$$\pi_* : \mathrm{MV}(\vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{M}}') \longrightarrow \mathrm{MV}(\mathcal{M}, \mathcal{M}'). \tag{7.9}$$

推论 7.7. 对于 S 上的任意拟阵 $\mathcal{M}$，令 $n = \min\{r(\mathcal{M})\ r(\mathcal{M}^*)\} - 1$。则

$$H_n(\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*; R) \cong H_n(\mathcal{M}; R) \oplus H_n(\mathcal{M}^*; R). \tag{7.10}$$

证明. 由于每个 $\sigma \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^*$ 都不是 $\mathcal{M}$ 的基，也不是 $\mathcal{M}^*$ 的基，我们得到

$$r(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^*) < \min\{r(\mathcal{M}), r(\mathcal{M}^*)\}.$$

因此，对于任意 $n \geq \min\{r(\mathcal{M})\ r(\mathcal{M}^*)\} - 1$，$H_n(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^*) = 0$。将推论 7.6 中第二个长正合列应用于拟阵对 $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$。我们得到 (7.7)。 □

定理 7.8. 对于 $\bigcup_{k\geq 1} \mathcal{M}_k$ 和 $\bigcup_{k\geq 1} \mathcal{M}'_k$ 的任意子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$，分别令其底层超图为 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$。则我们有一个长正合列的交换图 *(5.15)*。此外，*(5.15)* 在定理 *7.5* 和定理 *7.6* 的意义下具有函子性。进一步地，若第 *5.1* 小节中的 *(I)* 和 *(II)* 均成立，则我们有一个长正合列的交换图 *(5.16)*。

证明。证明由定理 5.2、定理 7.5 和定理 7.6 得出。 □

7.2 Künneth 型公式

设 S 和 S' 是不相交的有限集。设 $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ 和 $\mathcal{M}' = (S', \mathcal{I}')$ 分别是定义在 S 和 S' 上的拟阵。我们将它们的 连接 $\mathcal{M} * \mathcal{M}'$ 定义为定义在 $S \sqcup S'$ 上的拟阵，其独立集如下给出

$$\mathcal{I} * \mathcal{I}' = \{\sigma \sqcup \sigma' \mid \sigma \in \mathcal{I} \text{ and } \sigma' \in \mathcal{I}'\}.$$

由 (I1) - (I3) 可直接得出，$\mathcal{M} * \mathcal{M}' = (S \sqcup S', \mathcal{I} * \mathcal{I}')$ 是一个满足以下条件的拟阵

$$r(\mathcal{M} * \mathcal{M}') = r(\mathcal{M}) + r(\mathcal{M}').$$

此外，如果 $\mathbb{B}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 的基集，而 $\mathbb{B}(\mathcal{M}')$ 是 $\mathcal{M}'$ 的基集，那么

$$\mathbb{B}(\mathcal{M}) * \mathbb{B}(\mathcal{M}') = \{\sigma \sqcup \sigma' \mid \sigma \in \mathbb{B}(\mathcal{M}) \text{ and } \sigma' \in \mathbb{B}(\mathcal{M}')\} \tag{7.11}$$

就是 $\mathcal{M} * \mathcal{M}'$ 的基集。由 (7.1) 和 (7.11) 可得

$$(\mathcal{M} * \mathcal{M}')^* = \mathcal{M}^* * \mathcal{M}'^*.$$

设 $\vec{\mathcal{M}} = (S, \vec{\mathcal{I}})$ 和 $\vec{\mathcal{M}}' = (S', \vec{\mathcal{I}}')$ 分别是定义在 S 和 S' 上的有向拟阵。我们将它们的 连接$\vec{\mathcal{M}} * \vec{\mathcal{M}}'$ 定义为定义在 $S \sqcup S'$ 上的有向拟阵，其独立序列为

$$\vec{\mathcal{I}} * \vec{\mathcal{I}}' = \{\vec{\sigma} * \vec{\sigma}' \mid \vec{\sigma} \in \vec{\mathcal{I}} \text{ and } \vec{\sigma}' \in \vec{\mathcal{I}}'\}.$$

这里，如果 $\vec{\sigma} = v_1 v_2 \dots v_k$ 和 $\vec{\sigma}' = v'_1 v'_2 \dots v'_l$ 在 S 中互异，其中 $v_1, \dots v_k$，且 $v'_1, \dots v'_l$ 在 S' 中互异，则 $\vec{\sigma} * \vec{\sigma}' = v_1 v_2 \dots v_k v'_1 v'_2 \dots v'_l$。由 (I1)' - (I3)' 可直接得出，$\vec{\mathcal{M}} * \vec{\mathcal{M}}' = (S \sqcup S', \vec{\mathcal{I}} * \vec{\mathcal{I}}')$ 是一个有向拟阵。设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 分别是 $\vec{\mathcal{M}}$ 和 $\vec{\mathcal{M}}'$ 的底层拟阵。令 $\pi : \vec{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ 和 $\pi' : \vec{\mathcal{M}}' \longrightarrow \mathcal{M}'$ 为典范投影。于是我们得到一个诱导投影

$$\pi * \pi' : \vec{\mathcal{M}} * \vec{\mathcal{M}}' \longrightarrow \mathcal{M} * \mathcal{M}'$$

