arXiv:2601.05515v1 [math-ph] 9 Jan 2026

量子自旋系统中任意子与缺陷的算子代数框架

Siddharth Vadnerkar

学位论文

部分满足加利福尼亚大学戴维斯分校研究生院物理学哲学博士学位要求而提交

2025年12月10日 加州大学戴维斯分校

摘要

在本学位论文中，我们详细介绍一种算子代数方法，用于研究无限体积情形下的拓扑序。我们全面且自成一体地回顾了量子自旋系统上的 DHR 风格方法；该方法从微观晶格自旋系统出发，构造任意子扇区范畴 **DHR** 。一般而言，该范畴具有编织 C*-张量范畴的结构。我们将详尽验证，在 Kitaev 的 Quantum 双模型中，**DHR** 正是预期的范畴。该模型是研究晶格上拓扑序的典范模型。随后，我们将把 DHR 风格分析推广到存在全局位点对称性的系统，并引入对称性缺陷范畴 GSec，证明其具有 G-交叉编织 C*-张量范畴的结构。

资助

作者在攻读博士学位和撰写本学位论文期间，获得了美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2510824、DMS-2108390 和 DMS–1813149。第 5、6、7 章另有单独的资助致谢。

致谢

要把在我攻读博士学位的旅程中给予我帮助的无数人的名字一一写下来，实在是不可能的事。尽管如此，我仍想试一试，因为我深知，任何致谢都无法充分表达我内心深处的感激之情。

我想感谢我的父母 Arvind 和 Shalini，是他们培养了我对好奇心与创造力的珍视。若没有他们始终如一的爱与支撑，以及无论我选择怎样的人生道路，他们都会给我一个家的承诺，我就不会拥有如今这份难得的机会。我清楚地记得，他们曾奋力保护我免受社会压力的束缚，让我走自己的路，无论这条路多么艰险。谢谢你，外婆，包容我那些层出不穷的恶作剧。很抱歉，在你离世前，我没能再去看你最后一面。虽然我离开印度，去寻找实现研究人员目标的最佳路径，但我的心常常渴望能陪伴家人，亲近自己的根。

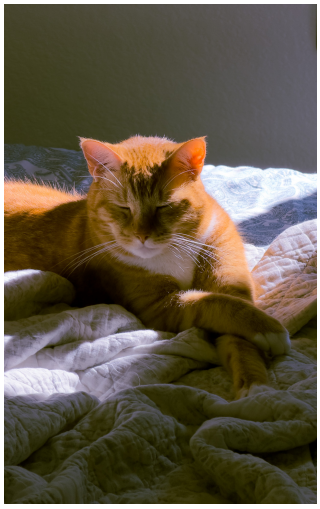
我想感谢我亲爱的妻子 Tamar。她听了我各种模拟演讲，尽管有一半的词都听不懂，仍给了我极好的学术建议。她是我的使者、啦啦队长、批评者、公关团队和知己。感谢她让我在研究之外也有许多值得期待的事情，也感谢她一路与我同行。她真该获得荣誉博士学位，因为她承担了艰巨的任务，弥补我（许多）粗糙的边角。她始终如一的慈悲与关怀激励着我每天成为更好的人。

在攻读博士学位的道路上，我不曾奢望能有比这更出色、学识更渊博的导师来引领我。我想感谢我的导师 Bruno，他亲眼见证了我作为研究人员和数学家的成长。感谢他耐心包容我起初拒绝学习那些支配我研究的优美数学结构。倘若我当初听从他有理有据的建议，许多研究中的烦恼本可以避免。他确实给了我许多建议，这些话语会在我博士学位完成后依然伴随我。

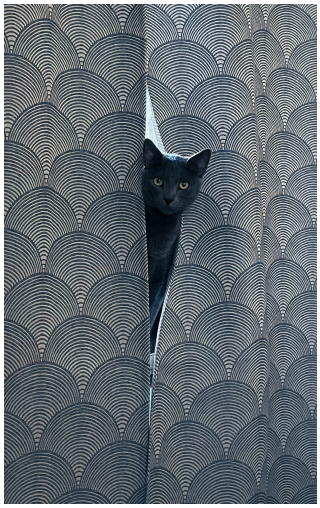
科学并非关乎个人才华横溢，而是依靠协作共同努力，推动知识的集体边界不断向前。感谢 Alex 以身作则，让我看到作为一名研究人员要取得成功所需付出的努力。感谢 Daniel (Wallick)、Daniel (Spiegel) 和 Michael，教会我如何驾驭数学结构的复杂性。感谢 Dominic 和 Kyle，用无数实例增强了我的物理直觉。感谢 Sven、Mukund、Martin 和 Dominic，感谢你们与我进行的诸多研究讨论，并在我的整个旅程中给予指导。

我的朋友们在这段旅程中发挥了重要作用。感谢 Francisco 成为我最亲密的朋友之一，给我不偏不倚的建议，陪我深夜玩游戏，也和我聊些无关紧要的话题。感谢 Patty 成为我的挚友，并鼓励我多去户外享受美好时光。我会非常想念你。感谢 Karthik，音乐让我们结下了深厚的情谊。感谢 Yash、Michael、Tyler、Jake、Pratik、Patrick 和 Julie 成为我的同届同学，让我在戴维斯感受到归属感。感谢我那些“来自 Discord”的朋友 Akshay、Shreyas、Haroun 和 Bhattu，在新冠疫情期间的隔离生活中陪伴着我。感谢我在萨特普拉最亲密的朋友 Utkarsh 和 Naveen，即使相隔重洋，也从未让距离阻碍我们组织一年一度的旅行。

最后，我要感谢我的毛孩子 Charlie 和 Sir Gregory，它们给了我无穷无尽的拥抱，也让我拍下了许多可爱的照片。



Charlie



Sir Gregory

前言

我最初是一名对拓扑相感兴趣的凝聚态物理学家，因此几乎没有数学背景。正如你所想，算子代数是一门难以深入理解的领域，拥有悠久的历史和众多发展成果；在将其用于研究拓扑相分类等物理问题之前，必须先理解这些内容。研究量子自旋系统时所用的许多关键结果已有数十年历史，而且常常隐含在某些过时的语言或观点之中。就侧重于量子自旋系统应用、现代且易于理解的算子代数入门读物而言，Pieter Naaijkens 的著作或许最为贴近这一需求。不过，自那以后，这个子领域已经有了多项进展，因此有必要提供另一种视角。

相比之下，拓扑相如今是一个非常热门的领域，近年来也取得了许多进展；目前已有多部著作出色地为读者提供了现代且易于理解的入门介绍。Kitaev 量子双模型也是如此，本书专门用整整两章来介绍它。

因此，本学位论文旨在提供一份聚焦于算子代数的导论，唯一目标是探讨拓扑相。它回答并澄清了我刚开始研究时遇到的诸多问题。我希望其他人也能利用这份资料，更有效地开始借助算子代数研究拓扑序。

值得注意的是，本文没有深入讨论拓扑相的物理学、拓扑相的范畴论视角，也没有介绍 Kitaev 量子双模型。我认为已有足够多的资料对这些主题作了很好的入门介绍，而我所能作出的贡献充其量只是锦上添花。

章节1全面介绍了拓扑序领域的诸多历史发展，以及其中的算子代数研究工作。

章节 2 帮助读者建立对任意子的直观认识，并了解其应具备的性质。文中还以启发式方式探讨了迈向无限体积极限时面临的一些挑战。

章节3 简要介绍张量范畴，并最终引出编织 C*-张量范畴和酉模张量范畴的概念。

章节4是导论各章节的核心内容。首先介绍量子自旋系统中出现的各种 C*-代数，例如准局域代数、锥 von Neumann 代数和辅助代数。接着讨论任意子选择准则以及一项基石性结果：任何任意子扇区都可以等价地视为辅助代数的局域可传输端同态。最后构造任意子范畴，并证明它具有编织 C*-张量范畴的结构。

章节 5、6 随后转而聚焦于从 Kitaev量子双模型的任意子扇区构造一个酉模张量范畴。前者首先对该模型中的不可约任意子扇区进行分类，后者则确立其范畴结构。

章节7 回到拓扑序的一般理论，并定义缺陷扇区的概念。粗略地说，缺陷扇区是点状对称性缺陷的全局形式，可在具有格点对称性的系统中，通过 Else-Nayak 构造对该对称性进行两次截断而获得。随后确立了缺陷扇区具有G-交叉编织 C*-张量范畴的结构，并讨论了一些说明性实例。

目录

1 拓扑相的历史 **1**

1.1 发现与早期理解.11.2 编织张量范畴与拓扑量子场论 .31.3 拓扑序的晶格实现 .41.4 算子代数与拓扑相 .51.5 未来 .8参考文献 .8

2 物理学 任意子 **12**

2.1 量子晶格系统 .122.2 任意子.142.3 弦与远程可探测性 .142.4 融合 .152.5 编织 .16

2.6 严谨地定义任意子.182.7 对称性丰富拓扑相（SET相）.20

3 编织张量范畴 **22**

3.1 范畴论基础.233.2 张量范畴.273.3 Drinfel'd 中心.333.4 G-交叉辫状 C*-张量范畴.353.5 Rep$D(G)$ 与 $\mathcal{Z}(\mathrm{Vec}(G))$ 的关系.37参考文献.42

4 算子代数与任意子 **44**

4.1 C*-代数 .464.2 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的拓扑 .524.3 冯·诺伊曼代数 .564.4 C*-晶格上的代数 .584.5 任意子选择准则 .634.6 局域可传输端同态 .654.7 任意子范畴 .69参考文献 .82

5 任意子扇区的分类 yKitaev 量子双模型 Q量子双模型 85
5.1 引言.895.2 设置与主要结果 .905.3 任意子态 .945.4 任意子表示的构造.1155.5 完备性 .1245.6 讨论与展望 .1325.A 带状算子、Wigner 投影与放大态射 .1335.B 弦网的性质 .144参考文献 .156

6 非阿贝尔量子双模型的任意子扇区范畴
型 159 6.1 引言.161 6.2 设置与主要结果.164 6.3 Amp 和 DHR 的编织 C*-张量结构.168 6.4 Amp 与 DHR 的等价.172 6.5 由带状算子构造的放大态射.174 6.6 Amp 的简单对象.181 6.7 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$、$\mathrm{Amp}_\rho$ 与 Amp_f 的等价.182 6.8 结论.187 6.A 有限群的量子双及其表示范畴 . . 188 6.B 带状算子.189 6.C 输运子收敛性.192 参考文献.193

7 基于算子代数的方法：对称性缺陷与分数化19
7
7.1 引言.2007.2 设定与主要结果 .2027.3 对称性缺陷.2127.4 一般 SPT.2307.5 $\mathbb{Z}_2$ SPT：平凡 $\mathbb{Z}_2$ 顺磁体.2417.6 $\mathbb{Z}_2$ SPT：Levin-Gu SPT.2437.7 A $\mathbb{Z}_2$-对称性富集环面码.2477.8 讨论.2717.A 算子代数与范畴论简介.2727.B Levin-Gu SPT 的有用结果.2817.C 带辅助顶点自旋的环面码.2847.D 描述 Levin-Gu SPT 缺陷扇区的自同构. . . . . 2877.E 将对称性富集环面码的缺陷扇区与哈密顿量项联系起来 . . . . . 292 参考文献 .294

第1章
拓扑相的历史

数学与物理自诞生之初便始终交织在一起。有时，物理学发现某些系统，促使人们必须研究全新的数学结构；有时，数学则揭示出一种优美的语言，用以描述这些系统的物理特性。纵观历史，这种相互作用的例子不胜枚举：从物理学中对称性的群论结构，到描述相对论现象的微分几何，再到规范理论及其与电动力学的联系。

因此，拓扑相的研究也有着类似的故事，并不令人意外。这个故事的新意，或许在于人们发现了物理系统中的拓扑结构——这是两个截然不同的世界：一边是杂乱、依赖具体系统的真实物理世界，另一边是经过理想化处理的拓扑世界，在那里，结构可以连续变形而不产生影响。这两个世界的碰撞，正是拓扑相的故事。

1.1 发现与早期理解

先从一些理论预言说起。在 3+1维空间中，可能存在的只有玻色子和费米子。玻色子彼此交换不会产生任何影响，这种交换是平凡的。费米子交换时则会产生 $\theta = \pi$的相位变化。这源于时空李群及其与 3+1维空间中置换群的联系。1977年，Leinaas 和 Myrheim 研究了 2+1维空间中粒子的交换统计，并指出可能存在分数统计。 2+1维空间 [LM77]。Wu 在 1984 [Wu84]中讨论了分数统计与辫群之间的联系。如今我们知道，这源于时空李群与 2+1维空间中辫群之间的联系。

Tsui、St 1982 [TSG82] ormer 和 Gossard 在 ¨发现分数量子霍尔效应（FQHE），由此开启了物理学中拓扑相的研究。他们绘制了二维电子气在某一朗道能级填充分数下的霍尔电导，观察到它像整数量子霍尔效应一样在平台处量子化，但取值为分数。后续实验证实，该平台极为平坦，且对少量系统掺杂具有很强的鲁棒性，这表明该填充分数下的量子流体态具有不可压缩性。拓扑相的历史始于对这一现象成因的探索；这一现象表明，常见材料中隐藏着全新的物理学。

很快，人们又在其他填充分数处发现了更多平台。次年，罗伯特·劳克林提出了一个试探波函数来解释这一态。该波函数成功解释了此态的不可压缩性：电子之间存在排斥相互作用，并因排斥相互作用而抵抗压缩。然而，这个波函数预言了分数带电准粒子的存在，它们携带的荷为 e/q 该填充分数对应的 $1/q$。这一预言后来在20世纪90年代得到散粒噪声实验的证实；这些实验直接测量了 $e/3$ 在 $\nu = 1/3$ 填充分数 [dPRH+98]处的电荷量子。

1984年，Halperin 认为，交换两个 $1/q$ 粒子会产生一个分数统计相位 $\theta = \pi/q$ [Hal84]。同年，Arovas、Schreiffer 和 Wilczek 计算了绝热编织两个劳克林准空穴时的贝里相位，并指出这会使最终态产生相位 $e^{i\theta}$ [ASW84]。因此，这些粒子的交换相位介于玻色子（$\theta = 0$）和费米子（$\theta = \pi$）的交换相位之间。这些粒子因而可以具有任意有理数相位，Frank Wilczek 将它们命名为任意子 。交换统计也与任意子之间的距离无关，因此是系统的一种长程性质。由此，使用序参量无法探测到它。

许多其他填充分数平台可以用 Haldane 和 Halperin 提出的 FQHE 系统层级构造来解释：将许多不同的分数量子霍尔效应态叠加在一起，形成一个新的分数。Jain 提出了另一种解释这些分数的方法，认为它们源于一种称为复合费米子的准粒子：电子与磁通量子束缚而成。

1984年，Tao 和 Wu 发现，将分数量子霍尔系统置于环面等具有非平凡拓扑的流形上，会产生基态简并（GSD）。这一效应的起源尚不清楚，当时也有人按照传统物理学的思路，提出了涉及对称性破缺机制的错误解释（参见 [Tho85、NTW85、And83]）。Wen 和 Niu 阐明了这种基态简并的起源 [Wen90、WN90] ，指出它对任意弱微扰都具有鲁棒性。因此，这一效应与对称性无关，超越了朗道范式。此外，这种基态简并似乎与系统中任意子的统计性质有着内在联系，因而是一种长程效应。基态简并提供了一种全新的量子不变：霍尔电导相同的两个系统可以通过其基态简并加以区分。

分数量子霍尔态是 Xiao-Gang Wen 所称“拓扑序相”的首个实例 [Wen90]。这类基态具有长程量子纠缠和涌现规范结构，无法用任何局域序参量来刻画。拓扑序的一个定义性特征是存在鲁棒的基态简并，其取决于底层曲面的拓扑，而非其局域几何。

与这些进展并行，量子场论领域也在努力解释分数量子霍尔态的普适性质。1989年，Zhang、Hansson 和 Kivelson 提出， $\nu = 1/3$ 分数量子霍尔态可以用 $U(1)$ 陈-西蒙斯规范理论来描述。该理论通过将磁通与荷绑定的机制，成功再现了霍尔电导和任意子编织统计。这些电荷-磁通准粒子在相互编织时会产生阿哈罗诺夫-玻姆相位$e^{i\theta}$ ，与任意子的交换统计相符。值得注意的是，陈-西蒙斯规范理论是一种拓扑量子场论（TQFT），这意味着其可观测量具有拓扑性质。Wen、Niu [WN90] 证明，分数量子霍尔态的长波长极限确实等价于 $U(1)$ 陈-西蒙斯拓扑量子场论。

这是一个深刻的认识：分数电荷、分数统计和基态简并等宏观现象，都可以理解为源自一种有效的拓扑量子场论。在这种拓扑量子场论中，任意子对应于量子化磁通-电荷管，对它们进行编织则对应于规范理论中的非平凡威尔逊环算符。陈-西蒙斯描述的成功暗示了凝聚态物质中的任意子与抽象拓扑不变量之间存在更深层的联系；后来，研究纽结理论和范畴论的数学家明确揭示了这种联系。

到20世纪80年代末，实验已经揭示了分数化量子数和任意子统计，理论学家也已发现拓扑基态简并，并提出了场论描述。学界开始认识到，这些“分数量子霍尔”态是全新一类相的典范，其特征是具有拓扑序，并支撑任意子激发。

回过头来看，所有这些态都属于一类容纳称为阿贝尔任意子的准粒子的量子态。这些任意子实际上对应于辫群的一维表示。数学基础较好的读者可能会意识到，辫群还具有高维表示。因此，可能存在对应于这些表示的粒子，称为非阿贝尔任意子。下一个重大突破将是非阿贝尔任意子的预测，它们具有更加奇异的统计性质和可能性。

1987年，在 $\nu = 5/2$ 分数量子霍尔态 [WES+87]中观测到一个偶数分母平台。此前讨论过的理论都无法解释这一平台。Moore 和 Read 提出，这一平台可由一种 Pfaffian 波函数解释，该波函数源于准粒子以类似 BCS 的方式配对 [MR91]。至关重要的是，他们指出，准粒子具有非阿贝尔统计。也就是说，多个不同粒子之间的编织操作并不对易，而是取决于编织的顺序。这一性质促成了它与辫群高维表示之间的联系。如今，人们已知 Moore-Read Pfaffian 背后的拓扑量子场论是$SU(2)_2$ 陈-西蒙斯拓扑量子场论，或等价地说，是一种伊辛型拓扑量子场论。人们还提出，其他填充分数（如 $\nu = 12/5$ 态）也具有非阿贝尔任意子。 $\nu = 5/2$分数量子霍尔态仍是最有希望存在非阿贝尔任意子且具有相关实验特征的液体候选者。

1.2 编织张量范畴与拓扑量子场论

随着模型种类不断增多，人们有必要建立一个统一的框架。显然，任意子，尤其是非阿贝尔任意子的编织涉及一个丰富的理论框架。物理学家和数学家逐渐在这一问题上达成共识，并认识到拓扑相由编织张量范畴描述。若干有趣的进展促成了这一认识。

1989年，Moore、Seiberg [MS89] 分析了 1+1D 共形场论（CFT），并推导出这些理论中粒子融合与编织所涉及的一致性条件。这些一致性条件现称为五边形方程和六边形方程，可确保共形场论中的交叉对称性表现良好且单值，并编码了与任意子融合及编织规则相同的信息。大约在同一时期，Witten 的研究

揭示了拓扑量子场论与拓扑结不变量之间的深刻联系 [Wit89], ，阐明结不变量可以理解为 2+1D 拓扑量子场论中荷的编织，从而明确了拓扑与任意子之间的联系。

当存在多个非阿贝尔任意子时，由于编织顺序至关重要，它们不能任意编织和融合。无论任意子的数量是多少，系统也都应保持一致。因此，辫群表示不能独立选取，而必须依赖于会改变系统中任意子数量的融合与分裂规则。对这些条件的数学求解最终产生了编织张量范畴（BTC）的概念。它是一种代数结构，其中对象代表任意子，并包含融合规则、编织规则以及一致性条件，由此导出 F， R 符号，以确保这些操作的顺序保持一致。

具有量子计算背景的 Kitaev 和 Freedman 等研究人员，明确地以范畴论术语构建了任意子理论。Freedman、Kitaev、Larsen 和 Wang [FKLW02] 的论文确立了任意子与量子计算之间的联系，并确立了 拓扑量子计算 （TQC）的术语。该论文将 Witten 的研究与任意子理论联系起来，并明确确立了任意子系统中存在的 BTC 结构。物理学界在20世纪90年代和21世纪初逐渐转向这一观点，尤其是随着人们对 TQC 兴趣的增长。到了21世纪初，描述任意子的数学结构是 BTC 已成为一种公认的常识。

1.3 拓扑序的晶格实现

分数量子霍尔态是连续态，因此自然可以预期，其行为可由拓扑量子场论等连续理论来刻画。1989年，Wen提出了手性自旋液体理论 [Wen89] ，这类自旋系统中的自旋形成共振价键（RVB）液体，并有可能承载 $\mathbb{Z}_2$ 具有分数量子化激发的规范理论。

甚至在拓扑序被明确定义之前，Kogut和Wegner就已经指出了自旋系统与规范理论之间的相似之处。Wegner于1971年提出的晶格上的伊辛规范理论模型，本质上是Kitaev环面码的前身 [Weg71]。Kogut在关于晶格规范理论的综述中指出， $\mathbb{Z}_2$ 规范理论可以表述为一种自旋 $1/2$ 系统，其中每个晶格元上都存在四自旋相互作用 [Kog79]。20世纪90年代，人们逐渐接受了长程有序自旋态同样可以承载任意子激发这一观点，尤其是在RVB态的背景下。

1997年，Kitaev 提出了环面码模型及其推广——量子双模型 [Kit03] （参见 [Ham24] ，了解算子代数方面的介绍；或参见 [BMD07] ，了解物理学视角）。这开启了利用精确可解晶格模型研究拓扑相的先河。这些模型的特点是精确可解，也就是说，可以写出这些模型本征态的闭式表达式。此外，与前文提出的场论模型不同，这些模型在计算上是可处理的。这为研究拓扑相开辟了许多不同的途径。

除这些优点之外，环面码及其推广建立了晶格模型与拓扑量子计算之间的联系。在环面上，基态具有四重简并，并且这种简并对任意弱微扰都具有鲁棒性。因此，基态空间构成一个

逻辑量子比特；由于简并性，该逻辑量子比特 在设计上具备容错性 ，也就是说，任意弱微扰引入的故障不会改变逻辑量子比特的态。Freedman、Kitaev、Larsen、Wang [FKLW02]建立了任意子与量子计算之间的联系。为了最终实现利用任意子执行拓扑量子计算这一目标，研究重点转向构造拓扑有序晶格自旋系统。

2005年，Levin 和 Wen 提出了弦网模型 [LW05] （参见 [CGHP23、GHK+24]，了解数学视角；或参见 [HGW18] ，了解物理方面的论述），这是利用晶格模型进行量子计算的一项重大突破，因为它提供了一种精确可解的模型，可实现双化序，也就是说，与输入融合范畴的 Drinfel'd 中心相关联的有能隙拓扑序。总之，弦网模型为晶格哈密顿量提供了一套工具：给定任意所需的任意子内容（不含边缘模），就可以构造一个具有该拓扑序的局域自旋模型。这是一个具有里程碑意义的概念进步，也牢固确立了范畴论在凝聚态物理中的地位。“融合规则”、“F-符号”和“R-符号”等说法，成为描述晶格拓扑相时常用的术语。

1.4 算子代数与拓扑相 s

1.4.1 连续场论

1964年，Rudolf Haag 和 Daniel Kastler 提出了量子场论的代数（或公理化）方法，称为代数量子场论（AQFT） [HK64]。在这种方法中，为时空中的每个区域指定一个局域可观测量的冯·诺伊曼代数。其思想是，不直接对场本身进行量子化，而是研究可观测量代数及其表示。这一框架囊括了局域性，并借助 C*-代数和冯·诺伊曼代数，为量子场论奠定了坚实的数学基础。这种方法表明，许多结构性结果仅凭算子代数方法便可推出，例如 Haag-Ruelle 散射理论 [Haa58，Rue62]，，以及与此更相关的、由 Doplicher-Haag-Roberts（DHR）自20世纪60年代末开始对超选择扇区进行的一般性分析 [DHR71，DHR74]。DHR 理论表明，在四维量子场论的代数框架下，荷与可观测代数的不等价表示相关联，这些表示在空间中局域化；这些荷必须遵循玻色统计或费米统计，并由一种底层的整体规范对称性支配。事实上，Doplicher 和 Roberts 表明，可以根据这些超选择扇区的性质重构一个紧致规范群 [DR89]，，这是一个深刻的结果，确立了代数描述与规范对称性之间的对偶关系。因此，算子代数（OA）方法解决了一个概念性问题：如何在不预先假定规范群的情况下对荷进行分类和组合，而是从可观测量代数的表示论中推导出规范群。

到20世纪80年代，可观测量代数已成为数学物理中的标准工具。它们为量子场和多体系统提供了一套统一的语言：局域可观测量代数、作为代数泛函的态、作为自同构的动力学，以及作为表示的荷。这些思想为研究拓扑相奠定了基础；拓扑相是一种微妙的量子序，无法用传统可观测量来表征。

算子代数方法的一项重大成就，是对低维模型中的超选择扇区进行分类和分析，

这直接适用于拓扑有序系统中的任意子激发。1989年，Fredenhagen、Rehren 和 Schroer 将 DHR 超选择理论推广到 $2+1$二维，表明局域激发可以遵循辫群统计，而非通常的玻色/费米交换 [FRS89]。这项开创性工作为将任意子视为可观测代数的局域化端同态奠定了严格基础（我们将在第 4 章详述）。这带来了概念上的突破：人们可以通过对局域可观测量代数的表示范畴进行分类，来确定任意子类型；这是一个可运用算子代数技术解决的问题。

另一个富有成果的研究方向，是运用子因子理论对二维拓扑序进行分类和构造。Vaughan Jones 于 1983年发现了子因子的琼斯指数 [Jon83]，揭示了一种出人意料的量子化现象：对于对应于 $[M:\ N]$因子扩张的子因子，指数 $N \subset M$ 只能取特定值。这催生了丰富的代数结构（尤其是 Temperley-Lieb 代数和平面代数），并最终带来了纽结不变量（琼斯多项式）。Jones 的工作将可观测量代数与纽结理论和低维拓扑联系起来，开创了量子拓扑这一新领域。不久之后，人们认识到，子因子的标准不变量可以作为拓扑量子场论的数据。1988年，Witten 通过 Chern–Simons 拓扑量子场论对琼斯多项式的诠释 [Wit89] 为这些范畴赋予了物理背景：辫群的琼斯表示对应于$2+1$D 拓扑量子场论中的任意子编织。

Ocneanu 等人在20世纪90年代进一步发展了这一联系，展示了如何利用子因子数据构造三维流形的态和不变量。本质上，每个具有有限指数的子因子都会给出一个融合范畴，通常还提供一种丰富的结构（如酉模张量范畴），用于描述某种假想的任意子系统。例如，E_6 子因子的偶部给出伊辛模范畴，而所谓的“Haagerup 子因子”则给出一种奇特的模范畴，显然无法由任何已知的量子对称性实现。这一研究方向表明，原则上，可观测量代数可以通过枚举可能自洽的任意子模型来预测新的拓扑序。

1.4.2 晶格系统

与这些进展同步，算子代数技术也被应用于晶格量子系统（量子自旋或晶格费米子）。无限晶格可以视为有限子系统代数的归纳极限，通常称为自旋系统的准局域 C*-代数。这种方法由 Brratteli 和 Robinson 在经典著作（1979年、1981年）中系统化，使人们能够严格定义无限延展系统中的相、对称性破缺和局域性。例如，铁磁相可以用准局域代数上的一个态（期望泛函）来描述，该态在对称性下不变，但不具有聚类性。诸如分裂性质（即在有能隙系统中，某个区域的代数及其补集的代数可以分裂为张量积）这样的概念也由此得以发现，并将冯·诺伊曼代数的类型与关联长度等物理性质联系起来。晶格代数方法对于后来理解拓扑序至关重要：它提供了一种语言，可以将一个相定义为准局域代数上的态的等价类（或生成这些态的有能隙哈密顿量的等价类），而无需诉诸任何特定的局域

序参量。

拓扑序晶格模型虽然不是洛伦兹不变量子场论，但可以用类似的算子代数方法来处理。Pieter Naaijkens 于2011年使用可观测量代数方法对Kitaev环面码模型进行了严格研究，并识别出任意子对应的超选择结构 [Naa11]。他发现，由此得到的超选择结构可以构成一个 C*-编织张量范畴，而且它等价于猜想中的范畴Rep$D(\mathbb{Z}_2)$，即 Drinfel'd 中心范畴的表示范畴Rep($\mathbb{Z}_2$)，或者等价地，量子双 $D(\mathbb{Z}_2)$ 的表示范畴 [Naa13]。Naaijkens [Naa15] 随后将这一结构推广到有限阿贝尔群 G的量子双模型；最近，这一结果又被推广到任意有限群 G [BV25、BHNV26]。

这是在两个方面取得的突破。首先，从数学角度来看，除了先前猜想的那些超选择扇区之外，并不存在其他超选择扇区（这并非必然如此；事实上，对于最简单的一些模型，在高维情形下这一结论会彻底失效 [Vad23], 不过，这个问题源于我们尚未找到适用于高维情形的正确判据）。这表明，算子代数方法以及对DHR型超选择理论的研究，是理解拓扑相的有效途径。另一项突破与物理学家相关：环面码哈密顿量受到微小微扰时，不会自发地产生新的扇区。

Ogata 表明，从纯有隙基态、满足 Lieb-Robinson型界的动力学以及近似 Haag 对偶性等公理出发（后两者为光锥型信息传播提供了晶格类比），可以赋予关于该基态的超选择扇区以编织 C*-张量范畴（BTC）结构。算子代数方法的另一项重要成果是：如果以不会闭合能隙的方式对哈密顿量进行"缓慢"扰动，这一编织张量范畴结构仍具有稳健性。这一结果已在 [CNN20] 的不同部分得到证明。该方法同样适用于有边界系统 [JNPW23], ，并且最近已证明也适用于对称性富集拓扑序 [KVW24]。这一分析中的主要技术假设是 Haag 对偶性；已有研究表明，它适用于大类晶格模型 [OPGRdA25] ，包括量子双模型和 Levin-Wen弦网模型，并且预计对于所有对称性富集拓扑相，至少在体区内，这一性质都成立（至少近似成立）。

近年来，张量网络态的研究为可观测量代数与晶格上的拓扑序之间搭建了新的桥梁，尤其是研究了一维中的矩阵乘积态（MPS）和高维中的投影纠缠对态（PEPS）。这些¨在计算物理学中颇受欢迎的态，后来被发现与可观测量代数有着深刻联系。1992年，Fannes、Nachtergaele 和 Werner [FNW92] 证明，对于给定局域维数的平移不变矩阵乘积态集合，可以将其视为某个 AF（近似有限）C*-代数上的态；该代数的表示结构则导出了"有限关联态"分类。从本质上说，他们证明了，任何具有唯一无限体积极纯态的一维有隙基态都是矩阵乘积态，而不同的相对应于矩阵乘积态转移算子代数的不同不等价表示。此领域此后取得了诸多进展，包括矩阵乘积算子（MPO）代数的出现，它们作为对称性出现在二维投影纠缠对态的边界上 [S.WB+21, WBM+16]。利用这些矩阵乘积算子对称性，可以构造一个 C**-代数（有时称为投影纠缠对态转移算子的环状融合代数），其幂等元和简单模的结构

恰好对应于拓扑序中的不同任意子类型。

1.5 未来

算子代数、范畴论、拓扑量子场论与拓扑序之间丰富的相互作用，持续推动着引人入胜的合作。物理学家如今认识到，要对奇异相进行分类，往往最终需要对某种代数不变量进行分类。另一方面，数学家正借助物理直觉来引导对新代数结构的探索。数学带来了清晰性与严谨性，而物理学则提供了实例与直觉。这场对话堪称跨学科协同的典范，必将继续为理解量子序的本质带来深刻见解。

参考文献

[And83] P. W. Anderson. 关于分数量子化霍尔效应 Laughlin 理论的评论。物理评论*B*辑，28:2264–2265，1983年8月。[ASW84] Daniel Arovas、J. R. Schrieffer 和 Frank Wilczek。分数统计与量子霍尔效应。《物理评论快报》，53:722–723，1984年8月。[BHNV26] Alex Bols、Mahdie Hamdan、Pieter Naaijkens 和 Siddharth Vadnerkar。非阿贝尔量子双模型的任意子扇区范畴。《数学物理通讯》*407, 2*，407，2026年。[BMD07] H. Bombin 和 M. A. Martin-Delgado。晶格上的一族非阿贝尔 Kitaev 模型：拓扑禁闭与凝聚。《物理评论*B*》，78(11):1–28，2007年12月。[BV25] Alex Bols 和 Siddharth Vadnerkar。Kitaev量子双模型的任意子扇区分类：A. bols, s. vadnerkar。《数学物理通讯》，406(8):188，2025年。[CGHP23] Jessica Christian、David Green、Peter Huston 和 David Penneys。用于 Levin-Wen 系统中凝聚的晶格模型。高能物理学杂志，2023(9):1–56，2023年。[CNN20] Matthew Cha、Pieter Naaijkens 和 Bruno Nachtergaele。无限量子自旋系统中荷的稳定性。《数学物理通讯》，373(1):219–264，2020年。[DHR71] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E Roberts。局域可观测量与粒子统计 I。《数学物理通讯》，23(3):199–230，1971年。[DHR74] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E Roberts。局域可观测量与粒子统计 II。《数学物理通讯》，35(1):49–85，1974。

[dPRH+98] R de Picciotto、M Reznikov、M Heiblum、V Umansky、G Bunin 和 D Ma- halu。分数电荷的直接观测。《物理学B：凝聚态物质》，249-251:395–400，1998年。[DR89] Sergio Doplicher 和 John E Roberts。紧群的一种新对偶理论。《数学新进展》，98(1):157–218，1989年。[FKLW02] Michael H. Freedman、Alexei Kitaev、Michael J. Larsen 和 Zhenghan Wang。拓扑量子计算，2002年。[FNW92] Mark Fannes、Bruno Nachtergaele 和 Reinhard F Werner。量子自旋链上的有限相关态。《数学物理通讯》，144(3):443–490，1992年。[FRS89] Klaus Fredenhagen、Karl-Henning Rehren 和 Bert Schroer。具有辫群统计和交换代数的超选择扇区：I. 一般理论。《数学物理通讯》，125(2):201–226，1989年。[GHK+24] David Green、Peter Huston、Kyle Kawagoe、David Penneys、Anup Poudel 和 Sean Sanford。富化弦网模型及其激发。Quantum，8:1301，2024年。[Haa58] Rudolf Haag。含复合粒子和渐近条件的量子场论。《物理评论》，112(2):669，1958年。[Hal84] B. I. Halperin。准粒子统计与分数量子化霍尔态的层级结构。《物理评论快报》，52:1583–1586，1984年4月。[Ham24] Mahdie Hamdan。非阿贝尔量子双模型中的无限体积基态。博士论文，卡迪夫大学，2024年。[HGW18] Yuting Hu、Nathan Geer 和 Yong-Shi Wu。扩展 Levin-Wen 模型中的完整磁单极激发谱。《物理评论B》，97(19):195154，2018年。[HK64] Rudolf Haag 和 Daniel Kastler。量子场论的代数方法。《数学物理学杂志》，5(7):848–861，1964年。[JNPW23] Corey Jones、Pieter Naaijkens、David Penneys 和 Daniel Wallick。局域拓扑序与边界代数。arXiv预印本 arXiv:2307.12552，2023年。[Jon83] VFR Jones。子因子的指标。《数学新进展》，1983年。[Kit03] A. Yu. Kitaev。利用任意子实现容错量子计算。《物理年刊》，303(1):2–30，2003年。[Kog79] John B. Kogut。格点规范理论与自旋系统导论。《现代物理评论》，51:659–713，1979年10月。

[KVW24] Kyle Kawagoe、Siddharth Vadnerkar 和 Daniel Wallick。对称性缺陷与分数化的算子代数方法。arXiv预印本 arXiv:2410.23380，2024年。[LM77] J. M. Leinaas 和 J. Myrheim。论全同粒子理论。《Nuovo Cim. B》，37：1–23，1977年。[LW05] Michael A. Levin 和 Xiao-Gang Wen。弦网凝聚：拓扑相的一种物理机制。物理评论B辑，71：045110，2005年1月。[MR91] Gregory Moore 和 Nicholas Read。分数量子霍尔效应中的非阿贝尔任意子。《核物理B》，360(2-3)：362–396，1991年。[MS89] Gregory Moore 和 Nathan Seiberg。经典与量子共形场论。《数学物理通讯》，123：177–254，1989年。[Naa11] Pieter Naaijkens。平面上的Kitaev环面码中的局域化端同态。《数学物理评论》，23(4)：347–373，2011年。[Naa13] Pieter Naaijkens。二维量子自旋模型中的Kosaki-Longo 指数与荷的分类。《数学物理学杂志》，54(8)：081901，17，2013年。[Naa15] Pieter Naaijkens。从局域量子物理的角度看Kitaev量子双模型。载于R. Brunetti、C. Dappiaggi、K. Fredenhagen 和 J. Yngvason 编，《代数量子场论进展》，第365–395页。施普林格，2015。[NTW85] Qian Niu、D. J. Thouless 和 Yong-Shi Wu。量子化霍尔电导作为拓扑不变量。物理评论B辑，31：3372–3377，1985年3月。[OPGRdA25] Yoshiko Ogata、David P´erez-Garc´ıa 和 Alberto Ruiz-de Alarc´on。二维量子自旋系统的Haag对偶性。arXiv预印本 arXiv:2509.23734，2025年。[Rue62] David Ruelle。论量子场论中的渐近条件。《Helvetica Physica Acta》，35(3)：147，1962年。[S˙WB+21] Mehmet Burak S¸ahino˘glu、Dominic Williamson、Nick Bultinck、Michael Mari¨en、Jutho Haegeman、Norbert Schuch 和 Frank Verstraete。用矩阵乘积算符表征拓扑序。载于《Annales Henri Poincar´e》，第563–592页。施普林格，2021年。[Tho85] D. J. Thouless。长程有序与分数量子霍尔效应。物理评论B辑，31：8305–8307，1985年6月。[TSG82] D. C. Tsui、H. L. Stormer 和 A. C. Gossard。极端量子极限下的二维磁输运。《物理评论快报》，48：1559–1562，1982年5月。[Vad23] Siddharth Vadnerkar。三维环面码中的超选择扇区。arXiv预印本 arXiv:2308.06883，2023年。

[WBM+16] Dominic J Williamson、Nick Bultinck、Michael Mari¨en、Mehmet B S¸ahino˘glu、Jutho Haegeman 和 Frank Verstraete。用于对称性保护拓扑相的矩阵乘积算符：规范化与边缘理论。物理评论*B*辑，94(20)：205150，2016年。[Weg71] F. J. Wegner。广义伊辛模型中的对偶性及无局域序参量的相变。《数学物理学杂志》，12：2259–2272，1971年。[Wen89] X. G. Wen。紧化空间中手性自旋态的真空简并。物理评论*B*辑，40：7387–7390，1989年10月。[Wen90] X. G. Wen。刚性态中的拓扑序。《现代物理学国际杂志*B*》，04(02)：239–271，1990年。[WES+87] R. Willett、J. P. Eisenstein、H. L. St¨ormer、D. C. Tsui、A. C. Gossard 和 J. H. English。分数量子霍尔效应中偶分母量子数的观测。《物理评论快报》，59：1776–1779，1987年10月。[Wit89] Edward Witten。量子场论与琼斯多项式。《数学物理通讯》，121(3)：351–399，1989年。[WN90] X. G. Wen 和 Q. Niu。存在随机势且位于高亏格黎曼曲面上时分数量子霍尔态的基态简并。物理评论*B*辑，41：9377–9396，1990年5月。[Wu84] Yong-Shi Wu。二维量子统计的一般理论。《物理评论快报》，52：2103–2106，1984年6月。