将 $\vec{\sigma} * \vec{\sigma}'$ 发送到 $\pi(\sigma) * \pi'(\sigma')$，对于任意 $\vec{\sigma} \in \vec{\mathcal{M}}$ 和任意 $\vec{\sigma}' \in \vec{\mathcal{M}}'$均成立。该图交换

$$\begin{array}{ccc} (\vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{M}}') & \xrightarrow{*} & \vec{\mathcal{M}} * \vec{\mathcal{M}}' \\ \downarrow{\scriptstyle (\pi,\pi')} & & \downarrow{\scriptstyle \pi*\pi'} \\ (\mathcal{M}, \mathcal{M}') & \xrightarrow{*} & \mathcal{M} * \mathcal{M}'. \end{array}$$

定理 7.9。 对于任意定义在 S 上的有向拟阵 $\vec{\mathcal{M}}$，以及任意定义在 S' 上的有向拟阵 $\vec{\mathcal{M}}'$，其底层拟阵分别为 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q+1=n} H_{p+1}(\vec{\mathcal{M}}; R) \otimes H_{q+1}(\vec{\mathcal{M}}'; R) & \longrightarrow & H_{n+1}(\vec{\mathcal{M}} * \vec{\mathcal{M}}'; R) & \longrightarrow & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{k+l+1=n} \pi_* \otimes \pi'_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi*\pi')_*} & & \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q+1=n} H_{p+1}(\mathcal{M}; R) \otimes H_{q+1}(\mathcal{M}'; R) & \longrightarrow & H_{n+1}(\mathcal{M} * \mathcal{M}'; R) & \longrightarrow & \end{array} \tag{7.12}$$

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & \bigoplus_{p+q+1=n} \operatorname{Tor}_R(H_{p+1}(\vec{\mathcal{M}}; R), H_q(\vec{\mathcal{M}}'; R)) & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \\ \longrightarrow & \bigoplus_{p+q+1=n} \operatorname{Tor}_R(H_{p+1}(\mathcal{M}; R), H_q(\mathcal{M}'; R)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

使得两行都是短正合列。此外，图（*7.12*）关于有向拟阵之间的有向单纯映射，以及底层拟阵之间由其诱导的单纯映射，是自然的。

证明。 令 $\vec{\mathcal{K}} = \vec{\mathcal{M}} \setminus \{\emptyset\}$，并令 $\vec{\mathcal{K}}' = \vec{\mathcal{M}}' \setminus \{\emptyset\}$ 为命题 4.8 中的对象。则 $\vec{\mathcal{K}} * \vec{\mathcal{K}}' = \big(\vec{\mathcal{M}} * \vec{\mathcal{M}}'\big) \setminus \{\emptyset\}$。令 $\mathcal{K} = \mathcal{M} \setminus \{\emptyset\}$ 和 $\mathcal{K}' = \mathcal{M}' \setminus \{\emptyset\}$ 分别为 $\vec{\mathcal{K}}$ 和 $\vec{\mathcal{K}}'$ 的底层单纯复形。则 $\mathcal{K} * \mathcal{K}' = \big(\mathcal{M} * \mathcal{M}'\big) \setminus \{\emptyset\}$。定理 7.9 的证明由命题 4.8 得出。 □

与第 4.2 小节类似，(7.12) 第一行中的短正合列记作 KU($\vec{\mathcal{M}}$, $\vec{\mathcal{M}}'$)，(7.12) 第二行中的短正合列记作 KU($\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$)。(7.12) 中的图记作短正合列的态射

$$\pi_* : \mathrm{KU}(\vec{\mathcal{M}}, \vec{\mathcal{M}}') \longrightarrow \mathrm{KU}(\mathcal{M}, \mathcal{M}'). \tag{7.13}$$

定理7.10。 对于 $\vec{\mathcal{M}} \setminus \{\emptyset\}$ 和 $\vec{\mathcal{M}}' \setminus \{\emptyset\}$ 中分别的任意子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}'$，令 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$分别为其底层超图。则有一个短正合列的交换图 *(5.22)*，它具有定理 *7.5* 和定理 *7.9* 所述的函子性。

证明。 证明由定理 5.3、定理 7.5 和定理 7.9 得出。 □

8 图上正则映射的拓扑障碍

在本节中，我们利用（有向）独立复形的同调以及（有向）独立复形的子超（有向）图的嵌入同调，给出图存在正则嵌入的一些拓扑障碍。我们给出 Mayer-Vietoris 序列的一些交换图，以及 Künneth 型短正合列的一些交换图，作为图存在正则嵌入的障碍。我们证明定理 8.3（主要结果 I）、定理 8.7 - 定理 8.8（主要结果 II）以及定理 8.10 - 定理 8.11（主要结果 III）。

设 S 是 $\mathbb{F}^N$ 的一个固定有限子集。设 $\vec{\mathcal{M}}=(S,\vec{\mathcal{I}})$ 是例 7.1（2）中给出的向量有向拟阵。设 $\mathcal{M}=(S,\mathcal{I})$ 是 $\vec{\mathcal{M}}$ 的底层拟阵，即例 7.1（1）中给出的向量拟阵。设 $G=(V,E)$ 是任意一个图。

命题 8.1。 </style}存在一个 -正则映射： $G\longrightarrow\mathbb{F}^N$，使得 $f(V)\subseteq S$，当且仅当存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)) & \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(f)} & \vec{\mathcal{M}}\\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\ \mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G)) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}(f)} & \mathcal{M}\end{array}\tag{8.1}$$

使得 $\overrightarrow{\ }Ind(f)$ 是一个有向单纯映射，它将有向单形 $(v_1,\dots,v_l)\in sk^{k-1}(\overrightarrow{\ }Ind(G))$（其中$l\le k$）映射为独立序列 $(f(v_1)\dots,f(v_l))\in\vec{\mathcal{I}}$；并且 $Ind(f)$ 是一个单纯映射，它将单形$\{v_1,\dots,v_l\}\in sk^{k-1}(Ind(G))$（其中 $l\le k$）映射为独立集 $\{f(v_1)\dots,f(v_l)\}\in\mathcal{I}$。因此，存在一个 k-正则映射 $f\colon G\longrightarrow\mathbb{F}^N$，使得 $f(V)\subseteq S$，当且仅当存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc}\vec{\mathcal{H}} & \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(f)|_{\vec{\mathcal{H}}}} & \vec{\mathcal{M}}\\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\mathrm{Ind}(f)|_{\mathcal{H}}} & \mathcal{M}\end{array}\tag{8.2}$$

对于任意超有向图 $\vec{\mathcal{H}}\subseteq\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(G))$ 及其底层超图 $\mathcal{H}\subseteq\mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G))$。

证明。($\Longrightarrow$)：设 $f\colon G\longrightarrow\mathbb{F}^N$ 是一个 k-正则映射，且 $f(V)\subseteq S$。令 $1\le l\le k$。那么，对于任意互异的顶点 $v_1,\dots,v_l$，只要 $\{v_i,v_j\}\notin E$对任意 $1\le i<j\le l$成立，它们的像 $f(v_1)\dots,f(v_l)$ 在线性空间 $\mathbb{F}^N$中线性无关。因此，$(f(v_1)\dots,f(v_l))\in\vec{\mathcal{I}}$且 $\{f(v_1)\dots,f(v_l)\}\in\mathcal{I}$。由此 $\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(f)$ 是一个有向单纯映射，而 $\mathrm{Ind}(f)$ 是一个单纯映射。令 $(v_1,\dots,v_l)\in\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(G))$。那么

$$\begin{aligned}\pi\circ\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(f)(v_1,\dots,v_l) &= \pi(f(v_1),\dots,f(v_l))\\ &= \{f(v_1),\dots,f(v_l)\}\\ &= \mathrm{Ind}(f)(\{v_1,\dots,v_l\})\\ &= \mathrm{Ind}(f)\circ\pi\{v_1,\dots,v_l\}.\end{aligned}$$

因此 $\pi\circ\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(f)=\mathrm{Ind}(f)\circ\pi$，即图表（8.1）交换。设 $\vec{\mathcal{H}}$是 $\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(G))$ 的一个子超有向图。那么，它的底层超图 $\mathcal{H}$ 是 $\mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G))$ 的一个子超图。(8.1) 的可交换性蕴含 (8.2) 的可交换性。反过来显然成立，因为 (8.2) 蕴含 f 是 k-正则的。

($\Longleftarrow$)：假设存在一个可交换图表（8.1）。那么，单纯映射 $\mathrm{Ind}(f)$ 由映射$f\colon V\longrightarrow S$ 给出。与上述论证类似，f是一个将 G 嵌入 $\mathbb{F}^N$ 的 k-正则嵌入，并且满足 $f(V)\subseteq S$。 □

推论 8.2. 存在一个 G-正则映射 $f\colon\ G\longrightarrow\mathbb{F}^N$，使得 $f(V)\subseteq S$ 当且仅当存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc}\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G) & \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(f)} & \vec{\mathcal{M}}\\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\ \mathrm{Ind}(G) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}(f)} & \mathcal{M}\end{array}\tag{8.3}$$

使得 $\overrightarrow{Ind(f)}$ 是一个有向单纯映射，它将有向单形 $(v_1,\dots,v_l) \in \overrightarrow{Ind(G)}$ 映射为独立序列 $(f(v_1)\dots,f(v_l)) \in \vec{\mathcal{I}}$，并且 $Ind(f)$ 是一个单纯映射，它将单形 $\{v_1,\dots,v_l\} \in Ind(G)$ 映射为独立集 $\{f(v_1)\dots,f(v_l)\} \in \mathcal{I}$，对任意 $l \geq 1$ 均成立。因此，存在一个 G-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$，使得 $f(V) \subseteq S$ 当且仅当存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{H}} & \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(f)|_{\vec{\mathcal{H}}}} & \vec{\mathcal{M}} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\mathrm{Ind}(f)|_{\mathcal{H}}} & \mathcal{M} \end{array} \tag{8.4}$$

对于任意具有底层超图 $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G))$ 的超有向图 $\vec{\mathcal{H}} \subseteq \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$。

证明。对于任意 $k \geq 1$，映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 是 G-正则的，当且仅当 f 是 k-正则的。另一方面，对于任意 $k \geq 1$，存在交换图（8.1）当且仅当存在交换图（8.3）；并且对于任意超有向图 $\vec{\mathcal{H}} \subseteq \mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G))$ 和任意 $k \geq 1$，存在交换图（8.2）当且仅当存在交换图（8.4），其中超有向图为 $\vec{\mathcal{H}} \subseteq \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$。因此，结论由命题 8.1 得证。