第2章 任意子物理

目录

2.1 量子晶格系统 .12 2.2 任意子 .14 2.3 弦与远程可探测性 .14 2.4 融合 .15 2.5 编织 .16 2.6 使任意子概念严谨化 .18 2.6.1 无限体积 .18 2.6.2 创建任意子态 .18 2.6.3 任意子是局域化且可传输的 .19 2.6.4 任意子选择准则 .19 2.7 对称性丰富拓扑相（SET相） 20

本章节有意不拘泥于形式主义，旨在帮助读者直观理解任意子激发如何在有能隙的2+1维系统中产生、移动、编织和融合。精确的定义和证明将在后续章节中给出。

2.1 量子晶格系统

我们设想一个大型（但有限）的二维晶格区域，每个格点上都有相同的玻色型微观自由度。该系统由一个（无受挫的）哈密顿量支配，此哈密顿量由局域相互作用项构成，且其基态空间之上存在谱隙。在实际的严格处理中，关于局域性的陈述会带有“指数级小的尾项”，但除非这些细节会影响直观理解，否则我们在此忽略不谈。

我们可以用以下简单的方式来理解：

- **基态与激发。** 基态同时使所有局域相互作用项达到最小值，且本征值为 0。激发态与

基态空间正交。如果一个态没有使某个区域内的所有相互作用项达到最小值，我们就说该态在该区域存在激发。

- **局域操作**。 在一个小圆盘中进行操作，只会改变其中的状态，而生活在遥远区域的观察者无法察觉你在局部所做的操作。
- **移动激发**。 在许多有能隙模型中，我们可以使用有限深度局域幺正变换（FDQCs）沿狭窄路径移动局域激发。这意味着我们可以依次施加固定数量的电路，其中每个电路都由局域幺正操作组成，且这些操作作用于一个大小不超过固定半径圆盘的区域。
- **绝热输运**。 缓慢改变哈密顿量（或者等价地，施加一个受控的局域酉算符序列），即可沿着包含所选路径 γ 的狭窄条带输运激发，而不会在此过程中产生新的激发。

在时空中将运动可视化通常很有用。世界线是局域激发在时空中的历史。如果两种不同过程的世界线可以在不与其他世界线交叉的情况下相互变形，那么对于远距离观察者而言，这两种过程就是相同的。

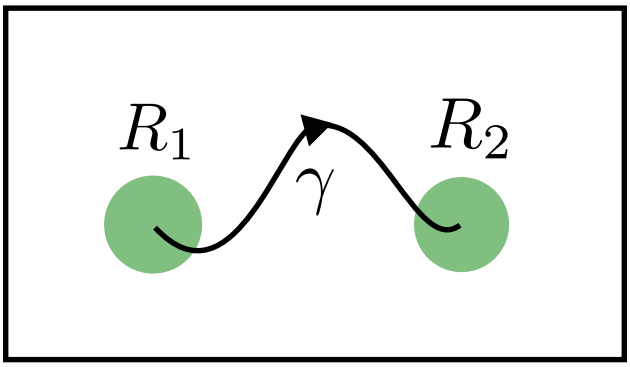


图 2.1：沿着包含路径 γ 的狭窄条带，将局域激发从圆盘 R_1 输运到圆盘 R_2。

在拓扑平庸有隙相（短程纠缠）中，可以在局部产生或湮灭激发。若将一个这样的激发绕着远处的另一个激发移动一圈并返回，

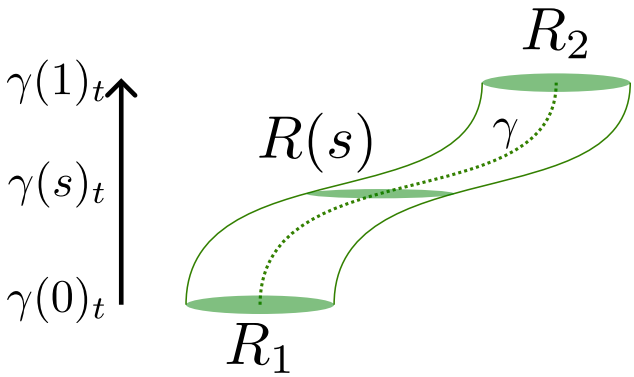


图 2.2：图2.1 所示的输运过程在时空中被视为一条世界线。

不会有任何可测量的变化，也就是说，这一过程在长距离尺度上不可见（图2.3）。我们将这些激发称为通常激发。玻色子[1] 就是通常激发的例子。

2.2 任意子

相比之下，任意子激发，或简称任意子，则具有特殊性质：单个任意子无法通过严格局域操作来产生或湮灭。它们必须成对产生，即一个标签为 a 的任意子与其共轭粒子 a^* 成对产生。将这一对分开，并观察只包含 a 任意子的圆盘内部，会留下一个“局域持久”的非平凡拓扑荷：圆盘内的小操作无法改变任意子标签 a。通常激发可以在局域产生或湮灭，因此不会留下这样的荷。我们用 1 表示拓扑平凡荷，并称之为平凡任意子。

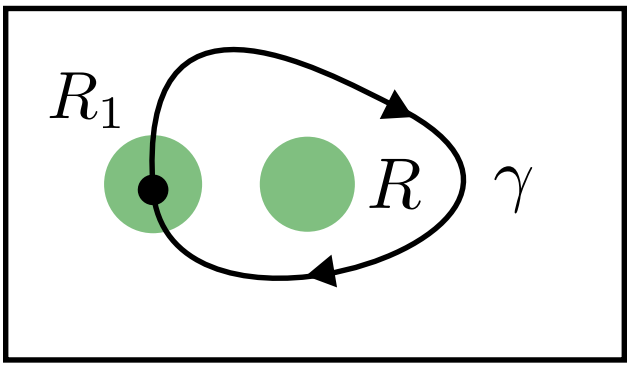


图 2.3：对于通常激发，将一个绕另一个旋转一周，不会改变远距离处的态。

基于齐次性原理，以及任意子是“局域持久”的拓扑荷这一事实，我们有理由认为，任意子标签实际上独立于圆盘的大小及其所在位置。在算子代数框架下对任意子进行严格分析后，事实证明确实如此。我们还注意到，由于齐次性，包含 a 的圆盘也必须能够包含其共轭粒子 a^*。此外，我们希望可能的任意子指标集是有限的。对于足够良好的晶格模型，这一点确实成立，但一般情况下未必如此。在这个简单的设定中，我们假定它成立。

2.3 弦与远程可探测性

记录 $a-a^*$ 成对产生过程的一种直观方法，是从 a 到 a^*画一条细细的弦，以提醒我们它们原则上可以再次成对湮灭。弦是记账工具。只要不让它们穿过任意子（见图 2.4），就可以随意滑动和弯曲它们。

[1]经过对我们简单图景的少许修改，费米子也同样是这类粒子的例子。必须考虑费米子遵循的非平凡交换统计，以及由 π 可能产生的相移所导致的可测变化。

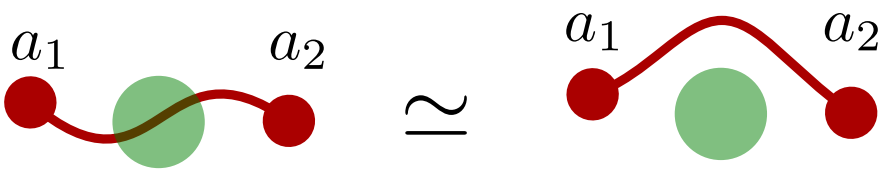


图 2.4：只要不穿过任意子，就可以自由变形弦（红色）。支撑于远离任意子的局域探针（绿色）无法察觉弦的绘制方式。

如果在任意子周围放置一条细环带，并让一条弦沿环带绕行一周，那么这条弦必定与环带相交（图2.5）。由此引出了环算符：在环带中制备一对 a–a^*，将 a 绕孔携带一周，然后再次使这对粒子湮灭（图 2.6）。由于最终环带内什么也没有留下，这种环路不受微观细节影响，却仍能捕捉孔中物体的拓扑特征。

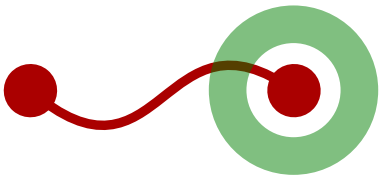
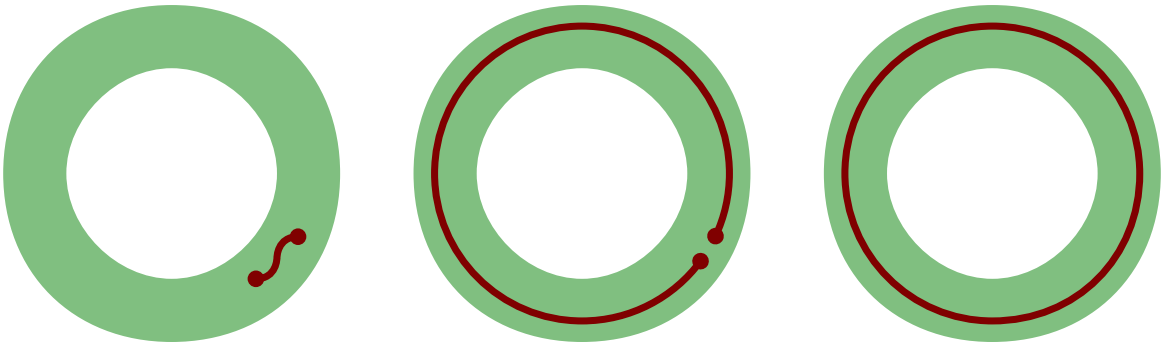


图 2.5：任何绕过孔洞的环路都必须与环带相交，因此环过程可以探测包围的荷。



(a) 在环带中创建 a–a^*　(b) 携带 a 绕行一周　(c) 湮灭这一对

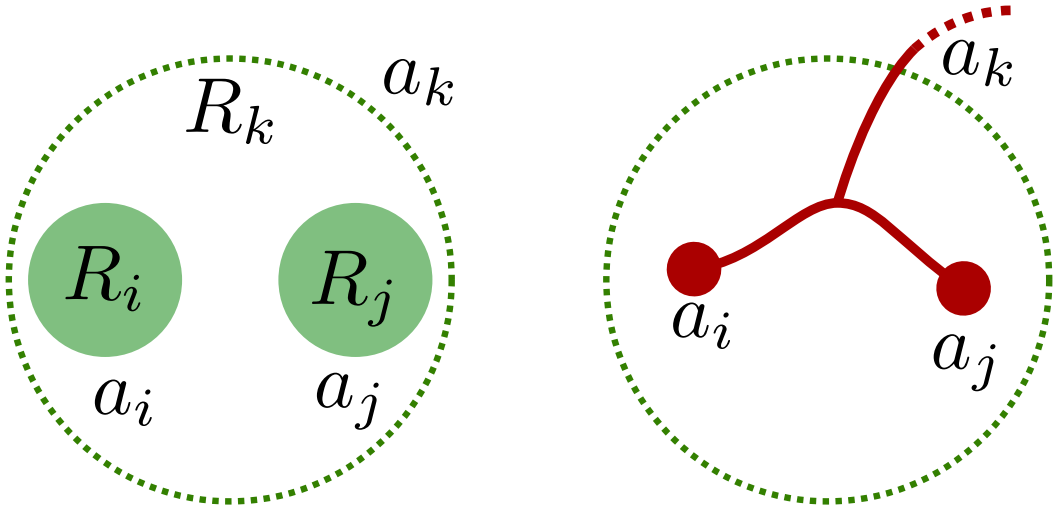
图 2.6：环算符过程的示意图。

如果一个任意子与其他激发充分隔离，那么环绕它的环带中的适当环过程能够区分其标签。这称为远程可探测性原理，但并非必然成立。不过，在一些相对温和的假设下，预计这一原理是成立的。

2.4 融合

将两个标签为 a_i 和 a_j 的、彼此相距很远的任意子置于一个更大的圆盘 R_k 中（图2.7）。如果我们只探测 R_k外部，那么唯一可见的就是一个单一的有效拓扑荷。这可以

理解为将视野拉远。该对任意子的不同微观态可能导致不同的有效荷 a_k；这些可能性称为 a_i 和 a_j的融合通道。获得相同 a_k的独立方式可能不止一种，而这些方式的数量就是通道 $a_i \otimes a_j \to a_k$的重数。



(a) 较大区域内的两个任意子 a_i，a_j R_k，在 R_k 中表现为局域化的 a_k 。

(b) 弦图像： a_i 和 a_j 被视为一个局域化于 R_k中的单个有效荷 a_k

图 2.7：融合可视为将两个相距较远的任意子粗粒化为较大圆盘内的一个有效荷。

我们立即观察到，平凡荷 1 起单位元的作用。将 1 与任意 a 融合不会产生任何变化。此外，由于任意子可以成对湮灭，当一对由 $a - a^*$ 弦连接的粒子在较大的圆盘中靠拢时，它们会湮灭为 1。然而，如果我们将一个未连接的 a 与其共轭 a^* 靠拢，它们可能不会湮灭。

我们可以用以下方程概括这些融合规则

$$a_i \otimes a_j = \bigoplus_k N_{ij}^k \; a_k$$

其中 N_{ij}^k 是重数，且为正整数。

2.5 编织

现在我们再次考虑图2.7中的设置，并将 a_i 绕着 a_j 移动，使其沿着一条与 a_j充分分离且不相交的路径运动。从时空中的过程来看，这是它们世界线的一种编织，因此称为编织（见图2.8）。这种特定的编织称为双重编织。由于 R_k之外没有任何变化，外部所观测到的总荷仍与之前相同。然而， a_k扇区的内部态可能发生变化（因为 $a_i \otimes a_j \to a_k$ 通道的重数可能非平凡）。因此，双重编织在 a_k 扇区上实现了一个定义良好的线性变换。直观地说，一个

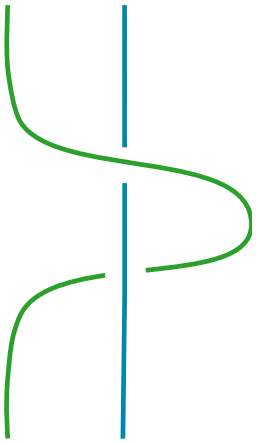


图 2.8：将 a_i 绕着 a_j移动的时空图像。 a_i、 a_j 的世界线（视为时空中的弦，而非圆柱）可以看作彼此编织。这个特定的编织称为双重编织。

编织是一个酉算子，它只取决于任意子标签和编织本身，而不取决于路径的微观细节。

在图 2.7b的弦图像中，一次交换会迫使一个任意子的弦与另一个任意子的弦交叉一次。这个交叉是与成对 R_{ij}^{k} 相关联的非平凡变换 a_i， a_j 融合为 a_k 的源，并且是一个维数等于其重数的矩阵。

事实证明，融合规则和编织规则需要满足某些相容关系，以确保不同顺序的编织/融合操作之间的一致性。例如，两个任意子先融合，再绕着第三个任意子编织；或者两个任意子先绕着第三个任意子编织，再融合，这两种情况下物理学都应保持不变。要求任意子能够成对产生或成对湮灭、其运动是酉的，等等，这些条件会引出更多相容条件。

当我们抽象出任意子物理中的这些基本特征后，会发现任意子物理普遍由一种称为带编织的 C*-张量范畴的结构来描述；在许多情形下，则由幺正模张量范畴来描述，后者是前者中特别优良的例子。我们将在第3章介绍并研究这些结构。

现在，我们用总结弦规则来结束本节。

- 用一条带方向、标记为 a 的弦连接成对产生的 a 和 a^* 。
- 反转弦的方向会使 a 与 a^* 互换。
- 如果 a 和 a^* 由一条 a 弦连接，它们可以重新湮灭为真空 1。
- 若没有适当的弦连接，附近的 a 和 a^* 未必会湮灭——历史很重要。
- 如果一个任意子穿过另一条任意子弦，那么整体态会受到一个由编织矩阵给出的因子的修正。
- 定向相同的两条任意子弦可以融合成一条新弦，其规则与任意子相同。

2.6 严谨刻画任意子

2.6.1 无限体积

到目前为止，我们一直有意采用有限体积图景。让我们从直观上探讨一下无限体积情形会发生什么。在4 章节中，我们将使这番讨论变得严谨。

在无限体积极限（也称为热力学极限）中，我们使用准局域代数，它是一种可由局部算子近似的算子代数。态不再是向量，而是密度矩阵[2]。哈密顿量是一个无界算子，不属于准局域代数。不过，借助一些巧妙的技巧，经过适当推广后，动力学仍可在无限体积中定义。因此，相对于这种动力学，基态的概念仍然是良定义的。物理希尔伯特空间没有自然的定义，因此我们必须巧妙地运用算子代数中的一条基础定理，即 GNS 构造。给定准局域代数上的一个态，可以将该态表示在一个称为 GNS 希尔伯特空间的希尔伯特空间上。态的数量极其庞大，因此表示也很多。其中许多表示并不具有物理意义：它们可能具有无限能量、包含无限多个激发等。因此在实践中，通常最好选定一个“良好”的态，例如动力学的无挫纯基态（该态通常也具有平移不变性）。我们将这个基态记为 ρ_0。

2.6.2 创建任意子态

现在我们来看看如何在无限体积极限下创建任意子。当然，我们可以在准局域代数中使用局部算子 V_a 创建一对 $a-a^*$。接下来，我们用局域酉算符 U_n将共轭任意子 a^*向外传输 n步。新的态（记作 ρ_n）现在看起来像这样：[3]

$$\rho_n := U_n V_a \rho_0 V_a^* U_n^*$$

由于两个局部看来不同的态总能通过局域操作联系起来，因此任何局部看来不同的任意子都具有相同的标签。将有限圆盘中包含任意子的情形推广到无限体积的正确方式，是考虑一个包含任意子的“无限大”圆盘，并将共轭任意子“送往无穷远”。通过取极限，我们基本上可以将共轭任意子 a^* 送到无限大圆盘之外，从而创建任意子态 ρ_0。换句话说，这个态

$$\rho_a := \lim_{n\uparrow\infty} \rho_n$$

应当对应一个任意子态。这实质上意味着我们已将共轭任意子 a^*送到了无限远处。尽管根据定义，不存在能将任意子送到无穷远的局域操作，这个极限仍然成立，因为对于局域观察者而言，“非常遥远”与“无限遥远”实际上没有区别。

回想一下，在成对产生过程中，我们为任意子对附加了一条弦。正如预期的那样，将共轭 a^* 送至无限远后，会留下一条附着在任意子上的半无限弦

[2]严格来说，态是准局域代数上的正线性泛函，而其中一部分态是正规的，这意味着它们可以表示为密度矩阵。[3]回想一下，对于密度矩阵 ρ，由 U 执行的局域操作形式如下：$U\rho U^*$ 其中（*）表示伴随。

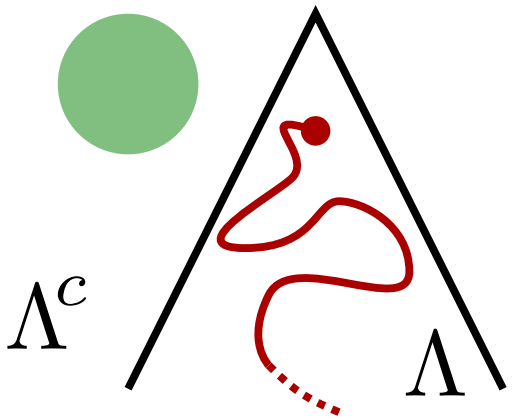


图 2.9：局域化在锥 Λ 中的任意子（深红色）。位于 Λ^c 中的局域观察者（绿色）只能看到其周围的基态 ρ_0。

a。由于弦可以自由变形，我们要求它以相对规整的方式延伸至无限远，也就是说，它始终位于某个锥 Λ 内，该锥包含弦的端点（a 也位于此处）。

2.6.3 任意子是局域化且可传输的

对于位于 Λ^c（相对于 Λ 的补集区域）的局域观察者而言，无论身处何处，ρ_a 总是会看起来像基态 ρ_0，因为 Λ^c 中没有任何变化（见图 2.9）。也就是说，对于准局域代数中所有 A 局域化于 Λ^c 的算子，都有：

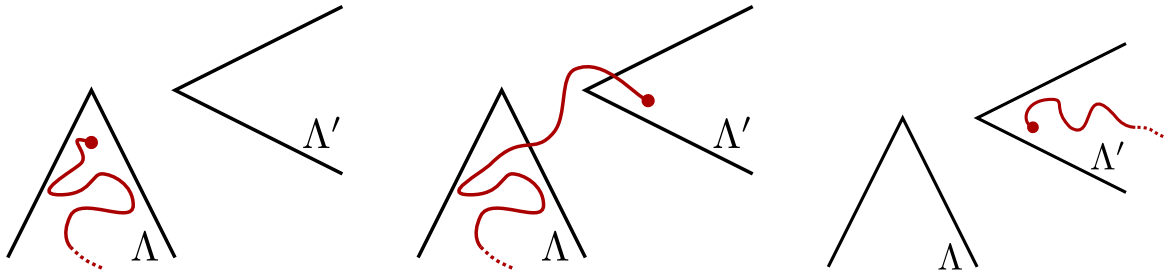
$$\mathrm{Tr}\{\rho_a A\} = \mathrm{Tr}\{\rho_0 A\}$$

如果这是真的，我们就说 ρ_a 在锥 Λ 中是局域化的。现在我们改变 ρ_a 的记号，将其记为 ρ_a^Λ，以表明它局域化于 Λ 中。

现在考虑另一个任意选取的锥 Λ'。如果 Λ 与 Λ' 不相交，那么我们总能使用某个局域酉算符 $U_{\Lambda,\,\Lambda'}$ 将位于锥 Λ 内的任意子 a 移动到锥 Λ'，并且由于弦可以自由变形，只是一个记账工具，也可以将弦自由地移入 Λ'。新的态看起来像 $U_{\Lambda,\,\Lambda'}\rho_a^\Lambda U^*_{\Lambda,\,\Lambda'}$（见图 2.10，其中展示了 $U_{\Lambda,\,\Lambda'}$ 的算法作用）。现在，这个态与包含局域化在锥 Λ' 中的任意子 a 及弦的态 $\rho_a^{\Lambda'}$ 之间应该不存在物理差异。因此我们有 $\rho_a^{\Lambda'} = U_{\Lambda,\,\Lambda'}\rho_a^\Lambda U^*_{\Lambda,\,\Lambda'}$。由此我们得到另一个物理性质：任意子（包括弦在内）可以自由地传输到任意锥。若对于任意锥 Λ'，都存在一个局域酉算符 U 使得 $\rho_a^\Lambda = U\rho_a^{\Lambda'}U^*$，则称任意子态 ρ_a^Λ 是可传输的。

2.6.4 任意子选择准则

回顾一下，对于给定的准局域代数，存在许多非物理的态和表示，因此我们通常希望筛选出能够体现我们感兴趣并试图刻画的现象的相关态。既然我们现在知道任意子态是局域化且可传输的，就可以提出任意子选择准则：



（a）任意子局域化于 Λ　　（b）将任意子输运至 Λ′　　（c）自由变形弦至 Λ′

图 2.10：将局域化于锥 Λ 中的任意子输运至局域化于锥 Λ′中的任意子的局域酉算符示意图。

任意子态定义为局域化且可传输的态。

提出这一选择准则后，我们面临着允许过少的态的严重风险，即一些本应被视为任意子、却被该准则排除的态。反过来，我们也面临着该准则允许伪态的风险，即一些本不应被视为任意子、却被该准则纳入的态。幸运的是，这两种担忧都没有成为现实，而该准则经过了良好设计，能够捕捉任意子态。该准则允许包含有限个局域任意子对的态，也允许包含两个沿不同方向趋于无穷远的任意子的态。此外，它还排除了包括含有无限多个任意子的态在内的其他一些态。

2.7 对称性丰富拓扑相（SET相）

考虑一个支持任意子态的量子格点系统，并设其哈密顿量具有某个群 G的全局格点上的（自发未破缺）对称作用。即使将对称性对任意子的作用考虑在内，任意子的基本物理性质仍保持不变。事实上，即便对称性被“破缺”，使其仅作用于整个系统的一个子集（对称性畴壁的示意图见图2.11 ），任意子物理仍然不变。

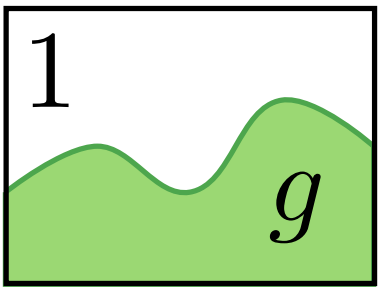


图 2.11：对称性畴壁的示例。对于绿色区域深处的局域观察者，它看起来就像一次全局对称性作用。对于白色区域深处的观察者，看起来则什么都没有改变。

只有当对称性进一步破缺为一个对称性缺陷（见图2.12）时，我们才会发现，这些缺陷存在时的任意子物理变得更加“丰富”。让任意子绕对称性缺陷一周，可能会改变其标签（见图2.13）；对称性缺陷甚至可以充当任意子的源和汇，使任意子彼此靠近对称性缺陷时能够被单独产生或湮灭，而这原本是任意子所不允许的。

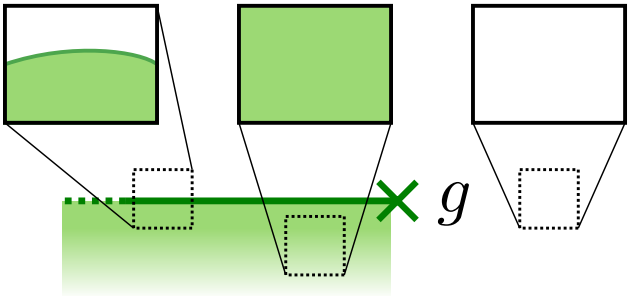


图 2.12：对称性缺陷示例。对称性缺陷是对称畴的端点：靠近缺陷线时，局域观察者看来，缺陷就像一道畴壁；远离缺陷体区时，缺陷看起来像一次全局对称性作用；远离缺陷线时，缺陷看起来像基态。

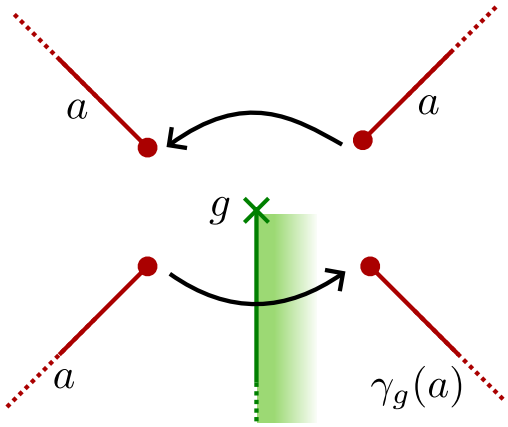


图 2.13：对称性缺陷会置换任意子标签。如果将一个任意子移过缺陷线，它可能会被置换成另一个任意子 $\gamma_g(a)$。如果将它移到远离缺陷的位置，它就会保留原有标签。因此，如果我们让一个任意子逆时针绕过对称性缺陷，它会变成任意子 $\gamma_g(a)$。

对称性缺陷也有其自身的物理学：它们能够移动、融合成另一个对称性缺陷，还能彼此“交叉编织”，这是一种编织的推广。这种物理学可用称为 G-交叉辫状 C*-张量范畴的数学结构来描述；在特别理想的情形下，则可用 G-交叉酉模张量范畴来描述。我们将在第 3 章探讨这些结构，并在第 7 章严格理解对称性缺陷的微观行为。

第 3 章

编织张量范畴

目录

3.1 范畴论基础.23 3.1.1 交换图.23 3.1.2 新范畴的构造.23 3.2 张量范畴.27 3.2.1 酉性.29 3.2.2 C*-性质.29 3.2.3 刚性.30 3.2.4 编织.31 3.2.5 模性.32 3.2.6 常规范畴是有限酉融合范畴.32 3.3 Drinfel'd 中心.33 3.4 G-交叉辫状 C*-张量范畴.35 3.5 Rep$D(G)$ 与 $\mathcal{Z}$(Vec(G)) 的关系 .37 3.5.1 Drinfel'd 双代数 $D(G)$ 与范畴 Rep$D(G)$. . . . . 38 3.5.2 $\mathcal{Z}$(Vec(G)) $\simeq$YD$_G$.39 3.5.3 YD$_G$ $\simeq$Rep$D(G)$.40 参考文献.42

本章将介绍编织 (C*-)张量范畴的基础知识。本章所涵盖的内容都是张量范畴中的标准内容，因此我们省略对初等事实的引用。权威的论述可见现代参考文献 [EGNO15]，精彩的入门读物可见 [KZ22]。更一般的介绍可见 [ML98]。关于 Hopf 代数及其表示论的一般讨论，我们推荐 [Kyt11], ，详尽的论述则可见 [Maj00]。

本节仅将有限维范畴作为例子略作介绍。若要了解其与 C*-代数的联系，请参阅 [JP17、CPJP22] 及其中的参考文献。

我们将大量依托 [KZ22、EGNO15] 作为本章的基础。

首先，我们回顾范畴论基础，讨论一些较为基础的构造与结构。接着，我们介绍一种称为张量范畴的特殊范畴，并在此过程中讨论刚性、酉性和编织等结构。这些结构体现了任意子普适的物理学（参见第 2 章）。最后，我们将讨论张量范畴的 Drinfel'd 中心，并通过 G-分次向量空间范畴以及 G-交叉编织 C*-张量范畴上的 Yetter-Drinfel'd 模范畴，建立它们与 Drinfel'd 中心之间的联系。 G。

3.1 范畴论基础

范畴 $\mathcal{C}$ 定义为

- 一个由对象组成的集合 $\mathcal{C}_0$ 对象 （我们将滥用记号，记作 $X \in \mathcal{C}$ if $X \in \mathcal{C}_0$）
- 一个由态射组成的集合 $\mathcal{C}_1(X \to Y)$，适用于所有 X态射 $Y \in \mathcal{C}$， $f \in \mathcal{C}_1(X \to Y)$，其中 X 是源， Y 是目标 （我们也将再次滥用记号，若 $f \in \mathcal{C}_1(X \to Y)$，则记作 $f \in \mathcal{C}(X \to Y)$）
- 态射 $f \circ g \in \mathcal{C}(X \to Z)$ 的复合，适用于 X， Y， $Z \in \mathcal{C}$和 $g \in \mathcal{C}(X \to Y)$ $f \in \mathcal{C}($ $Y \to Z)$
- 一个恒等态射 $\mathrm{Id}_X \in \mathcal{C}(X \to X)$，适用于所有 $X \in \mathcal{C}$
- 结合律：对于对象 A、 B、 C、 D 以及任意 $f \in \mathcal{C}(B \to A)$ $g \in \mathcal{C}(C \to B)$ $h \in \mathcal{C}($ $D \to C)$，我们有 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- 单位律：$\mathrm{Id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_X$，对于某些对象 X、 $Y \in \mathcal{C}$ 以及 $f \in \mathcal{C}(X \to Y)$

3.1.1 交换图

给定范畴中的态射，我们可以使用交换图以图形方式表示涉及态射的等式。例如，对于对象 W、 X、 Y、 $Z \in \mathcal{C}$ 以及态射 $f \in \mathcal{C}(W \to X)$、$g \in \mathcal{C}(W \to Y)$、 $k \in \mathcal{C}(X \to Z)$、 $j \in \mathcal{C}(Y \to Z)$，当且仅当等式 $k \circ f = j \circ g$ 成立时，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ Y & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

3.1.2 新范畴的构造

给定一个范畴 $\mathcal{C}$，我们可以构造一个范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$，其对象与 $\mathcal{C}$ 中的对象相同，但其态射空间由反转 $\mathcal{C}$ 中的态射得到：

$$\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}(X \to Y) := \mathcal{C}(Y \to X)$$

给定范畴 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$，我们可以定义笛卡尔积 $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$，其对象由 $[\mathcal{C}\times\mathcal{D}]_0$ 给出：$=\mathcal{C}_0\times\mathcal{D}_0$，而态射由以下内容给出：

$$[\mathcal{C}\times\mathcal{D}]_1(X\times Y\to X'\times Y'):=\mathcal{C}(X\to X')\times\mathcal{D}(Y\to Y')$$

定义 3.1.1. 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是两个范畴。若满足 $\mathcal{D}_0\subseteq\mathcal{C}_0$ 且对于每个 $X,Y\in\mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}$，都有 $\mathcal{D}(X\to Y)\subseteq\mathcal{C}(X\to Y)$，则称 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的一个子范畴。若对所有 $X,Y\in\mathcal{D}$，都有 $\mathcal{D}(X\to Y)=\mathcal{C}(X\to Y)$，则称 $\mathcal{D}$ 为满的。

定义 3.1.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，且 $X,Y\in\mathcal{C}$。若存在态射 $g\in\mathcal{C}(Y\to X)$，使得 $g\circ f=\mathrm{Id}_X$ 且 $f\circ g=\mathrm{Id}_Y$，则称态射 $f\in\mathcal{C}(X\to Y)$ 为一个同构。若该态射 g 存在，则称其为 f 的逆元，并记作f^{-1}。若对象 $X,Y\in\mathcal{C}$ 之间存在同构，则称它们是同构的。记作 $X\sim Y$。

定义 3.1.3。 $\mathbb{C}$-线性范畴 是指每个态射空间都配备了一个在 $\mathbb{C}$ 上的向量空间结构，且态射复合是 $\mathbb{C}$-双线性的范畴。

由于本文只考虑基域 $\mathbb{C}$，今后若 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性范畴，我们就称 $\mathcal{C}$ 为一个线性范畴 。

设 $\mathcal{C}$是一个 $\mathbb{C}$-线性范畴。对象[1]、X_1、$\cdots$、$X_n\in\mathcal{C}$的直和 $X\in\mathcal{C}$是一个配备了态射 $\iota_i\in\mathcal{C}(X_i\to X)$ 和 $\pi_i\in\mathcal{C}(X\to X_i)$ 的对象，其中 $1\le i\le n$满足以下等式：

$$\pi_i\circ\iota_j=\delta_{ij}\,\mathrm{Id}_{X_j}\qquad\forall i,j\in\{1,\cdots,n\}$$
$$\sum_{j=1}^{n}\iota_j\circ\pi_j=\mathrm{Id}_X$$

如果该直和存在，则在唯一同构意义下唯一。

定义 3.1.4。 设 $\mathcal{C}$ 是一个线性范畴。若对象 $X\in\mathcal{C}$ 满足 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X):=\mathcal{C}(X\to X)\simeq\mathbb{C}\mathrm{Id}_X$（作为代数），则称其为简单 对象。若两个对象 X、$Y\in\mathcal{C}$满足

$$\mathcal{C}(X\to Y)=0=\mathcal{C}(Y\to X)$$

我们称 $\mathcal{C}$ 为半单，如果 (1) $\mathcal{C}$ 中有限多个对象的直和存在，并且 (2) 存在一组互不相交的简单对象 $\{X_i\}_{i\in I}$，使得每个对象都同构于 $\{X_i\}_{i\in I}$中有限多个对象的直和。我们将这组对象记为 Irr($\mathcal{C}$)。如果 Irr($\mathcal{C}$) 的指标集有限，且态射空间是有限维的，那么我们称 $\mathcal{C}$ 为有限半单。

范畴之间的保结构映射称为函子。

定义 3.1.5. 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 为范畴。函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 由以下数据组成：

[1]当我们谈及直和时，将默认有限二积存在。在这种情形下，注入/投影满足二积恒等式。

- 映射 $F: \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$
- 对每一对对象 $X, Y \in \mathcal{C}$，都有一个映射 $F_{X,Y}$: $\mathcal{C}(X \to Y) \to \mathcal{D}(F(X) \to F(Y))$。我们将滥用记号：对于每个 $f \in \mathcal{C}(X \to Y)$，记 $F_{X,Y}(f)$ 为 $F(f)$。
- 给定 $f \in \mathcal{C}(X \to Y)$ 和 $g \in \mathcal{C}(Y \to Z)$，我们有 $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$
- 对于所有对象 $X \in \mathcal{C}$，都有 $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$

A $\mathbb{C}$-线性函子 是满足以下条件的函子：对于每个 $X, Y \in \mathcal{C}$，$F_{X,Y}$ 都是一个 $\mathbb{C}$-线性映射。我们也简化记法，将 F 是一个 $\mathbb{C}$-线性函子称为 F 是一个线性函子 。

引理 *3.1.6.* 设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是线性范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$之间的一个函子。那么， F 是线性的，当且仅当它保持直和；也就是说，若 $(X, \{\pi_i\}, \{\iota_i\})$ 是 $X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{C}$ 的直和，则 $(F(X)\ \{F(\pi_i)\}, \{F(\iota_i)\})$ 是 $F(X_1)$ $\cdots, F(X_n) \in \mathcal{D}$ 的直和。

证明：标准结果。例如可见于 [ML98，第 VIII 章，命题 4]. □

对于一个范畴 $\mathcal{C}$，我们可以定义一个恒等函子 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，它使该范畴中的对象和态射都保持不变。

对于两个函子 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$和 G: $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$，我们可以定义复合函子 $G \circ F$，它对每个 $f \in \mathcal{C}($ $X \to Y)$ 和对象 X， $Y \in \mathcal{C}$给出 $G \circ F$: $f \mapsto G(F(f))$.