□

定理 8.3。如果存在一个 k-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$，使得 $f(V) \subseteq S$，那么我们有一个同调群的交换图

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)); R) & \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(f)_*} & H_\bullet(\vec{\mathcal{M}}; R) \\ {\scriptstyle\pi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_*} \\ H_\bullet(\mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G)); R) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}(f)_*} & H_\bullet(\mathcal{M}; R) \end{array} \tag{8.5}$$

因此得到一个同调群的交换图

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(\vec{\mathcal{H}}; R) & \xrightarrow{(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(f)|_{\vec{\mathcal{H}}})_*} & H_\bullet(\vec{\mathcal{M}}; R) \\ {\scriptstyle\pi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_*} \\ H_\bullet(\mathcal{H}; R) & \xrightarrow{(\mathrm{Ind}(f)|_{\mathcal{H}})_*} & H_\bullet(\mathcal{M}; R) \end{array} \tag{8.6}$$

对于任意超有向图 $\vec{\mathcal{H}} \subseteq \mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G))$。此外，图表（*8.5*）和（*8.6*）关于有向独立复形之间的有向单纯映射，以及这些映射在底层独立复形上诱导的单纯映射，均具有函子性；这两类映射都由 G 的顶点滤过诱导。

证明。对图表（8.1）应用同调函子，并对图表（8.2）应用嵌入同调函子。借助同调群同态（4.6）和（7.7），我们得到交换图（8.5）。借助同调群同态（5.12）和（7.7），我们得到交换图（8.6）。此外，图表（8.5）的函子性由定理 6.2 中（4.6）的函子性和定理 7.4 中（7.7）的函子性推出；图表（8.2）的函子性则由定理 6.3 中（5.12）的函子性和（7.7）的函子性推出。

□

推论 8.4。如果存在一个 G-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$，使得 $f(V) \subseteq S$，那么我们有一个同调群的交换图

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G); R) & \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(f)_*} & H_\bullet(\vec{\mathcal{M}}; R) \\ {\scriptstyle\pi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_*} \\ H_\bullet(\mathrm{Ind}(G); R) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}(f)_*} & H_\bullet(\mathcal{M}; R) \end{array} \tag{8.7}$$

因此也有一个同调群的交换图

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(\vec{\mathcal{H}};R) & \xrightarrow{(\overrightarrow{\mathrm{Ind}(f)|_{\vec{\mathcal{H}}}})_*} & H_\bullet(\vec{\mathcal{M}};R) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ H_\bullet(\mathcal{H};R) & \xrightarrow{(\mathrm{Ind}(f)|_{\mathcal{H}})_*} & H_\bullet(\mathcal{M};R) \end{array} \tag{8.8}$$

对于任意超有向图 $\vec{\mathcal{H}} \subseteq \overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)$。此外，图示 *(8.7)* 关于有向独立复形之间的有向单纯映射，以及它们所诱导的底层独立复形之间的单纯映射，具有函子性；这两类映射均由 G 的顶点滤过所诱导。

证明。 令 k 遍历所有正整数，即可由定理 8.3 得出证明。 □

令 $V_k(\mathbb{F}^N)$ 表示斯蒂费尔流形，它由 $\mathbb{F}^N$ 中所有 k-标架组成（ k-标架是一个有序的 k 元组，即由 k 个线性无关向量构成的序列）。令 $Gr_k(\mathbb{F}^N)$ 表示格拉斯曼流形，它由 $\mathbb{F}^N$ 中所有 k 维子空间组成。我们有一个典范投影

$$p_{k,N} : V_k(\mathbb{F}^N) \longrightarrow V_k(\mathbb{F}^N)/\Sigma_k \longrightarrow Gr_k(\mathbb{F}^N)$$

它将 $\mathbb{F}^N$ 中的一个 k-标架映射到 $\mathbb{F}^N$ 中由该 k-标架张成的 k 维子空间。令 $V_k(\mathbb{F}^\infty)$ 表示 $V_k(\mathbb{F}^N)$ 的余极限，并令 $Gr_k(\mathbb{F}^\infty)$ 表示当 N 趋于无穷时 $Gr_k(\mathbb{F}^N)$ 的余极限，其中对于每个 $k \geq N+1$， $\mathbb{F}^N$ 均视为 $\mathbb{F}^\infty$ 中第 k 个坐标为零的子空间。我们有一个典范投影

$$p_{k,\infty} : V_k(\mathbb{F}^\infty) \longrightarrow V_k(\mathbb{F}^\infty)/\Sigma_k \longrightarrow Gr_k(\mathbb{F}^\infty).$$

由 (7.3) 和 (7.4)，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \vec{\mathcal{M}}_k & \longrightarrow & V_k(\mathbb{F}^N) & \longrightarrow & V_k(\mathbb{F}^\infty) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_k & \longrightarrow & V_k(\mathbb{F}^N)/\Sigma_k & \longrightarrow & V_k(\mathbb{F}^\infty)/\Sigma_k \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Gr_k(\mathbb{F}^N) & \longrightarrow & Gr_k(\mathbb{F}^\infty) \end{array} \tag{8.9}$$