每个函子都保持同构。事实上，如果 $f \in \mathcal{C}(X \to Y)$ 是一个同构，那么$F(f) \circ F(f^{-1}) = F($ $f \circ f^{-1}) = F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$，左逆也同样如此。

保结构映射称为自然变换：

定义 3.1.7。 设 $\mathcal{C}$， $\mathcal{D}$ 为两个范畴， F， G 为从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$的函子。自然变换 α: $F \Rightarrow G$ 是一族态射 $\{\alpha_X$: $F(X) \to G(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$，属于 $\mathcal{D}$，并满足对于任意态射 $f \in \mathcal{C}(X \to Y)$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow[\alpha_X]{} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) \end{array}$$

自然变换 α 称为自然同构，如果每个态射 α_X 都是同构。如果两个函子 F, G 之间存在自然同构 α ，那么我们称 F 与 G自然同构，记作 $F \sim G$。

定义 3.1.8. 设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子。如果存在函子 G: $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$，使得 $G \circ F \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 且 $F \circ G \sim$ $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$，则称 F 为一个等价。如果存在两个范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$之间的等价，则称它们等价，记作 $\mathcal{C} \sim \mathcal{D}$ 。

下面的定义有助于陈述一个重要定理，该定理用于计算范畴之间的等价。

定义 3.1.9. 设 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子。

F 称为忠实，如果对于对象 $X, Y \in \mathcal{C}$ ，每个映射 $F_{X,Y}$ 都是单射；如果该映射是满射，则称其为满。如果 F 既满又忠实，则称 F 为全忠实。

F 称为本质满 ，如果对 $A \in \mathcal{D}$ 中的每个对象，都存在一个对象 $X \in \mathcal{C}$，使得 $F(X) \sim A$

定理 3.1.10. 函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是等价，当且仅当它是全忠实且本质满的。

证明：这是标准结论。例如，[ML98，第 IV 章，定理 1.(iii)]中给出了证明。 □

例 3.1.10.1：Vec

这是有限维向量空间范畴。其对象是 $\mathbb{C}$ 上的有限维向量空间。给定 V，$W \in \mathbf{Vec}$，态射 $\mathbf{Vec}(V \to W)$ 定义为从 V 到 W 的线性映射所组成的集合。恒等映射是向量空间上的通常恒等映射，态射复合是向量空间之间线性映射的通常复合。Vec 按构造是一个线性范畴。Vec 中只有一个简单对象的同构类，由 $\mathbb{C}$ 表示。Vec 中的每个对象 $V \in$ 都满足 $V \sim \mathbb{C}^{\oplus n}$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$，即 V 同构于 n 个 $\mathbb{C}$ 的直和。因此，它是一个有限半单范畴。

例 3.1.10.2：Rep(G)

这是 G 的表示范畴，其中 G 是一个群。该范畴中的对象是二元组 (ρ, V)，其中 $\rho: G \to \mathbf{GL}(V)$ 是 G 到有限维向量空间 V 上的一个表示。给定两个对象 (ρ, V) 和 (σ, W)，空间 $\mathbf{Rep}(G)((\rho, V) \to (\sigma, W))$ 定义为交织态射（或简称交织算子） $f \in \mathbf{Vec}(V \to W)$ 所构成的空间，其中对所有 $g \in G$，均有 $\sigma(g) \circ f = f \circ \rho(g)$。态射复合是线性映射的通常复合，恒等映射也一样。$\mathbf{Rep}(G)$ 按构造是线性范畴；若 G 是有限群，则由马施克定理 [Ser77]，$\mathbf{Rep}(G)$ 是有限半单范畴。

定义函子 $F: \mathbf{Rep}(G) \to \mathbf{Vec}$，它将 $(\rho, V) \mapsto V$ 映射为对象 $(\rho, V) \in \mathbf{Rep}(G)$。它在态射 $f \in \mathbf{Rep}(G)((\rho, V) \to (\sigma, W))$ 上的作用是包含映射，即 $F: f \in \mathbf{Rep}(G)((\rho, V) \to (\sigma, W)) \mapsto f \in \mathbf{Vec}(V \to W)$。我们称之为遗忘函子，因为它遗忘了表示在向量空间上的作用。遗忘函子是线性的忠实函子。当且仅当 G 是平凡的时，它才是满函子。

例 3.1.10.3：Vec(G)

这是 G分次向量空间的范畴，其中 G 是一个有限群。该范畴中的对象是集合 $\{V_g \in \mathbf{Vec}\}_{g \in G}$。有限）[a] 直和 $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ 称为总体空间。我们也用 V 表示这个分次向量空间集合。对于对象 $V, W \in \mathbf{Vec}(G)$，态射 $f \in \mathbf{Vec}(G)(V \to W)$ 定义为保持次数的线性映射 $f = \bigoplus_{g \in G} f_g$，态射集合为 $\{f_g \in \mathbf{Vec}(V_g \to W_g)\}_{g \in G}$。态射复合由各分次分量上的通常态射复合给出。恒等态射是各分次分量上的通常恒等映射。按构造，该范畴是线性的。设 G 是一个有限群。那么 $\mathbf{Vec}(G)$ 是一个有限半单范畴，因为每个对象 $V = \{V_g\} \in \mathbf{Vec}(G)$ 都满足 $V \sim \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}(g)^{\oplus n(g)}$，其中 $n(g) \in \mathbb{N}$ 对每个 $g \in G$ 都成立，而 $\mathbb{C}(g) = \{\mathbb{C}(g)_h\}_{h \in G}$ 是一个 G-分次向量空间，其分量为 $\mathbb{C}(g)_h := \delta_{g,h}\mathbb{C}$。

我们可以构造一个遗忘函子 $F:\mathsf{Vec}(G)\to\mathsf{Vec}$，它将 $\{V_g\}_{g\in G}\mapsto V=\bigoplus_{g\in G}V_g$ 映射到 F。这是一个线性、忠实函子。当且仅当 G 平凡时，它是满函子。

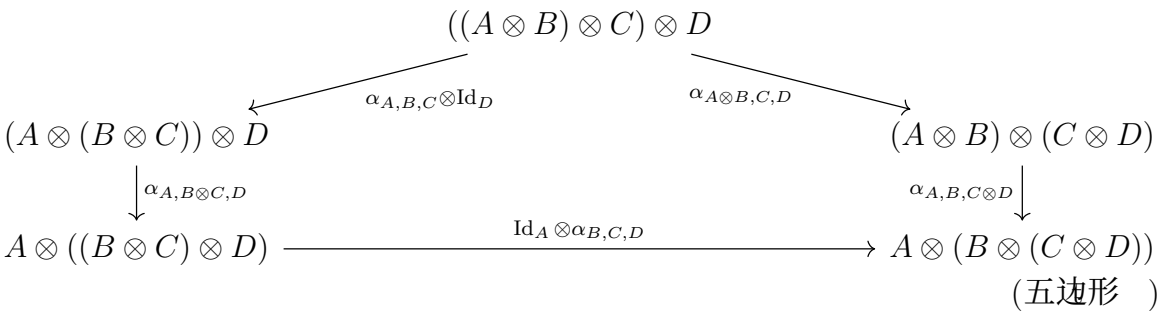
[a]只有有限多个非零分次分量

3.2 张量范畴

定义 3.2.1。张量范畴（$\mathcal{C}$，$\otimes$，$\mathbf{1}$，α，λ^L，λ^R）（也称为幺半群范畴）由以下数据组成：

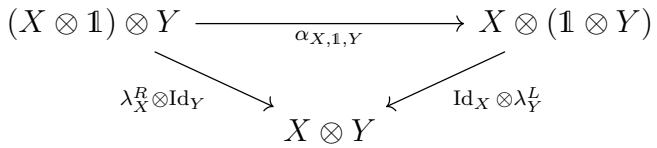
- 一个范畴 $\mathcal{C}$
- 一个函子 $\otimes:\ \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，其中 $\otimes(X,\ Y)$ 记作 $X\otimes Y$，对于态射$f\in\mathcal{C}(X\to X')$ $g\in\mathcal{C}(Y\to Y')$，$\otimes(f,\ g):\ X\otimes Y\to X'\otimes Y'$ 记作 $f\otimes g$。
- 一个称为张量单位的特殊对象 $\mathbb{1}\in\mathcal{C}$
- 自然同构 α，其中$\alpha_{X,Y,Z}:(X\otimes Y)\otimes Z\to X\otimes(Y\otimes Z)$称为结合子
- 自然同构 $\lambda^L_X:\ \mathbb{1}\otimes X\to X$ 称为左单位元约束，而 $\lambda^R_X:\ X\otimes\mathbb{1}\to X$称为右单位元约束

- 这些数据满足五边形方程，其形式如下



（五边形）

- 这些数据满足三角形方程，其形式如下



(triangle)

一个 $\mathbb{C}$-线性张量范畴 $\mathcal{C}$ 是一个线性范畴和一个张量范畴，且函子$\otimes$是双线性的，即对两个分量均为线性的。

如果结合子和单位子都平凡，则称张量范畴为严格的，也就是说，张量运算自动满足结合律和单位律。

我们滥用记号，将 $\mathcal{C}:=(\mathcal{C},\ \otimes,\ \mathbf{1},\ \alpha,\ \lambda^L,\ \lambda^R)$ 记作张量范畴，除非另有说明，否则省略张量结构。

定义 3.2.2. 设 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 为张量范畴。张量函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 由以下数据构成：

- 函子 F
- 自然同构 $F^2_{X,\,Y}\colon F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$，称为张量结构同构
- 同构 $F^0\colon \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \to F(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$，称为单位同构
- 对所有 X，Y，Z，以下图表均交换：

$$\begin{array}{ccc}
(F(X)\otimes F(Y))\otimes F(Z) & \xrightarrow{\alpha^{\mathcal{D}}_{F(X),F(Y),F(Z)}} & F(X)\otimes(F(Y)\otimes F(Z)) \\
\downarrow{\scriptstyle F^2_{X,Y}\otimes \mathrm{Id}_{F(Z)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_{F(X)}\otimes F^2_{Y,Z}} \\
F(X\otimes Y)\otimes F(Z) & & F(X)\otimes F(Y\otimes Z) \\
\downarrow{\scriptstyle F^2_{X\otimes Y,Z}} & & \downarrow{\scriptstyle F^2_{X,Y\otimes Z}} \\
F((X\otimes Y)\otimes Z) & \xrightarrow{F(\alpha^{\mathcal{C}}_{X,Y,Z})} & F(X\otimes(Y\otimes Z))
\end{array} \qquad \text{(tensor hexagon)}$$

- 对所有 $X \in \mathcal{C}$，以下图表（及其对应的 λ^R_X 情形）均交换：

$$\begin{array}{ccc}
F(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})\otimes F(X) & \xrightarrow{F^2_{\mathbb{1}_{\mathcal{C}},X}} & F(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}\otimes X) \\
\uparrow{\scriptstyle F^0\otimes \mathrm{Id}_{F(X)}} & & \downarrow{\scriptstyle F((\lambda^L_X)^{\mathcal{C}})} \\
\mathbb{1}_{\mathcal{D}}\otimes F(X) & \xrightarrow[(\lambda^L_{F(X)})^{\mathcal{D}}]{} & F(X)
\end{array} \qquad \text{(tensor unit left)}$$

同时也是等价的张量函子称为张量等价 .

定义 3.2.3。 设 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D}$ 是张量范畴，且 F，$G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是张量函子。张量自然变换 $\alpha\colon F \implies G$ 是满足以下交换图的自然变换：

$$\begin{array}{ccc}
F(X)\otimes F(Y) & \xrightarrow{F^2_{X,Y}} & F(X\otimes Y) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_X\otimes\alpha_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{X\otimes Y}} \\
G(X)\otimes G(Y) & \xrightarrow[G^2_{X,Y}]{} & G(X\otimes Y)
\end{array} \qquad \text{(tensor naturality)}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{1}_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{F^0} & F(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}) \\
& {\scriptstyle G^0}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathbb{1}_{\mathcal{C}}}} \\
& & G(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})
\end{array} \qquad \text{(张量自然单位)}$$

同时也是自然同构的张量自然变换称为张量自然同构。

定理 3.2.4 （MacLane 相干性定理）。 每个张量范畴都张量等价于一个严格张量范畴。

证明： 标准结果。例如可参见 [EGNO15，定理 2.9。2]。 □

3.2.1 酉性

定义 3.2.5。 设 $\mathcal{C}$ 为一个线性范畴。 $*$–结构（有时称为*dagger* 结构，尤其是在物理学文献中）是定义在 $\mathcal{C}$ 上的一个反变的、对合的、反线性的（在态射空间上）函子 $*\colon \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$，其在 $\mathcal{C}$ 的对象上为恒等作用。对于某个态射 $f \in \mathcal{C}(X \to Y)$，我们将 $*(f)$ 记作 f^*。

此外，如果对于任意态射 $f \in \mathcal{C}(X \to Y)$，都有 $f^* \circ f = 0$ 当且仅当 $f = 0$，则称 $*$-结构为幺正结构 。幺正范畴 $\mathcal{C}$ 是指配备了幺正结构的线性范畴。

定义 3.2.6。 酉张量范畴 是配备了幺正结构的线性张量范畴，且函子 $*$ 是张量函子，即 $f^* \otimes g^* = (f \otimes g)^*$。

定义 3.2.7。 幺正范畴中的一个态射 f 称为酉算子 ，如果它是同构且满足 $f^* = f^{-1}$。

3.2.2 C*-性质

定义 3.2.8。 C*-范畴 $\mathcal{C}$ 是一个范畴 $\mathcal{C}$，配备了一个 $*$-函子，并且空间$\mathcal{C}(X \to Y)$是巴拿赫空间，范数满足

$$||g \circ f|| \leq ||g||\,||f|| \qquad \text{（复合的压缩性）}$$
$$||f^* \circ f|| = ||f||^2 \qquad \text{(C*-identity)}$$

对于任意 $f \in \mathcal{C}(X \to Y)$ 和 $g \in \mathcal{C}(Y \to Z)$。因此，对于所有 $X \in \mathcal{C}$， $\mathcal{C}(X \to X)$ 都是 C*-代数。C*-张量范畴是同时也是张量范畴的 C*-范畴，而 $*$-函子是张量函子。

对于态射空间有限维的范畴，幺正范畴的概念等价于 C*-范畴 [Mue99，命题 2。1]。态射空间有限维的幺正范畴自动是半单的 [Yam04，引理 3。2]。

定义 3.2.9. 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 为 C*-张量范畴。函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 称为 C*-函子，如果它是线性的，且保 $*$，即对于所有 $f \in \mathcal{C}(X \to Y)$，都有 $F(f)^* = F(\{v19)$。

C*-张量函子是一个 $*$-函子，同时也是张量函子，并且其张量器和恒等同构都是酉的。

酉自然同构（有时称为 C*-同构）是一种自然变换，其每个分量都是酉算子。

3.2.3 刚性

定义 3.2.10. 设 $\mathcal{C}$ 为一个张量范畴，且 $X \in \mathcal{C}$。X 的左对偶 是一个对象$X^L \in \mathcal{C}$，配有两个态射 $b_X^L \in \mathcal{C}(\mathbb{1} \to X \otimes X^L)$ 和 $d_X^L \in \mathcal{C}(X^L \otimes X \to \mathbb{1})$，满足两个之字形 方程:

$$(\mathrm{Id}_X \otimes d_X^L) \circ (b_X^L \otimes \mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_X \qquad (d_X^L \otimes \mathrm{Id}_{X^L}) \circ (\mathrm{Id}_{X^L} \otimes b_X^L) = \mathrm{Id}_{X^L} \qquad \text{(zig-zag L)}$$

为简便起见，这里忽略结合子和单位子。类似地，X 的右对偶 是一个对象 $X^R \in \mathcal{C}$，并配备两个态射 $b_X^R \in \mathcal{C}(\mathbb{1} \to X^R \otimes X)$ 和 $d_X^R \in \mathcal{C}(X \otimes X^R \to \mathbb{1})$，满足两个之字形 方程:

$$(d_X^R \otimes \mathrm{Id}_X) \circ (\mathrm{Id}_X \otimes b_X^R) = \mathrm{Id}_X \qquad (\mathrm{Id}_{X^R} \otimes d_X^R) \circ (b_X^R \otimes \mathrm{Id}_{X^R}) = \mathrm{Id}_{X^R} \qquad \text{(zig-zag R)}$$

$\mathcal{C}$ 中的对象称为可对偶，如果它同时存在左对偶和右对偶。若 $\mathcal{C}$中的每个对象都可对偶，则称 $\mathcal{C}$ 为一个刚性张量范畴。

定义 3.2.11. 幺正融合范畴（UFC）是一个线性、刚性、酉张量范畴，同时也是有限半单的，且张量单位 $\mathbb{1}$ 是一个简单对象。

引理 3.2.12. 设 $\mathcal{C}$ 是一个刚性酉融合范畴。那么对于每个对象 $X \in \mathcal{C}$，X^L（或等价地，X^R）既是 X 的左对偶，也是其右对偶（相差一个典范同构）。

证明： 这是酉融合范畴中存在规范球结构的直接推论 [ENO05，命题 8。23]粗略来说，这意味着对每个对象，其左对偶与右对偶都相同，而且构造这个对偶对象的规范方式只有一种。□

根据引理 3.2.12的结果，在酉融合范畴 $\mathcal{C}$ 中，对于对象 $X \in \mathcal{C}$，我们将其左对偶和右对偶都记为 $X(\bar{X}, b_X, d_X)$，其中 $b_X := b_X^L = (d_X^R)^*$ 且 $d_X := d_X^L = (b_X^R)^*$。

定义 3.2.13。在酉融合范畴 $\mathcal{C}$ 中，我们将态射的迹 定义如下。取一个态射 $f \in \mathcal{C}(X \to X)$，其中 $X \in \mathcal{C}$。于是

$$\mathrm{Tr}\{f\} := b_X^* \circ (f \otimes \mathrm{Id}_{\bar{X}}) \circ b_X = d_X \circ (\mathrm{Id}_{\bar{X}} \otimes f) \circ d_X^*$$

在一般的刚性张量范畴中，我们只能定义左迹（第一个等式），并另行定义右迹（第二个等式）。但是，由于我们的范畴是酉的，而任意酉融合范畴中都存在规范球结构，因此左迹与右迹相等。

此外，我们将对象 $X \in \mathcal{C}$ 的量子维数 定义为 $\dim(X) := \mathrm{Tr}\{\mathrm{Id}_X\}$。我们将 $\mathcal{C}$ 的总量子维数定义为

$$\dim(\mathcal{C}) := \left| \sqrt{\sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} [\dim(X)]^2} \right|$$

（定义见 3.1.4，关于 Irr(的定义$\mathcal{C}$）。

设 $\mathcal{C}$ 是一个酉融合范畴。设 $X \in \mathcal{C}$ 是一个非零对象。于是，由于幺正结构以及 b_X，d_X 均非零，可得 $\dim(X) = b_X^* \circ b_X = d_X \circ d_X^* \geq 0$，因此 $\dim(\mathcal{C}) \geq 0$。

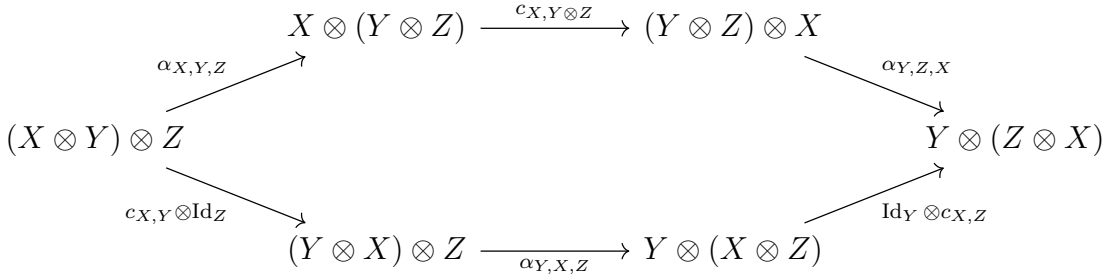
3.2.4 编织

D定义 3.2.14。一个编织张量范畴由以下数据组成 :

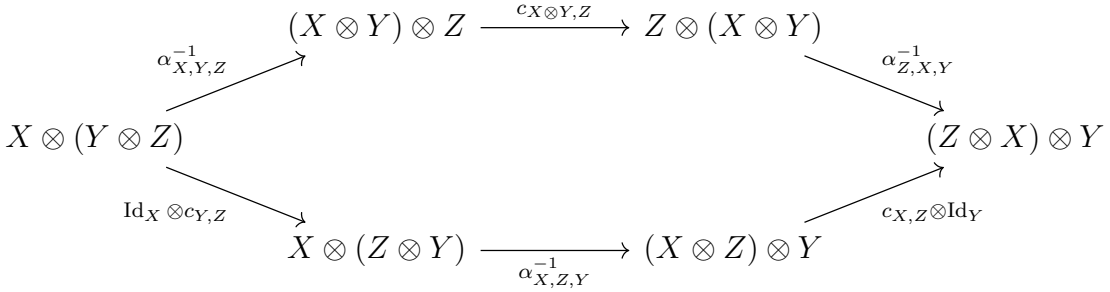
- 一个张量范畴 $\mathcal{C} = (\mathcal{C},\ \otimes,\ \mathbf{1},\ \alpha,\ \lambda^L,\ \lambda^R)$
- 一个自然同构 $c_{X,\ Y}$: $X \otimes Y \to Y \otimes X$ 对于所有 $X,\ Y \in \mathcal{C}$ 满足以下自然性方块:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y & \xrightarrow{c_{X,Y}} & Y \otimes X \\ {\scriptstyle f\otimes g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g\otimes f} \\ X' \otimes Y' & \xrightarrow[c_{X',Y'}]{} & Y' \otimes X' \end{array} \qquad \text{(编织自然性)}$$

- 这些数据满足以下交换图（称为六边形方程） :



(hexagon 1)



(六边形 2)

定义 3.2.15。设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 为编织张量范畴。一个编织张量函子（或简称编织函子）F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个张量函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，满足对于任意 X、$Y \in \mathcal{C}$，下图交换:

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{F^2_{X,Y}} & F(X \otimes Y) \\ {\scriptstyle c^{\mathcal{D}}_{F(X),F(Y)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(c^{\mathcal{C}}_{X,Y})} \\ F(Y) \otimes F(X) & \xrightarrow{F^2_{Y,X}} & F(Y \otimes X) \end{array} \qquad \text{(braided functor)}$$

编织 张量函子，同时也是一个等价的函子，被称为编织等价 .

定义 3.2.16。配备 $*$-函子的编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 称为幺正辫编张量范畴，如果该 $*$-函子是一个编织函子，并且编织同构是酉算子。

同时也是幺正融合范畴的幺正辫编张量范畴 $\mathcal{C}$ 称为幺正辫编融合范畴。

3.2.5 模性

定义 3.2.17。 设 $\mathcal{C}$ 是一个幺正辫编融合范畴。那么 $\mathcal{C}$ 称为酉模张量范畴 （UMTC），如果对于任意简单对象 $X \in \mathcal{C}$ 对于所有对象 $Y \in \mathcal{C}$ 单位元 $c_{Y,\,X} \circ c_{X,\,Y} = \mathrm{Id}_{X\otimes Y}$ 蕴含 $X \simeq \mathbb{1}$ [2]。

这一原理源自远程可探测性原理，而后者与拓扑相中的反常有关。

3.2.6 常规范畴是有限酉融合范畴

本节将详细阐述示例3.1.10.1、3.1.10.2、3.1.10.3中讨论的常规范畴所具有的结构。

首先注意到，由于 Vec 的对象是有限维希尔伯特空间，因此总可以轻易地为它赋予内积这一额外结构。因此，存在一个等价关系 Vec $\simeq$ Hilb，其中 Hilb 是有限维希尔伯特空间范畴。此后我们假设 Vec 是有限维希尔伯特空间范畴，而 Vec(G) 是有限维 G-分次希尔伯特空间范畴。因此，Vec 是一个带有算子范数的 C*-范畴，并且 $*$-函子是通常的向量空间伴随。

同样，每个在有限维希尔伯特空间上的 G-表示都等价于一个酉 G-表示。因此，不失一般性，我们假设 Rep(G) 是有限维酉表示范畴。

例 3.2.17.1：Vec

我们可以按通常方式定义张量函子 $\otimes$，即将有限维希尔伯特空间的张量积赋予 Vec，使其成为严格张量范畴。结合子 α和单位子由典范酉同构给出。根据 Mac Lane 相干定理，我们可以将 Vec 严格化，并将其视为严格张量范畴。根据上述讨论，Vec 是一个 C*-张量范畴（经直接验证 $f^* \otimes g^* = (f \otimes g)^*$ 后），其态射空间有限维，因此是一个酉张量范畴。我们定义求值映射 d_V：$V \otimes V \to \mathbb{C}$ （这里 V是 V的共轭空间），其中 d_V：$\bar{v} \otimes w \mapsto \langle v, w\rangle$；而余求值映射 b_X：$\mathbb{C} \to V \otimes V$由$1 \mapsto \sum_i e_i \otimes \bar{e}_i$给出，其中 e_i是 V的标准正交基向量。容易验证之字形方程，由此可知 Vec 确实是一个酉融合范畴。

例 3.2.17.2：Rep(G)

Rep(G) 在赋予 G-表示通常的代数（结合）张量积后，构成一个严格张量范畴。它是一个 C*-范畴，带有 $*$ 通常的伴随运算，且与 $\otimes$ 中的结构相容，如 Vec 中的情形，从而构成一个 C*-张量范畴。由于态射空间是有限维的，Rep(G) 是一个酉张量范畴。对于任意表示（π，V），我们将对偶表示（$\bar{\pi}$，V）[a]定义为 $\pi(g)\bar{v} :=$

[2]所有此类对象的集合称为 M¨uger 中心，这一条件等价于 M¨uger 中心是平凡的。参见 [M¨ug03]。

$\overline{\pi}(g)v$ 对所有 $\bar{v} \in V$ 均成立。求值映射和余求值映射继承自 Vec。继承的求值映射 d_V 是 $(\bar{\pi}, V) \otimes (\pi, V)$ 与 $(\pi_1, \mathbb{C})$ 之间的交织算子；继承的余求值映射同样是 $(\pi_1, \mathbb{C})$ 与 $\overline{(\pi, V) \otimes (\bar{\pi}, V)}$ 之间的交织算子。因此，Rep(G) 是一个刚性范畴。结合这些结构可知，Rep(G) 是一个酉融合范畴（UFC）。

[a] 这里 V 是与 V 对应的共轭希尔伯特空间。

例 3.2.17.3：Vec(G)

态射保持对象的分次。张量积定义为

$$(V \otimes W)_g := \bigoplus_{jk=g} V_j \otimes W_k$$

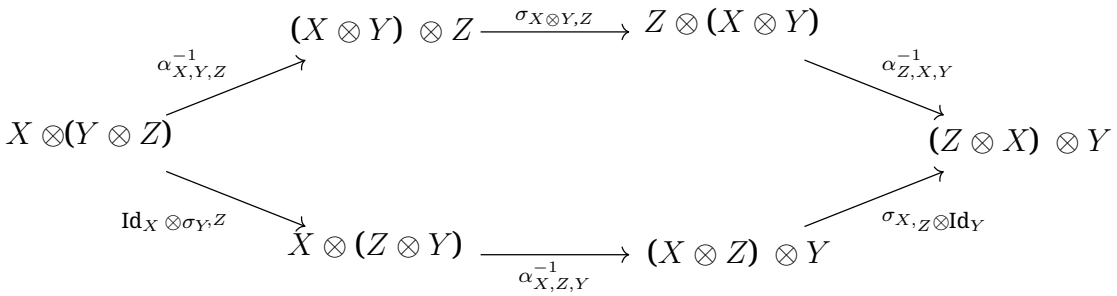
其中，张量积继承自 Vec，并将 V_j，W_k 视为 Vec 中的对象。继承自 Vec 的通常 $*$-函子保持分次，使 Vec(G) 成为一个 C*-范畴。此外，$*$-函子与态射的张量积相容，因为它保持分次。因此，Vec(G) 是一个（有限维）C*-张量范畴，因而也是一个酉张量范畴。

对于希尔伯特空间，我们将其视为 Vec 中的分次版本，因此 Vec(G) 是一个酉融合范畴。

3.3 Drinfel'd 中心

定义 3.3.1。设 $\mathcal{C}$ 是一个结合子为 α 的 C*-张量范畴。$\mathcal{C}$ 的*Drinfel'd* 中心（或简称中心）是一个范畴 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$，定义如下：

- $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的对象是二元组 $(X, \sigma_{X,\,(\cdot)})$，其中 $X \in \mathcal{C}$，且半编织 $\sigma_{X,\,(\cdot)}$ 满足：$\sigma_{X,\,Y}$: $X \otimes Y \to Y \otimes X$ 是关于 Y 的酉算子自然同构，对所有 $Y \in \mathcal{C}$ 均成立。
- $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的态射 f: $(X, \sigma_X) \to (X', \sigma_{X'})$ 是态射 f: $X \to X'$，且在 $\mathcal{C}$ 中对所有 $Y \in \mathcal{C}$ 均满足：
$$(\mathrm{Id}_Y \otimes f) \circ \sigma_{X,Y} = \sigma_{X',Y} \circ (f \otimes \mathrm{Id}_Y)$$
- $\sigma_{X,Z}$ 对所有 $Z \in \mathcal{C}$ 都满足以下交换图：



（半编织六边形）

请注意，该交换图与六边形 2 交换图相同，这有助于理解 $\sigma_{X,(\cdot)}$ 这一命名的由来。

$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 实际上是一个带编织结构的 C*-张量范畴，其张量积结构定义为

$$(X_1, \sigma_{X_1,(\cdot)}) \otimes (X_2, \sigma_{X_2,(\cdot)}) := (X_1 \otimes X_2, \sigma_{X_1 \otimes X_2,(\cdot)})$$

而 $*$-函子、结合子 α 和单位子继承自 $\mathcal{C}$。这里，$\sigma_{X_1\otimes X_2,X} : (X_1 \otimes X_2) \otimes Y \to Y \otimes (X_1 \otimes X_2)$ 定义为

$$\sigma_{X_1\otimes X_2,Y} := \alpha_{Y,X_1,X_2} \circ (\sigma_{X_1,Y} \otimes \mathrm{Id}_{X_2}) \circ \alpha^{-1}_{X_1,Y,X_2} \circ (\mathrm{Id}_{X_1} \otimes \sigma_{X_2,Y}) \circ \alpha_{X_1,X_2,Y}$$

$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的 编织由下式给出

$$c_{(X,\sigma_X),(Y,\sigma_Y)} := \sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

注记 3.3.2. Drinfel'd 中心的构造具有物理动机。考虑一个酉融合范畴 $\mathcal{C}$。由于 $\mathcal{C}$ 中没有编织同构，因此原则上并没有交换张量因子的概念。不过，$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 中的对象具有半编织，因此给定一个对象 $(Z, \sigma_{Z,(\cdot)}) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 和 $X \in \mathcal{C}$，确实可以交换张量因子 $Z \otimes X$，这是借助半编织同构 $\sigma_{Z,X}$ 实现的。从物理角度看，这可以解释为对象 Z 在 $\sigma_{Z,X}$ 的帮助下“穿过”对象 X。

命题 3.3.3 ([M¨ug03, Tur16])。如果 $\mathcal{C}$ 是一个酉融合范畴，那么 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 是一个酉模张量范畴。

注记 3.3.4. 注意，根据命题 3.3.3 以及第 3.2.6 节中的讨论，Drinfel'd 中心 $\mathcal{Z}(\mathsf{Vec})$ $\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G))$ $\mathcal{Z}(\mathsf{Rep}(G))$ 是一个酉模张量范畴。事实上，$\mathcal{Z}(\mathsf{Vec})$ 是一个平凡的酉模张量范畴，因为 Vec （其编织同构为交换同构）是一个平凡的酉模张量范畴，并且 Vec 的 Drinfel'd 中心就是其自身，其中半编织即为交换。

例 3.3.4.1：$\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G))$

作为一个有用的例子，我们为范畴 $\mathsf{Vec}(G)$ 构造 Drinfel'd 中心。*Drinfel'd 中心* $\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G))$ 是一个具有以下内容的范畴，

- 对象：配对 $(V, \sigma_{V,(\cdot)})$，其中 $V \in \mathsf{Vec}(G)$。
- 态射：$f : (V, \sigma_{V,(\cdot)}) \to (V', \sigma'_{V',(\cdot)})$ 是映射 $f : V \to V'$ 在 $\mathsf{Vec}(G)$ 中，使得

that

$$(\mathrm{Id}_W \otimes f) \circ \sigma_{V,W} = \sigma'_{V',W} \circ (f \otimes \mathrm{Id}_W) \qquad \forall W \in \mathsf{Vec}(G)$$

张量积是

$$(V, \sigma_{V,(\cdot)}) \otimes (W, \delta_{W,(\cdot)}) := \big(V \otimes W,\ \sigma_{V\otimes W,(\cdot)}\big)$$
$$\sigma_{V\otimes W,X} := \alpha_{X,V,W} \circ (\sigma_{V,X} \otimes \mathrm{Id}_W) \circ \alpha^{-1}_{V,X,W} \circ (\mathrm{Id}_V \otimes \delta_{W,X}) \circ \alpha_{V,W,X},$$

其单位对象为 $(\mathbb{1},\ \sigma_{\mathbb{1},\ (\cdot)})$，由单位子给出。编织由以下给出

$$c_{(V,\sigma_{V,(\cdot)}),(W,\delta_{W,(\cdot)})} := \sigma_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$$

注 3.3.5。 存在一个显然的遗忘函子 $F\colon \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$，其定义如下

$$F((X, \sigma_{X,(\cdot)})) \mapsto X$$

容易证明， F 是一个 C*-张量函子，因为它在 $\mathcal{Z}(C)$ 的 C*-张量结构上作用平凡。

3.4 G-交叉辫状 C*-张量范畴

定义 3.4.1。 [EGNO15，定义 8.24。1] 一个 G-交叉辫状 C*-张量范畴 对于有限群 G由以下组成:

1. 一个（不一定忠实的） G–分次

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{C}_g, \qquad \mathcal{C}_g \otimes \mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}_{gh}, \quad \mathbb{1} \in \mathcal{C}_e$$

w这里 $\mathcal{C}$ 是一个 C*–张量范畴，且所有结构同构都是酉算子 .

2. 酉张量 G–作用 $\gamma\colon G \to \mathsf{Aut}(\mathcal{C})$, $g \mapsto \gamma_g$ 其中

$$\gamma_g(\mathcal{C}_h) \subset \mathcal{C}_{ghg^{-1}}$$

以及酉张量结构

$$\mu_g^{X,Y} : \gamma_g(X) \otimes \gamma_g(Y) \to \gamma_g(X \otimes Y) \quad X, Y \in \mathcal{C}, \qquad \mu_g^0 : \mathbb{1} \to \gamma_g(\mathbb{1})$$

以及酉张量自然同构

$$\eta_{g,h} : \gamma_g \circ \gamma_h \Rightarrow \gamma_{gh}$$

满足 $\eta_{g,\ h}$ 的标准五边形关系，以及 μ、γ 的相容性。这保证了 $\gamma : G \to$Aut($\mathcal{C}$) 是一个张量函子。

3. 一个 G–编织：对于 $X \in \mathcal{C}_g$ 和 $Y \in \mathcal{C}$，一个酉自然同构

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \to \gamma_g(Y) \otimes X$$

它在两个变量中都自然，并满足

$$c_{X,\mathbb{1}} = \mathrm{Id}_X \ \ (\text{via } \mu_g^0) \qquad\qquad c_{\mathbb{1},Y} = \mathrm{Id}_Y$$

以及以下相干条件 [EGNO15，式（8.105）–（8.107）]。

4. 在 γ_g下的等变性：对于所有 g， $h \in G$, $X \in \mathcal{C}_h$, $Y \in \mathcal{C}$，该图表

$$\begin{array}{ccc}
\gamma_g(X) \otimes \gamma_g(Y) & \xrightarrow{c_{\gamma_g(X),\gamma_g(Y)}} & \gamma_{ghg^{-1}}\big(\gamma_g(Y)\big) \otimes \gamma_g(X) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (\mu_g^{X,Y})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\eta_{ghg^{-1},g})_Y \otimes \mathrm{Id}_{\gamma_g(X)}} \\
\gamma_g(X \otimes Y) & & \gamma_{gh}(Y) \otimes \gamma_g(X) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_g(c_{X,Y})} & & \Big\uparrow{\scriptstyle (\eta_{g,h})_Y \otimes \mathrm{Id}_{\gamma_g(X)}} \\
\gamma_g\big(\gamma_h(Y) \otimes X\big) & \xrightarrow[(\mu_g^{\gamma_h(Y),X})^{-1}]{} & \gamma_g\big(\gamma_h(Y)\big) \otimes \gamma_g(X)
\end{array}$$

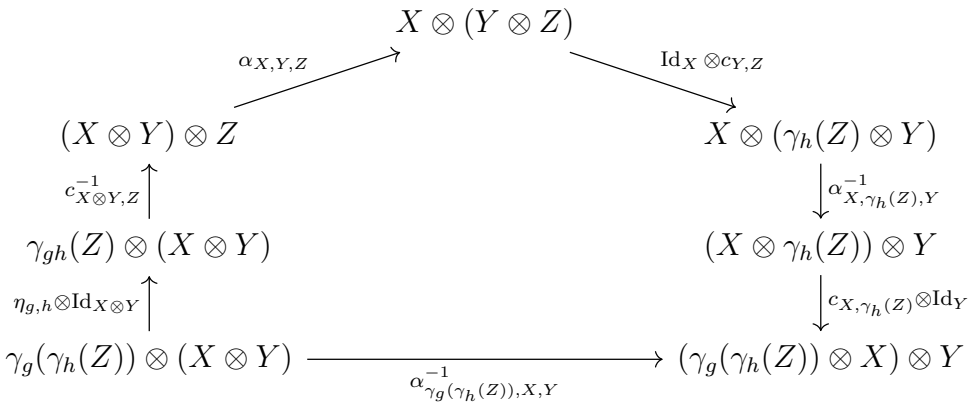
G–等变（编织）

5. 对于 $g \in G$, $X \in \mathcal{C}_g$, Y， $Z \in \mathcal{C}$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (X \otimes Y) \otimes Z & & \\
 & \swarrow^{\alpha_{X,Y,Z}} & & \searrow^{c_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z} & \\
X \otimes (Y \otimes Z) & & & & (\gamma_g(Y) \otimes X) \otimes Z \\
\Big\downarrow{\scriptstyle c_{X,Y\otimes Z}} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{\gamma_g(Y),X,Z}} \\
\gamma_g(Y \otimes Z) \otimes X & & & & \gamma_g(Y) \otimes (X \otimes Z) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (\mu_g^{Y,Z})^{-1} \otimes \mathrm{Id}_X} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_{\gamma_g(Y)} \otimes c_{X,Z}} \\
(\gamma_g(Y) \otimes \gamma_g(Z)) \otimes X & & \xrightarrow[\alpha_{\gamma_g(Y),\gamma_g(Z),X}]{} & & \gamma_g(Y) \otimes (\gamma_g(Z) \otimes X)
\end{array}$$

(heptag$^{\text{在 1)上}}$

6. 对所有 g、 $h \in G$、 $X \in \mathcal{C}_g$、 $Y \in \mathcal{C}_h$、 $Z \in \mathcal{C}$，下图交换：



(h八边形 2)

3.5 Rep$D(G)$ 与 $\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G))$的关系

本节将证明， $\mathcal{Z}$(Vec(G)) 与 Rep$D$(G) 在编织 C*-张量意义下等价；后者是量子双代数的表示范畴（定义如下）。为此，我们需要 YD$_G$，即 Yetter-Drinfel'd 范畴。

读者也可以将本节视为对量子双范畴的基础介绍；这是本文研究的一个关键对象。

定义 3.5.1. 我们将 Yetter-Drinfel'd 模范畴 YD$_G$ 记为 C*–张量范畴，其对象是有限 G–分次希尔伯特空间

$$V = \bigoplus_{g\in G} V_g$$

该空间配备酉作用 $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$，并满足共轭协变性

$$\rho(h)(V_g) \subset V_{hgh^{-1}} \qquad (\forall\, g, h \in G)$$

态射同时保持分次和作用。其张量结构为分次张量积

$$(V \otimes W)_x = \bigoplus_{ab=x} V_a \otimes W_b, \qquad \rho(h)(v \otimes w) := \rho(h)v \otimes \rho(h)w$$

并且 C*–结构是逐分量继承的。

编织同构由下式给出

$$c^{\mathsf{YD}}_{V,W}(v_g \otimes w) = (\rho(g)w) \otimes v_g \qquad v_g \in V_g,$$

按线性延拓。

3.5.1 Drinfel'd 双代数 $D(G)$与范畴Rep$D(G)$。

[Maj00, 第 7] 章。设 $\mathbb{C}G$ 为群代数, $\mathbb{C}^G$ 为以以下元素为基的函数代数$\{\delta_s\}_{s\in G}$。量子双是交叉的（双交叉的）Hopf代数

$$D(G) = \mathbb{C}^G \bowtie \mathbb{C}G \quad (\text{as a vector space } \mathbb{C}^G \otimes \mathbb{C}G)$$

其中:

- 交叉关系: $\delta_x g = g\delta_{g^{-1}xg}\,(x, g \in G)$,
- 乘法: $(\delta_s \otimes g)(\delta_t \otimes h) = \delta_{s,\ gtg^{-1}}\,(\delta_s \otimes gh)$,
- $*$-结构: $\delta_g^* = \delta_g$, $g^* = g^{-1}$, $(\delta_h \otimes g)^* = \delta_{ghg^{-1}} \otimes g^{-1}$,
- *Hopf* 结构:

$$\Delta(\delta_s \otimes g) = \sum_{ab=s} (\delta_a \otimes g) \otimes (\delta_b \otimes g), \qquad \epsilon(\delta_s \otimes g) = \delta_{s,e}, \qquad S(\delta_s \otimes g) = \delta_{g^{-1}s^{-1}g} \otimes g^{-1}.$$

万有 R矩阵[3] 是

$$R = \sum_{g\in G} (\delta_g \otimes 1) \ \otimes \ (1 \otimes g) \ \in D(G) \otimes D(G)$$

它满足拟三角恒等式

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})(R) = R_{13}R_{23}, \quad (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}, \quad \Delta^{\mathrm{opp}}(x) = R\Delta(x)R^{-1} (\forall x \in D(G))$$

定义 3.5.2. 范畴 Rep$D(G)$ 定义如下。

- 对象: </style}有限维 () -表示 (, π_V)。
- 态射: 有界线性映射 f: $V \to W$, 使得: $f\pi_V(x) = \pi_W(x)f$, 对所有 $x \in D(G)$ 均成立。

它是一个线性 C*-张量范畴, 其张量积为

$$(V, \pi_V) \otimes (W, \pi_W) := (V \otimes W, \pi_{V\otimes W}) \qquad \pi_{V\otimes W}(x) := (\pi_V \otimes \pi_W)\big(\Delta(x)\big) \qquad x \in D(G)$$

单位对象（$\mathbb{C}$, $\epsilon(x)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$）以及从向量空间继承的（严格）结合律/单位律。Rep$D(G)$上的编织为

$$c^{D(G)}_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V, \qquad c^{D(G)}_{V,W} = \tau \circ (\pi_V \otimes \pi_W)(R)$$

其中 τ 是翻转映射 $v \otimes w \mapsto w \otimes v$。这使Rep$D(G)$成为一个编织C*-张量范畴。该范畴具有刚性, 其对偶 V^* 所携带的作用为

$$\pi_{V^*}(x)\phi := \phi \circ \pi_V\big(S(x)\big) \qquad (x \in D(G),\ \phi \in V^*)$$

以及通常的求值映射/余求值映射。

[3]粗略地说, 它是Hopf代数上的一个编织同构

在 [Gou93], 中，已证明 Rep$D(G)$ 中的不可约对象由二元组（C， π_{Z_C}）分类，其中 $C \subset G$ 是 G的一个共轭类， $Z_C \subset G$ 是代表元 $g_C \in C$ 的中心化子，而 π_{Z_C} 是 Z_C 的一个不可约表示。在 Kitaev 量子双模型中，这一事实被关键性地用于构造与 $D(G)$ 的每个不可约表示相对应的代表态和弦算符（参见章节 5，尤其是第 5.3.3、5.4.1 节，以了解这一标准事实的更多细节）。

在 [BV25] 中证明了，不可约任意子表示由Rep$D(G$的不可约对象分类。这是分析[BHNV26], 的基石结果；该工作构造了任意子范畴，并证明它与*编织 C-等价于Rep$D(G)$。

3.5.2 $\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G)) \simeq \mathsf{YD}_G$.