其中所有水平映射都是典范包含，所有垂直映射都是典范投影。下一个推论是 [20, 命题 2.1], [6, 引理 2.10], [7, 引理 5.7]和 [34,命题 4.1]的离散类比。

推论 8.5. 如果存在一个 k-正则映射 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$，使得 $f(V) \subseteq S$，那么我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Conf}_k(G) & \xrightarrow{\mathrm{Conf}(f)} & \vec{\mathcal{M}}_k \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{Conf}_k(G)/\Sigma_k & \xrightarrow{\mathrm{Conf}(f)/\Sigma_k} & \mathcal{M}_k \end{array} \tag{8.10}$$

因此得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{H}}_k & \xrightarrow{\mathrm{Conf}(f)|_{\vec{\mathcal{H}}_k}} & \vec{\mathcal{M}}_k \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{H}_k & \xrightarrow{(\mathrm{Conf}(f)/\Sigma_k)|_{\mathcal{H}_k}} & \mathcal{M}_k \end{array} \tag{8.11}$$

对于任意 k-一致超有向图 $\vec{\mathcal{H}}_k \subseteq \mathrm{Conf}_k(G)$。

证明。 取 $\overrightarrow{\text{Ind}}(G)$ 中有向 $(k-1)$-单形的集合，以及 $\text{Ind}(G)$ 中 $(k-1)$-单形的集合，由交换图 (8.3) 得到交换图 (8.10)。取 $\text{Conf}_k(G)$ 的一个 k-一致子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}_k$，其底层 k-一致超图为 $\mathcal{H}_k$，由交换图 (8.10) 得到交换图 (8.11)。

□

推论 8.6. 若 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，则 *(8.9)* 和 *(8.10)* 给出了覆盖映射 *(6.1)* 的伴随（实或复）向量丛的分类映射，其形式为以下复合映射

$$\text{Conf}_k(G)/\Sigma_k \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow V_k(\mathbb{F}^N)/\Sigma_k \longrightarrow Gr_k(\mathbb{F}^N) \longrightarrow Gr_k(\mathbb{F}^\infty); \tag{8.12}$$

而 *(8.9)* 和 *(8.11)* 给出了覆盖映射 *(3.2)* 的伴随（实或复）向量丛的分类映射，其形式为以下复合映射

$$\mathcal{H}_k \longrightarrow \text{Conf}_k(G)/\Sigma_k \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow V_k(\mathbb{F}^N)/\Sigma_k \longrightarrow Gr_k(\mathbb{F}^N) \longrightarrow Gr_k(\mathbb{F}^\infty). \tag{8.13}$$

证明. 设 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。注意，(8.9)、(8.10) 和 (8.11) 中的每个方块都是一个拉回。因此，(8.12) 是伴随向量丛的分类映射

$$\mathbb{F}^k \longrightarrow \text{Conf}_k(G) \times_{\Sigma_k} \mathbb{F}^k \longrightarrow \text{Conf}_k(G)/\Sigma_k$$

对应于覆盖映射 (6.1)；而 (8.13) 是伴随向量丛的分类映射

$$\mathbb{F}^k \longrightarrow \vec{\mathcal{H}}_k \times_{\Sigma_k} \mathbb{F}^k \longrightarrow \mathcal{H}_k$$

对应于覆盖映射 (3.2)。 □

注记 1： 几何实现 $|\text{Conf}_k(G)/\Sigma_k|$ 和 $|\mathcal{H}_k|$ 都是几何单纯复形 $|\text{Ind}(G)|$ 的开子集。因此，推论 8.6 中的向量丛是良定义的。

8.1 正则映射与 Mayer-Vietoris 序列

设 $f'\colon G'\longrightarrow \mathbb{F}^N$, $f''\colon G''\longrightarrow \mathbb{F}^N$ 和 $f'''\colon G'''\longrightarrow \mathbb{F}^N$ 分别是图 G', G'' 和 G''' 上的 k-正则映射，且

$$f'(V'), f''(V''), f'''(V''') \subseteq S, \tag{8.14}$$

其中 V', V'' 和 V''' 分别是 G', G'' 和 G''' 的顶点集，且两两不相交。令 G 为由 (6.8) 给出的 G', G'' 和 G''' 的约化连接。则可诱导出一个 k-正则映射

$$f'\tilde{*}f''\tilde{*}f''' : G \longrightarrow \mathbb{F}^N.$$

G 的顶点集是 $V'\sqcup V''\sqcup V'''$，满足

$$(f'\tilde{*}f''\tilde{*}f''')(V'\sqcup V''\sqcup V''') = f'(V')\cup f''(V'')\cup f'''(V''') \subseteq S.$$

另一方面，令 $\vec{\mathcal{M}}'$ 为由 $f'(V')\cup f'''(V''')$ 中向量的所有独立序列构成的有向拟阵，并令 $\vec{\mathcal{M}}''$ 为由 $f'(V'')\cup f'''(V''')$ 中向量的所有独立序列构成的有向拟阵。令 $\mathcal{M}'$ 和 $\mathcal{M}''$ 分别为 $\vec{\mathcal{M}}'$ 和 $\vec{\mathcal{M}}''$ 的底层拟阵。