参考文献 [EGNO15，命题 7.15，3] 概述了更一般设定下的(C*-张量）等价。这里我们补充一些基本细节，并将其提升为编织等价。令$\mathbb{C}(h) \in$ Vec(G表示集中在次数 $h \in G$上的一维分次对象，并固定单位向量 $e_h \in \mathbb{C}(h)$。

定义酉作用 $\rho^\gamma: G \to \mathrm{Aut}(V)$，其定义为

$$\lambda_V^L \circ \left(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}(h)} \otimes \rho^\gamma(h)\right) := \gamma_{V,\mathbb{C}(h)} \circ \left(\mathrm{Id}_V \otimes (\lambda^R_{\mathbb{C}(h)})^{-1}\right)$$

等价地,

$$e_h \otimes \rho^\gamma(h)v := \gamma_{V,\mathbb{C}(h)}(v \otimes e_h) \qquad (h \in G,\ v \in V)$$

Set

$$\Phi(V,\gamma) := (V, \rho^\gamma) \in \mathsf{YD}_G, \qquad \Phi(f) := f \ \text{ on morphisms.}$$

命题 3.5.3。 Φ 是良定义的编织 C*–张量等价。

证明： $\gamma_{V,(\cdot)}$ 关于包含关系 $\mathbb{C}(h) \hookrightarrow W$ （对任意 $W \in$ Vec(G)）的自然性蕴含群律 $\rho^\gamma(hk) = \rho^\gamma(h)\rho^\gamma(k)$ 以及协变性 $\rho^\gamma(h)(V_g) \subset V_{hgh^{-1}}$。

γ 的酉性蕴含每个 $\rho^\gamma(h)$ 都是酉的，因此 Φ是一个 C*–函子。

$(V,\gamma) \otimes (W,\delta)$ 上的半编织等于

$\gamma_{V\otimes W,(\cdot)} = (\mathrm{Id} \otimes \alpha) \circ (\delta_{W,(\cdot)} \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \gamma_{V,(\cdot)}) \circ \alpha^{-1}$，因此 $\rho^{\gamma\otimes\delta}(h) = \rho^\gamma(h) \otimes \rho^\delta(h)$。于是， Φ 的张量结构同构在 $V \otimes W$ 上为单位元，且 Φ 是一个 C*-张量函子。

对于齐次的 $v \in V_g$, $w \in W$,

$$c^{\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G))}_{(V,\gamma_{V,(\cdot)}),(W,\delta_{W,(\cdot)})}(v \otimes w) = \gamma_{V,W}(v \otimes w) = \rho^\gamma(g)(w) \otimes v = c^{\mathsf{YD}}_{\Phi(V,\gamma_{V,(\cdot)}),\Phi(W,\delta_{W,(\cdot)})}(v \otimes w)$$

由于 Φ是底层线性映射上的单位元，因此它是忠实的。若 $f: V \to W$ 是 YD_G中的一个态射，则对所有 $h \in G$，都有 $f\rho^\gamma(h) = \rho^\delta(h)f$，这等价于

$$(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}(h)} \otimes f)\gamma_{V,\mathbb{C}(h)} = \gamma_{W,\mathbb{C}(h)}(f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{C}(h)})$$

由于简单对象 $\mathbb{C}(h)$ 在有限直和和张量积下生成 Vec(G)，这正是定义 $\mathcal{Z}$(Vec(G)) 中态射的自然性条件。因此

$$\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G))((V,\gamma),(W,\delta)) = \mathsf{YD}_G(\Phi(V,\gamma),\Phi(W,\delta))$$

所以 Φ 是满且忠实的。

设 $(V,\ \rho,\ \bigoplus_{g\in G}V_g)\in \mathsf{YD}_G$。定义 $\gamma_{V,\ \mathbb{C}(h)}\colon\ V\otimes\mathbb{C}(h)\ \to\mathbb{C}(h)\ \otimes V$为

$$\gamma_{V,\mathbb{C}(h)}(v\otimes e_h):=e_h\otimes\rho(h)v,$$

并利用可加性和在 X 中的乘法性，唯一地延拓到所有 $X\in\mathsf{Vec}(G)$（对象 $\mathbb{C}(h)$ 生成 $\mathsf{Vec}(G)$）。Yetter–Drinfel'd 条件等价于中心六边形公理，因此这给出了一个半编织 γ，使得 $(V,\ \gamma)\in\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G))$；根据构造，$\Phi(V,\ \gamma)=(V,\ \rho)$。由此得到本质满射性。□

注 3.5.4。遗忘张量函子 $U\colon\mathsf{YD}_G\to\mathsf{Vec}(G),\ (V,\ \rho)\ \mapsto V$，在 Φ 下对应于典范遗忘函子 $F\colon\ \mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G))\ \to\ \mathsf{Vec}(G)$。全忠实的张量嵌入 $\mathsf{Vec}(G)\hookrightarrow\mathsf{YD}_G$ 仅当定义在支撑于 $Z(G)$ 的全子范畴上时才存在（平凡作用仅在该处与 YD 兼容）。

3.5.3 $\mathsf{YD}_G\simeq\mathsf{Rep}D(G)$

定义函子

$$\Psi:\mathsf{YD}_G\longrightarrow\mathsf{Rep}D(G),\qquad(V,\rho,\bigoplus_{g\in G}V_g)\ \longmapsto\ \pi_V$$

在生成元上定义为

$$\pi_V(\delta_g\otimes 1):=P_g\qquad\pi_V(1\otimes g):=\rho(g)$$

并按乘法延拓。这里 P_g 是投影 $P_g\colon\ V\ \to\ V_g$。它在态射上的作用是单位元。

命题 3.5.5。函子 Ψ 是良定义的编织 C^*–张量等价。

证明：注意，根据定义，$\rho(g)V_h\ \subset\ V_{ghg^{-1}}$，我们有 $\rho(g)P_h\ =\ P_{ghg^{-1}}\rho(g)$，因此$\pi_V$ 满足 $D(G)$ 的交叉关系。可以直接验证，π_V 是 $D(G)$的一个 $*$-同态。函子 Ψ 也保持分次和作用。

显然，Ψ 是一个 C^*-函子。此外，将 $\Psi^0:\mathbb{1}\to\Psi(1)$ 定义为平凡模上的单位元，并将张量结构同构 $\Psi^2_{V,W}\colon\ \Psi(V)\ \otimes\Psi(W)\ \to\Psi(V\otimes W)$ 定义为 $V\otimes W$ 上的单位元后，可以证明 Ψ 是一个 C^*-张量函子。事实上，只需验证以下恒等式

$$\pi_{V\otimes W}(x)=(\pi_V\otimes\pi_W)\big(\Delta(x)\big)\qquad x\in D(G)$$

在 $D(G)$ 的生成元上成立即可。

因此，$\Psi^2_{V,W}$显然是一个 $D(G)$–交织算子，且关于 V,W 自然；与结合子和单位子的相干性显然成立，因为所有结构映射在底层空间上都是单位元。

$\mathsf{Rep}D(G)$ 中的编织由 $c^{D(G)}_{\Psi\ V\ ()\ \Psi(W)}=\tau\circ(\pi_V\otimes\pi_W)(R)$ 给出。令 $v_h\in V_h$ 为齐次的，且 $w\in W$。根据 π_V,π_W 和 R 的定义，我们确认

$$(\pi_V\otimes\pi_W)(R)(v_h\otimes w)=\sum_{g\in G}(P_gv_h)\otimes\rho_W(g)w=v_h\otimes\rho_W(h)w$$

so

$$c^{D(G)}_{\Psi(V),\Psi(W)}(v_h \otimes w) = \rho_W(h)w \otimes v_h$$

这正是编织 $c^{\mathsf{YD}}_{V,W}$。由此可知，编织方块交换，且 Ψ 是带编织的。

其余所有单位／自然性公理都可由定义直接得到。因此， Ψ 是一个编织的 C*–张量函子。

函子 Ψ 按设计是满且忠实的；对于任意 $(\pi,\ V) \in \mathsf{Rep}D(G)$，我们在 V 上定义分次为 $V_g := \pi(\delta_g \otimes 1)V$，并将 $\rho:\ G \to \mathsf{Aut}(V)$ 定义为 $\rho(g)v \mapsto \pi(1 \otimes g)v$。因此，$(V,\ \rho,\ \oplus_{g\in G}V_g) \in \mathsf{YD}_G$，并满足 $\Psi(V,\ \rho_\pi,\ \oplus_{g\in G}V_g) = (\pi_V,\ V)$，这表明 Ψ具有本质满射性。

因此我们得到， Ψ是一个编织的 C*-张量等价。 □

结合命题 3.5.3 和 3.5.5，我们已经证明，

定理 3.5.6。 *[EGNO15，第 7.14、8 节。5]* 存在编织的 C*–张量等价

$$\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G)) \ \simeq\ \mathsf{YD}_G \ \simeq\ \mathsf{Rep}D(G)$$

特别地，$\mathsf{Rep}D(G)$,YD_G 是酉模张量范畴。

注 3.5.7. [EGNO15]给出的证明如下。根据 [EGNO15, 命题 7.14.16, 7.14.18(iii)]，我们有 $\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G)) \simeq \mathsf{Rep}D(G)$。根据 [EGNO15, 命题 7.15.3]，我们有 $\mathsf{YD}_G \simeq \mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G))$。正如 [EGNO15, 例 8.5.5, 8.5.6]中所指出的，这里的等价实际上是编织等价。将其提升为编织 C*-等价是平凡的。

注 3.5.8. 该定理与物理学中无处不在的凝聚和规范化概念有着深刻联系。粗略地说，它指出，可以从一个自由度为带兼容 G-作用的 G-分次向量空间的系统出发，并通过对 G-作用进行规范化来理解系统中的任意子。等价地，也可以从一个承载着对应于量子双 $D(G)$相的任意子的系统出发，通过凝聚这些任意子，在系统上得到一个 G-作用。

注 3.5.9。 这个定理具有很强的可推广性；事实上，若将 G替换为任意弱 Hopf-$*$ 代数（不一定是有限维的），并对 $\mathsf{Vec}(G)$,YD_G 的定义作适当推广，该定理仍然成立。

注 3.5.10. 我们指出上述定理在 Kitaev 量子双模型中的物理重要性。编织等价 $\mathcal{Z}(\mathsf{Vec}(G)) \simeq \mathsf{Rep}D(G)$ 告诉我们，事实上 $\mathsf{Rep}D(G)$ 中的对象能够与 $\mathsf{Vec}(G)$ 中的对象 “ 交叉 ”（参见注记 3.3.2）。由于 QD 的每条边都赋予一个 G-分次向量空间[4]，其范畴模型由 $\mathsf{Vec}(G)$ 给出，我们看到 $\mathsf{Rep}D(G)$ 中的对象可自然地解释为任意子，因为借助半编织同构，它们能够在每条边上自由地与 $\mathsf{Vec}(G)$ 中的对象“交叉”。

[4]严格来说，这在 Kitaev 最初提出的模型中并不成立，但在一个等价的模型中成立，该模型称为 Levin-Wen 模型，其输入范畴为 $\mathsf{Vec}(G)$。这两个模型处于同一个相中。

参考文献

[BHNV26] Alex Bols、Mahdie Hamdan、Pieter Naaijkens 和 Siddharth Vadnerkar。非阿贝尔量子双模型的任意子扇区范畴。《数学物理通讯》407，2，407，2026年。[BV25] Alex Bols 和 Siddharth Vadnerkar。Kitaev量子双模型的任意子扇区分类：A. Bols，S. Vadnerkar。《数学物理通讯》406(8):188，2025。[CPJP22] Quan Chen、Roberto Hern´andez Palomares、Corey Jones 和 David Pen- neys。C∗ 2-范畴的 Q-系统完备化。《泛函分析杂志》283(3):109524，2022年。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。张量范畴，第205卷。美国数学学会，2015。[ENO05] Pavel Etingof、Dmitri Nikshych 和 Viktor Ostrik。论融合范畴。《数学年刊》，第581–642页，2005年。[Gou93] MD Gould。有限群量子双代数及其表示。《澳大利亚数学学会通报》48(2):275–301，1993年。[JP17] Corey Jones 和 David Penneys。刚性 c*-张量范畴中的算子代数。《数学物理通讯》355(3):1121–1188，2017年。[Kyt11] Kalle Kyt¨ol¨a。Hopf 代数与表示导论。课程讲义，2011年。[KZ22] Liang Kong 和 Zhi-Hao Zhang。拓扑序与范畴论导论。arXiv:2205.05565，2022年。[Maj00] Shahn Majid。量子群理论基础。剑桥大学出版社，2000年。[ML98] Saunders Mac Lane。工作数学家的范畴论，第5卷。施普林格科学与商业媒体，1998年。[Mue99] Michael Mueger。编织张量范畴的伽罗瓦理论与模闭包，1999年。[M¨ug03] Michael M¨uger。论模范畴的结构。《伦敦数学会会刊》87(2):291–308，2003年。[Ser77] Jean-Pierre Serre。有限群的线性表示。Leonard L. Scott 法译英，第42卷《研究生数学丛书》。施普林格，Cham，1977年。

[Tur16] Vladimir G Turaev。《纽结与三维流形的量子不变量》，第18卷。Walter de Gruyter GmbH & Co KG，2016年。[Yam04] Shigeru Yamagami。C* 张量范畴中的 Frobenius 对偶。《算子理论杂志》，第3–20页，2004。

第4章
算子代数与任意子

目录

4.1 C*-代数 .46

4.1.1 C*-代数的张量积与直和.49 4.1.2 表示.49 4.1.3 态.51 4.2 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的拓扑.52 4.2.1 拓扑空间.52 4.2.2 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的范数拓扑、强算子拓扑、弱算子拓扑 . . . . . 54 4.3 冯·诺伊曼代数.56 4.3.1 因子与分类.57 4.4 晶格上的 C*-代数.58 4.4.1 准局域代数.59 4.4.2 相互作用、哈密顿量、动力学.60 4.4.3 对称性.61 4.4.4 锥代数.62 4.5 任意子选择准则.63 4.6 局域可传输端同态.65 4.7 任意子范畴.69 4.7.1 C*-张量结构.70 4.7.2 $\mathrm{DHR}_0(\Lambda)$ 的全子范畴.73 4.7.3 编织结构.75 4.7.4 任意子表示范畴.79 4.7.5 $\mathrm{DHR}(\Lambda)$ 的刚性子范畴.79 4.7.6 $\mathrm{DHR}(\Lambda)$ 是酉模张量范畴吗？.81 参考文献.82

虽然在本论文所涉及的领域中，算子代数已是标准工具，但我们还是花一点时间说明为何物理学中值得关注算子代数。

算子代数让我们能够严谨地讨论无限量子系统，而不必含糊其辞。它们用一种统一的分析语言编码局域性、极限和对称性。这里的算子代数主要指 C*-代数。粗略地说，C*-代数是带有乘法结构和伴随概念的向量空间，同时还具有某种拓扑意义下的闭集性质。这意味着其中存在距离和邻域等概念，也能衡量算子的强度等。此外，在 C*-代数中，可观测量（自伴算子）的强度，等于制备“最坏情况”态时可能得到的测量结果的最大绝对值。在物理学中极为常见的（近似）局域算子构成一个称为局域代数的 C*-代数。事实上，在物理学中，关注那些可由局部算子逼近的算子有其特殊原因，因为实验室通常局域在有限区域内。这类算子构成准局域代数。 $n \times n$ 复矩阵也构成一个称为（n维）矩阵代数的 C*-代数。事实上，如果 C*-代数是“有限维”的（即只有有限个基元素），那么它就同构于有限个矩阵代数的副本。这样的结果已经展现了研究算子代数的用处。

物理学中有许多问题都与量子系统的热力学极限及其在小微扰下的稳定性有关。本文将论证，C*-代数是研究这两个问题的绝佳工具。就热力学极限而言，由于代数本身已具有拓扑结构，极限的概念便内在于 C*-代数的结构之中。因此，诸如“对这个算子取极限会发生什么”之类的问题，都有一个自动给出的答案（尽管通常很难计算）。稳定性问题也可以借助 C*-代数结构优雅地进行研究。我们不再考察系统在某一种特定微扰（例如某个方向上的微弱磁场）下的稳定性，而是在 C*-代数中对与微扰对应的算子的“强度”施加上界，然后研究谱隙的稳定性。

算子代数有着悠久而丰富的历史，因此已有许多著作对其进行了深入研究。以下列出一些资料，涵盖从入门读物（[HN01、Naa17]）到权威论述（[BR12、BR13、Tak79、Tak03、KR83、KR97]）。其中一些论述更偏重数学，另一些则有许多物理学应用，还有一些（例如 [KR83、KR97]）提供了有益的习题。像 [JP17、CPJP22] 这样的论述，则将算子代数中的许多基本结果范畴化。本引言主要遵循 [Naa17、Naa12]。

引言的结构如下。首先，我们将介绍代数，特别是 C*-代数，它们将是我们主要的研究对象。我们将简要探讨这些代数的重要结构和性质，例如张量积和直和。然后，我们将定义无限体积态的概念，这将揭示这些 C*-代数的更多结构，因为它使我们能够使用 GNS 构造来构建希尔伯特空间。接下来，我们将转而研究冯·诺依曼代数，它们对于本文的研究尤为重要。

接下来，我们转而讨论晶格上的 C*-代数，尤其是准局域代数、锥代数和辅助代数。最后，我们将讨论任意子扇区的概念、任意子扇区范畴，并说明它是一个带编织结构的

C*-张量范畴。

本导论后半部分的大部分内容，都是 DHR 风格的代数量子场论分析在晶格上的版本 [HK64, DR89, DHR71, DHR74, DHR69], ，该分析最初由 Naaijkens [Naa11] 改编至晶格框架，随后又在 [Oga22, NO22, FN15, BV25, BHNV26, KVW24, OPGRdA25, BCFO24, Naa15] 中得到进一步发展。许多结果将与代数量子场论一方的结果相呼应，这完全是有意为之。若想了解代数量子场论领域的文献，读者可阅读 [Fre15] ，以获得该主题的现代介绍。

本导论的一个重要缺漏，是没有深入探讨自旋系统的动力学。对于本论文所涉及的工作，唯一必需的概念是“良好”动力学的存在性、谱中存在能隙，以及基态。因此，我们将把这些概念的阐述留给能够恰当地论述这些重要概念的文献（[HN01、Naa17]）。

为缩短本引言的篇幅，我们假定读者熟悉向量空间、内积、范数、直和、张量积以及基本的线性代数结果。我们也假定读者对拓扑空间有基本了解，不过我们会回顾相关内容。

4.1 C^*-代数

一个代数 $\mathcal{A}$是一个向量空间 $\mathcal{A}$ （在 $\mathbb{C}$上），配备乘法运算 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ ，并满足：

- $(xy)z = x(yz)$ 对所有 $x, y, z \in \mathcal{A}$
- $x(y+z) = xy + xz$ 且 $(x+y)z = xz + yz$ 对所有 $x, y, z \in \mathcal{A}$
- $c(xy) = (cx)y = x(cy)$ 对所有 $x, y \in \mathcal{A}$

若存在满足 $1x = x1 = x$ 的 $1 \in \mathcal{A}$ ，使其对所有 $x \in \mathcal{A}$ 都成立，则代数 $\mathcal{A}$ 是含单位元的。

C*-代数 $\mathcal{A}$ 是一个代数 $\mathcal{A}$，配备范数 $||\cdot||$： $\mathcal{A}\to[0,\infty)$ ，并且关于此范数完备[1], ，配备对合 $*$ （称为伴随），且它也是反同态，即：

- $(x+y)^* = x^* + y^*$ 对所有 $x,\ y \in \mathcal{A}$
- $(cx)^* = \bar{c}x^*$ 对所有 $x \in \mathcal{A}$
- $(x^*)^* = x$ 对所有 $x \in \mathcal{A}$
- $(xy)^* = y^*x^*$ 对所有 $x,\ y \in \mathcal{A}$

并且还满足对所有 $x, y \in \mathcal{A}$ ，C*-恒等式 $||x^*x|| = ||x||^2$，由此可得 $||xy|| \le ||x||\,||y||$ 和 $||x|| = ||x^*||$。

[1]完备性意味着 $\mathcal{A}$ 包含所有关于范数的柯西序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限 .

示例 4.1.0.1：希尔伯特空间上的有界算子

给定希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，我们将有界线性映射 $x: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 定义为映射 x，其算子范数定义为

$$||x|| := \sup_{||\xi||=1} ||x\xi||,$$

是有限的。定义 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{H}$ 上有界线性映射的集合。注意，对于两个有界线性映射 $x,\ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，我们可以定义另一个线性映射 $x \circ y: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$。我们观察到

$$||x \circ y|| = \sup_{||\xi||=1} ||x(y\xi)|| \leq ||x|| \sup_{||\xi||=1} ||y\xi|| \leq ||x||\,||y||$$

因此 $x \circ y$ 也是另一个有界线性算子。由此，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 构成一个代数，其中复合是乘法，恒等映射是单位元（记作 Id）。我们还注意到，算子范数名副其实，因为它确实是一个范数。在由算子范数诱导的度量下，柯西序列 (x_n) 在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中收敛到某个有界算子 x，并且还有 $\|x_n - x\| \to 0$。特别地，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是完备的。

命题 4.1.1. 对于每个 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，都存在唯一的元素 $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得对所有 $\xi, \eta \in \mathcal{H}$，

$$\langle \xi, x\eta \rangle = \langle y\xi, \eta \rangle$$

此外，我们有 $||y|| = ||x||$。

证明： 标准。 □

利用上述命题，我们可以定义 $*$：将 $x \mapsto x^*$ 作为我们的伴随运算，其中 x^* 定义为与 x 相对应的唯一元素，该元素由上述命题保证存在。利用内积的标准性质，可以很容易验证 $*$-运算确实是伴随运算。

最后，我们将证明 $||x^*x|| = ||x||^2$。根据上述命题，我们注意到 $||x^*x|| \leq ||x^*||\,||x|| = ||x||^2$。我们还注意到 x^*x 是正的，因此 $\langle x^*x\xi,\ \xi \rangle \geq 0$。现在根据 $||x||$ 的定义，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个单位向量 $\xi \in \mathcal{H}$，使得 $||x\xi|| > ||x|| - \epsilon$。于是，

$$||x^*x|| \geq |\langle x^*x\xi, \xi \rangle| = \langle x^*x\xi, \xi \rangle = ||x\xi||^2 \geq (||x|| - \epsilon)^2$$

其中第一个不等式是柯西-施瓦茨不等式。令 $\epsilon \downarrow 0$，我们得到 $||x^*x|| \geq ||x||^2$，从而得到 $||x^*x|| = ||x||^2$，这说明 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个 C*-代数。

例 4.1.1.1

$n \times n$ 复矩阵的集合 $M_n(\mathbb{C})$，是具有 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ 的 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个例子。通常的矩阵乘法是乘法运算，单位矩阵是单位元。通常的矩阵伴随是一种 $*$-运算。

请注意， $M_n(\mathbb{C})$ 可以看作是线性映射 $M:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 的集合（它们显然有界），因此是具有 $\mathcal{H}=\mathbb{C}^n$ 的 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个基本例子。

设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是代数。代数同态 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是保持代数结构的线性映射，即对于所有 $a,b\in\mathcal{A}$，都有 $\phi(a)\phi(b)=\phi(ab)$。如果 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 含单位元，那么若 $\phi(1_{\mathcal{A}})=1_{\mathcal{B}}$，就称 ϕ 为含单位元的同态。如果 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 C*-代数，那么称 ϕ 为 $*$-同态，如果它与 $*$ 运算相容（即 $\phi(a)^*=\phi(a^*)$）。

众所周知，任意 $*$-C*-代数同态 $\phi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 都自动连续[2]（相对于范数拓扑），这是因为 ϕ 是压缩的（$||\phi(a)||\le||a||$）。

若有两个代数 $\mathcal{A},\mathcal{B}$，如果存在一个 $*$-同构 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，我们就称 $\mathcal{A}\simeq\mathcal{B}$。也就是说，它是一个同时为可逆映射的 $*$-同态。

定义 4.1.2. 给定某个 $x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，我们称 x 为

- **（自伴的）**当且仅当 $x=x^*$
- **（正规）**当且仅当 $xx^*=x^*x$
- **（酉算子）**当且仅当 $xx^*=x^*x=1$
- **（投影）**当且仅当 $x=x^*=x^2$
- **（等距算子）**当且仅当 $x^*x=1$
- **（部分等距算子）**当 $x=xx^*x$（等价地，当 xx^*，因而 x^*x 也为投影）
- **（可逆的）**当存在 $y\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得 $xy=yx=1$

我们注意到，自伴算子、酉算子和投影都是正规算子。酉算子正是正规的等距算子；等价地，酉算子是可逆等距算子。等距算子、酉算子和投影都是部分等距算子。

引理 4.1.3。 设 $\mathcal{H}$、$\mathcal{K}$ 为希尔伯特空间。等距算子 $x:\ \mathcal{H}\to\mathcal{K}$ 是酉算子，当且仅当其具有稠密值域。

证明： 若 x 是酉算子，则根据定义它是满射的，因而具有稠密值域。反之，设 x 是具有稠密值域的等距算子。则 x 有界且具有伴随 x^*。对于所有 $\xi,\ \eta\in\mathcal{H}$，我们有

$$\langle x^*x\xi,\eta\rangle=\langle x\xi,x\eta\rangle=\langle\xi,\eta\rangle,$$

因此 $x^*x=1_{\mathcal{H}}$。

设 $P:=xx^*$。对于任意 $\zeta\in\mathcal{K}$ 和任意 $\xi\in\mathcal{H}$，

$$\langle(1-P)\zeta,x\xi\rangle=\langle\zeta,x\xi\rangle-\langle xx^*\zeta,x\xi\rangle=\langle\zeta,x\xi\rangle-\langle x^*\zeta,x^*x\xi\rangle=\langle\zeta,x\xi\rangle-\langle x^*\zeta,\xi\rangle=0$$

因此，$(1-P)\zeta$ 与 Ran x 正交，而后者是稠密的，所以对所有 ζ，$(1-P)\zeta=0$，故 $P=1_{\mathcal{K}}$。因此，$x^*x=1_{\mathcal{H}}$ 和 $xx^*=1_{\mathcal{K}}$，所以 x 是酉算子。□

[2]这用到了 C*-性质；代数同态不一定是连续的。

4.1.1 C-代数的张量积与直和

设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 为 C*-代数。它们的代数张量积 $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 是由简单张量 $a\otimes b$ 张成的复向量空间，其乘法和 $*$-运算在简单张量上的定义为

$$(a\otimes b)(c\otimes d)=ac\otimes bd,\qquad (a\otimes b)^*=a^*\otimes b^*,$$

并分别通过双线性和共轭线性延拓。为了得到一个 C*-代数，我们在 $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 上赋予 最小（空间）C*-张量范数并取完备化。结果记作 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$[3]。

对于每个 C*-代数 $\mathcal{A}$，都有一个典范的 $*$-同构

$$\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})\simeq M_n(\mathcal{A}),$$

由 $a\otimes E_{ij}\mapsto aE_{ij}$ 给出，其中 E_{ij} 是一个矩阵，其第 $(i,\ j)$ 个位置为 1，其余位置为 0。特别地，对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，

$$B(\mathcal{H})\otimes M_n(\mathbb{C})\simeq B(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n)\simeq M_n(B(\mathcal{H}))$$

如果 $\phi_1:\ \mathcal{A}_1\to\mathcal{B}_1$ 和 $\phi_2:\ \mathcal{A}_2\to\mathcal{B}_2$ 是 $*$-同态，那么它们在 $\mathcal{A}_1\odot\mathcal{A}_2$ 上的代数张量 $\phi_1\odot\phi_2$ 可唯一地通过连续性延拓为一个 $*$-同态

$$\phi_1\otimes\phi_2:\ \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2\ \longrightarrow\ \mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$$

例 4.1.3.1：矩阵放大

给定一个线性映射 ϕ: $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，我们可以如下定义一个放大。定义恒等映射 $I\in M_n(\mathbb{C})$。于是有 $\phi\otimes I:\ \mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})\to\mathcal{B}\otimes M_n(\mathbb{C})$。根据上述内容，由于我们有 $\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})\simeq M_n(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{B}\otimes M_n(\mathbb{C})\simeq M_n(\mathcal{B})$，可见 $\phi\otimes I$ 通过对每个分量应用 ϕ 来作用于 $M_n(\mathcal{A})$。这称为ϕ的矩阵放大，有时记作 $\phi^{(n)}$。

给定 C*-代数 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$，它们的直和 为

$$\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}:=\{(a,b):a\in\mathcal{A},\ b\in\mathcal{B}\},$$

配备逐点运算、对合 $(a,\ b)^*=(a^*,\ b^*)$，以及范数 $\|(a,\ b)\|=\max\{\|a\|,\|b\|\}$。

4.1.2 表示

从一个 C*-代数 $\mathcal{A}$ 到某个 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 $*$-同态的一种重要类型由 $\pi:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 给出。其中，$\mathcal{H}$ 是某个希尔伯特空间。该 $*$-同态 π 称为 $\mathcal{A}$的 表示。我们将其记为（$\pi,\ \mathcal{H}$）。

[3]有趣的是，张量积的定义允许存在不止一种 C*-范数。补全有两种典型选择：通过忠实表示 $(\pi,\ \mathcal{H})$，$(\rho,\ \mathcal{K})$ 并在 $B(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ 内进行补全来定义的最小（空间）张量积补全 $\otimes_{\min}$，以及由通用 C*-范数定义的最大 张量积 $\otimes_{\max}$补全。若 $\mathcal{A}$或 $\mathcal{B}$ 是核的，则 $\otimes_{\min}$ 和 $\otimes_{\max}$ 相同。此处我们略去这一微妙之处。

定义 4.1.4。 C*-代数的一个表示（π， $\mathcal{H}$）称为：

- 非退化当 $\pi(\mathcal{A})\mathcal{H} := \{\pi(a)\xi : a \in \mathcal{A},\ \xi \in \mathcal{H}\}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密时成立。若 $\mathcal{A}$ 含单位元，则这等价于 $\pi(1) = I$。在本文中，我们只考虑非退化表示。

- 忠实当 π 是一个单射的 $*$-同态时成立。

- 循环当存在 $\Omega \in \mathcal{H}$ 使得 $\pi(\mathcal{A})\Omega := \{\pi(a)\Omega : a \in \mathcal{A}\}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密时成立。Ω 称为循环向量。

- 不可约当它不保留 $\mathcal{H}$ 的任何非平凡闭子空间不变时成立。否则， π 是可约的。

对于 C*-代数的表示，我们有舒尔引理的一个 C*-版本：

引理 4.1.5。 非退化表示 π 当且仅当其交换子不可约，其中交换子定义为

$$\pi(\mathcal{A})' := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x\pi(a) = \pi(a)x \ for\ all\ a \in \mathcal{A}\},$$

满足 $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$。

如果存在酉映射 $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ，使得下式成立，那么两个表示 $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ 和 $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$（C*-代数 $\mathcal{A}$ 的表示）是酉等价的（或简称等价）：

$$U\pi_1(a)U^* = \pi_2(a) \qquad \text{for all } a \in \mathcal{A}$$

我们用 $\pi_1 \simeq \pi_2$ 表示这一点。

考虑表示 $(\pi_1, \mathcal{H}_1), (\pi_2, \mathcal{H}_2)$。我们可以构造一个新的表示 $(\pi_1 \oplus \pi_2, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$，称为这些表示的**直和** 。它的作用为：

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(a)(\xi_1 \oplus \xi_2) := \pi_1(a)\xi_1 \oplus \pi_2(a)\xi_2$$

对于 $\xi_i \in \mathcal{H}_i$。类似地，我们可以构造一个表示 $(\pi_1 \otimes \pi_2, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$，它在 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 的简单张量 $\xi_1 \otimes \xi_2$ 上的作用为：

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(a_1 \otimes a_2)(\xi_1 \otimes \xi_2) := \pi_1(a_1)\xi_1 \otimes \pi_2(a_2)\xi_2$$

对于某个表示 $(\pi, \mathcal{H})$，如果存在一个（非平凡、非零）投影 $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得 $P\mathcal{H}$ 在 π 下是约化的（即在 $\pi(\mathcal{A})$ 和 $\pi(\mathcal{A})^*$下均不变），那么我们有： $\pi|_{P\mathcal{H}} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(P\mathcal{H})$ 和 $\pi|_{(1-P)\mathcal{H}} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}((1-P)\mathcal{H})$ 是表示，且 $\pi \simeq \pi_{P\mathcal{H}} \oplus \pi_{(1-P)\mathcal{H}}$。 $\pi_{P\mathcal{H}}$， $\pi_{(1-P)\mathcal{H}}$则称为 π 的（非零）子表示。

4.1.3 态

态 $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 在 C*-代数 $\mathcal{A}$ 上的一个正[4] 线性泛函，且其范数为 1。我们将 $\mathcal{A}$ 上的一个态记作 $(\omega, \mathcal{A})$。由正性可容易证明，柯西-施瓦茨不等式成立：

$$|\omega(b^*a)|^2 \leq \omega(a^*a)\omega(b^*b) \qquad a, b \in \mathcal{A}$$

若对任意一对态 ω_1, ω_2，只要满足以下条件，态 ω 就称为纯

$$\omega(a) = \lambda\omega_1(a) + (1-\lambda)\omega_2(a) \qquad a \in \mathcal{A},\ \lambda \in (0,1)$$

我们有 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$，也就是说，它不能写成两个不同态的凸组合。纯态是 C*-代数 $\mathcal{A}$ 的所有态的极端点。我们用 $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 上所有态的集合。根据哈恩-巴拿赫定理，该集合非空；根据克莱因-米尔曼定理，该集合是凸集，其极端点为纯态。

注意，对于一个表示 $(\pi, \mathcal{H})$ 和单位向量 $\Omega \in \mathcal{H}$，由 $\phi : a \mapsto \langle \Omega\ \pi(a)\Omega \rangle$ 给出的映射 $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$定义了一个态。这种态称为向量态。

下述定理使我们能够将任意一个态 $(\omega, \mathcal{A})$ 与某个表示 $(\pi, \mathcal{H})$ 上的一个向量态对应起来。

定理 4.1.6 (GNS 构造)。 对于每个态 $(\omega, \mathcal{A})$，都存在一个三元组 $(\pi, \mathcal{H}, \Omega)$，使得 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个以循环向量 $\Omega \in \mathcal{H}$为循环向量的循环表示，并且

$$\omega(a) = \langle \Omega, \pi(a)\Omega \rangle \qquad a \in \mathcal{A}$$

这个三元组在表示的酉等价意义下是唯一的，也就是说，如果存在另一个三元组 $(\pi', \mathcal{H}', \Omega')$，那么存在一个酉算子 $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$，使得对于所有$a \in \mathcal{A}$，都有 $\pi'(a) = U\pi(a)U^*$，并且 $U\Omega = \Omega'$。

GNS 构造有许多用途。首先，它使我们能够讨论这样的希尔伯特空间：在此之前可能并没有自然的希尔伯特空间概念。借助这一构造，我们可以讨论该希尔伯特空间中的向量和有界线性算子，而这是一种特别好的 C*-代数。

引理 4.1.7。 态 $(\omega, \mathcal{A})$ 是纯态，当且仅当它的 *GNS* 表示 $(\pi, \mathcal{H})$ 是不可约的。

证明： ($\Longleftarrow$): 我们用反证法。假设 ω 不是纯态，且具有不可约的 GNS 表示 π。考虑 ω 的凸分解 $\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$。令 $(\pi_i, \mathcal{H}_i, \Omega_i)$ 为 ω_i的 GNS 三元组，$(\pi, \mathcal{H}, \Omega)$ 为 ω的 GNS 三元组。我们构造一个映射U： $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$，定义为

$$U : \pi(a)\Omega \mapsto \sqrt{\lambda}\pi_1(a)\Omega_1 \oplus \sqrt{1-\lambda}\pi_2(a)\Omega_2,$$

验证 U 确实是酉算子，并注意

$$U\pi(a)(\pi(c)\Omega) = \sqrt{\lambda}\pi_1(ac)\Omega_1 \oplus \sqrt{1-\lambda}\pi_2(ac)\Omega_2 = (\pi_1(a) \oplus \pi_2(a))U(\pi(c)\Omega)$$

[4]正性意味着对所有 $a \in \mathcal{A}$， $\omega(a^*a) \geq 0$

由于 $\pi(\mathcal{A})\Omega$在 $\mathcal{H}$中稠密，因此我们有 $\pi \simeq \pi_1 \oplus \pi_2$，这表明 π 是可约的，与假设的 π不可约相矛盾。因此，态 ω 是纯的。

($\Longrightarrow$): 我们再次通过反证来证明。考虑纯态 ω 对应的可约 GNS 表示 $(\pi, \mathcal{H})$。根据定义，存在一个不变子空间 $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$。令$p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$为投影到该子空间上的投影。注意，由于 p 是投影到不变子空间上的（非平凡、非零）投影，我们可以定义 $t := \langle \Omega\ p\Omega \rangle$，从而得到 $0 < t < 1$。现在我们定义

$$\omega_1(a) := \langle \Omega, p\pi(a)\Omega \rangle / t \qquad \omega_2(a) := \langle \Omega, (1-p)\pi(a)\Omega \rangle / (1-t)$$

由于 $0 < t < 1$，它们是定义良好的态。显然，$\omega(a) = t\omega_1(a) + (1-t)\omega_2(a)$，因此$\omega$ 不是纯态，这与假设 ω为纯态相矛盾。因此，π 必定不可约。□

下面的引理在章节 7 中很有用，并且可由 GNS 构造的唯一性立即得到。

引理 4.1.8。设 ω 为一个态，$\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 为一个自同构。若 $\omega = \omega \circ \alpha$，则存在 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得

$$\pi \circ \alpha(a) = U\pi(a)U^*, \qquad U\Omega = \Omega, \qquad a \in \mathcal{A}$$

也就是说，α 由酉算子 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 实现，其中 $(\pi, \mathcal{H}, \Omega)$ 是 ω 的 *GNS* 三元组。

证明：我们注意到 $\omega \circ \alpha(a) = \langle \Omega\ \pi \circ \alpha(a)\Omega \rangle$，因此 $(\pi \circ \alpha, \mathcal{H}, \Omega)$ 是 $\omega \circ \alpha$ 的 GNS 三元组。由定理 4.1.6，我们可以将这个三元组视为 $\omega \circ \alpha$ 的 GNS 三元组。现在注意到 $\omega = \omega \circ \alpha$。再次由定理 4.1.6，我们得到 $\pi \circ \alpha \simeq \pi$。令 $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 为实现该等价的酉算子。于是得到所需结果，

$$U\pi(a)U^* = \pi \circ \alpha(a), \qquad U\Omega = \Omega \qquad a \in \mathcal{A}$$

□

GNS 构造的另一个重要推论是，每个 C*-代数 $\mathcal{A}$ 都可以表示为某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 C*-子代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$:

定理 4.1.9 (Gel'fand-Naimark)。设 $\mathcal{A}$是一个C*-代数。则存在一个忠实等距表示 ϕ：$\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，将其映射到某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的范数闭自伴的 $*$-子代数 $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

4.2 $\mathcal{B}$ 上的拓扑$(\mathcal{H})$

4.2.1 拓扑空间

我们回顾一下，拓扑空间是一个有序对 (X, τ)，其中 X 是一个集合，τ是由 X 的子集构成的集合，称为 X 的开集，并满足：

- $\emptyset$，$X \in \tau$
- 若 $U_i \in \tau$ 由 $i \in I$ 一个（可能是无限的）指标集组成，则 $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$
- 若 U_1，$\cdots$，$U_n \in \tau$ 则 $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$

除非另有说明，我们假设拓扑空间是豪斯多夫的。与点 $x \in X$ 对应的子集 $N_x \subseteq X$ 称为 x 的邻域，如果存在一个开集 $U \in \tau$ 满足 $x \in U \subseteq N_x$。

我们注意到，赋范向量空间是一类特别良好的拓扑空间。因此，希尔伯特空间、C*-代数、$\mathbb{R}^n$ 等都是拓扑空间的例子。

考虑同一空间 X 上的两个不同拓扑 (X, τ_s)、(X, τ_w)。我们称 τ_s 比 τ_w 更强/更精细，如果 $\tau_w \subset \tau_s$，也就是说，如果 τ_s 包含更多开集。

一般而言，在拓扑空间中，柯西序列并不是定义良好的概念，它需要度量（例如范数）。不过，我们仍然可以使用网来讨论拓扑空间中的收敛。

定义 4.2.1. 有向集 是一个集合 I，配备运算 $\leq$，且满足：

- $i \leq i$ 对所有 $i \in I$
- 若 $i \leq j$ 且 $j \leq k$，则 $i \leq k$，对所有 $i, j, k \in I$
- 对任意 $i, j \in I$，存在一个 $k \in I$ 使得 $i, j \leq k$

定义 4.2.2. 拓扑空间中的网 是一个映射 $x : I \to X$，其中 I 是一个有向集。对于某个集合 $S \subset X$，网通常记作 $(x_i)_{i\in I} \subset S$，其中 $x_i \in S$（上下文清楚时，我们有时会从记号中省略 $(\subset S)$）。若对任意选定的包含 x 的 $U_x \in \tau$，都存在某个 $i_0 \in I$，使得对所有 $i \geq i_0$，$x_i \in U_x$，则网 $(x_i)_{i\in I}$ 收敛到 $x \in X$，其拓扑为 τ。此时，我们称 x 为 $(x_i)_{i\in I}$ 的极限，并写作 $x = \lim_i x_i$。若对于 τ 中任意收敛网 $(x_i)_{i\in I} \subset S$，都有 $\lim_i x_i \in S$，则集合 $\mathcal{S} \subseteq X$ 在拓扑 τ 中是闭集。

我们注意到，当 $I = \mathbb{N}$ 时，网的收敛就是序列收敛这一熟悉概念。

作为一个平凡的结果，环境集合 X 按定义对于我们赋予它的任何拓扑都是闭集。

引理 4.2.3。 将 (X, τ_s)、(X, τ_w) 视为拓扑空间。以下各项等价：

1. 拓扑 τ_s 比 τ_w 更强（即 $\tau_w \subset \tau_s$）。
2. 如果网 $(x_i)_{i\in I} \subset X$ 在 τ_s 中收敛于 $x \in X$，那么它在 τ_w 中收敛于 $x \in X$。

证明：这是显然的。我们证明 $(1 \implies 2)$，因为稍后会用到它。考虑一个网 $(x_i)_{i\in I} \subset X$，它在 τ_s 中收敛到 $x \in X$。因此，对于任意包含 x 的开集 $U_x \in \tau_s$，都存在某个 $i_0 \in I$，使得对所有 $i \geq i_0$，都有 $x_i \in U_x$。现在取任意包含 x 的开集 $V_x \in \tau_w$。由于 $\tau_w \subset \tau_s$，我们有 $V_x \in \tau_s$。因此，根据上述结论，存在某个 i_0，使得对所有 $i \geq i_0$，都有 $x_i \in V_x$，从而 $(x_i)_{i\in I}$ 在 τ_w 中收敛到 x。□

引理 4.2.4。 考虑两个拓扑(X,τ_s)、(X,τ_w)，其中 τ_s比 τ_w更强。现在考虑 $S\subseteq X$，使得 S 在 τ_w 中是闭集。那么 S 在 τ_s中是闭集。

证明： 考虑一个网$(x_i)_{i\in I}\in S$收敛到 $x\in X$中的 τ_s。根据引理 4.2.3，我们有$(x_i)_{i\in I}$收敛到 $x\in X$中的 τ_w。然而，由于 S相对于 τ_w是闭集，因此我们有 $x\in S$，从而 S也相对于 τ_s是闭集。□

映射 $\Phi: X\to Y$在拓扑集$(X,\ \tau_x)$、$(Y,\ \tau_y)$之间是连续的，当且仅当对于每个网$(x_i)\subset X$在 τ_x中收敛到 $x\in X$时，网 $\Phi(x_i)\subset Y$在 τ_y中收敛到 $\Phi(x)\in Y$。等价地，Φ连续当且仅当开集的原像是开集。

引理 4.2.5。 考虑映射 $\Phi:\ X\to Y$，其定义在拓扑集 $(X,\ \tau_x^s)$和值域为 $(Y,\ \tau_y^s)$。另考虑 X上的较弱拓扑 $\tau_x^w\subseteq\tau_x^s$以及 Y上的较弱拓扑 $\tau_y^w\subseteq\tau_y^s$。以下陈述成立：

- 若 $\Phi:(X,\tau_x^w)\to(Y,\tau_y^s)$连续，则 $\Phi:(X,\tau_x^s)\to(Y,\tau_y^s)$连续。
- 若 $\Phi:(X,\tau_x^s)\to(Y,\tau_y^s)$连续，则 $\Phi:(X,\tau_x^s)\to(Y,\tau_y^w)$连续。

证明：考虑一个开集 $U\in\tau_y^s$。那么根据连续性的定义，$\Phi^{-1}(U)\in\tau_x^w$。但由于 $\tau_x^w\subseteq\tau_x^s$，我们有 $\Phi^{-1}(U)\in\tau_x^s$是开集。
现在考虑一个开集 $U\in\tau_y^w$。由于 $\tau_y^w\subseteq\tau_y^s$，我们有 $U\in\tau_y^s$。那么，由于 Φ连续，我们有 $\Phi^{-1}(U)\in\tau_x^s$。□

4.2.2 范数拓扑、强算子拓扑、弱算子拓扑 on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

现在我们可以讨论 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的不同拓扑。

定义 4.2.6。 固定一个算子 $x_0\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 具有多种拓扑：

- 范数拓扑：算子范数赋予 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 一种拓扑，称为范数拓扑。其基本邻域为

$$N(x_0,\epsilon):=\{x\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):||x-x_0||<\epsilon\}$$

  当且仅当对于所有 $\epsilon>0$，存在某个 $i_0\in I$，使得对于所有 $i\geq i_0$，都有 $||x_i-x||<\epsilon$时，网 $(x_i)_{i\in I}\subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 在范数拓扑下收敛到 $x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。

- 强算子拓扑（***SOT***）：这是 $\mathcal{H}$ 上逐点收敛所对应的拓扑。其基本邻域为

$$N(x_0,\{\xi_i\},\epsilon):=\{x\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):||(x-x_0)\xi_i||<\epsilon;\ i\in\{1,\cdots,n\};\ \xi_i\in\mathcal{H}\}$$

  若且唯若对于所有 $\epsilon>0$ 以及每个固定的 $\xi\in\mathcal{H}$，存在某个 $i_0\in I$，使得对于所有 $i\geq i_0$，都有 $||(x_i-x)\xi||<\epsilon$，网 $(x_i)_{i\in I}\subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 在强算子拓扑下收敛到 $x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。

- 弱算子拓扑（***WOT***）：这是使所有映射$x \mapsto \langle x\xi,\ \eta\rangle$对所有 $\xi,\ \eta \in \mathcal{H}$连续的最弱拓扑。基本邻域定义如下：

$$N(x_0,\ \{\xi_i\},\{\eta_i\},\epsilon) := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : |\langle \xi_i, (x-x_0)\eta_i\rangle| < \epsilon;\ i \in \{1,\cdots,n\};\ \xi_i,\eta_i \in \}\mathcal{H}$$

网 $(x_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 在弱算子拓扑中收敛到 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，当且仅当对于所有 $\epsilon > 0$ 以及每个固定的 $\xi,\ \eta \in \mathcal{H}$ 都存在某个 $i_0 \in I$，使得对于所有 $i \geq i_0$都有 $|\langle \eta,\ (x_i - x)\xi\rangle| < \epsilon$。

除了上面列出的拓扑之外，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上还有许多不同的拓扑：例如超强拓扑（$=\sigma$-强拓扑）、超强* 拓扑（$=\sigma$-强*拓扑）、强-* 拓扑（也称为 SOT*）、超弱拓扑（$=\sigma$-弱拓扑和弱*拓扑）。这些拓扑对于我们的工作并非必要，因此我们不对此进行讨论。

如果 $\mathcal{H}$ 是有限维的，那么这些拓扑全都相同。

引理 4.2.7。以下序关系陈述在 $\mathcal{B}$（$\mathcal{H}$）的各种拓扑上成立：

- 范数拓扑强于强算子拓扑，而强算子拓扑又强于弱算子拓扑。
- 范数收敛蕴含强算子拓扑收敛，而强算子拓扑收敛又蕴含弱算子拓扑收敛。
- 弱算子拓扑闭包蕴含强算子拓扑闭包，而强算子拓扑闭包又蕴含范数闭包。

证明：根据算子范数的定义，$||y|| \geq ||y\xi||/||\xi||$ 对所有 $\xi \in \mathcal{H}$。因此，如果我们有 (x_i) 在范数拓扑下收敛到 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}$，那么 $||(x-x_i)\xi|| \leq ||x-x_i|| \to 0$ 对所有$\xi \in \mathcal{H}$均成立，所以范数收敛蕴含强算子拓扑收敛。由引理 4.2.3 可知，范数拓扑强于强算子拓扑。

类似地，考虑一个网 $(x_i)_{i\in I}$ 在强算子拓扑下收敛到 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}$。根据定义，对于任意选定的 $\xi \in \mathcal{H}$，$||(x-x_i)\xi|| \to 0$。但根据柯西-施瓦茨不等式，对于任意选定的$\eta,\ \xi \in \mathcal{H}$ 我们有 $|\langle \eta,\ (x_i - x)\xi\rangle| \leq \|\eta\|\,\|(x_i-x)\xi\| \to 0$ 因此 (x_i) 在弱算子拓扑下收敛到 x。所以强算子拓扑收敛蕴含弱算子拓扑收敛。由引理 4.2.3 可知，强算子拓扑强于弱算子拓扑。

现在，引理4.2.4 给出了所需的闭包结果。 □

若 $\mathcal{H}$ 是无限维的，则上述引理中的包含关系是严格的。

引理 4.2.8。考虑一个酉算子 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则映射 $\alpha : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 由$\alpha\colon a \mapsto UaU^*$给出，在弱算子拓扑下连续。

证明：考虑一个在弱算子拓扑下收敛到某个 $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的网 $(a_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$。那么，对任意 $\xi,\eta \in \mathcal{H}$,

$$|\langle \eta, \alpha(a-a_i)\xi\rangle| = |\langle U^*\eta, (a-a_i)U\xi\rangle| \to 0$$

根据弱算子拓扑中收敛的定义。 □

4.3 冯·诺伊曼代数

考虑某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 C*-子代数 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$。我们将 $\mathcal{A}'$ 定义为 $\mathcal{A}$ 的交换子，其定义为集合

$$\mathcal{A}' := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : [x, a] = 0 \text{ for all } a \in \mathcal{A}\}$$

注意到 $I \in \mathcal{A}'$。如果 a, $b \in \mathcal{A}'$ 那么我们也有 $ab \in \mathcal{A}'$。类似地，如果 $a \in \mathcal{A}'$，那么 $a^* \in \mathcal{A}'$。$\mathcal{A}'$ 带有从 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$继承的范数拓扑。最后，如果 $(x_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}'$ 是一个在范数下收敛于 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的网，那么 $x \in \mathcal{A}'$ 也成立。因此， $\mathcal{A}'$ 是一个含单位元的 C*-代数。

引理 4.3.1。 对于任意子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，我们有 $\mathcal{S}'$ 在弱算子拓扑中是闭集。

证明： 考虑一个网 $(x_i) \subset \mathcal{S}'$，其在弱算子拓扑中收敛于 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。注意，固定元素的左乘与右乘在弱算子拓扑中是连续的。因此，对于所有 $a \in \mathcal{S}$ 和η, $\xi \in \mathcal{H}$ 以及所有选定的 ϵ，存在 i_0，使得对于所有 $i \geq i_0$，我们有 $|\langle \eta, (xa - x_i a)\xi\rangle| < \epsilon$以及 $|\langle \eta, (ax - ax_i)\xi\rangle| < \epsilon$。现在我们注意到，

$$\begin{aligned} |\langle \eta, (xa - ax)\xi\rangle| &\leq |\langle \eta, (xa - x_i a)\xi\rangle| + |\langle \eta, (x_i a - ax_i)\xi\rangle| + |\langle \eta, (ax_i - ax)\xi\rangle| \\ &= |\langle \eta, (xa - x_i a)\xi\rangle| + |\langle \eta, (ax_i - ax)\xi\rangle| < 2\epsilon \end{aligned}$$

其中我们用到了 $[x_i, a] = 0$。结果得证。 □

定义 4.3.2. 设 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 C*-子代数。若$\mathcal{M}$满足以下条件，我们就称其为冯·诺伊曼代数 （简称 vN 代数）：

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}'' := (\mathcal{M}')'$$

这里，$(\cdot)''$ 称为双交换子。

若子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 在取伴随运算下封闭，则容易证明 $\mathcal{S}'$ 是冯·诺伊曼代数。当然，再取一次交换子，$\mathcal{S}''$ 又是冯·诺伊曼代数。根据定义，显然有$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}''$。事实上， $\mathcal{S}''$ 是包含 $\mathcal{S}$ 的最小冯·诺伊曼代数。

设 $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是两个 $*$-子代数。于是记 $\mathcal{S}_1 \vee \mathcal{S}_2 := (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)''$ 和 $\mathcal{S}_1 \wedge \mathcal{S}_2 := (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)''$。以下是一些有用的恒等式：

$$(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)' = \mathcal{S}_1' \cap \mathcal{S}_2' \qquad (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)' \supset \mathcal{S}_1' \vee \mathcal{S}_2'$$

研究冯·诺依曼代数的一个核心结果是以下由冯·诺伊曼提出的定理，它将上述代数定义与一个更具解析性的定义联系起来：

定理 4.3.3 （冯·诺伊曼双交换子定理）。 对于一个非退化的 $*$-子代数 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，以下陈述是等价的：

1. $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$
2. $\mathcal{M}$在强算子拓扑下闭集
3. $\mathcal{M}$ 在弱算子拓扑下闭集

特别地，根据引理4.2.7， $\mathcal{M}$ 是范数闭的，因此是一个 C*-代数。这意味着，通过要求 $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ ，我们本可以放宽 $\mathcal{M}$ 是一个 C*-代数这一条件，并由此推导出它。

定理 4.3.3 以及上述观察现在表明，我们也可以等价地将冯·诺伊曼代数定义为含单位元、弱算子拓扑闭的 C*-子代数 $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

作为一个特例，我们有关于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的以下引理。

引理 4.3.4。 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 对于任意希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 都是一个冯·诺伊曼代数。

证明： 注意到 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是整个空间，因此根据定义，它在任意拓扑下都是闭集。由定理 4.3.3，可知 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})''$ 且 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 因此是一个冯·诺伊曼代数。 □

引理 4.3.5。 对于任意一个对取伴随运算封闭的集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，有： $=(\mathcal{S}')'' = \mathcal{S}'$

证明： 集合 $\mathcal{S}'$ 是弱闭的（引理 4.3.1）。因此它是一个冯·诺伊曼代数。由定理4.3.3，可得 $\mathcal{S}' =(\mathcal{S}')''$。 □

引理 4.3.6. 对于非退化的 $*$-子代数 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ， $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{A}''$中弱算子拓扑稠密。

证明： 考虑 $\mathcal{A}^w$ 的 WOT 闭包 $\mathcal{A}$。由定理 4.3.3， $\mathcal{A}^w$ 是一个冯·诺伊曼代数，即 $\overline{\mathcal{A}}^w = \mathcal{A}''$。由于 $\mathcal{A}$ 按构造在 $\overline{\mathcal{A}}^w$ 中稠密，结论得证。 □

定理 4.3.7 (卡普兰斯基稠密性定理)。 *[KR83，定理 5.3。5]* 设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个C*-代数，且 $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{SOT}$ 是其生成的冯·诺伊曼代数。那么， $\mathcal{A}$ 中的单位球在强算子拓扑下稠密于 $\mathcal{M}$中的单位球。

特别地，对于每个元素 $x \in \mathcal{M}$ ，都存在一个有界网 $(a_i) \subset \mathcal{A}$ ，在强算子拓扑下收敛到 x ，且 $\sup_i ||a_i|| \leq ||x||$。如果 $x \geq 0$，则可选择该网使得每个 $a_i \geq 0$。

冯·诺依曼代数具有典范前对偶（因此也具有超弱/超强拓扑）、含有稠密的投影集合，并且支持正规态和映射。这些特性使其特别适用于无限体积量子系统。

4.3.1 因子与分类

设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺依曼代数。可以证明， $\mathcal{M}$ 由$\mathcal{M}$中的一组投影生成。设 P， $Q \in \mathcal{M}$ 是两个投影。若存在部分等距算子 $V \in \mathcal{M}$ ，使得 $V^*V = P$ 且 $VV^* = Q$，则称 P， Q 是穆雷–冯·诺伊曼 等价的，$P \sim Q$。若 P 的值域包含于 Q的值域中，则称投影P 是 Q的子投影，记作 $P \leq Q$。等价地，若 P， Q 满足 $PQ = QP = P$。

定义 4.3.8。 设 $P \in \mathcal{M}$ 是一个投影。那么 P 称为：

- 有限若对于一个投影 $Q \in \mathcal{M}$， $Q \leq P$ 且 $P \sim Q$ 蕴含 $P = Q$。
- 无限，如果 P 不是有限的。

- 适当无限，如果不存在满足 $Q \leq P$ 的有限投影 $Q \in \mathcal{M}$ 。
- 极小，若对于某个投影 $Q \in \mathcal{M}$ ，要求 $0 \neq Q \leq P$ 即可推出 $Q = P$。
- 中心，若 $P \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$。我们将 $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ 称为 $\mathcal{M}$ 的中心。

定义 4.3.9。非退化冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 称为：

- 一个因子，若 $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}I$。
- 有限/无限/适当无限，若单位元 $I \in \mathcal{M}$ 是有限/无限/适当无限的。

定义 4.3.10。因子 $\mathcal{M}$ 称为：

- 型 I 当 $\mathcal{M}$ 中存在极小投影时（等价地，对于某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$， $\mathcal{M} \simeq \mathcal{B}(\mathcal{H})$）
- 型 II 当不存在极小投影，但至少存在一个有限的非零投影时。若单位元有限，则为 II_1 型。若单位元无限，且 $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中 $\mathcal{N}$ 是一个 II_1 型因子，则为 II_∞ 型。
- 型 III 当每个（非零）投影都是适当无限时。

每个因子 $\mathcal{M}$ 都是 $I/II_1/II_\infty/III$型之一。每个冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$都可以唯一地写成如下形式

$$\mathcal{M} = Z_I \mathcal{M}_1 Z_I \oplus Z_{II_1} \mathcal{M} Z_{II_1} \oplus Z_{II_\infty} \mathcal{M} Z_{II_\infty} \oplus Z_{III} \mathcal{M} Z_{III}$$

其中 Z_I， Z_{II_1}， Z_{II_∞}， $Z_{III} \in \mathcal{M}$ 是总和为单位元的中心投影；颇为形象地说， $Z_{II_\infty} \mathcal{M} Z_{II_\infty}$ 是一个 II_∞ 型因子，其他项也类似。

注记 4.3.11。 因子分类对于赋予任意子范畴 $\mathbb{C}$-线性结构非常有用（即每个对象都有子对象，且两个对象的直和仍是该范畴中的一个对象）。尤其值得一提的是，在 Quantum 双模型中，锥代数属于 II_∞型，这使我们能够“将一个锥代数有限次地折叠进自身”。

4.4 晶格上的C^*-代数

到目前为止，我们一直避免讨论 C*-代数中的任何几何结构。但对于晶格系统的应用，空间局域性和时间局域性有着明确的概念。这使我们能够特别讨论准局域代数和锥形 vN 代数；它们是本文所考察的研究中的核心对象。我们从讨论归纳极限开始。

定义 4.4.1. 考虑一个有向集 Γ。归纳系统 是集合

$$(\mathcal{A}_\Gamma) := \{(\mathcal{A}_{\Lambda_1}, \iota_{\Lambda_1,\Lambda_2}) : \Lambda_1, \Lambda_2 \subset \Gamma; \Lambda_1 \leq \Lambda_2\}$$

这里 $\mathcal{A}_{\Lambda_i}$ 是一个 C*-代数，且 $\iota_{\Lambda_1,\ \Lambda_2} : \mathcal{A}_{\Lambda_1} \hookrightarrow \mathcal{A}_{\Lambda_2}$ 是一个单射 $*$-同态，满足$\iota_{\Lambda_1,\ \Lambda_2} \circ \iota_{\Lambda_2,\ \Lambda_3} = \iota_{\Lambda_1,\ \Lambda_3}$, $\iota_{\Lambda,\ \Lambda} = \mathrm{Id}$。

我们可以对这个归纳系统取归纳极限，得到如下的 C*-代数 $\mathcal{A}$ 。首先，我们取该系统的代数直和：

$$\bigoplus_{\Lambda_i} \mathcal{A}_{\Lambda_i} := \{(a_i)_{i\in I} : a_i \in \mathcal{A}_{\Lambda_i}; a_i = 0 \text{ for all but finitely many } i\}$$

配备逐分量的加法、乘法和伴随运算后，这使得 $\bigoplus_{\Lambda_i} \mathcal{A}_{\Lambda_i}$ 成为一个 $*$-代数。对任意 Λ_j 定义映射

$$\theta_j : \bigoplus_{\Lambda_i} \mathcal{A}_{\Lambda_i} \to \mathcal{A}_{\Lambda_j} \qquad \theta_j : (a_i)_i \mapsto \sum_{\Lambda_i \leq \Lambda_j} \iota_{\Lambda_i,\Lambda_j}(a_i)$$

对于任意 $x = (a_i)_i \in \bigoplus_{\Lambda_i} \mathcal{A}_{\Lambda_i}$，我们可以将半范数[5] 定义为 $p(x) := \sup_{j\in I} ||\theta_j(x)||$，这是良定义的，因为对于任意 j，都有 $||\theta_j(x)|| \leq \sum_i ||a_i||$。取商$\mathcal{Q} := \bigoplus_{\Lambda_i} \mathcal{A}_{\Lambda_i}/N$，关于 $N := \{x : p(x) = 0\}$，将 p 转化为 $\mathcal{Q}$ 上的真正范数，并允许我们关于 p将 $\mathcal{Q}$ 完备化为 $\mathcal{Q}$，从而得到一个 C*-代数。 —

这一过程满足某些泛性质，即定义 θ_j 的不同方式彼此等价。

现在我们构造一个局域网，它是一个 imbued with（空间）局域性的归纳系统：如果 $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$，那么 $\mathcal{A}_{\Lambda_1}$ 中的每个元素都与 $\mathcal{A}_{\Lambda_2}$中的每个元素交换。

4.4.1 准局域代数

量子自旋系统（QSS）定义如下。考虑嵌入在 $\mathbb{R}^2$中的图 Γ（即二维图），它由边、顶点和面组成。为简单起见，读者可以准备一个简单的图，例如 $\mathbb{Z}^2$。 Γ的子集称为区域。我们通常将 Γ 中的一个元素称为格点。在 Γ的每个格点上，我们放置一个有限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_s$。令 $\Lambda \subset_f \Gamma$ 表示 Λ 是 Γ的有限子集。区域 $\Lambda \subset_f \Gamma$ 称为局部区域。对于每个 $\Lambda \subset_f \Gamma$，我们定义 $\mathcal{H}_\Lambda := \bigotimes_{s\in\Lambda} \mathcal{H}_s$。我们还可以定义 $\mathcal{A}_\Lambda := \mathcal{B}(\mathcal{H}_\Lambda)$，将其作为支撑在区域 Λ上的局部算子的 C*-代数。

我们将（Λ） $\subseteq \Gamma$ 定义为 Γ 中一组逐渐增大的有限子集，使得 Γ 的每个有限子集最终都包含在（Λ）的某个元素中。集合（Λ）在包含关系下构成有向集，其中 $\leq$ 运算定义如下：对于任意两个子集 Λ_1，$\Lambda_2 \subseteq$ （Λ），若 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$，则可以定义 $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$。对于每个 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ 定义映射$\iota_{\Lambda_1,\ \Lambda_2} : \mathcal{A}_{\Lambda_1} \hookrightarrow \mathcal{A}_{\Lambda_2}$ 作为典范嵌入映射 $\mathcal{A}_{\Lambda_1} \mapsto \mathcal{A}_{\Lambda_1} \otimes 1_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}$ （显然这是一个满足$\iota_{\Lambda_1,\ \Lambda_2} \circ \iota_{\Lambda_2,\ \Lambda_3} = \iota_{\Lambda_1,\ \Lambda_3}$的 $*$-同态），由此即可定义一个归纳系统。我们可以定义局域代数

$$\mathcal{A}_\Gamma^{\text{loc}} := \bigcup_{\Lambda\subset_f\Gamma} \mathcal{A}_\Lambda$$

通过使用嵌入映射来识别 $\mathcal{A}_{\Lambda_1} \subset \mathcal{A}_{\Lambda_2}$ 和 $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$。由于我们尚未将 $\mathcal{A}_\Gamma^{\text{loc}}$完备化，因此它是一个 $*$-代数。按照上述定义的归纳系统范数对其进行完备化后，将得到一个 C*-代数 $\mathcal{A}_\Gamma$，称为拟局域 代数[6]。我们记作

$$\mathcal{A}_\Gamma := \overline{\mathcal{A}_\Gamma^{\text{loc}}}^{||\cdot||}$$

[5]半范数是一种缺少非退化条件的范数[6]事实上，由于我们的嵌入映射是单射的（因而也是等距的），半范数与算子范数完全相等，因此无需取商。

为简洁起见，我们记 $\mathcal{A}:=\mathcal{A}_\Gamma$ 和 $\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}:=\mathcal{A}_\Gamma^{\mathrm{loc}}$。

我们也可以类似地对可能无限的子图 $\Omega \subseteq \Gamma$ 取极限：在 Ω 上定义一个归纳系统，并按上述步骤进行。我们将所得的 $*$-代数称为Ω 上的局域代数，记作 $\mathcal{A}_\Omega^{\mathrm{loc}}$，并对其按范数取完备化，从而得到$\Omega$ 上的准局域代数，$\mathcal{A}_\Omega$。我们有 $\mathcal{A}_\Omega \subseteq \mathcal{A}_\Gamma$，事实上 $\mathcal{A}_\Gamma \simeq \mathcal{A}_\Omega \otimes \mathcal{A}_{\Gamma\setminus\Omega}$[7]。

若存在某个 $\Lambda \subset_f \Gamma$，使得对于所有与 Λ 不相交的 $\Lambda' \subset \Gamma$ 以及任意 $b \in \mathcal{A}_{\Lambda'}$，都有 $[a,b]=0$，则算子 $a \in \mathcal{A}$ 具有有限支撑。在这种情形下，若 Λ 是满足该条件的最小子集，我们称 Λ 是 a 的支撑（或称 a 支撑于 Λ）。

注记 4.4.2。我们也可以不通过取归纳极限来得到 $\mathcal{A}$，而是像记号所暗示的那样，按通常方式将 $\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$ 关于算子范数完备化，并由此等价地定义 $\mathcal{A}$。事实证明，$\mathcal{A}$ 的这两种定义是 $*$-同构的，因此，得到 $\mathcal{A}$ 的具体途径并不重要。

4.4.2 相互作用、哈密顿量、动力学

考虑一个 C*-代数 $\mathcal{A}$。我们将 $\mathcal{A}$ 上的动力学 定义为一对 $(\mathcal{A},\alpha_t)$，其中 $\alpha:\mathbb{R}\to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 是一个强连续单参数自同构群，即

$$\alpha_t\circ\alpha_s=\alpha_{t+s},\qquad \alpha_0=\mathrm{Id},\qquad \lim_{t\to 0}||\alpha_t(A)-A||\to 0 \text{ for all } A\in\mathcal{A}$$

一个导子 δ（称为 α的生成元）定义在一个适当的定义域上（即范数极限存在的地方），其定义为

$$\delta(a):=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha_t(a)-a}{t}\qquad\qquad a\in \mathrm{Dom}(\delta)$$

并且满足

$$\delta(ab)=a\delta(b)+\delta(a)b\qquad\qquad \delta(a)^*=\delta(a^*)$$

注意，δ 在 $\mathcal{A}$上稠密定义、闭，且 α_t-不变。

在物理学中，通常讨论算子上的海森堡动力学，它由系统的哈密顿量决定，描述系统在时间演化过程中的行为。由于哈密顿量是无界算子，因此在准局域代数上定义不明确。不过，在对哈密顿量的相互作用项作出适当假设后，仍然可以在整个准局域代数上导出定义良好的动力学。现在，我们将讨论范围限定在准局域代数这一情形，以探讨这些联系。

（一致有界的）有限程[8] 相互作用定义为映射 $\Phi:\mathcal{P}_f(\Gamma)\to\mathcal{A}$其中 $\mathcal{P}_f(\Gamma)$ 是 Γ 的有限子集的集合，并且对每个 $\Lambda\subset\mathcal{P}_f(\Gamma)$，$\Phi(\Lambda)\in\mathcal{A}_\Lambda$满足 $\Phi\geq 0$；若对于某个 $r\in\mathbb{R}_{>0}$，$\mathrm{diam}(\Lambda)>r$[9][10]，则其取值为 0。某个 $\Lambda\subset_f\Gamma$ 上的（无挫折）哈密顿量定义为

$$H_\Lambda:=\sum_{X\in\mathcal{P}_f(\Lambda)}\Phi(X)$$

[7]准确地说，$\otimes$ 此处表示 $\otimes_{min}$（参见第 4.1.1节）。[8]在以下讨论中，这一假设可以放宽为：区域大小的衰减具有适当的“良好”性质。[9]任意有限区域 Λ 的直径 $\mathrm{diam}(\Lambda)$ 按照通常的几何方式定义，即为包含 Λ 的最小球的大小，其中 $\mathbb{R}^2$ 被视为 [10] 中点的子集。Φ 由于 r 的值域一致有限，Λ 不依赖于，且为统一上界。

哈密顿量 H_Λ由于是自伴的，通过设定 α_t 来定义 $\mathcal{A}_\Lambda$ 的动力学

$$\alpha_t^\Lambda(\cdot) := e^{itH_\Lambda}(\cdot)e^{-itH_\Lambda}$$

这在物理学中称为海森堡动力学。对于有限程相互作用，当 $\Lambda \uparrow \infty$时，极限 $\lim_{\Lambda\uparrow\infty} \alpha_t^\Lambda$对 t 在紧区间内是一致柯西的，因此存在唯一的强连续动力学 α_t^Φ，其对应于 Φ上的相互作用，并通过连续性延拓到 $\mathcal{A}$ 。 α_t^Φ的生成元随后是导子 δ： $\mathcal{A}_{\text{loc}} \to \mathcal{A}_{\text{loc}}$给出为

$$\delta(A) := i\sum_{\Lambda\subset_f\Gamma}[\Phi(\Lambda), a]$$

在有限体积中，这正是海森堡方程 $\dot{a} = i[H_\Lambda, a]$ ；当 t 有限时，其解是由 $a(t) = e^{itH_\Lambda}ae^{-itH_\Lambda}$ 给出的 a 的时间演化，并且与动力学 $\alpha_t^\Lambda(a)$完全相同。

现在我们研究动力学（$\mathcal{A}$、 α_t）对 α_t 不变态（ω、 $\mathcal{A}$）的影响。考虑态 ω的 GNS 三元组（π_ω、 $\mathcal{H}_\omega$、Ω_ω）。注意到，由于 ω在 α_t的作用下不变，因此有 $\omega \circ \alpha_t = \omega$。根据引理 4.1.8，存在一个酉算子 $U_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$[11]实现 α_t，即 $\pi \circ \alpha_t(\cdot) = U_t\pi(\cdot)U_t^*$，其中 $U_t\Omega_\omega = \Omega_\omega$。根据斯通定理 [BR12，第 3.1], 节，存在一个（通常无界的）自伴算子 H_ω 作用于 $\mathcal{H}_\omega$[12] ，使得 $U_t = e^{itH_\omega}$。 H_ω 是物理学中通常哈密顿量的无限体积对应物。我们称 H_ω 为 GNS 哈密顿量。

动力学（$\mathcal{A}$， α_t^Φ）的一个基态是满足以下条件的态 ω： 其 GNS 哈密顿量 H_ω满足 $H_\omega \geq 0$, $H_\omega\Omega_\omega = 0$。等价地， ω 是基态，当且仅当它满足不等式

$$-i\omega(a^*\delta_\Phi(a)) \geq 0 \qquad a \in \text{Dom}(\delta_\Phi)$$

这里， δ_Φ 是生成 α_t^Φ的导子。前一个条件更接近物理学层面的概念，即基态具有最低能量。

如果 H_ω 具有谱隙，则基态 ω 是有能隙的。等价地， ω 有能隙，当且仅当它满足庞加莱′不等式

$$-i\omega(a^*\delta_\Phi(a)) \geq \gamma(\omega(a^*a) - |\omega(a)|^2) \qquad a \in \text{Dom}(\delta_\Phi)$$

基态 态 ω 对于相互作用 Φ 是无挫折的，如果对所有 $\Lambda \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$， $\omega(\Phi(\Lambda)) = 0$.