定理 8.7. 对于任意满足（*8.14*）的 k-正则映射 $f'\colon G'\longrightarrow\mathbb{F}^N$、$f''\colon G''\longrightarrow\mathbb{F}^N$ 和 $f'''\colon G'''\longrightarrow\mathbb{F}^N$，我们有一个由长正合序列构成的交换图（*1.4*），其中水平映射由 f'、f''、f''' 诱导。此外，所有这些同调群同态都具有定理 *8.3* 所述的函子性。

证明. 由推论 6.6、定理 7.6 和定理 8.3，（8.5）中的同调群同态诱导出（1.4）中同调群长正合序列的同态。图（8.5）的交换性和函子性分别蕴含图（1.4）的交换性和函子性。

□

定理 8.8。 设 $f'\colon G'\longrightarrow\mathbb{F}^N$, $f''\colon G''\longrightarrow\mathbb{F}^N$和 $f'''\colon G'''\longrightarrow\mathbb{F}^N$是满足 *(8.14)* 的 k-正则映射。则对于 $\text{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\text{Ind}}(G'\tilde{*}G'''))$的任意子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}'$，以及 $\text{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\text{Ind}}(G''\tilde{*}G'''))$的任意子超有向图 $\vec{\mathcal{H}}''$，若它们的底层超图分别为 $\mathcal{H}'$ 和 $\mathcal{H}''$，且有向图对 $(\vec{\mathcal{H}}', \vec{\mathcal{H}}'')$ 以及超图对 $(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$均满足 *(I)* 和 *(II)*，则存在由 f'、f''、f''' 诱导水平映射的长正合序列交换图 *(1.3)*。

证明。 根据定理 5.2、定理 8.3 和定理 8.7，我们有交换图 (1.3)。 □

8.2 正则映射与 Künneth 型公式

设 V 和 V' 是不相交的顶点集。设 G 是定义在 V 上的图， G' 是定义在 V' 上的图。作为 [34, 定义 1.6], 的离散类比，我们称映射 $g\colon G \sqcup G' \longrightarrow \mathbb{F}^M$ 是 $(G,\ k; G',\ k')$-正则的，如果对于 G 中任意互异的、彼此不相邻的 k-顶点 v_1、……、 $v_k \in V$，以及 G' 中任意互异的、彼此不相邻的 k'-顶点 v'_1、……、 $v'_{k'} \in V'$，它们的像 $g(v_1)$、……、 $g(v_k)$、 $g(v'_1)$、……、 $g(v'_{k'})$ 在 $\mathbb{F}^M$ 中线性无关。

引理 8.9。 存在一个$(G, k; G', k')$-正则映射 $g\colon G \sqcup G' \longrightarrow \mathbb{F}^M$，使得 $g(V \sqcup V') \subseteq S$ 当且仅当存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)) * \mathrm{sk}^{k'-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G')) & \xrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(g)} & \vec{\mathcal{M}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G)) * \mathrm{sk}^{k'-1}(\mathrm{Ind}(G')) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}(g)} & \mathcal{M} \end{array} \tag{8.15}$$

使得 $\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(g)$是一个有向单纯映射，将一个有向单形映至

$$(v_1, \ldots, v_l, v'_1, \ldots, v'_{l'}) \in \mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G)) * \mathrm{sk}^{k'-1}(\overrightarrow{\mathrm{Ind}}(G')),$$

其中 $l \leq k$和 $l' \leq k'$映至一个独立序列 $(g(v_1) \ldots, g(v_l)\ g(v'_1) \ldots, '(v'_{l'})) \in \vec{\mathcal{I}} * \vec{\mathcal{I}}'$，且 $\mathrm{Ind}(g)$ 是一个单纯映射，将一个单形映至

$$\{v_1, \ldots, v_l, v'_1, \ldots, v'_{l'}\} \in \mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G)) * \mathrm{sk}^{k'-1}(\mathrm{Ind}(G'))$$

一个独立集 $\{g(v_1) \ldots, g(v_l)\ g(v'_1) \ldots, '(v'_{l'})\} \in \mathcal{I} * \mathcal{I}'$。

证明。证明与命题 8.1 类似。对于任意 k个互异顶点 v_1、…、 $v_k \in V$，以及任意 k'个互异顶点 v'_1、…、 $v'_{k'} \in V'$， v_1、…、 v_k在 G中不相邻，当且仅当 $(v_1$、…、 $v_k) \in \mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(G))$，当且仅当 $\{v_1, \ldots, v_k\} \in \mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G))$；并且， v'_1、…、 $v'_{k'}$在 G'中不相邻，当且仅当 $(v'_1$、…、 $v'_{k'}) \in \mathrm{sk}^{k'-1}(\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(G'))$，当且仅当 $\{v'_1, \ldots, v'_{k'}\} \in \mathrm{sk}^{k'-1}(\mathrm{Ind}(G'))$。因此， v_1、…、 v_k在 G中不相邻且 v'_1、…、 $v'_{k'}$在 G'中不相邻，当且仅当 $(v_1$、…、 v_k、 v'_1、…、 $v'_{k'}) \in \mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(G)) * \mathrm{sk}^{k'-1}(\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(G'))$，当且仅当 $\{v_1, \ldots, v_k, v'_1, \ldots, v'_{k'}\} \in \mathrm{sk}^{k-1}(\mathrm{Ind}(G)) * \mathrm{sk}^{k'-1}(\mathrm{Ind}(G'))$。因此，存在 $(G, k; G', k')$-正则映射 g，等价于存在 (8.15) 中的有向单纯嵌入 $\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(g)$，或存在单纯嵌入 $\mathrm{Ind}(g)$。 □