4.4.3 对称性

对称性在物理学中发挥着重要作用。对于 C*-代数 $\mathcal{A}$，我们将对称性β 定义为： $G \to \text{Aut}(\mathcal{A})$, 满足 β： $g \mapsto \beta_g$，其中 $\beta_1 = \text{Id}$，且 $\beta_g \circ \beta_h = \beta_{gh}$。我们还假设 β是 G的忠实表示。

设 $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ 是一个态。 g 在 ω 上的作用定义为通过 $\beta_{\bar{g}}$ 进行前复合，其中$\bar{g}$ 是 g的逆元。若态 ω 对所有 $g \in G$ 均满足 $\omega \circ \beta_g = \omega$，则称其为不变态。由引理4.1.8 可知， β_g 由一个酉算子 U_g 实现。

[11]可以证明， $U_t \in \pi_\omega(\mathcal{A})'' \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$。[12]$H_\omega$ 与 $\pi(\mathcal{A})''$相伴，即对于每个 Borel 集 $B \subset \mathbb{R}$，谱投影 $E^{H_\omega}(B)$ 属于 $\pi(\mathcal{A})''$。

注记 4.4.3。 我们注意到，动力学 $(\alpha_t, \mathcal{A})$ 是一种群作用，称为时间平移。

我们忽略时间反演等反酉对称性，以免徒增不必要的复杂性，因为本文所呈现的研究并不需要它们。

现在我们专门讨论准局域代数 $\mathcal{A}$ 的情形。对于每个格点 $s \in \Gamma$，我们将 $\beta_{g,s}$ 定义为 G 在格点 s 的代数 $\mathcal{A}_s$ 上的对称作用，并令 $\beta_{g,\Lambda} := \bigotimes_{s\in\Lambda} \beta_{g,s} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_\Lambda)$，其中 $\Lambda \subset_f \Gamma$。由于 $\beta_{g,\Lambda}$ 在 Λ 的包含关系下相容，它们可扩展为整个准局域代数 $\mathcal{A}$ 上的对称作用 $\beta_g : G \to \mathcal{A}$；该作用在每个 $\mathcal{A}_\Lambda$ 上定义为 $\beta_g|_{\mathcal{A}_\Lambda} := \beta_{g,\Lambda}$，称为 g 的格点上的作用。由于 β_g 的作用是格点上的，我们有 $\beta_g(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathcal{A}_\Lambda$，对所有 $\Lambda \subset \Gamma$ 均成立。

若相互作用 Φ （因而动力学）在 $\mathcal{A}$ 上满足 $\beta_g(\Phi(\Lambda)) = \Phi(\Lambda)$，对所有 $g \in G$ 和 $\Lambda \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$ 均成立，则称其（在 G 的作用下）是不变的。

4.4.4 锥代数

满足 $\theta_1 \neq \theta_2$、角度为 θ_1，$\theta_2 \in [0, 2\pi)$ 且顶点为 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ 的锥 $\Lambda(\theta_1, \theta_2, x_0) \subset \mathbb{R}^2$ 定义为集合

$$\Lambda(\theta_1, \theta_2, x_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{angle}(x - x_0) \in (\theta_1, \theta_2)\}$$

这里 (θ_1, θ_2) 表示从 θ_1 到 θ_2 逆时针方向的角度区间。为简洁起见，我们将 $\Lambda := \Lambda(\theta_1, \theta_2, x_0)$ 简记为此。对于锥 Λ，我们将其补锥记为 $\Lambda^c := \mathbb{R}^2 \setminus \Lambda$，其中 Λ 是 Λ 在 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑下的闭包。

对应于 $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ 的锥 $\Lambda \subset \Gamma$ 定义如下。注意，当为每条边指定一个对应于该边中心的点（位于 $\mathbb{R}^2$ 中）时，Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集；面及其对应的几何中心也同理。于是，Λ 是 Γ 中位于 Λ 内的格点子集，其中 Γ 被视为 $\mathbb{R}^2$ 的子集。为简洁起见，我们滥用记号，用 $\Lambda \subset \Gamma$ 表示 Λ。

我们注意到 $\mathcal{P}_f(\Lambda)$ 是一个有向集，其中 $\leq$ 运算仍然是包含关系。与上文一样，我们取定义在锥 Λ 上的量子自旋系统的归纳极限，并记为$\mathcal{A}_\Lambda$[13]。现在考虑一个表示 $\pi : \mathcal{A}_\Lambda \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$（它完全可能是某个态 ω 在 $\mathcal{A}_\Lambda$上的 GNS 表示）。由于 $\pi(\mathcal{A})$ 定义了 $*$的一个子代数，我们可以定义冯·诺伊曼代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，

$$\mathcal{R}^\pi_\Lambda := \pi(\mathcal{A}_\Lambda)''$$

称为 锥代数。若 π 是非退化的，则由定理4.3.3 可知 $\mathcal{R}^\pi_\Lambda$ 是弱算子拓扑闭的（因而也是强算子拓扑闭、范数闭的）。由引理4.3.6 可知 $\pi(\mathcal{A}_\Lambda)$ 在 $\mathcal{R}^\pi_\Lambda$中弱算子拓扑稠密。

注记 4.4.4。 锥代数包含许多准局域代数中没有的有用算子（例如实现“任意子”等价的酉算子（见第4.5节），或投影到特定任意子扇区的投影），并且对于在任意子范畴上定义融合范畴结构至关重要（将在第 4.7节中定义）。

[13]这里，$\mathcal{A}_\Lambda$ 我们指的是：所考虑的嵌入于 $\mathbb{R}^2$ 中的图 Γ 是锥 Λ，而不是通常的$\mathbb{Z}^2$。

引理 4.4.5。 *[Oga22，引理 5.3,3。5]* 设 ω 是由具有一致上界的有限程相互作用所给出的动力学的纯有隙基态，并设 $(\pi,\ \mathcal{H},\ \Omega)$ 是其 *GNS* 三元组。那么对任意锥 Λ，$\mathcal{R}_\Lambda^\pi$ 都不容许正规迹态。特别地，$\mathcal{R}_\Lambda^\pi$ 要么是 II_∞ 型，要么是 III型，因此是一个适当无穷因子。

4.5 任意子选择准则

原则上，对于给定的 C*-代数（如准局域代数）存在许多忠实表示。其中许多表示是不具有物理意义的。例如，存在具有“无限能量”或包含无穷多个“激发”的表示。因此，我们通过施加适当的准则来选择物理表示，从而筛选出我们希望描述的物理现象。在本例中，由于我们希望描述任意子（关于任意子的物理特征，见章节 2），所以施加超选择准则。

在以下定义中，我们将经常讨论参考态。该态通常具有重要的物理意义，并且通常被选为纯基态。对于量子双模型这类“良好模型”，则将其选为唯一的无挫基态。

固定一个参考态 ω_0，并将其 GNS 三元组记为（$\pi_0,\ \mathcal{H}_0,\ \Omega_0$）。此外，将锥代数记为 $\mathcal{R}_\Lambda := \pi_0(\mathcal{A}_\Lambda)''$，其中锥为 Λ。由于 π_0 是忠实的，为避免冗余，只要上下文清楚，我们就将 $\mathcal{A}$ 与其像 $\pi_0(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ 以及 $\mathcal{A}_\Lambda$ 与其像 $\pi_0(\mathcal{A}_\Lambda) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ 视为相同。

定义 4.5.1。 表示 $\pi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足任意子选择准则（相对于 ω_0 的 GNS $(\pi_0, \mathcal{H}_0, \Omega_0)$），如果对于每个锥 Λ，都存在一个酉算子 $U_\Lambda:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0$，使得

$$U_\Lambda\, \pi(a)\, U_\Lambda^* = \pi_0(a) \qquad \text{for all } a \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$$

这样的表示 π 称为任意子表示，其酉等价类是一个任意子扇区。

注记 4.5.2。 对定义4.5.1的一种常见改述是：对于所有锥 Λ，它都满足

$$\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} \simeq \pi_0|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}$$

其中 $\pi|_{\mathcal{A}_\Lambda}$ 是 π 在 $\mathcal{A}_\Lambda$上的限制。

注记 4.5.3。 在 [BV25] 中，任意子扇区的定义还要求其不可约。这样做主要是为了对所有不可约扇区进行分类。然而，在构造一般的任意子扇区范畴时，这种不可约性要求会造成妨碍，因为在这样的范畴中无法构造子对象。

注记 4.5.4。 该判据的理念是选择能够“隐藏半无限弦算子”的表示，而锥对此非常有用。

注记 4.5.5. 文献中传统上将任意子选择准则称为超选择准则。然而，我们选择使用上述术语，以便阐明其与“缺陷选择准则”的词源关系；该准则由本论文的一项工作提出，并将在下文进一步阐述。

引理 4.5.6. 任意子表示 π 均含单位元，因此是非退化的。

证明：任取一个锥 Λ。根据任意子表示的定义，存在一个 $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}_0$ 使得对于所有 $a\in\mathcal{A}_{\Lambda^c}$，都有 $\pi(a)=U^*\pi_0(a)U$。但单位元 $1\in\mathcal{A}_{\Lambda^c}$ 与 $1\in\mathcal{A}$共有，因为包含关系 $\mathcal{A}_{\Lambda^c}\hookrightarrow\mathcal{A}$是含单位元的。因此，我们有 $\pi(1)=U^*\pi_0(1)U$。注意到 π_0是含单位元的，便得到所需结果。□

在任意子选择准则的定义中，我们其实不必考虑锥；正如 [BBC+24].中所讨论的，任何满足某些公理的偏序集都可以。

本论文工作所必需的一项非常重要的技术条件称为 Haag 对偶性。

定义 4.5.7. 如果对于任意锥Λ，锥代数都满足以下条件，我们就称参考态 ω_0 满足*Haag* 对偶性

$$\mathcal{R}_\Lambda=\mathcal{R}'_{\Lambda^c}$$

这个条件可以看作局域性原理在时空中的对应形式，也就是说，彼此不在对方光锥内的两个可观测量彼此对易。正如我们将在第 7 章中看到的，这个条件也可以大幅放宽，甚至可以采用一种称为近似 Haag 对偶性[Oga22]的更弱性质。

定义 4.5.8。 我们如下定义参考态 [14] 对应的 ω 辅助代数 $\mathcal{R}_\Lambda$ 及相应的锥代数。选取一个禁向 $\theta\in[0,2\pi)$。若一个锥 Λ 是允许的，则 $\theta\notin(\theta_1,\ \theta_2)$，其中 $\theta_1,\ \theta_2$ 是 Λ的两个边界角。将所有允许锥的集合记为 $\mathcal{L}$。于是，辅助代数定义如下：

$$\mathcal{A}^a:=\overline{\bigcup_{\Lambda\in\mathcal{L}}\mathcal{R}_\Lambda}^{\|\cdot\|}$$

注 4.5.9。 在定义 $\mathcal{A}^a$ 时，我们取了范数完备化。不过，等价地，我们也可以执行以下过程（参见注记 4.4.2）：定义一个递增集合 $(\mathcal{L})\subset\mathcal{L}$，其包含关系由 $(\mathcal{L})\uparrow\mathcal{L}$ 定向。这给出一个归纳系统，其典范嵌入映射为 $\iota_{\Lambda_1,\ \Lambda_2}:\mathcal{R}_{\Lambda_1}\hookrightarrow\mathcal{R}_{\Lambda_2}$，若 $\Lambda_1\le\Lambda_2$。取其归纳极限，便得到辅助代数 $\mathcal{A}^a$。

注 4.5.10。 在上述辅助代数的定义中，我们选择了一个禁向。对于不愿接受选择公理的读者，需要注意的是，无需选择一个禁向 [BCNS26]。所得结构仍然是编织 C*-张量范畴。

引理 4.5.11。 $\mathcal{A}^a$ 包含准局域代数 $\mathcal{A}$，并且是C*-子代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ 的。

证明：我们首先证明 $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}^a$。考虑一个具有有限支撑的 $a\in\mathcal{A}$。存在一个允许锥 Λ，其包含 a的支撑，因此 $a\in\mathcal{A}_\Lambda$。根据定义，$\mathcal{R}_\Lambda$ 包含 $\mathcal{A}_\Lambda$，于是有 $a\in\mathcal{R}_\Lambda$。现在考虑一个范数收敛网 $(a_i)_{i\in I}\subset\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$，它收敛

[14]有时也称为允许代数。

到 $a \in \mathcal{A}$（$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ 在 $\mathcal{A}$ 中范数稠密）。根据上述结论，存在 Λ_i 使得 $a_i \in \mathcal{R}_{\Lambda_i}$，因此$a_i \in \mathcal{A}^a$。根据定义， $\mathcal{A}^a$ 是范数闭的，因此 $a \in \mathcal{A}^a$。

现在我们证明 $\mathcal{A}^a$ 是 $^*(\mathcal{H}_0)$ 的 C $\mathcal{B}$-子代数。根据定义， $\mathcal{R}_\Lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，因此 $\bigcup_{\Lambda\in\mathcal{L}} \mathcal{R}_\Lambda \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$。由于 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ 是范数闭的，我们有 $\mathcal{A}^a \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$。由于 $\mathcal{A}^a$ 是范数闭的，它是一个巴拿赫空间。显然，它是一个 C*-代数，其 $*$-代数结构和 C*-性质继承自 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，结论得证。□

注 4.5.12。 我们不必选择一个禁向，也可以选择一个禁戒锥Λ_0 ，使得 $\mathcal{L}$ 由所有满足以下条件的锥 Λ组成：存在一个 $x \in \mathbb{Z}^2$ ，使得 Λ与 $\Lambda_0 + x$不相交。然后，以与定义 $\mathcal{A}^a$ 相同的方式定义允许代数 $\mathcal{A}^0$ ，但采用 $\mathcal{L}$ 的适当定义（即，用一个禁向区间替代一个禁向）。

我们还可以如下定义另一个代数 $\mathcal{B}^0$ ：

$$\mathcal{B}^0 := \overline{\bigcup_{x\in\mathbb{Z}^2} \mathcal{R}_{\Lambda_0^c+x}}^{\|\cdot\|}$$

许多早期采用 DHR 风格代数量子场论分析的研究都使用了上述另一种定义。然而，正如下述引理所示，这一定义与辅助代数的定义完全相同。

引理 4.5.13. 我们有 $\mathcal{B}^0 = \mathcal{A}^0$。

证明： 显然 $\Lambda_0^c \in \mathcal{L}$，因为 $\Lambda_0^c \cap \Lambda_0 = \emptyset$。由此可得 $\Lambda_0^c + x \in \mathcal{L}$。因此我们有$\mathcal{B}^0 \subset \mathcal{A}^0$。另一方面，考虑一个允许锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$。根据定义，存在某个 x，使得 $\Lambda \subset \Lambda_0^c + x$。因此 $\mathcal{A}^0 \subset \mathcal{B}^0$。引理得证。□

4.6 局域化、可传输端同态

本节将说明，任意子表示是 $\mathcal{A}^a$ 的一种特殊端同态。提醒一下，由于 π_0 的忠实性，我们已将 $\mathcal{A}$ 认定为 $\pi_0(\mathcal{A})$，并将 $\mathcal{A}_\Lambda$ 认定为 $\pi_0(\mathcal{A}_\Lambda)$。

注 4.6.1。 在下文中，我们偶尔需要将 $*$-同态从$\mathcal{A}_\Lambda$ 延拓到 $\mathcal{R}_\Lambda$ ，并证明可以在此类延拓内部取极限。为此，使用 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$上的超弱 （$\sigma$-弱）拓扑以及与之相关的正规 映射概念会很方便。具体而言，冯·诺伊曼代数之间的线性映射若是超弱连续的，就称为正规 映射。我们只使用下面记录的两个标准事实，除此之外不展开一般理论。

引理 4.6.2。 设 $\Lambda \subset \Gamma$为一个锥，且 $\psi : \mathcal{A}_\Lambda \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ 是一个含单位元的有界 $*$-同态。则 ψ 可唯一延拓为正规 $*$-同态$\psi : \mathcal{R}_\Lambda \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$。

证明： 这是标准结果。[Tak79，引理 2。2]在包络冯·诺伊曼代数这一更一般的设定下证明了此结果。□

引理 4.6.3。 在冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$上，超弱拓扑与弱算子拓扑在闭单位球上一致。等价地，它们在任意范数有界集上也一致。

证明： 标准结果。可见于 [Tak79，引理 2。5]在更一般的设定下。 □

引理 4.6.4。 正规映射在范数有界网上是弱算子拓扑连续的 $s.$

证明： 正规映射按定义是超弱连续的。由引理 4.6.3 可得该结果。 □

定义 4.6.5。 A $*$-端同态 $\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{A}^a)$ 称为在锥 Λ 中局域化，如果对于所有$a \in \mathcal{A}_{\Lambda^c} \subset \mathcal{A}^a$ 都有 $\rho(a) = a$。 ρ 称为可传输的，如果对于所有选定的锥 Λ'，都存在一个 $*$-端同态 $\sigma \in \mathrm{End}(\mathcal{A}^a)$，其在 Λ' 中局域化，并且满足 $\sigma \simeq \rho$[15]。

定理 4.6.6。 假设满足锥的 *Haag* 对偶性。令 $\pi:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为一个任意子表示。则存在一个含单位元的 $*$-端同态 $\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{A}^a)$，使得 $\rho \circ \pi_0 \simeq \pi$。

证明： **步骤 1：构造 ρ_0 于 $\mathcal{A}$。** 为避免歧义，本步骤中我们明确保留 π_0。根据任意子选择准则，对于每个锥 Λ，都存在一个酉算子 $U_\Lambda:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0$，使得

$$\pi(a) = U_\Lambda^* \pi_0(a) U_\Lambda \qquad \text{for all } a \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$$

我们固定一个允许锥 $\Lambda_0 \in \mathcal{L}$，并记 $U := U_{\Lambda_0}$。定义

$$\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0), \qquad \phi(a) := U\pi(a)U^*$$

Then ϕ 是一个非退化的 $*$-表示。此外，对于所有 $a \in \mathcal{A}_{\Lambda_0^c}$，我们有 e

$$\phi(a) = U\pi(a)U^* = \pi_0(a)$$

根据 Λ_0 的任意子选择准则。现在我们定义一个 $*$-同态

$$\rho_0 : \pi_0(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0), \qquad \rho_0(\pi_0(a)) := \phi(a) = U\pi(a)U^*$$

此映射含单位元且为压缩的。

步骤 2：延拓至锥代数。 现在我们恢复将 $\mathcal{A}, \mathcal{A}_\Lambda$ 与其在 π_0 下的像相识别这一约定。任取一个锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$。按照将 $\mathcal{A}$ 与其像 $\pi_0(\mathcal{A})$ 相识别的惯例，在不会引起混淆时，我们将简单地记作 $\rho_0(a) = U\pi(a)U^*$。考虑限制

$$\rho_0|_{\mathcal{A}_\Lambda} : \mathcal{A}_\Lambda \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0),$$

这是一个有界 $*$-同态，介于 C*-代数之间，因此是范数连续的。引理4.6.2 由此可得唯一的正规 $*$-同态

$$\rho_\Lambda : \mathcal{R}_\Lambda \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$$

使得

$$\rho_\Lambda(a) = \rho_0(a) \qquad \forall a \in \mathcal{A}_\Lambda$$

[15]我们所说的 $\sigma \simeq \rho$，是指存在一个酉算子 $u \in \mathcal{A}^a$，使得 $\sigma = \mathrm{Ad}(u) \circ \rho$。

现在令 $\Lambda, \Sigma \in \mathcal{L}$，其中 $\Lambda \subset \Sigma$。则 $\mathcal{A}_\Lambda \subset \mathcal{A}_\Sigma$ 且 $\mathcal{R}_\Lambda \subset \mathcal{R}_\Sigma$。在公共稠密 $*$子代数 $\mathcal{A}_\Lambda \subset \mathcal{R}_\Lambda$ 我们有

$$\rho_\Lambda(a) = \rho_0(a) = \rho_\Sigma(a) \qquad \forall a \in \mathcal{A}_\Lambda$$

由 ρ_Λ（引理4.6.2）的唯一性可知

$$\rho_\Sigma|_{\mathcal{R}_\Lambda} = \rho_\Lambda$$

因此，该族 列 $\{\rho_\Lambda\}_{\Lambda\in\mathcal{L}}$ 在包含关系 $\mathcal{R}_\Lambda \hookrightarrow \mathcal{R}_\Sigma$ 下相容，只要满足 $\Lambda \subset \Sigma$。

步骤 3：定义 ρ 在 $\mathcal{A}^a$上。 对于 $x \in \bigcup_{\Lambda\in\mathcal{L}} \mathcal{R}_\Lambda$，取满足 $x \in \mathcal{R}_\Lambda$ 的 Λ，并令$\rho(x) := \rho_\Lambda(x)$。这是良定义的，因为若 $x \in \mathcal{R}_\Lambda \cap \mathcal{R}_\Sigma$，我们可以取满足 $\Lambda \cup \Sigma \subset \Theta$的 $\Theta \in \mathcal{L}$。由相容性 $\rho_\Theta|_{\mathcal{R}_\Lambda} = \rho_\Lambda$ 和 $\rho_\Theta|_{\mathcal{R}_\Sigma} = \rho_\Sigma$，可得 $\rho_\Lambda(x) = \rho_\Theta(x) = \rho_\Sigma(x)$。因此，$\rho$ 是 $\bigcup_{\Lambda\in\mathcal{L}} \mathcal{R}_\Lambda$上的含单位元的 $*$-同态，故范数有界，并且可通过连续性唯一延拓为含单位元的 $*$-同态 $\rho : \mathcal{A}^a \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$。

步骤 4：的值域 ρ 包含于 $\mathcal{A}^a$。 接下来我们证明，对于每个允许锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$，映射 ρ_Λ 实际上其值域包含于某个锥代数 $\mathcal{R}_\Sigma$ 中，其中 $\Sigma \in \mathcal{L}$ 是一个适当的允许锥。这将推出 $\rho(\mathcal{A}^a) \subset \mathcal{A}^a$。

固定 $\Lambda \in \mathcal{L}$。由于 $\mathcal{L}$按包含关系有向，我们可以选取 $\Sigma \in \mathcal{L}$使得 $\Lambda_0 \cup \Lambda \subset \Sigma$。令 $b \in \mathcal{A}_\Lambda$ 和 $a \in \mathcal{A}_{\Sigma^c}$。于是 $\Sigma^c \subset \Lambda_0^c$，因此 $a \in \mathcal{A}_{\Lambda_0^c}$，从而 $\rho_0(a) = \phi(a) = a$。由于 a，b具有不相交支撑，因此 $ab = ba$。利用 ϕ 是一个 $*$-表示，且 $\phi(a) = a$,$\phi(b) = \rho_0(b)$，我们得到

$$a\rho_0(b) = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) = \phi(ba) = \phi(b)\phi(a) = \rho_0(b)a$$

因此，对所有 $a \in \mathcal{A}_{\Sigma^c}$， $\rho_0(b)$ 与 a 对易，故与冯·诺伊曼代数 $\mathcal{R}_{\Sigma^c}$ 对易。换言之， $\rho_0(b) \in \mathcal{R}'_{\Sigma^c}$。根据锥的 Haag 对偶性， $\mathcal{R}'_{\Sigma^c} = \mathcal{R}_\Sigma$，所以对于所有 $b \in \mathcal{A}_\Lambda$， $\rho_0(b) \in \mathcal{R}_\Sigma$ 。

由于 ρ_Λ 在 $\mathcal{A}_\Lambda$上扩张了 ρ_0，我们有 $\rho_\Lambda(b) = \rho_0(b) \in \mathcal{R}_\Sigma$。

现在令 $x \in \mathcal{R}_\Lambda$。取一个范数有界网 $b_i \in \mathcal{A}_\Lambda$，它在强算子拓扑下收敛到 x，由定理4.3.7，因此也在弱算子拓扑下收敛（引理4.2.3）。由 ρ_Λ的正规性可知， ρ_Λ 在弱算子拓扑下连续（引理4.6.4）。此外， $\mathcal{R}_\Sigma$ 是弱算子拓扑闭的。综合这些事实可得，

$$\rho_\Lambda(x) = \rho_\Lambda\big(\lim_i b_i\big) = \lim_i \rho_\Lambda(b_i) = \lim_i \rho_0(b_i) \in \mathcal{R}_\Sigma$$

因此，对每个 $\Lambda \in \mathcal{L}$，都存在一个允许锥 $\Sigma = \Sigma(\Lambda) \in \mathcal{L}$，满足 $\rho_\Lambda(\mathcal{R}_\Lambda) \subset \mathcal{R}_\Sigma \subset \mathcal{A}^a$。

由于 $\mathcal{A}^a$ 是像 ι_Λ的并集的 C*-闭包，且 $\rho \circ \iota_\Lambda = \rho_\Lambda$ 将每个$\mathcal{R}_\Lambda$ 映射到 $\mathcal{A}^a$内某个锥代数中，因此可得 $\rho(\mathcal{A}^a) \subset \mathcal{A}^a$。因此， ρ 确实是含单位元的 $*$的端同态，按通常意义理解。

步骤5： $\rho \circ \pi_0 \simeq \pi$。最后，对于每个 $a \in \mathcal{A}$，我们有

$$(\rho \circ \pi_0)(a) = \rho_0(\pi_0(a)) = \phi(a) = U\pi(a)U^*$$

Thus

$$U^*(\rho \circ \pi_0)(a)U = \pi(a) \qquad \forall a \in \mathcal{A},$$

so π 并且 $\rho \circ \pi_0$ 作为表示酉等价，其交织算子为 U^* . □

命题 4.6.7。 假设满足锥的 *Haag* 对偶性，并令 π 和 $\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{A}^a)$ 如定理 4.6.6中所述，由任意子表示 π 使用特定锥区 Λ_0和酉算子 U_{Λ_0}构造而成。则 ρ 局域化于 Λ_0，且可传输。

证明： **局域化于** Λ_0。 根据 ρ_0 和 ϕ的构造，对于 $a \in \mathcal{A}_{\Lambda_0^c}$，有 $\rho_0(a) = \phi(a) = a$。此外，对于支撑于 Λ_0^c中的局部 a，我们可以选取 $\Lambda \in \mathcal{L}$，使得 $\mathrm{supp}(a) \subset \Lambda$，从而 $a \in \mathcal{R}_\Lambda$，并且

$$\rho(a) = \rho_\Lambda(a) = \rho_0(a) = a$$

通过用这类局域可观测量对任意 $a \in \mathcal{A}_{\Lambda_0^c}$ 作范数逼近，并利用 ρ的连续性，等式 $\rho(a) = a$ 可推广到所有 $a \in \mathcal{A}_{\Lambda_0^c}$，从而表明其局域化于 Λ_0。

可输运性。 设 $\Theta \in \mathcal{L}$为任意另一个允许锥。根据任意子选择准则，存在一个酉算子 $U_\Theta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0$，使得

$$\pi(a) = U_\Theta^* \pi_0(a) U_\Theta \qquad \forall a \in \mathcal{A}_{\Theta^c}$$

重复定理4.6.6 的构造，其中以 U_Θ 替代U_{Λ_0}，并重复步骤 4 的值域论证（其中以 Θ 替代 Λ_0），我们得到一个 $*$-端同态 $\rho^{(\Theta)} \in \mathrm{End}(\mathcal{A}^a)$，它局域化于 Θ，并满足对所有 $\Lambda \in \mathcal{L}$,

$$\rho_\Lambda^{(\Theta)}(a) = U_\Theta \pi(a) U_\Theta^* \qquad \forall a \in \mathcal{A}_\Lambda$$

定义 $W_\Theta := U_\Theta U_{\Lambda_0}^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$。那么对每个 $a \in \mathcal{A}$,

$$\rho^{(\Theta)}(a) = U_\Theta \pi(a) U_\Theta^* = W_\Theta U_{\Lambda_0} \pi(a) U_{\Lambda_0}^* W_\Theta^* = W_\Theta \rho(a) W_\Theta^*$$

此外，根据任意子选择准则和锥的 Haag 对偶性，酉算子 W_Θ局域化于锥 $\Sigma \in \mathcal{L}$ 中，且满足 $\Lambda_0 \cup \Theta \subset \Sigma$，因此 $W_\Theta \in \mathcal{R}_\Sigma \subset \mathcal{A}^a$。

现在固定一个锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 并令 $x \in \mathcal{R}_\Lambda$。选取一个有界网 $a_i \in \mathcal{A}_\Lambda$，使其在强算子拓扑下收敛至 x。利用 ρ_Λ 和 $\rho_\Lambda^{(\Theta)}$ 在 $\mathcal{R}_\Lambda$上的正规性，引理 4.6.4 以及 $\mathrm{Ad}(W_\Theta)$ 的强算子拓扑连续性，我们得到

$$\rho_\Lambda^{(\Theta)}(x) = \lim_i \rho_\Lambda^{(\Theta)}(a_i) = \lim_i W_\Theta \rho_\Lambda(a_i) W_\Theta^* = W_\Theta \rho_\Lambda(x) W_\Theta^*$$

因此，对于所有 $\Lambda \in \mathcal{L}$，$\rho_\Lambda^{(\Theta)} = \mathrm{Ad}(W_\Theta) \circ \rho_\Lambda$ 在 $\mathcal{R}_\Lambda$ 上成立。

通过延拓范数到 ρ 和 $\rho^{(\Theta)}$，可得

$$\rho^{(\Theta)} = \mathrm{Ad}(W_\Theta) \circ \rho \quad \text{on all of } \mathcal{A}^a$$

特别地， $\rho^{(\Theta)}$ 与 ρ酉等价，并且按构造局域化于 Θ，这表明其具有可输运性。□

引理 4.6.8. 对于每个局域化、可传输的 $\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{A}^a)$，都存在一个任意子表示 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，使得 $\rho \circ \pi_0 \simeq \pi$。

证明： 对于每个锥 Λ，由于 ρ 是可传输的，因此存在 $\rho_\Lambda \simeq \rho$，使 $U_\Lambda \in \mathcal{A}^a$实现该等价，从而 ρ_Λ 局域化于 Λ。

由于 $\mathcal{A}_{\Lambda^c} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^a$，对所有 $a \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$,

$$\mathrm{Ad}(U_\Lambda) \circ \rho(a) = \rho_\Lambda(a) = a$$

因此，该表示[16] $\pi := \rho \circ \pi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ 是一个任意子表示（与 $\rho \circ \pi_0$）平凡等价）。□

推论 4.6.9。 对于每个任意子表示 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，都存在一个任意子表示 $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，使得 $\pi \simeq \sigma$。

证明： 我们对 π 应用定理 4.6.6，得到 $\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{A}^a)$，使得 $\pi \simeq \rho \circ \pi_0$。接着利用引理 4.6.7，可知 ρ 是局域化且可传输的。现在应用引理 4.6.8，得到一个与 ρ 对应的任意子表示 $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，使得 $\sigma \simeq \rho \circ \pi_0$。综合这些结果，我们有 $\pi \simeq \sigma$。□

定理 4.6.6 表明，对于每个任意子表示，都存在一个 $\mathcal{A}^a$ 的局域化、可传输 $*$-端同态，它基本上实现了 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ 上的作用；引理 4.6.8 则表明，对于 $\mathcal{A}^a$ 的每个局域化、可传输 $*$-端同态，都存在一个任意子表示。由此我们得到了推论 4.6.9 这一引人入胜的结果。非常值得注意的是，精确的选择准则并不重要[17]！我们可以任选表示 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，也可以将希尔伯特空间固定为 $\mathcal{H}_0$，并且只考虑表示 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$。

事实上，正如定理经常使用的那样，我们也可以更改所讨论的 C*-代数！我们不必从准局域代数 $\mathcal{A}$ 出发，也可以考虑 $\mathcal{A}_\Lambda$、$\mathcal{R}_\Lambda$ 或 $\mathcal{A}^a$ 的表示；这样仍然会得到完全相同的选择准则。

仿佛这一系列非凡的童话般巧合还没有结束，论文 [BBC+24] 表明，即使是锥形区域也并不重要；如果从一个满足一般几何条件的非常一般的偏序集出发，也会得到相同的任意子扇区。

4.7 任意子范畴

基于上一节末尾的讨论，我们基本上已经证明，如果想研究任意子表示的范畴，就可以等价地研究 $\mathcal{A}^a$ 的局域化、可传输的 $*$-端同态。下文将对此作进一步阐述；今后，我们将把后者作为任意子范畴的工作定义。

现在，我们将 $\mathcal{A}$ 与其像 $\pi_0(\mathcal{A})$ 视为相同，以避免记号冗杂。我们的目标是证明任意子范畴是一个编织 C*-张量范畴。在继续之前，我们明确构造该范畴所用的假设。

我们考虑一个参考表示 $\pi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，它由一个态 ω_0 给出，而该态是由具有一致上界的有限程相互作用所决定的动力学的有能隙基态。我们还假设 π_0满足 Haag 对偶性。

定义 4.7.1. 我们定义范畴**DHR**，其对象为 $*$-端同态，它们局域化于某个允许锥中且可传输。对于 $\eta, \sigma \in \mathbf{DHR}$,

[16]通过注意到 $\rho \circ \pi_0$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个表示，便可轻易验证这一点；$\rho|_{\mathcal{A}}$ 是一个到$\mathcal{A}^a \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$的 $*$-同态。[17]即起始框架的选择（表示还是端同态、不同的背景代数）

交织算子空间

$$(\eta,\sigma) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) : T\eta(A) = \sigma(A)T \ \forall\ A \in \mathcal{A}^a\}$$

我们将范畴 **DHR(Λ)** 定义为 **DHR** 的全子范畴，其对象局域化于某个允许锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 中。

注记 4.7.2. 我们将证明，**DHR**(Λ的定义不依赖于所选的特定锥 Λ （在 C*-张量等价的意义下，见推论 4.7.15）。虽然我们的所有证明和构造都适用于**DHR**，但我们使用 **DHR**(Λ来简化证明，避免每次都明确处理局域化锥。

注记 4.7.3. 重要的是，我们并不将可输运性限制在允许的锥 Λ之内。这是因为（参见引理 4.6.7末尾的讨论），对于任意不允许的锥 Λ，都存在一个允许锥 Λ' 使得 $\Lambda' \subset \Lambda$。

由于 η, σ 局域化于 Λ 中，因此对所有 $a \in \mathcal{R}_{\Lambda^c}$,

$$Ta = T\eta(a) = \sigma(a)T = aT$$

由 Haag 对偶性可得 $T \in \mathcal{R}_\Lambda \subset \mathcal{A}^a$。因此，对于任意 η, $\sigma \in$ **DHR**(Λ)，态射空间满足 $(\eta,\sigma) \subset \mathcal{R}_\Lambda$。特别地，对于任意 $\eta \in$ **DHR**(Λ)，(η,η) 是一个 C*-子代数$\mathcal{R}_\Lambda$ (参见引理 4.7.7)。

回顾定义 3.1.3。根据定义（η, ρ）对所有 η, $\rho \in$**DHR**(Λ）显然是一个向量空间，且态射复合是双线性的。因此，**DHR**(Λ）是一个线性范畴。我们将在引理 4.7.11 中证明，直和确实也存在。

4.7.1 C*-张量结构

定义 4.7.4。 我们定义 $\otimes$: **DHR(Λ)** × **DHR(Λ)** → **DHR(Λ)**，如下所示。

$$\otimes : \eta,\sigma \mapsto \eta\circ\sigma \qquad (\text{denoted } \eta\otimes\sigma)$$
$$\otimes : U \in (\eta,\eta'), V \in (\sigma,\sigma') \mapsto U\eta(V) \in (\eta\otimes\sigma, \eta'\otimes\sigma')$$

容易验证，若 ρ, $\sigma \in$ **DHR(Λ)**，则 $\rho\circ\sigma \in$ **DHR(Λ)**。事实上，它显然是 $\mathcal{A}^a$ 的一个 $*$-端同态。对于任意 $a \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$，我们有 $\rho\circ\sigma(\pi_0(a)) = \rho(\pi_0(a)) = \pi_0(a)$，因此$\rho\circ\sigma$ 局域化于 Λ。对于任意锥 Λ'，存在 ρ', $\sigma' \in$ **DHR(Λ′)**，使得 $\rho \simeq \rho'$ 且$\sigma \simeq \sigma'$。分别令 V, W为交织酉算子。于是 $V\rho(W)$ 是一个酉算子，并交织 $\rho\circ\sigma$ 与 $\rho'\circ\sigma'$。因此 $\rho\circ\sigma$ 是可传输的。

注 4.7.5。 在上述定义中，读者可能会对将 η 纳入 $U\otimes T$ 的定义感到些许困惑。该定义确保 $U\otimes V$ 确实将 $\eta\circ\sigma$ 与 $\eta'\circ\sigma'$ 交织：考虑某个 $a \in \mathcal{A}^a$。

$$U\eta(V)\eta(\sigma(a)) = U\eta(V\sigma(a)) = U\eta(\sigma'(a)V) = U\eta(\sigma'(a))\eta(V) = \eta'(\sigma'(a))U\eta(V)$$

因此，确实有 $U\eta(V) \in (\eta\otimes\sigma,\ \eta'\otimes\sigma')$。

引理 4.7.6。 我们有 $U\eta(V) = \eta'(V)U$ 其中 $U \in (\eta, \eta')$ 以及 $V \in (\sigma, \sigma')$。特别地，这给出了交织算子张量积的另一种定义： $U \otimes V := \eta'(V)U$

证明： 由于对所有 $a \in \mathcal{A}^a$ 都有 $U\eta(a) = \eta'(a)U$，我们令 $a = V$（这是允许的，因为 $V \in \mathcal{R}_\Lambda \subset \mathcal{A}^a$），从而得到所需结果。□

引理 4.7.7。 回顾定义 *3.2.1*。元组 $(\boldsymbol{DHR}(\Lambda) \circ, \mathrm{Id}\ \alpha, \lambda^L, \lambda^R)$ 构成一个（严格的）张量范畴。这里 $\mathrm{Id} \in \mathrm{End}(\mathcal{A}^a)$ 是张量单位， α 是平凡结合子，因为复合满足结合律。

证明： 五边形方程和三角形方程显然成立，因为 α 是平凡结合子（这也使得 **DHR**(Λ) 严格），并且对于任意 $\rho \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$，映射 λ^L_ρ， λ^R_ρ也都是平凡的，因为 $\rho \circ \mathrm{Id} = \rho = \mathrm{Id} \circ \rho$。□

由于将 $\otimes$-函子理解为复合后，**DHR**(Λ) 的元组中的其余数据都是平凡的，因此我们今后将其省略。

定义 4.7.8。 我们定义函子 $*$： **DHR**(Λ) →**DHR**(Λ) 如下：

$$*: \eta \mapsto \eta$$
$$*: T \in (\eta, \eta') \mapsto T^* \in (\eta', \eta)$$

这里， $*$-运算是在 $\mathcal{A}^a$ 上的通常伴随作用，该作用继承自 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$。

注记 4.7.9。 $*$-运算实际上是**DHR**(Λ) 上的一个 $*$-函子。容易验证，如果 $T \in (\eta, \eta')$，那么 $T^* \in (\eta', \eta)$，因此 $*$： **DHR**(Λ) →**DHR**(Λ)^{op}。此外， $*$-运算是反变的、对合的、反线性的（在态射空间上），所以它确实是一个
$*$-函子，定义在 **DHR**(Λ) 上。

引理 4.7.10。回顾定义 *3.2.8*。范畴 $\boldsymbol{DHR}(\Lambda)$ 配备 $*$-函子后，是一个（严格的）C*-张量范畴。

证明： 根据引理 4.7.7 我们只需证明 **DHR**(Λ) 是一个 C*-范畴，并且
$*$-函子是幺半的。

对于任意 $\rho, \sigma \in \mathrm{DHR}(\Lambda)$，考虑映射 $\Phi_a : \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，其定义为 $\Phi : T \mapsto T\rho(a) - \sigma(a)T$，其中 $a \in \mathcal{A}^a$。于是 $(\rho, \sigma) = \bigcap_{a \in \mathcal{A}^a} \ker\ \Phi_a$。由于 $\ker\ \Phi$ 是闭集，且 (ρ, σ) 是闭集的交集，因此 (ρ, σ) 是巴拿赫空间。特别地，对于任意$\rho \in \mathrm{DHR}(\Lambda)$， (ρ, ρ) $\subset \mathcal{R}_\Lambda$ 是一个 C*-子代数。此外，我们知道，从$\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$继承的范数满足 C*-恒等式，且复合自动是压缩的（参见例 4.1.0.1）。因此，DHR(Λ) 是一个 C*-范畴。

此外，对于 $T \in (\eta, \eta')$ 和 $S \in (\sigma, \sigma')$，我们有

$$(T \otimes S)^* = (T\eta(S))^* = (\eta(S))^* T^* = \eta(S^*)T^* = T^*\eta'(S^*) = T^* \otimes S^*$$

其中在最后一个等式中，我们用到了引理 4.7.6。因此， $*$-函子是幺半的。这就得到了所需的结果。□

引理 4.7.11。 范畴$\boldsymbol{DHR}(\Lambda)$ 具有子对象和直和 $s.$

证明：见 [Oga22]。为方便起见，我们在此写出证明。

直和：由于 $\mathcal{R}_\Lambda$ 是一个适当无穷因子，存在投影 $p \in \mathcal{R}_\Lambda$使得 $p \leq 1$ 且 $p \sim (1-p) \sim 1$ 其中 $\sim$ 是 Murray-von Neumann 等价 [KR97，引理 6.3。3]因此，可以找到等距算子 v，$w \in \mathcal{R}_\Lambda$ 使得 $v^*v = w^*w = 1$，$v^*w = w^*v = 0$ 且 $vv^* = p$，$ww^* = (1-p)$。

接下来，我们按如下方式构造直和：对于 μ，$\sigma \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$，选取上述等距算子$v$，$w$。然后，

$$(\mu \oplus \sigma)(a) := v\mu(a)v^* + w\sigma(a)w^* \qquad a \in \mathcal{A}^a$$

容易验证 $\mu \oplus \sigma \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$。特别地，$\mu \oplus \sigma$ 是 $\mathcal{A}^a$ 上的含单位元 $*$-端同态。事实上，对所有 $a \in \mathcal{A}^a$，我们都有：

$$\begin{aligned}(\mu \oplus \sigma)(a)(\mu \oplus \sigma)(b) &= (v\mu(a)v^* + w\sigma(a)w^*)(v\mu(b)v^* + w\sigma(b)w^*) \\ &= v\mu(ab)v^* + w\sigma(ab)w^* = (\mu \oplus \sigma)(ab)\end{aligned}$$

单位律，$*$-性质是显然的。

直和定义良好，因为对于另一组相互正交的等距算子v'，$w' \in \mathcal{R}_\Lambda$ 所得到的直和 $\oplus'$，很容易证明 $\mu \oplus \sigma \simeq \mu \oplus' \sigma$，其中酉算子 $v'v^* + w'w^*$ 实现了该等价。

$\mu \oplus \sigma$ 利用 μ的局域化局域化在 Λ 中，σ，这是由于 v，$w \in \mathcal{R}_\Lambda = \mathcal{R}'_{\Lambda^c}$（根据 Haag 对偶性）以及 $vv^* + ww^* = 1$这一事实。它也是可传输的。事实上，对于一个锥Λ'，存在 μ'，$\sigma' \in \mathbf{DHR}(\Lambda')$以及酉算子 V：$\mu \to \mu'$ 和 W：$\sigma \to \sigma'$，分别实现该等价。然后，我们利用相互正交的等距算子 $\{v', w' \in \mathcal{R}_{\Lambda'}\}$构成的元组来定义 $\mu' \oplus \sigma'$。酉算子 $U = v'Vv^* + w'Ww^*$ 随后将 $\mu \oplus \sigma$ 与$\mu' \oplus \sigma'$交织起来，这一点可直接验证。

子对象：令 $\mu \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$，并令 $p \in (\mu, \mu)$ 为任意非零投影。由[Oga22, 引理 5.8] 可知 $p \sim 1 \in \mathcal{R}_\Lambda$。因此，存在等距算子 $v \in \mathcal{R}_\Lambda$ 使得 $vv^* = p$。现在我们构造对象 $\sigma(\cdot) = v^*\mu(\cdot)v$。

映射 σ 显然是 $\mathcal{A}^a$ 上的一个 $*$-端同态。下面以一个例子来检验态射性质。对于任意 $a, b \in \mathcal{A}^a$，

$$\sigma(a)\sigma(b) = v^*\mu(a)vv^*\mu(b)v = v^*\mu(a)p\mu(b)v = v^*p\mu(a)\mu(b)v = v^*p\mu(ab)v = v^*\mu(ab)v = \sigma(ab)$$

这里我们利用了 $p \in (\mu, \mu)$，从而得到 $p\mu(a) = \mu(a)p$，以及单位元 $v^*p = v^*vv^* = v^*$。我们验证 σ 在 Λ 中是局域化的。考虑 $a \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$。那么[18]，

$$\sigma(a) = v^*\mu(a)v = v^*\pi_0(a)v = a$$

这里我们利用了 $v \in \mathcal{R}_\Lambda = \mathcal{R}'_{\Lambda^c}$ 和 $\mathcal{A}_{\Lambda^c} \subset \mathcal{R}_{\Lambda^c}$，从而得到 $av = va$。

我们验证 σ 是可传输的。我们观察到 μ是可传输的。考虑一个锥 Λ'，以及一些局域化在 Λ' 中的 $\mu' \simeq \mu$ 和酉算子 U：$\mu \to \mu'$，它实现了等价。定义 $\sigma'(\cdot) := U\sigma(\cdot)U^*$。根据定义，$\sigma' \simeq \sigma$。我们通过观察$UvU^* \in (\mu', \mu') \subset \mathcal{R}_{\Lambda'}$，注意到 $UvU^* \in \mathcal{R}_{\Lambda'}$。

[18]回顾 $\mathcal{A}_\Lambda$ 与其在 π_0 下的像的对应关系

现在，对于所有 $a \in \mathcal{A}_{(\Lambda')^c}$，我们有，

$$\begin{aligned}\sigma'(a) &= UvU^*\mu(a)vU^* = UvU^*U\mu(a)U^*Uv^*U^* \\ &= UvU^*\mu'(a)Uv^*U^* = UvU^*aUv^*U^* = a\end{aligned}$$

其中我们使用了 $UvU^* \subset \mathcal{R}_{\Lambda'}$来得到 $[UvU^*, a] = 0$。

由于按此构造的 σ 是 $\mathcal{A}^a$的一个局域化于 Λ且可传输的端同态，因此 $\sigma \in$**DHR(**Λ**)**。

现在我们验证 σ 确实是 μ的一个子对象。事实上，对于所有 $a \in \mathcal{A}^a$,

$$v\sigma(a) = vv^*\mu(a)v = p\mu(a)v = \mu(a)pv = \mu(a)v$$

这里我们用到了 $p \in (\mu, \mu)$，以及 $pv = vv^*v = v$。因此 $v \in (\sigma, \mu)$，但由于 v是一个等距交织算子，σ 确实是 μ的一个子对象，证明完毕。□

4.7.2 满子范畴 $\mathbf{DHR}_0(\Lambda)$

众所周知，从一个（C*-）张量范畴出发，总能构造出一个与之张量等价的全骨架子范畴（例如参见 [EGNO15，习题 2.8。8]）。现在我们针对 **DHR(**Λ**)** 这一情形，明确写出该构造。

定义 4.7.12。 我们将 $\mathbf{DHR}_0(\Lambda)$ 定义为 **DHR(**Λ**)** 的一个满骨架子范畴：为 **DHR(**Λ**)** 中每个对象的等价类固定一个代表元，并从 **DHR(**Λ**)** 引入 Hom 空间。特别地，如果 $\rho_0, \rho_0' \in \mathbf{DHR}_0(\Lambda)$ 且 $\rho_0 \simeq \rho_0'$，那么 $\rho_0 = \rho_0'$。

现在，对于每个对象 $\rho \in$**DHR(**Λ**)** 以及等价类 $[\rho]$ 的代表元 $\rho_0 \in \mathbf{DHR}_0(\Lambda)$，我们固定酉交织算子 $T_\rho : \rho \to \rho_0$。我们注意到 $T_{\mathrm{Id}} = 1$仅在一个复相意义下成立，因为根据定义，$\mathrm{Id} \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$ 局域化于 Λ。现在，由于 $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ 是所有与全部 $a \in \mathcal{R}_\Lambda$ 对易的算子 $T \in \mathcal{R}_\Lambda$ 的集合，并且假设 $\mathcal{R}_\Lambda$ 是一个因子，因此可得 $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) = \mathbb{C}1$。由于假设 T 为酉算子，故可得 $T = c1$，其中 $|c| = 1$。现在，对于所有满足 $\rho_0 \in \mathbf{DHR}_0(\Lambda)$ 的 T_{ρ_0}，我们固定 $c = 1$。特别地，我们也固定$T_{\mathrm{Id}} = 1$。

我们通过设定对所有 $\rho_0, \sigma_0 \in \mathbf{DHR}_0(\Lambda)$，在 $\mathbf{DHR}_0(\Lambda)$ 上定义张量函子 $\otimes_0$

$$\rho_0 \otimes_0 \sigma_0 := T_{\rho_0\otimes\sigma_0}(\rho_0 \circ \sigma_0)T^*_{\rho_0\otimes\sigma_0}$$

现在，由于 $\mathbf{DHR}_0(\Lambda)$ 是通过为每个等价类选定一个代表元，从 **DHR(**Λ**)** 构造得到的，因此对于所有 $V \in (\rho_0, \rho_0')$、$W \in (\sigma_0, \sigma_0')$，令

$$V \otimes_0 W := T_{\rho_0'\otimes\sigma_0'}(V\rho_0(W))T^*_{\rho_0\otimes\sigma_0}$$

这给出了态射上的张量积。

我们注意到 $\rho_0 \otimes_0 \mathrm{Id} = \mathrm{Ad}[T_{\rho_0\otimes\mathrm{Id}}](\rho_0 \otimes \mathrm{Id}) = \mathrm{Ad}[T_{\rho_0}](\rho_0) = \rho_0$，这意味着右单位元约束总是平凡的。左单位元约束同样如此。

$*$-函子在$\mathbf{DHR}_0(\Lambda)$上的定义继承自**DHR(**Λ**)**，因为$\mathbf{DHR}_0(\Lambda)$是满的，而 $*$-函子仅对态射有非平凡作用。

引理 4.7.13. 元组$(\boldsymbol{DHR}_0(\Lambda)\ \otimes_0, \mathrm{Id}\ \alpha^0, \lambda^L, \lambda^R)$连同 $*$-函子构成一个C*-张量范畴。这里，结合子 α^0 定义为

$$\alpha^0_{\rho_0,\sigma_0,\mu_0} = T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}\rho_0(T_{\sigma_0\otimes\mu_0})(T_{\rho_0\otimes\sigma_0}\otimes \mathrm{Id}_{\mu_0})^* T^*_{(\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes\mu_0},$$

并且 λ^L、λ^R 是平凡的单位子。

证明： 首先我们验证 α^0 确实是一个结合子:

$$\begin{aligned}
&\alpha^0_{\rho_0,\sigma_0,\mu_0}\left((\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes_0\mu_0\right)\\
&= T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}\rho_0(T_{\sigma_0\otimes\mu_0})(T_{\rho_0\otimes\sigma_0}\otimes 1_{\mu_0})^* T^*_{(\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes\mu_0}\left(\mathrm{Ad}[T_{(\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes\mu_0}](\mathrm{Ad}[T_{\rho_0\otimes\sigma_0}](\rho_0\circ\sigma_0)\circ\mu_0)\right)\\
&= T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}\rho_0(T_{\sigma_0\otimes\mu_0})T^*_{\rho_0\otimes\sigma_0}(\mathrm{Ad}[T_{\rho_0\otimes\sigma_0}](\rho_0\circ\sigma_0)\circ\mu_0)T^*_{(\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes\mu_0}\\
&= T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}\rho_0(T_{\sigma_0\otimes\mu_0})((\rho_0\circ\sigma_0)\circ\mu_0)T^*_{\rho_0\otimes\sigma_0}T^*_{(\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes\mu_0}\\
&= T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}\rho_0(T_{\sigma_0\otimes\mu_0})(\rho_0\circ(\sigma_0\circ\mu_0))T^*_{\rho_0\otimes\sigma_0}T^*_{(\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes\mu_0}\\
&= T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}(\rho_0\circ\mathrm{Ad}[T_{\sigma_0\otimes\mu_0}](\sigma_0\circ\mu_0))\rho_0(T_{\sigma_0\otimes\mu_0})T^*_{\rho_0\otimes\sigma_0}T^*_{(\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes\mu_0}\\
&= \left(\mathrm{Ad}[T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}](\rho_0\circ\mathrm{Ad}[T_{\sigma_0\otimes\mu_0}](\sigma_0\circ\mu_0))\right)T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}\rho_0(T_{\sigma_0\otimes\mu_0})(T_{\rho_0\otimes\sigma_0}\otimes 1_{\mu_0})^* T^*_{(\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes\mu_0}\\
&= (\rho_0\otimes_0(\sigma_0\otimes_0\mu_0))\,\alpha^0_{\rho_0,\sigma_0,\mu_0}
\end{aligned}$$

由于 α 是平凡的，根据 T的相干性可知五边形方程得到满足。由于单位子按设计是平凡的，三角形方程也就显然得到满足。

现在我们注意到， $*$-函子对 $V\in(\rho_0、\ \rho_0')$ 和 $W\in(\sigma_0、\ \sigma_0')$ 满足,

$$\begin{aligned}
(V\otimes_0 W)^* &= \left(T_{\rho_0'\otimes\sigma_0'}(V\rho_0(W))T^*_{\rho_0\otimes\sigma_0}\right)^* = T_{\rho_0\otimes\sigma_0}(\rho_0(W^*)V^*)T^*_{\rho_0'\otimes\sigma_0'}\\
&= T_{\rho_0\otimes\sigma_0}(V^*\rho_0'(W^*))T^*_{\rho_0'\otimes\sigma_0'} = V^*\otimes_0 W^*
\end{aligned}$$

这表明 $*$-函子确实是幺半的。因此结论成立。 □

引理 4.7.14。 $\boldsymbol{DHR}_0$（Λ）与 C*-张量等价于$\boldsymbol{DHR}$（Λ）。

证明： 为证明等价性，我们考虑包含函子 F : $\mathbf{DHR_0(\Lambda)}$ $\to$**DHR(Λ)**。函子 F 按定义是全忠实的，并且是本质满的，因为 **DHR(Λ)** 中的每个对象都等价于其在$\mathbf{DHR_0(\Lambda)}$中的代表对象，因此它构成一个等价。

定义自然变换

$$\phi_{\rho_0,\sigma_0}: F(\rho_0)\otimes F(\sigma_0)\to F(\rho_0\otimes_0\sigma_0),\qquad \phi_0:\mathrm{Id}\to F(\mathrm{Id}),$$

对 $\mathbf{DHR_0(\Lambda)}$ 的所有对象 ρ_0,σ_0 ，赋值如下:

$$\phi_{\rho_0,\sigma_0} = T_{\rho_0\otimes\sigma_0},\qquad \phi_0 = 1$$

由于 $T_{\rho_0\otimes\sigma_0}$ 被选为酉等价，很容易验证 $\phi_{\rho_0,\ \sigma_0}$ 是一个自然同构。而 ϕ_0 显然是一个同构。

我们验证六边形方程成立：

$$\begin{aligned}F(\alpha^0_{\rho_0,\sigma_0,\mu_0})\phi_{\rho_0\otimes_0\sigma_0,\mu_0}(\phi_{\rho_0,\sigma_0}\otimes 1_{\mu_0}) &= \alpha_{\rho_0,\sigma_0,\mu_0}\phi_{\rho_0\otimes_0\sigma_0,\mu_0}\phi_{\rho_0,\sigma_0}\\ &= T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}\rho_0(T_{\sigma_0\otimes\mu_0})T^*_{\rho_0\otimes\sigma_0}T^*_{(\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes\mu_0}T_{(\rho_0\otimes_0\sigma_0)\otimes\mu_0}T_{\rho_0\otimes\sigma_0}\\ &= T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}\rho_0(T_{\sigma_0\otimes\mu_0})\\ &= T_{\rho_0\otimes(\sigma_0\otimes_0\mu_0)}(1_{\rho_0}\circ\rho_0(T_{\sigma_0\otimes\mu_0}))\\ &= \phi_{\rho_0,\sigma_0\otimes_0\mu_0}(1_{\rho_0}\otimes\phi_{\sigma_0,\mu_0}) = \phi_{\rho_0,\sigma_0\otimes_0\mu_0}(1_{\rho_0}\otimes\phi_{\sigma_0,\mu_0})\end{aligned}$$

由于 α 是平凡的，因此可得正确的方程。

证明 F 确实是一个张量函子。由于 F 也是一个等价，故可得F 是一个张量等价。因此，$\mathbf{DHR}(\Lambda)$与$\mathbf{DHR}_0(\Lambda)$张量等价。

$\mathbf{DHR}_0(\Lambda)$的满性给出了相同的 $*$-函子和相同的态射空间。因此，包含函子 F与 $*$-函子相容，即对于所有$V\in(\rho_0,\rho_0)$，都有 $F(V)^*=F(V^*)$，且该函子在态射空间上是等距的（因此为正）。由于 T 映射的酉性，张量结构同构和单位同构都是酉映射，因此 F 实际上是一个 C*-张量等价。由此可得 F 是一个 C*-张量等价。□

推论 4.7.15。 对于满足 $\Lambda_1\subset\Lambda_2$的锥 Λ_1、 Λ_2， $\boldsymbol{DHR}(\Lambda_1)$ 与$\boldsymbol{DHR}(\Lambda_2)$是C*-张量等价的。

证明： 我们两次使用引理 4.7.14（一次用于 $\mathbf{DHR}(\Lambda_1)$， 一次用于 $\mathbf{DHR}(\Lambda_2)$）以获得所需结果。 □

4.7.3 编织结构

我们可以赋予 $\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 一个编织结构。这种编织最早由 Doplicher、Haag 和 Roberts 在代数量子场论文献中提出。编织同构 c： $\mathbf{DHR}(\Lambda)\times\mathbf{DHR}(\Lambda)\to\mathbf{DHR}(\Lambda)\times\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 是一个 C*-自然同构，它交换张量因子： $\otimes\Rightarrow\otimes^{\mathrm{opp}}$。在许多处理方式中，张量函子通常是一个几何对象，并且根据其在张量因子中的位置，可以明确定义左/右。然而在 DHR 处理中，由于张量由复合给出，因此与之相关联的是一种自然的“时间”几何结构。第一个张量因子中的对象作用于第二个张量因子中的对象之后。下面在观察以下有用结果（它是“局域性”的晶格类比）后，定义这种“时间编织”：

引理 4.7.16。 设 $\rho\in\boldsymbol{DHR}(\Lambda)$ 和 $\sigma\in\boldsymbol{DHR}(\Lambda')$， 其中 Λ' 与 Λ不相交。则有，

$$\rho\otimes\sigma=\sigma\otimes\rho$$

证明： 固定一个允许锥 $\Sigma\in\mathcal{L}$。对于每个有限区域 $X\subset\Sigma$，我们定义 $X=X_1\sqcup X_2\sqcup X_3$，其中 $X_1:=X\cap\Lambda$、 $X_2:=X\cap\Lambda'$，且 $X_3:=X\setminus(X_1\cup X_2)$。于是，局域代数 $\mathcal{A}_X\simeq\mathcal{A}_{X_1}\otimes\mathcal{A}_{X_2}\otimes\mathcal{A}_{X_3}$具有典范张量积分解。因此，每个$a\in\mathcal{A}_X$ 都可以写成有限和 $a=\sum_{j=1}^n a_j^{(1)}a_j^{(2)}a_j^{(3)}$， 其中 $a_j^{(k)}\in\mathcal{A}_{X_k}$。

由局域化可知， ρ 对任何支撑于 Λ^c 的可观测量均平凡作用，而 σ 对任何支撑于 $(\Lambda')^c$ 的可观测量均平凡作用。由于 Λ 和 Λ' 不相交，因此我们有 $X_1\subset(\Lambda')^c$， $X_2\subset\Lambda^c$，

因此

$$\sigma(b) = b \quad \text{for all } b \in \mathcal{A}_{X_1}, \qquad \rho(c) = c \quad \text{for all } c \in \mathcal{A}_{X_2}.$$

此外， ρ 和 σ 在 $\mathcal{A}_{X_3}$上均平凡作用，因为 $X_3 \subset \Lambda^c \cap (\Lambda')^c$。

现在让我们计算 $\rho \circ \sigma$ 和 $\sigma \circ \rho$ 在简单张量 $a_j^{(1)} a_j^{(2)} a_j^{(3)}$ 上的作用。我们得到 t

$$\begin{aligned}\rho \circ \sigma(a_j^{(1)} a_j^{(2)} a_j^{(3)}) &= \rho\big(\sigma(a_j^{(1)})\sigma(a_j^{(2)})\sigma(a_j^{(3)})\big) = \rho\big(a_j^{(1)}\sigma(a_j^{(2)})a_j^{(3)}\big) \\ &= \rho(a_j^{(1)})\rho(\sigma(a_j^{(2)}))\rho(a_j^{(3)}) = \rho(a_j^{(1)})\sigma(a_j^{(2)})a_j^{(3)},\end{aligned}$$

其中我们使用了 ρ 在 $a_j^{(3)}$ 上平凡作用这一事实，以及 $\sigma(a_j^{(2)}) \in \mathcal{R}_{\Lambda'} \subset \mathcal{R}_{\Lambda^c}$，而 ρ 在 $\mathcal{R}_{\Lambda^c}$ 上作为单位元作用，因此 $\rho(\sigma(a_j^{(2)})) = \sigma(a_j^{(2)})$。类似地，

$$\begin{aligned}\sigma \circ \rho(a_j^{(1)} a_j^{(2)} a_j^{(3)}) &= \sigma\big(\rho(a_j^{(1)})\rho(a_j^{(2)})\rho(a_j^{(3)})\big) = \sigma\big(\rho(a_j^{(1)})a_j^{(2)}a_j^{(3)}\big) \\ &= \sigma(\rho(a_j^{(1)}))\sigma(a_j^{(2)})\sigma(a_j^{(3)}) = \rho(a_j^{(1)})\sigma(a_j^{(2)})a_j^{(3)}.\end{aligned}$$

因此， $\rho \circ \sigma$ 和 $\sigma \circ \rho$ 在每个简单张量 $a_j^{(1)} a_j^{(2)} a_j^{(3)}$ 上相同，从而由线性性知它们在 $\mathcal{A}_X$上处处相同，再由范数连续性知它们在 $\mathcal{A}_\Sigma$上处处相同。

我们注意到， ρ 和 σ 对每个 $\mathcal{R}_\Sigma$ 的限制都是正规 $*$-端同态（因此是强算子拓扑连续的），并且 $\mathcal{A}_\Sigma$ 在 $\mathcal{R}_\Sigma$中强稠密。因此， $\rho\circ\sigma$和 $\sigma\circ\rho$在 $\mathcal{R}_\Sigma$上一致。

根据定义， $\mathcal{A}^a$ 是 $*$代数 $\bigcup_{\Sigma\in\mathcal{L}} \mathcal{R}_\Sigma$的范数闭包。由于 $\rho \circ \sigma$ 和 $\sigma \circ \rho$在每个 $\mathcal{R}_\Sigma$上都相同，因此它们在 $\bigcup_{\Sigma\in\mathcal{L}} \mathcal{R}_\Sigma$上也相同。由于 $\rho \circ \sigma$ 和 $\sigma \circ \rho$ 是定义在 $\mathcal{A}^a$上的范数有界线性映射，结论得证。□

从范畴论的角度来看，引理4.7.16 的含义是，保证存在平凡态射 $\mathrm{SWAP}: = 1 \in (\rho \otimes \sigma, \ \sigma \otimes \rho)$，对于 $\rho, \ \sigma \in \mathbf{DHR}(\Lambda_a$分别局域化在不相交锥中$\Lambda, \ \Lambda' \subset \Lambda_a$。

定义 4.7.17。回顾一下， $\mathcal{A}^a$ 的定义依赖于一个禁向θ。对于两个允许的、互不相交的锥，我们定义 $\Lambda(\theta_1, \ \theta_2, \ x) \ \Lambda'(\theta_1', \ \theta_2', \ x')$的规范左/右概念。若 Λ 位于的左侧 Λ'，则称其为 $\theta_1' > \theta_1 > \theta$。否则，称 Λ 位于的右侧 Λ'。示例见图4.1 。

我们选取 $\rho, \sigma \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$，其中 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 是某个允许锥，并按以下步骤定义编织：

- 起初，我们的对象是 $\rho \circ \sigma$，其中 ρ, σ 局域化在锥 Λ 中。
- 首先，我们选取一个位于 Λ 左侧的允许锥 $\Lambda_L \in \mathcal{L}$。由于 ρ 可传输，存在一个 ρ_L 局域化在 Λ_L 中，使得 $\rho \simeq \rho_L$。令 $U: \rho \to \rho_L$ 为实现该等价的酉算子。用范畴记号表示，我们有 $(U\otimes 1) \in (\rho\otimes\sigma, \rho_L\otimes\sigma)$。
- 现在，由于 ρ_L 局域化于 Λ_L 且 σ 局域化于 Λ，其中 Λ 与 Λ_L不相交，我们可以使用引理 4.7.16 直接得到 $\rho_L \circ \sigma = \sigma \circ \rho_L$。虽然从代数角度看这是一个平凡操作，但从范畴角度看，我们通过态射 $\mathrm{SWAP} \in (\rho_L \otimes \sigma, \ \sigma \otimes \rho_L)$来实现这一点。

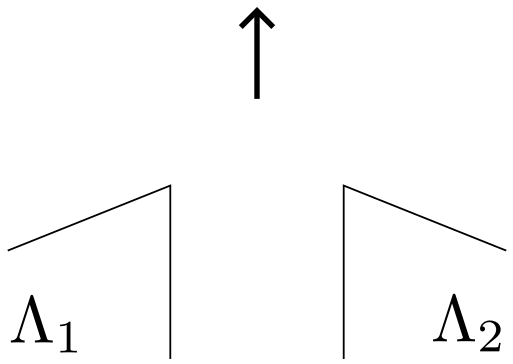


图 4.1：锥 Λ_1 位于锥 Λ_2 左侧的示例图（等价地， Λ_2 位于 Λ_1右侧）。此处的箭头表示禁向 θ。

- 现在我们再次利用 ρ_L 的可输运性，使其回到局域化于 Λ的 ρ 。但这次， ρ_L 在时间上先起作用，也就是说，它位于第二个张量因子中。因此，正确的态射是（$1 \otimes U^*$） $\in (\sigma \otimes \rho_L, \ \sigma \otimes \rho)$。

- 我们已成功在时间上交换了 ρ， σ。对于任意ρ， $\sigma \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$，我们通过组合这些态射来定义 $c_{\rho,\,\sigma} \in (\rho \otimes \sigma, \ \sigma \otimes \rho)$。

定义 4.7.18。 考虑 ρ， $\sigma \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$，以及酉算子 $U : (\rho, \ \rho_L)$，其中 Λ_L 位于 Λ 左侧，并且 $\rho_L \in \mathbf{DHR}(\Lambda_L)$ 满足 $\rho \simeq \rho_L$。我们定义自然同构（参见引理 4.7.20），称为编织同构，定义如下：

$$c_{\rho,\sigma} := (1 \otimes U^*) \circ \mathrm{SWAP} \circ (U \otimes 1) = \sigma(U^*)U$$

We 将同构 $S(\rho, \ \sigma) := c_{\sigma,\,\rho} c_{\rho,\,\sigma} \in (\rho \otimes \sigma, \ \rho \otimes \sigma)$ 称为 双重编织 g.

引理 4.7.19。 编织同构$c_{\rho,\,\sigma}$ 与锥 Λ' 的选择以及用于输运到 Λ'的酉算子的选择无关

证明： 考虑另一个酉算子 V： $\rho \to \rho'$。我们注意到 $VU^* \in (\rho', \ \rho') \subset \mathcal{R}_{\Lambda'}$。由于$\rho$， $\sigma \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$，且 Λ 与 Λ' 不相交，我们得到

$$\sigma(U^*)U = \sigma(U^*)UV^*V = \sigma(U^*)\sigma(UV^*)V = \sigma(V^*)V$$

这表明，在定义 $c_{\rho,\,\sigma}$ 时所选的具体酉算子无关紧要。

现在设 Λ' 和 Λ'' 是位于 Λ 左侧的两个允许锥，并选取酉算子 $U : \rho \to \rho'$ 和 $V : \rho \to \rho''$，其中 ρ'， ρ'' 分别局域化在 Λ'， Λ'' 中。选取一个同时包含 Λ' 和 Λ'' 的锥 $\Lambda_a \in \mathcal{L}$，并通过酉算子 W: $\rho' \to \tilde{\rho}$ 和 W': $\rho'' \to \tilde{\rho}$ 进一步输运到一个共同的 Λ_a-局域化端同态 $\tilde{\rho}$。于是， WU 和 $W'V$ 是从 ρ 到 $\tilde{\rho}$ 的两个酉算子，根据第一部分，所得编织相同。因此，$c_{\rho,\,\sigma}$ 不依赖于左侧锥的选择。□

引理4.7.20。 编织同构族 $\{c_{\rho,\sigma}\}$ 定义了一个自然同构 .

证明： 我们通过将$c_{\rho,\ \sigma}$表示为若干自然变换的复合，来验证其自然性。对每个 $\rho \in$**DHR**(Λ)，固定一个荷 $\rho_L \in$**DHR**(Λ_L)，使其局域化在 Λ_L 的左侧Λ，并固定一个酉交织算子 $U_\rho \in (\rho,\ \rho_L)$。根据引理4.7.19，由此得到的编织

$$c_{\rho,\sigma} := (1_\sigma \otimes U_\rho^*) \circ \mathrm{SWAP} \circ (U_\rho \otimes 1_\sigma)$$

与所有这些选择无关。

对于固定的 σ，我们可以定义函子 F_σ，其作用为 $F_\sigma(\rho) := \rho\otimes\sigma$，以及 $F_\sigma(f) := f \otimes 1_\sigma \in (\rho\otimes\sigma,\ \rho'\otimes\sigma)$；还可以定义 G_σ，其作用为 $G_\sigma(\rho) := \rho_L\otimes\sigma$，以及 $G_\sigma(f) := U_{\rho'} f U_\rho^* \otimes 1_\sigma \in (\rho_L\otimes\sigma,\ \rho_{L'}\otimes\sigma)$。现在很容易验证，族 $\{\eta_\rho : U_\rho \otimes 1_\sigma\}$ 实现了一个自然变换$F_\sigma \Rightarrow G_\sigma$。

由于 ρ_L 局域化在 σ的左侧，SWAP：$\rho_L \otimes \sigma \to \sigma \otimes \rho_L$ 在两个变量中都平凡地满足自然性，因为 ρ_L，σ 均局域化于不相交锥中，因此 SWAP 作为算子就是单位元，也就是单位自然变换。因此，$c_{(\cdot),\ \sigma}$ 是通过自然同构（$\{\eta_\rho\}$）对自然变换（SWAP）进行共轭而得到的，由此可知，$c_{\rho,\ \sigma}$ 关于 ρ是自然的。对称的论证可得其关于 σ的自然性。由于张量积具有双函子性，这就给出了完全自然性条件（$g \otimes f$）$c_{\rho,\ \sigma} = c_{\rho',\ \sigma'}(f \otimes g)$，对所有交织算子 f：$\rho \to \rho'$ 和 g：$\sigma \to \sigma'$均成立。□

注 4.7.21。 编织同构 $c_{\rho,\sigma}$ 的定义依赖于选取一个位于 Λ左侧、与之不相交的允许锥 Λ'。如果 Λ' 位于 Λ右侧，则会得到另一个编织同构 $d_{\rho,\sigma}$。事实上，这两个同构互为逆元。

我们为 **DHR**(Λ) 配备编织同构 $c_{\rho,\sigma}$，并为 **DHR**$_0$(Λ) 配备编织同构 $c^0_{\rho_0,\sigma_0} := T_{\sigma_0\otimes\rho_0} c_{\rho_0,\sigma_0} T^*_{\rho_0\otimes\sigma_0}$。

引理 4.7.22。 范畴$\boldsymbol{DHR}(\Lambda)$ 和 $\boldsymbol{DHR}_0(\Lambda)$ 是编织C*-张量范畴。此外，它们是编织C*-张量等价的。

证明： 由引理 4.7.10、4.7.13 可知，范畴 **DHR**(Λ)，**DHR**$_0$(Λ) 是 C*-张量范畴。要证明它们是编织 C*-张量范畴，我们必须证明六边形方程成立。

我们证明 **DHR**(Λ) 是一个编织 C*-张量范畴：我们验证第一个六边形方程。由于结合子是平凡的，对于 U： $\rho \to \rho'$ (根据引理 4.7.19，所用的具体酉算子或局域化锥并不重要),

$$c_{\rho,\sigma\otimes\mu} = \sigma(\mu(U^*))U = \sigma(\mu(U^*)U)\sigma(U^*)U = \sigma(c_{\rho,\mu})c_{\rho,\sigma} = (1_\sigma \otimes c_{\rho,\mu}) \circ (c_{\rho,\sigma} \otimes 1_\mu)$$

第二个六边形方程可类似地得出。因此，**DHR**(Λ) 是一个编织 C*-张量范畴。

我们证明 **DHR**$_0$(Λ) 是一个编织 C*-张量范畴，证明如下。由于 c_{ρ_0,σ_0} 满足 **DHR**(Λ) 的六边形方程，而 $c^0_{\rho_0,\sigma_0}, \rho_0 \otimes_0 \sigma_0$ 是由 $c_{\rho_0,\sigma_0}, \rho_0 \otimes \sigma_0$ 通过同一组 T映射的共轭构造而成，因此可立即推出 $c^0_{\rho_0,\sigma_0}$ 将满足 **DHR**$_0$(Λ) 的六边形方程。

为证明 F ： **DHR**$_0$(Λ) $\to$ **DHR**(Λ) 是一个编织 C*-张量等价，我们观察到 e

$$\begin{aligned} F(c^0_{\rho_0,\sigma_0})\phi_{\rho_0,\sigma_0} &= c^0_{\rho_0,\sigma_0}\phi_{\rho_0,\sigma_0} = T_{\sigma_0\otimes\rho_0} c_{\rho_0,\sigma_0} T^*_{\rho_0\otimes\sigma_0} T_{\rho_0\otimes\sigma_0} \\ &= T_{\sigma_0\otimes\rho_0} c_{\rho_0,\sigma_0} = \phi_{\sigma_0,\rho_0} c_{\rho_0,\sigma_0} = \phi_{\sigma_0,\rho_0} c_{F(\rho_0),F(\sigma_0)} \end{aligned}$$

从而完成证明。 □

4.7.4 任意子表示范畴

结合第 4.6 节的讨论，具体来说是 4.6.6、4.6.7，我们可以看到，任意子表示集合与 $\mathcal{A}^a$ 的局域可传输自同态集合之间存在双射。事实上，这一论述可以范畴化，从而表明任意子表示范畴（记作 $\mathbf{DHR}_\pi$）等价于任意子范畴 $\mathbf{DHR}(\Lambda)$。但是，由于 $\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 还具有编织 C*-张量范畴的额外结构，而 $\mathbf{DHR}_\pi$ 不具备这种结构，因此我们可以利用这一等价，将 $\mathbf{DHR}_\pi$ 提升为编织 C*-张量范畴。

4.7.5 DHR（Λ）的刚性子范畴

定义 4.7.23。 我们用 $\mathbf{DHR}^f(\Lambda)$ 表示 $\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 的全子范畴，其对象均具有对偶（见定义 3.2.10）。也就是说，$\mathbf{DHR}^f(\Lambda)$ 的对象为 $\rho \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$ 中的对象，并且存在一个对象 $\bar{\rho} \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$ 以及一个指定态射 $R \in (\mathrm{Id}\ \bar{\rho}\otimes\rho)$ 和 $R \in (\mathrm{Id}\ \rho\otimes\bar{\rho})$，使其满足之字形方程，即

$$(\bar{R}^* \otimes 1_\rho) \circ (1_\rho \otimes R) = 1_\rho \qquad (R^* \otimes 1_{\bar{\rho}}) \circ (1_{\bar{\rho}} \otimes \bar{R}) = 1_{\bar{\rho}}$$

其中 $1_\rho \in (\rho, \rho)$ 是恒等态射，$1_{\bar{\rho}}$ 的情形类似。我们称 $\bar{\rho}$ 为 ρ 的对偶，并且称 $R, \bar{R}$ 满足对偶方程。

注记 4.7.24. 定义 4.7.23 对 ρ，$\bar{\rho}$ 因此，如果 $\rho \in \mathbf{DHR}^f(\Lambda)$，那么 $\bar{\rho}$也如此。

考虑某个 $T \in (\rho,\ \rho)$，其中 $\rho \in \mathbf{DHR}^f(\Lambda)$ 带有对偶 $\bar{\rho}$，且 $R,\ \bar{R}$ 满足对偶方程。然后我们定义[19]

$$\bar{T} := (R^* \otimes 1_{\bar{\rho}}) \circ (1_{\bar{\rho}} \otimes T \otimes 1_{\bar{\rho}}) \circ (1_{\bar{\rho}} \otimes \bar{R}) \in (\bar{\rho}, \bar{\rho})$$

那么 $T \mapsto \bar{T}$是一个含单位元的 $*$-反同构 $(\rho,\ \rho) \to (\bar{\rho},\ \bar{\rho})$。

命题 4.7.25. *$\mathbf{DHR}^f(\Lambda)$ 是一个刚性的、带编织的 C*-张量子范畴，包含于 $\mathbf{DHR}(\Lambda$)*

证明： $\mathbf{DHR}^f(\Lambda)$ 上的 C*-结构继承自 $\mathbf{DHR}(\Lambda)$。根据定义可得刚性。张量单位 $\mathrm{Id} \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$ 是可对偶的（取 $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$ 和 $R = \bar{R} = 1_{\mathrm{Id}}$），因此 $\mathrm{Id} \in \mathbf{DHR}^f(\Lambda)$。我们必须证明 $\mathbf{DHR}^f(\Lambda)$ 对直和、子对象、$\otimes$封闭且带编织结构，从而得到所需结论。

在……下封闭 $\otimes$。 </style}考虑， $\rho_2 \in \mathbf{DHR}^f(\Lambda)$。我们明确地将 $\rho_1\otimes\rho_2$的对偶定义如下。设 $R_i \in (\mathrm{Id}\ \bar{\rho}_i \otimes \rho_i)$ 和 $\bar{R}_i \in (\mathrm{Id}\ \rho_i \otimes \bar{\rho}_i)$ 满足 $i = 1,\ 2$ 的对偶方程。定义

$$R := (1_{\bar{\rho}_2} \otimes R_1 \otimes 1_{\rho_2}) \circ R_2 \qquad \bar{R} := (1_{\rho_1} \otimes \bar{R}_2 \otimes 1_{\bar{\rho}_1}) \circ \bar{R}_1$$

于是 $R \in (\mathrm{Id}, (\bar{\rho}_2\otimes\bar{\rho}_1)\otimes(\rho_1\otimes\rho_2))$ 和 $\bar{R} \in (\mathrm{Id}, (\rho_1\otimes\rho_2)\otimes(\bar{\rho}_2\otimes\bar{\rho}_1))$，并且可以验证，$R, \bar{R}$ 满足之字形方程，从而为 $\rho_1 \otimes \rho_2$定义了对偶 $\bar{\rho}_2 \otimes \bar{\rho}_1$。因此

[19]在张量积中，我们始终省略结合子和单位约束。

$\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 的张量积在对象上限制为 $\mathbf{DHR}_f(\Lambda)$，在态射上也限制于此，因为该子范畴是满的。因此，$\mathbf{DHR}_f(\Lambda)$ 是一个张量子范畴。

在直和下封闭。 考虑 $\rho_i \in \mathbf{DHR}_f(\Lambda)$，以及如上所述的相应 R_i, R_i。我们按如下方式构造 $\rho_1 \oplus \rho_2$ 的对偶。考虑满足 $W_i^* W_j = \delta_{ij} 1_{\rho_i}$ 和 $\sum_i W_i W_i^* = 1_{\rho_1 \oplus \rho_2}$ 的等距算子 $W_i \in (\rho_i, \rho_1 \oplus \rho_2)$ 和 $\bar{W}_i \in (\bar{\rho}_i, \bar{\rho}_1 \oplus \bar{\rho}_2)$，并对 $\bar{W}_i$ 作类似考虑。于是令

$$R := \sum_i (\bar{W}_i \otimes W_i) \circ R_i \qquad \bar{R} := \sum_i (W_i \otimes \bar{W}_i) \circ \bar{R}_i$$

我们得到 $R \in (\mathrm{Id}, (\bar{\rho}_1 \oplus \bar{\rho}_2) \otimes (\rho_1 \oplus \rho_2))$ 和 $R \in (\mathrm{Id}, (\rho_1 \oplus \rho_2) \otimes (\bar{\rho}_1 \oplus \bar{\rho}_2))$。容易验证 R, R 满足之字形方程，从而得到 $(\rho_1 \oplus \rho_2)$ 的对偶 $(\bar{\rho}_1 \oplus \bar{\rho}_2)$。

在子对象下封闭。 考虑某个对象 $\rho \in \mathbf{DHR}_f(\Lambda)$，并令 $\bar{\rho}$ 为其对偶，其中 R，R 满足对偶方程。设有一个（非零）投影 $P \in (\rho, \rho)$。于是利用等距算子 $\sigma \in \mathbf{DHR}(\Lambda$ 定义相应的子对象，该等距算子 $v \in (\sigma, \rho)$ 满足 $vv^* = P$（见引理 4.7.11）。

注意，$\bar{P} \in (\bar{\rho}, \bar{\rho})$[20]，尤其是 $\bar{P}$ 是一个非零投影。因此，我们定义另一个对象 $\bar{\sigma} \in \mathbf{DHR}(\Lambda)$，使用 P 和相应的等距算子 $\bar{v} \in (\bar{\sigma}, \bar{\rho})$，该等距算子满足 $\bar{v}\bar{v}^* = P$。我们定义

$$S := (\bar{v}^* \otimes v^*) \circ R \qquad \bar{S} := (v^* \otimes \bar{v}^*) \circ \bar{R}$$

其中 $S \in (\mathrm{Id}\ \bar{\sigma} \otimes \sigma)$ $S \in (\mathrm{Id}\ \sigma \otimes \bar{\sigma})$，容易证明它们满足共轭方程，因此定义了一个对偶 $\bar{\sigma}$，这表明 σ（因而 $\bar{\sigma}$）属于 $\mathbf{DHR}_f(\Lambda)$。

编织。 令 $c_{\rho,\sigma} \in (\rho \otimes \sigma, \sigma \otimes \rho)$ 表示 $\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 的编织。对于 $\rho, \sigma \in \mathbf{DHR}_f(\Lambda)$，我们已经证明了 $\rho \otimes \sigma, \sigma \otimes \rho \in \mathbf{DHR}_f(\Lambda)$；又由于该子范畴是满的，$c_{\rho,\sigma}$ 是 $\mathbf{DHR}_f(\Lambda)$ 中的一个态射。自然性和六边形恒等式在 $\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 中成立，因此限制后仍然成立。因此，$\mathbf{DHR}_f(\Lambda)$ 是编织的。

汇总以上事实，即可得到所需结果。 □

ρ 的任意两个共轭对象都酉等价。此外，一旦固定了 $\bar{\rho}$，共轭方程的不同

解 (R, R) 会导出共轭映射 $T \mapsto T$，这些映射在 $(\bar{\rho}, \bar{\rho})$ 上相差一个内共轭。因此，我们将固定一个标准（归一化）解。

事实上，可以证明以下强有力的结果。

定理 4.7.26. 每个对象 $\rho \in \boldsymbol{DHR}_f(\Lambda)$ 都是有限的，也就是说，它是有限多个不可约对象的有限个副本的直和，这些对象属于 $\boldsymbol{DHR}_f(\Lambda)$。特别地，对于所有 $\rho \in \boldsymbol{DHR}_f(\Lambda)$，$(\rho, \rho)$ 都是有限维的。

证明： 证明见 [LR96，引理 3。2]. □

注 4.7.27. 若 $\rho \in \mathbf{DHR}_f(\Lambda)$，则存在自然同构 ms

$$(\rho\sigma, \tau) \simeq (\sigma, \bar{\rho}\tau), \qquad (\sigma\rho, \tau) \simeq (\sigma, \tau\bar{\rho})$$

由 $(R,\ R)$ 实现。这称为弗罗贝尼乌斯互反律。

[20]此处 $\bar{P}$ 按照上述方法构造，使用 $R, \bar{R}$

事实上，可以在$\mathbf{DHR}_f(\Lambda)$中定义一种维数概念，其定义为

$$\dim \rho := R^* \circ R = \bar{R}^* \circ \bar{R} =: \dim \bar{\rho}$$

称为统计维数。由此可得以下非常有力的结果：

定理 4.7.28 ([LR96])。 对于任意 $\rho \in \boldsymbol{DHR}(\Lambda)$，$\dim \rho < \infty$ 当且仅当存在相应的对偶 $\bar{\rho}$对应于 ρ。

4.7.6 $\mathbf{DHR}(\Lambda)$是酉模张量范畴吗?