设 $f\colon G \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 是一个 k-正则映射。设 $f'\colon G' \longrightarrow \mathbb{F}^{N'}$ 是一个 k'-正则映射。则可得到一个诱导的 $(G,\ k;\ G',\ k')$-正则映射

$$(f, f') : G \sqcup G' \longrightarrow \mathbb{F}^{N+N'}$$

将任意 $v \in V$ 映射到 $(f(v),\ 0) \in \mathbb{F}^N \times \mathbb{F}^{N'}$，并将任意 $v' \in V'$ 映射到 $(0,\ f'(v')) \in \mathbb{F}^N \times \mathbb{F}^{N'}$。此外，若 S 是 $\mathbb{F}^N$ 的有限子集，且 S' 是 $\mathbb{F}^{N'}$ 的有限子集，使得 $f(V) \subseteq S$ 且 $f'(V') \subseteq S'$，则 $(f,\ f')(V \sqcup V') \subseteq (S,\ 0) \sqcup (0,\ S')$。

定理 8.10。 对于任意 k-正则映射 $f\colon\ G \longrightarrow \mathbb{F}^N$ 以及任意 k'-正则映射 $f'\colon\ G' \longrightarrow \mathbb{F}^{N'}$，若满足$f(V) \subseteq S$ 且 $f'(V') \subseteq S'$，则存在短正合列的交换图 *(1.6)*，其中水平映射由 f、 f' 和 $(f$、 $f')$ 诱导。此外，所有这些同调群同态都具有函子性，其意义如定理 *8.3* 所述。

证明。 由推论 6.9、定理 7.9 和定理 8.3，(8.5) 中的同调群同态诱导出 (1.6) 中短正合列的同调群同态。图 (8.5) 的交换性和函子性分别蕴含图 (1.6) 的交换性和函子性。

□

定理 **8.11** f $G \longrightarrow \mathbb{F}^N$ k f' $G' \underset{k-1}{\longrightarrow} \mathbb{F}^{N'}$ k' f V $\subseteq$ S f' V' $\subseteq$ S' $\vec{\mathcal{H}}$ G $\vec{\mathcal{H}}'$ 设 : 是 - 正则的，且 : 是 - 正则的，并满足 () 和 ()。那么，对于 $\mathrm{sk}(\mathrm{Ind}())$ 的任意子超有向图，以及 $\mathrm{sk}^{k-1}(\overrightarrow{\ }\mathrm{Ind}(G'))$ 的任意子超有向图，若它们的底层超图分别为 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$，则存在由短正合列构成的交换图 *(1.5)*，其中水平映射由 f、f' 和 (f, f')诱导。此外，所有这些同调群同态都具有定理 *8.3* 所述的函子性。

证明。 由定理 5.3、定理 8.3 和定理 8.10 可得证明。 □

参考文献

[1] M.Adamaszek，独立复形的分解与圈的幂。《J.Comb.Theory, Ser. A》**119(5)**（2012），1031-1047。[2] H. Alpert 和 Fedor Manin，条带中圆盘的构形空间、扭代数、持久性，*an* d 其他故事。《几何与拓扑》**28**（2024），641-699。[3] Y. Baryshnikov、P. Bubenik 和 M. Kahle，用于 *har* 构形空间的最小型莫尔斯理论 d 球面。《国际数学研究通知》**9** （2014），2577-2592。[4] C. Berge，图与超图。北荷兰数学丛书，阿姆斯特丹，1973年。[5] A.J. Berrick、F.R. Cohen、Y.L. Wong 和 J.Wu，构形、辫群与同伦群。《美国数学会杂志》**19(2)**（2006年），265-326。[6] P. Blagojevi˘c、W. Lück 和 G. Ziegler，关于高度正则嵌入。《美国数学会汇刊》**368(4)**（2016），2891-2912。[7] P. Blagojevi˘c、F. Cohen、W. Lück 和 G. Ziegler，关于复高度正则嵌入及扩展的 d *Vassiliev* 猜想。《国际数学研究通知》**2016**(20) (2016), 6151-6199.[8] C.-F. Bödigheimer、F. Cohen 和 L. Taylor，关于构形空间的同调。Topology **28**(1) (1989), 111-123.[9] C.-F. Bödigheimer 和 F.R. Cohen，曲面构形空间的有理上同调。代数拓扑与变换群，会议论文集，哥廷根/联邦德国，1987，《数学讲义》**1361** (1988)，7-13.[10] C.-F. Bödigheimer、F. Cohen 和 L. Taylor，构形空间的同调。《哥廷根数学》，几何与分析特别研究领域丛书**24** (1987)，19页。[11] K. Borsuk，关于欧几里得空间和希尔伯特空间中 k-无关子集。《波兰科学院通报》III类，**5** (1957)，351-356。[12] S. Bressan、J. Li、S. Ren 和 J. Wu，超图的嵌入同调及其应用。《亚洲数学杂志》**23**(3) (2019), 479-500.[13] J. Buczyński、T. Januszkiewicz、J. Jelisiejew 和 M. Michalek，利用有限局部概形构造 *k*-正则映射。《欧洲数学会杂志》**21**(6)，(2019)，1775-1808。[14] G. Carlsson、J. Gorham、M. Kahle 和 J. Mason，硬圆盘构形空间的计算拓扑。《物理评论E》**85** (2012)，011303。[15] D. Chen、J. Liu、J. Wu 和 G.-W. Wei，持久超有向图同调与持久超有向图 h 拉普拉斯算子。《Foundations of Data Science》**5** (2023), 558-588.[16] M. E. Chisholm，k-正则映射到 2^n维欧几里得空间。Proc. Amer. Math. Soc.**74**(1) (1979), 187-190.[17] F. R. K. Chung和R. L. Graham，超图的上同调方面。《美国数学会汇刊》**334**(1992), 365-388。

[18] *T. Church*，流形构形空间的同调稳定性。*Invent. Math. 188(2) (2012), 465-504.*[19] *T. Church*、*J. S. Ellenberg*和*B. Farb*，*FI*-模与对称群表示的稳定性。*Duke Math. J. 164(9) (2015), 1833-1910.*[20] *F. Cohen*和*D. Handel*，平面的 k-正则嵌入。*Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 201-204.*[21] *D. Handel*，关于 k-正则映射的存在与不存在的一些定理。*Fund. Math. 109 (1980), 229-233.*[22] *A. Haar*，《闵可夫斯基几何与连续函数的逼近》。*Math. Ann. 78(1) (1917), 294-311.*[23] *A. Hatcher*，《代数拓扑》。剑桥大学出版社，英国，*2001*,[24] *N. Idrissi*，构形空间的*Lambrechts-Stanley* 模型。*Invent. Math. 216(1) (2019), 1-68.*[25] *J. Jelisiejew*和*H. Keneshlou*，利用底维数为二的代数构造到格拉斯曼流形的*k*-正则映射。*Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5) 25(3) (2024), 1763-1798.*[26] *A. Kolmogorov*，关于偏离零最小的*P. L. Chebyshev* 多项式的一点注记。*Uspekhi Mat. Nauk 3(1) (1948), 216-221.*[27] *D. N. Kozlov*，有向树复形。*J. Comb. Theory, Ser. A 88(1) (1999), 112-122.*[28] *P. Lambrechts*和*D. Stanley*，庞加莱对偶与交换微分分次代数。*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 41(4) (2008), 497-511.*[29] *P. Lambrechts*和*D. Stanley*，构形空间的一个卓越的*DG*-模模型。*Algebr. Geom. Topol. 8(2) (2008), 1191-1222.*[30] *R. Longoni*和*P. Salvatore*，构形空间不是同伦不变的。*Topology 44(2) (2005), 375-380.*[31] *J.H. Mason*，将拟阵视为对几何构形的研究。*Higher Comb. Proc. NATO Adv. Study Inst.* 西柏林 *1976 (1977), 133-176.*[32] *M. Michalek*和*C. Miller*，*k*-正则映射与插值空间的例子。*Linear Algebra Appl. 530 (2017), 94-108.*[33] *A. D. Parks*和*S. L. Lipscomb*，同调与超图无环性：超图的一个组合不变 量。海军水面作战中心，*1991.*[34] *S. Ren*，流形笛卡尔积与不交并上的正则映射。*Topology Appl. 234 (2018), 46-68.*[35]*S. Ren*，自由代数的微分演算与受约束同调。*Comm. Alg. (2025), https://doi.org/10.1080/00927872.2025.2563059.*[36] *S. Ren*，流形上构形空间与超图的双复形。*J. Geom. Phys. 213 (2025), Article ID 105486.*[37] *S. Ren*，构形空间上的持久丛与正则嵌入的障碍。*arXiv: 2502.07476 (2025).*[38] *S. Ren*、*C. Wu*和*J. Wu*，随机超图与随机单纯复形上的映射。*J. Knot Theory Ramif. 31 (2022), 2250015.*[39] *S. Ren*、*C. Wu*和*J. Wu*，随机超图、随机单纯复形及其 *Künneth* 型公式。*J. Knot Theory Ramif. 32 (2023), 2350075*。

[40] S. Ren 和 J. Wu，《超图持久同调的稳定性》。arXiv 2002.02237 v4，（2023）。[41] S. Ren、J. Wu 和 M. Zhang，《超图对的嵌入同调》。*J. Knot Theory Ramif.***31(14)**，2250103，2022。[42] C. Wang、S. Ren 和 J. Liu，《有限集的 Künneth公式》。《中国数学年刊》，B 辑 **42(6)**（2021），801-812。[43] D.J.A. Welsh，《拟阵理论》。伦敦数学会专著。纽约：学术出版社，（1976）。[44] H. Whitney，《关于线性相关的抽象性质》。《美国数学杂志》**57** (1935年)，509-533。[45] W. Zhang 和 H. Wu，《三元图独立复形的总贝蒂数》。《欧洲数学会杂志》**27(1)**（2025），269-278。

Shiquan Ren 地址：数学与统计学院，河南大学，中国开封 475004。电子邮件：renshiquan@henu.edu.cn