简短的回答是**可能不是**。我们指出，要得到酉模张量范畴（见定义3.2.17），需要满足有限半单性、刚性和编织的非退化性。正如上一节所解释的，证明刚性的问题等价于统计维数有限 [LR96], ，而统计维数是子因子理论中出现的一个指标。一般的任意子范畴不太可能是酉模张量范畴；事实上，已证明在代数量子场论的背景下并非如此 [Fre94]。然而，在代数量子场论的背景下，平移不变性和质量隙等附加假设会导出共轭扇区的存在性[Fre81]。哪些必要假设（如果存在）能够使其约化为酉模张量范畴，仍是一个开放问题。

注记 4.7.29。 的结果 [Fre81]用于确立共轭扇区的存在性，或许可以借助 [BDN16], 移植到晶格上，但需要额外假设质量隙是“正则的”或“拟相对论的”。正如该论文的讨论中所指出的，环面码等精确可解模型由于具有平坦谱，无法满足这些假设。然而，这些模型存在一些能够满足这些假设的微扰变体，例如 [BNV23、BGP25]。目前尚不清楚每个拓扑序有隙无挫折模型是否都能通过微扰而满足这些谱假设。

注记 4.7.30。 近期工作 [BGNW25] 讨论了将$\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 约化为有限半单范畴的困难。特别地，每个扇区都可以分解为不可约表示的直积分，而这些不可约表示（除去一个可能的测度为 0 的集合外）全都是任意子扇区。然而，当任意子扇区满足“ I 性质”（即，任意子选择准则中的参考表示是近似可分裂的），且希尔伯特空间是可分的时，该直积分可以约化为不可约任意子扇区的可数个直和。不过，关于在何种充要条件下$\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 能够约化为有限半单范畴这一一般问题，仍然悬而未决。

注 4.7.31。 编织的非退化性是另一个尚未解决的问题，即使已证明 $\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 是一个有限半单刚性范畴。早期代数量子场论分析中的一项关键结果 [DR89] 表明，¨$\mathbf{DHRDHR}(\Lambda)$ 的 Müger 中心是一个紧群。这个群事先并不一定与量子自旋系统的对称性或任何规范自由度相关。因此，证明编织的非退化性，等价于证明这个群实际上是平凡的。

参考文献

[BBC+24] Anupama Bhardwaj、Tristen Brisky、Chian Yeong Chuah、Kyle Kawagoe、Joseph Keslin、David Penneys 和 Daniel Wallick。冯·诺依曼代数偏序集的超选择扇区，2024年。[BCFO24] Sven Bachmann、Matthew Corbelli、Martin Fraas 和 Yoshiko Ogata。描述量子霍尔效应中任意子及电导量子化的张量范畴。*arXiv*预印本 *arXiv:2410.04736*，2024年。[BCNS26] Marco Benini、Victor Carmona、Pieter Naaijkens 和 Alexander Schenkel。用于超选择扇区和拓扑序的C*范畴预因子化代数：M. benini、v. carmona、p. naaijkens、a. schenkel。《数学物理通讯》，407(1):20，2026年。[BDN16] Sven Bachmann、Wojciech Dybalski 和 Pieter Naaijkens。有能隙量子自旋系统的 Lieb-Robinson界、Arveson谱和 Haag-Ruelle 散射理论。*Ann. Henri Poincar´e*，17(7):1737–1791，2016年。[BGNW25] Sven Bachmann、Alan Getz、Pieter Naaijkens 和 Naomi Wray。堆叠与可逆相的平凡性。*arXiv*预印本 *arXiv:2511.08382*，2025年。[BGP25] Sven Bachmann、Leonardo Goller 和 Marcello Porta。与 Z_2规范场耦合的费米物质 π 通量相中的任意子。*arXiv*预印本 *arXiv:2508.21502*，2025年。[BHNV26] Alex Bols、Mahdie Hamdan、Pieter Naaijkens 和 Siddharth Vadnerkar。非阿贝尔量子双模型的任意子扇区范畴。《数学物理通讯》*407, 2*，407，2026年。[BNV23] Sven Bachmann、Bruno Nachtergaele 和 Siddharth Vadnerkar。具有束缚态和散射态的动力学阿贝尔任意子。《数学物理杂志》，64(7)，2023年。[BR12] Ola Bratteli 和 Derek William Robinson。《算子代数与量子统计力学：第*1*卷：*C**-代数与*W**-代数。对称群。态的分解》。施普林格科学与商业媒体，2012年。[BR13] Ola Bratteli 和 Derek William Robinson。《算子代数与量子统计力学：第*2*卷：平衡态。量子统计力学模型》。施普林格科学与商业媒体，2013年。[BV25] Alex Bols 和 Siddharth Vadnerkar。基泰耶夫量子双模型的任意子扇区分类：A. bols、s. vadnerkar。《数学物理通讯》，406(8):188，2025年。[CPJP22] Quan Chen、Roberto Hern´andez Palomares、Corey Jones 和 David Pen-neys。C ∗ 2-范畴的 Q-系统完备化。《泛函分析杂志》，283(3):109524，2022年。

[DHR69] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E Roberts。场、可观测量与规范变换 II。《数学物理通讯》，15(3):173–200，1969年。[DHR71] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E Roberts。局域可观测量与粒子统计 I。《数学物理通讯》，23(3):199–230，1971年。[DHR74] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E Roberts。局域可观测量与粒子统计 II。《数学物理通讯》，35(1):49–85，1974。[DR89] Sergio Doplicher 和 John E Roberts。紧群的新对偶理论。《数学新进展》，98(1):157–218，1989年。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。张量范畴，第205卷。美国数学学会，2015。[FN15] Leander Fiedler 和 Pieter Naaijkens。阿贝尔群的 Kitaev 量子双模型的 Haag 对偶性。《数学物理评论》，27(9):1550021，43，2015。[Fre81] Klaus Fredenhagen。反粒子的存在性。《数学物理通讯》，79(1):141–151，1981年。[Fre94] Klaus Fredenhagen。具有无限统计维数的超选择扇区。《子因子》（Kyuzeso，1993），第242–258页，1994年。[Fre15] Klaus Fredenhagen。代数量子场论导论。载于《代数量子场论进展》，第1–30页。施普林格，2015。[HK64] Rudolf Haag 和 Daniel Kastler。量子场论的代数方法。《数学物理学杂志》，5(7):848–861，1964年。[HN01] John K Hunter 和 Bruno Nachtergaele。应用分析。世界科学出版社，2001。[JP17] Corey Jones 和 David Penneys。刚性 C*-张量范畴中的算子代数。《数学物理通讯》，355(3):1121–1188，2017年。[KR83] Richard V Kadison 和 John R Ringrose。算子代数理论基础。第一卷：初等理论，第25卷。Academic Press，纽约，1983年。[KR97] Richard V. Kadison 和 John R. Ringrose。算子代数理论基础。第二卷，数学研究生教程第16卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年。高级理论，1986年原版的更正重印本。

[KVW24] Kyle Kawagoe、Siddharth Vadnerkar 和 Daniel Wallick。对称性缺陷与分数化的算子代数方法。*arXiv*预印本 *arXiv:2410.23380*，2024年。[LR96] Roberto Longo 和 John E Roberts。维数理论。*arXiv*预印本 *funct-an/9604008*，1996年。[Naa11] Pieter Naaijkens。平面上 Kitaev 环面码中的局域化端同态。《数学物理评论》，23(4):347–373，2011年。[Naa12] Pieter Naaijkens。无限量子系统中的任意子：*d*维中的量子场论$= 2+1$与环面码。博士论文，Sl：sn，2012年。[Naa15] Pieter Naaijkens。从局域量子物理的角度看 Kitaev 量子双模型。载于 R. Brunetti、C. Dappiaggi、K. Fredenhagen 和 J. Yngvason 编，《代数量子场论进展》，第365–395页。施普林格，2015。[Naa17] Pieter Naaijkens。无限晶格上的量子自旋系统，《物理学讲义》第933卷。施普林格，Cham，2017年。简明导论。[NO22] Pieter Naaijkens 和 Yoshiko Ogata。二维系统中的分裂性质与近似分裂性质：稳定性及超选择扇区的缺失。数学物理通讯，392(3):921–950，2022年。[Oga22] Yoshiko Ogata。由满足近似 Haag 对偶性的有能隙基态导出编织 C^*-张量范畴。《数学物理学杂志》，63(1):论文编号011902，48，2022年。[OPGRdA25] Yoshiko Ogata、David P´erez-Garc´ıa 和 Alberto Ruiz-de Alarc´on。二维量子自旋系统的 Haag 对偶性。*arXiv*预印本 *arXiv:2509.23734*，2025年。[Tak79] Masamichi Takesaki。算子代数理论 *I*。施普林格，1979年。[Tak03] Masamichi Takesaki。算子代数理论 *II*。施普林格，2003年。

第5章
基泰耶夫量子双模型的任意子扇区分类

Alex Bols

理论物理研究所，ETH 苏黎世

Siddharth Vadnerkar

物理系，加州大学戴维斯分校

本章节逐字摘自 [BV25] ，并发表于《数学物理通讯》。经 Alex Bols 和 Siddharth Vadnerkar 许可转载。允许根据本文章的版权条款(知识共享署名许可协议进行再分发。首先，我们花一点时间讨论这项工作的范围和背景。

当时，关于晶格上任意子扇区及其物理结构的一般框架已经存在 [Oga22，NO22], 其中，Ogata 特别证明了，在满足一项称为 Haag 对偶性的技术条件的晶格自旋系统上[1] (定义4.5.7），任意子扇区（定义 4.5.1）构成一个编织 C*-张量范畴（定义 3.2.14）。

当时，人们也普遍认为， 2+1D 中“良好”的有能隙拓扑相应当由酉模张量范畴在数学上描述（定义3.2.17）。根据章节 3中的讨论，编织 C*-张量范畴是比酉模张量范畴更一般的概念。特别是，任意子扇区的数量必须有限。因此，研究具体的晶格模型至关重要；对于这些模型，人们预期其任意子扇区具有酉模张量范畴结构，而非更一般的结构。

最适合首先用来验证酉模张量范畴结构的模型族是 Kitaev 量子双模型 [Kit03] 和 Levin-Wen 弦网模型 [LW05]。在发表时，研究最为充分的模型族是由 Naaijkens 分析的阿贝尔量子双模型 [Naa11，Naa15]。但阿贝尔量子双模型只能容纳阿贝尔任意子扇区，这是因为任意子对产生/湮灭算符具有相互对易至多差一个相位的酉性质。这大大简化了扇区分类过程。从范畴论角度看，任意子范畴

[1]严格来说，Ogata 使用的是 Haag 对偶性的一个近似版本，其条件较弱。

对于阿贝尔量子双模型是尖点的，因此对两个阿贝尔任意子进行编织只会产生一个相位，而且阿贝尔任意子总是融合为唯一的阿贝尔任意子。从这个意义上说，阿贝尔任意子“很无趣”。量子计算文献中众所周知，阿贝尔任意子无法用于通用容错量子计算，因此非阿贝尔任意子自然成为下一步研究对象。

非阿贝尔量子双模型在这方面堪称典范，因为它们能够实现通用量子计算 [CRFJ25]。人们预期，这些模型中的任意子扇区将承载有限群 Drinfel'd 双代数的全部表示论 G，记作 $D(G)$，它在范畴意义下是一个酉模张量范畴（UMTC）。因此，任意子扇区范畴也应是一个酉模张量范畴，并且这两个范畴之间应存在编织的 C*-张量等价。本文旨在澄清这一普遍看法。

Naaijkens 在 [Naa15], 中发展了一些形式体系，尤其探讨了一个 $*$-准局域代数的同态，称为放大态射，并提出了一份猜测的任意子扇区候选列表。然而，完整的分类仍缺少许多关键要素，包括扇区数量的上界，以及证明这些候选确实是任意子扇区。

然而，在算子代数的无限体积情形下，将阿贝尔量子双模型推广到非阿贝尔量子双模型，并非简单的升级。我们推荐阅读 [BMD07] 以了解物理学导论，并阅读 [Ham24] 以了解遵循算子代数视角的导论。从技术上讲，一些在阿贝尔情形下运作良好的工具会变得脆弱。举例而言，阿贝尔闭合带状算符会生成对易投影算符族，从而清晰地分解荷类型；但在非阿贝尔情形下，带状算符代数不再化为对易投影算符，而荷与磁通约束（及其输运）的处理也更为微妙。简言之，对阿贝尔带状投影算符方法进行“显而易见”的改造，并不能直接实现所需的非阿贝尔扇区分类。

超越这些技术细节，还有一个更具概念性的障碍：任意子扇区的分类问题不仅在于构造出某些扇区，更在于证明所选的选择准则恰好给出物理上正确的任意子扇区，而且确实涵盖了所有任意子扇区。显然，若制备一对任意子并将其中一个伙伴送至无穷远，剩下的局域化激发便定义了一个满足任意子选择准则的扇区（定义 4.5.1）。但先验地说，这只能证明其存在性，而不能证明其完备性。选择准则的表述方式不同，可能会导致纳入虚假的扇区；反过来，也可能遗漏合理的扇区。DHR 文献恰恰强调了这些陷阱：局域化区域至关重要，可输运性不可或缺，而 Haag 对偶性／分裂性质则决定表示论是否真正反映了内禀的粒子内容。晶格类比也面临同样的风险，因此完备性的证明并非易事。

这正是我们这项工作的切入点。我们对任意有限群 G 的 Kitaev 量子双模型的任意子扇区给出了完备分类，从而涵盖了这一算子代数框架中此前尚未解决的非阿贝尔情形。具体而言，我们证明，任意子扇区与量子双 $D(G)$ 的不可约表示一一对应。确立这一对应关系，使非阿贝尔模型与其阿贝尔近亲处于同等地位。

我们的方法如下。首先，对于 $D(G)$的每个不可约表示 D，构造一族纯态；这些态是量子双

模型的特殊基态，其中只包含一个激发，该激发局域化在某个固定格点上。反过来，我们还证明，所有仅有一个激发局域化在某个固定格点上的态，都必须具有这种形式。随后，我们证明这些态属于 Naaijkens 的“任意子扇区候选”表示。最后，我们通过证明每个任意子扇区必须包含一个这样的特殊基态，来证明完备性。

我们证明中的一个关键要素是，每个任意子扇区都包含仅有有限个激发的态。我们证明，任何满足任意子选择准则的表示都存在一个纯态，该态是规范不变的，并且在某个有限区域之外具有平凡磁通；也就是说，该态仅有有限个激发。再结合众所周知的事实：在 Quantum 双模型中，我们可以将有限个激发扫至同一个格点，而且我们已经对所有此类态完成分类，因此可以断言，我们已涵盖所有可能的任意子扇区。

最后，我们补充说明，这种任意子扇区与 Quantum 双模型之间的对应关系可以用范畴来刻画。也就是说，第 4.7 节中构造的任意子扇区范畴是编织 C*-等价于第 $D(G)$ 节中构造的表示范畴3.5.1。本研究的结果对于明确建立这种对应关系至关重要，也是第 6 章后续研究的主题。

摘要。 我们完整分类了无限三角晶格上、规范群为有限群 G 的 Kitaev 量子双模型的任意子扇区，其中包括非阿贝尔情形。正如猜想的那样，该模型的任意子扇区恰好对应于 G 的量子双代数的不可约表示的等价类。

目录

5.1 引言 .89**5.2 设置与主要结果 .90**5.2.1 可观测量代数 .905.2.2 量子双哈密顿量及其无挫折基态.925.2.3 任意子扇区的分类 .93**5.3 任意子态 .94**5.3.1 带状算子、规范构型与规范变换 955.3.2 局域规范构型与边界条件 . . . . . 995.3.3 $\mathcal{D}(G)$ 的不可约表示、维格纳投影算符与局域约束 .1025.3.4 局域约束 .1035.3.5 施加通量约束和边界条件 . . . . . 1045.3.6 基准磁通 .1065.3.7 对 Γ_n^V .1075.3.8 N_C 对基准磁通和不可约子空间的作用 109

5.3.9 空间的刻画 $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{V}_n^{RC}$和 $\mathcal{V}_n^{RC;u}$. . . . . 1115.3.10 体区与边界条件无关 .1125.3.11 态的构造 $\omega_{s_0}^{RC;u}$及其纯性的证明 113

5.4 任意子表示的构造 .115

5.4.1 带状算子及其极限映射 .1155.4.2 由以下对象标记的任意子表示 RC . 1185.4.3 表示的互不相交性 π^{RC} .1185.4.4 放大态射表示的构造 .1215.4.5 χ_ρ^{RC} 与 π^{RC} 的酉等价.1215.4.6 表示 π^{RC} 是任意子表示 123

5.5 完备性.124

5.5.1 任何任意子表示都包含一个态，该态在某个有限区域之外是规范不变的并具有平凡磁通.1245.5.2 基态约束的有限违反可被扫掠至单个格点.1265.5.3 中的态的分解.1285.5.4 任意子扇区的分类.132

5.6 讨论与展望.132

5.A 带算子、Wigner 投影与放大态射. 133

5.A.1 带状算子、规范变换和磁通投影算符的基本性质 .1335.A.2 F^h、$_\rho\,{}^g$分解为 L_ρ^h、T_ρ^g.1345.A.3 维格纳投影算符及其分解 .1375.A.4 带状算子的表示基 . 1395.A.5 拓扑荷探测器 .1395.A.6 无挫折基态上的作用 .1405.A.7 $\mu_\rho^{RC;uv}$和 $\chi_\rho^{RC;uv}$的性质.141

5.B 弦网的性质 .144

5.B.1 有向路径与通量 .1445.B.2 弦网磁通 .1445.B.3 规范群对弦网的作用 . 1455.B.4 带状算子对弦网态的作用 .1495.B.5 维格纳投影算子与标签变换算子对弦网态的作用 153

参考文献.156

致谢

A.B. 的部分研究工作得到了西蒙斯基金会的支持。S.V. 得到了美国国家科学基金会 DMS-2108390 资助项目的支持。我们感谢 Yoshiko Ogata 指出手稿第一版中的一个严重错误。我们还感谢 Gian Michele Graf、Pieter Naaijkens 和 Bruno Nachtergaele 的有益交流。

数据可用性与利益冲突

由于本研究未创建或分析任何新数据，因此数据可用性不适用于本文。据我们所知，不存在利益冲突。

5.1 引言

自整数量子霍尔效应被发现以来的数十年间，物质拓扑相的概念已成为凝聚态物理学中的核心范式。与传统的自发对称性破缺朗道-金兹堡范式不同，物质拓扑相并非由任何局域序参量来区分。相反，它们具有极其丰富多样的拓扑性质，从拓扑非平凡的布洛赫能带到拓扑基态简并，涵盖甚广。这些拓扑材料似乎共有的特征是，其基态的纠缠结构呈现出稳健的模式 [LH08，Fid10]。

在这一系列拓扑相中，拓扑有序二维相受到了广泛关注。部分原因在于它们可能应用于量子计算 [Kit03，Fre98，NSS+08]。拓扑有序材料表现出稳健的基态简并，其简并程度取决于其所处曲面的亏格；它们还支持任意子激发，其编织统计不同于玻色子或费米子。

鉴于实验室中对量子多体系统日益增强的实验操控能力，从微观视角理解拓扑序是十分必要的。一方面，在这一研究过程中，能够呈现拓扑序的恰好可解量子自旋模型发挥着重要作用，例如 Kitaev量子双模型 [Kit03]以及更一般的 Levin-Wen 模型 [LW05]。另一方面，人们希望深入理解在一般模型中刻画拓扑序所涉及的数学结构 [Kit06，SKK19，KL20]。后一个问题已成为数学物理学中一个富有挑战性的研究课题 [Naa11，Naa12a，CNN18，CNN20，Oga22]。这些工作对二维有能隙量子自旋系统中的拓扑序给出了严格但仍不完备的描述。它们为任意子类型、其融合规则及其编织统计提供了稳健的定义，并严格阐明了这些数据如何共同组成一个编织 C^*-张量范畴。

本文从数学物理的角度研究 Kitaev 量子双模型。量子双模型可视为有限规范群的离散规范理论 G。这些模型尤为重要，因为对于非阿贝尔G，它们是支撑 非阿贝尔任意子 [Kit03]的典型模型。我们

迈出了第一步，尝试将一般 G 的量子双模型纳入上述数学框架。具体而言，我们对这些模型的所有任意子类型进行了分类。

粗略地说，任意子类型对应于一个超选择扇区，即可观测代数表示的一个酉等价类；将这些表示限制在平面任意锥形区域的补集上时，它们与基态表示酉等价。我们将这类扇区称为任意子扇区。直观而言，任意子扇区包含这样的态：通过将任意子移至别处，可以使这些态在局部看来与基态无异；但在整体上，编织操作始终能够探测到任意子。

为了完整地分类量子双模型的任意子扇区，我们构造由量子双代数的不可约表示 $\omega_s^{RC;u}$标记的态 RC $\mathcal{D}(G$、格点 s以及额外微观数据 u所决定 s。对于任意支撑既不包含也不环绕该格点的局部可观测量，这些态的取值都与基态相同。我们通过证明这些态是满足某些取决于格点 s 及数据 RC 的 u局域约束的唯一态，来刻画它们。特别地，这些态 $\omega_s^{RC;u}$是纯态。当 RC 对应于量子双代数的平凡表示时，态 $\omega_s^{RC;u}$就是无挫折基态。因此，我们得到无挫折基态的存在性和唯一性这一推论；这一结果最早由 [Naa12b]证明。

接下来我们将证明，纯态 $\omega_s^{RC;u}$属于不同的超选择扇区，当且仅当它们的 RC 标签不同。因此，这些态的 GNS 表示 $\omega_s^{RC;u}$构成了一组两两不相交的不可约表示， π^{RC}其标签由量子双代数的不可约表示给出。通过将这些表示 π^{RC} 与所谓的放大态射表示 [Naa15、Vec94、FGV94、NS97],联系起来，我们证明这些表示确实属于任意子扇区。最后，我们证明每个任意子扇区都必须包含其中一个态 $\omega_s^{RC;u}$，从而表明所有任意子扇区都包含其中一个 π^{RC}。

本文结构如下。在第5.2 节中，我们提出问题并陈述主要结果。在第5.3 节中，我们构造 $\omega_s^{RC;u}$在格点 s 处“包含一个任意子”的态，并证明这些态是纯态。第5.4 节致力于为量子双代数的每个不可约表示 RC 构造一个 π^{RC} 包含这些态的可观测代数表示$\{\omega_s^{RC;u}\}_{s,u}$并证明这些表示彼此不相交。最后，在第5.5 节中，我们证明每个任意子扇区都包含其中一个 π^{RC}，由此表明这些 π^{RC} 穷尽了该模型的所有任意子扇区。

5.2 设置与主要结果

5.2.1 可观测量代数

设 Γ 为正则三角晶格（见图 5.1），其顶点集合 Γ^V 被视为平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集，使得最近邻顶点之间的距离为单位长度。

取向集合　　有向边集合 Γ 被识别为相邻格点的有序对集合

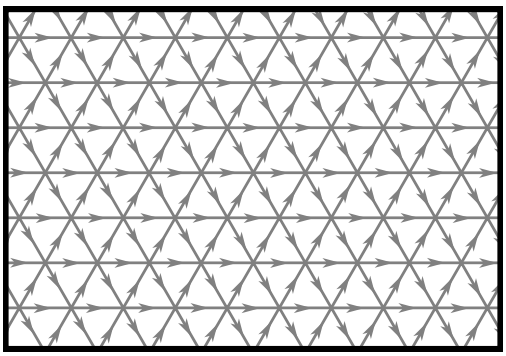


图 5.1：三角晶格的一个快照，所有边均朝向右侧。

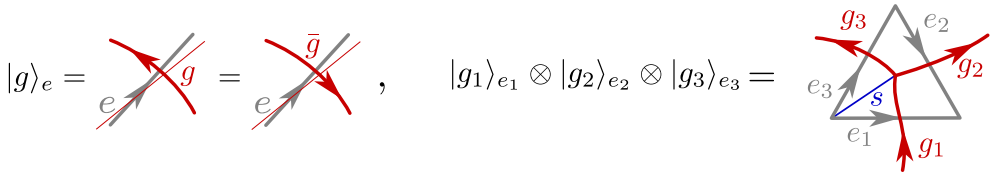


图5.2：基向量的图形表示 $|g\rangle_e \in \mathcal{H}_e$ 以及张量积向量$|g_1\rangle_{e_1} \otimes |g_2\rangle_{e_2} \otimes |g_3\rangle_{e_3} \in \mathcal{H}_{\{e_1,e_2,e_3\}}$，对应于边 e_1、e_2、e_3，它们属于同一个面 f。我们还用蓝色标出了格点 s，其标记为 $f(s) = f$（见第5.3节）。

顶点：

$$\overrightarrow{\Gamma}^E := \{(v_0, v_1) \in \Gamma^V \times \Gamma^V \ : \ v_0 \text{ and } v_1 \text{ are nearest neighbours}\}.$$

我们令 $\Gamma^E \subset \overrightarrow{\Gamma}^E$ 由如图 5.1所示从左向右的有向边组成。注意，Γ^E 对 Γ的每条边恰好包含一条有向边。我们用 Γ 表示 Γ^F的面集。

任意有向边 $e = (v_0, v_1)$ 都有一个起始顶点 $\partial_0 e = v_0$、一个终止顶点 $\partial_1 e = v_1$，以及一条反向有向边 $\bar{e} = (v_1, v_0)$。顶点 Γ^V配备了图距离 dist(·, ·)；面（视为对偶图的元素）也类似。

我们固定一个有限群 G，并为每条边 $e \in \Gamma^E$ 关联一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_e = \mathbb{C}^{|G|}$ 和一个矩阵代数 $\mathcal{A}_e$ =End($\mathcal{H}_e$)。对于任意有限 $S \subset \Gamma^E$，都有一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_S = \otimes_{e\in S}\mathcal{H}_e$，以及作用于该空间上的算子代数 $\mathcal{A}_S$ =End($\mathcal{H}_S$)。

我们采用以下图形表示来表示态 $|\alpha\rangle$。对于任意一条边 e，$|g\rangle_e$ 的基态 $\mathcal{H}_e$ 表示为边 e 被一条有向弦从右向左穿过，弦 标记为 g。另一种等价的 $|g\rangle_e$ 表示是边 e 被一条标记为 g的弦从左向右穿过，见图 5.2。基元 $|1\rangle_e$ 表示为边e 完全不被任何弦穿过。若干此类基态的张量积表示为一幅图，其中每条参与其中的边都按照上述规则被一条带标签的有向弦穿过。示例见图5.2 。

设 S_1、$S_2 \subset \Gamma^E$ 是有限边集，且 $S_1 \subset S_2$，则存在自然嵌入 $\iota_{S_1,\,S_2} : \mathcal{A}_{S_1} \hookrightarrow \mathcal{A}_{S_2}$，其定义为与单位元作张量积，即

$$\iota_{S_1,S_2}(O) = O \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{S_2\setminus S_1}}$$

对所有 $O \in \mathcal{A}_{S_1}$ 都成立。通过这些嵌入，有限 $S \subset \Gamma^E$ 对应的代数 $\mathcal{A}_S$ 构成一个矩阵代数的有向系统。其归纳极限称为局域代数，记作$\mathcal{A}_{loc}$。局域代数的范数闭包

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_{loc}}^{\|\cdot\|}$$

称为准局域代数或可观测代数。

类似地，对于任意（可能是无限的） $S \subset \Gamma^E$，我们有由支撑于 S 的准局域可观测量构成的代数 $\mathcal{A}_S \subset \mathcal{A}$。

定义在 $\mathcal{A}$ 上的一个态是一个正线性泛函 $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$，满足 $\omega(1) = 1$。给定定义在$\mathcal{A}$ 上的一个态 ω，存在一个表示 $\pi_\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$，其作用于某个包含单位向量 $|\Omega\rangle$ 的可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\omega$ 上；该向量对于表示 π_ω 是循环向量，并且对于所有 $O \in \mathcal{A}$，满足 $\omega(O) = \langle\Omega\ \pi_\omega(O)\Omega\rangle$。满足这些性质的三元组 $(\pi_\omega,\ \mathcal{H}_\omega,\ |\Omega\rangle)$ 在酉等价意义下唯一，称为态 ω 的 GNS 三元组。

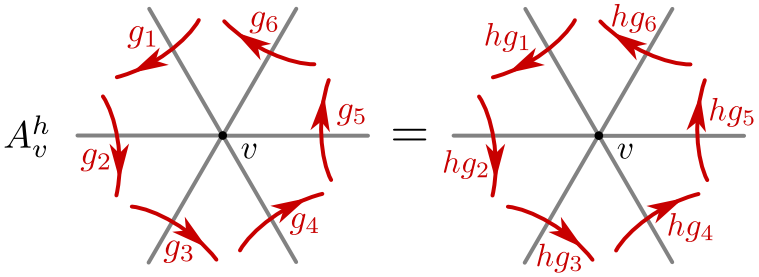
在本文中，我们将“投影算子”一词用于指平方等于自身的自伴算子。若一组投影算子中任意一对的乘积都为零，则称这组投影算子正交。若一组投影算子中的任意一对都彼此对易，则称这组投影算子对易。

5.2.2 量子双哈密顿量及其无挫折基态

我们称边 e 属于面 f，并记作 $e \in f$，当且仅当 e 是 f边界上的一条边。类似地，我们称顶点 v 属于 f，并记作 $v \in f$，当 v与 f相邻时；我们还称顶点 v 属于边 e，并记作 $v \in e$，当 v 是 e 的原点或端点时。

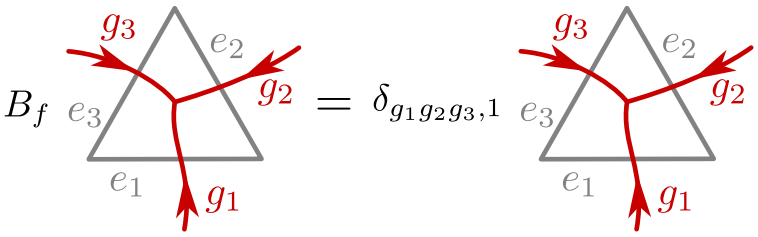
对于每条边 e，我们固定一组标准正交基 $\{|g\rangle\}_{g\in G}$，作为由群 G的元素标记的 $\mathcal{H}_e$ 的基。对于 $g \in G$，我们用 g表示其逆元，并定义左群作用 $L_e^h := \sum_{g\in G} |hg\rangle\langle g|$、右群作用 $R_e^h := \sum_{g\in G} |g\bar{h}\rangle\langle g|$以及投影算子 $T_e^g := |g\rangle\langle g|$。

对于每个顶点 v 和边 e，满足 v 属于 e，我们定义 $L^h(e, v) = L_e^h$，当 $\partial_0 e = v$ 时；若 $\partial_1 e = v$，则定义$L^h(e, v) = R_e^h$。对于每个 $h \in G$，我们定义一个酉算子 $A_v^h := \prod_{e\in v} L^h(e, v)$。这些称为 v处的规范变换。图示如下，



随后，我们定义规范约束 $A_v := \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} A_v^h$，它是在格点 v处强制实施规范不变性的投影算子。类似地，对于每个面 f和边 $e \in f$，我们设定 $T^h(e,\ f) = T_e^h$

若 f位于 e的左侧，则 $T^h(e,f) = T_e^{\bar{h}}$；若 f位于 e的右侧，则 f具有按逆时针方向排列的边界边 (e_1,e_2,e_2)（初始边任意选取），于是我们定义平坦规范投影算子 $B_f := \sum_{g_1,g_2,g_3\in G} T^{g_1}(e_1,f)\ T^{g_2}(e_2,f)\ T^{g_3}(e_3,f)$，它同样是$g_1g_2g_3=1$一个投影算子。注意，该表达式与三元组 (e_1,e_2,e_3) 中哪条边排在第一位无关。图示如下：



投影算子 $\{A_v\}_{v\in\Gamma^V}\cup\{B_f\}_{f\in\Gamma^F}$彼此对易。

量子双哈密顿量是对易投影算子的形式和（相互作用）

$$H = \sum_{v\in\Gamma^V}(\mathbb{1}-A_v) + \sum_{f\in\Gamma^F}(\mathbb{1}-B_f).$$

定义 5.2.1。 若态 ω 在 $\mathcal{A}$ 上是 H 的无挫折基态，则对于所有 $v\in\Gamma^V$和所有 $f\in\Gamma^F$，都有 $\omega(A_v) = \omega(B_f) = 1$。

如果态 ω 满足 $\omega(A_v) = 1$，那么我们称其在 v处是规范不变的；如果 $\omega(B_f) = 1$，那么我们称其在 f处是平坦的。无挫折基态是处处规范不变且平坦的态。

以下命题最初针对环面码（情形 $G = \mathbb{Z}_2$）在[AFH07]，中得到证明，并针对一般的 G 在 [Naa12b]中得到证明。另见 [CHK+24]，其中使用了来自 [JNPW23]的关于对易投影哈密顿量的一般结果。我们通过命题5.3.43的推论给出了该命题的新证明。

命题 5.2.2 ([Naa12b])。 量子双哈密顿量有唯一的无挫折基态。

我们将唯一的无挫折基态记为 ω_0，并令 $(\pi_0,\ \mathcal{H}_0,\ |\Omega_0\rangle)$ 为其 GNS 三元组。注意，由于 ω_0 是量子双模型的唯一无挫折基态，因此它是一个纯态，故 π_0 是一个不可约表示。

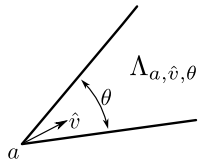
5.2.3 任意子扇区的分类

在无限体积量子自旋系统或场论的背景下，基态上的任意子激发类型 ω_0 具有非常优美的数学刻画。它们对应于满足关于 GNS 表示的某个超选择准则的可观测代数的不可约表示 π_0 （[DHR71],[DHR74], [FRS89], [FRS92], [FG90]）。在我们的量子自旋系统设定中，适当的超选择准则最初由 [Naa11] 在 Toric 的特殊情形下提出

代码。

顶点位于 $a \in \mathbb{R}^2$、轴为单位长度的 $\hat{v} \in \mathbb{R}^2$、张角为 $\theta \in (0, 2\pi)$ 的锥，是 $\mathbb{R}^2$ 的开子集，定义如下：

$$\Lambda_{a,\hat{v},\theta} := \{x \in \mathbb{R}^2 : (x-a)\cdot\hat{v} > \|x-a\|\cos(\theta/2)\}.$$



任何形如这样的子集 $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ 都称为锥。

对于平面的任意子集 $S \subset \mathbb{R}^2$，我们用 $S \subset \Gamma^E$ 表示其中点位于 S 的边的集合，并将 $\mathcal{A}_S := \mathcal{A}_S$ 记作支撑于 S 的可观测量代数。根据此定义，对于任意 $S \subset \mathbb{R}^2$，有 $S \cup S^c = \Gamma^E$。

定义 5.2.3。 若不可约表示 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足相对于 π_0 的超选择准则，则称之为：对于任意锥 Λ，存在一个酉算子 $U_\Lambda : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$，使得

$$\pi(A) = U_\Lambda \pi_0(A) U_\Lambda^*$$

对于所有 $A \in \mathcal{A}_\Lambda$ 均成立。我们称这样的表示为 ω_0 的任意子表示。任意子表示的酉等价类称为任意子扇区。

记 $\mathcal{D}(G$为 G的量子双代数。 $\mathcal{D}(G$的不可约表示在同构意义下由 C 的一个共轭类 G 以及 R 的中心化子 N_C 的一个不可约表示 C 唯一标记（例如参见 [Gou93]）。我们将与共轭类 $\mathcal{D}(G$以及不可约表示 C 相对应的 R 的不可约表示记为 RC。

我们的主要结果是，根据 ω_0 的 $\mathcal{D}(G$的不可约表示，完备分类[的任意子扇区。该结果最初由 13] Naa [使用完全不同的方法针对环面码获得。另请参见 15]FN [，其中指出了如何将 13] Naa G的方法应用于阿贝尔 的量子双模型。

定理 5.2.4。 对于 RC 的每个不可约表示 $\mathcal{D}(G)$，存在一个任意子表示 π^{RC}。这些表示 $\{\pi^{RC}\}_{RC}$两两不相交，并且任意任意子表示都与其中一个酉等价。

该定理在第 5.5 节中重新表述并证明，见定理5.5.13。

5.3 任意子态

本节将构造包含任意类型的单个任意子激发的态，并证明这些态是纯态。这些态除固定格点 s_0 外，处处满足无挫折基态约束；而在该格点上，它们满足的则是某个维格纳投影算子所施加的约束，该投影算子投影到该格点上量子双作用的一个不可约表示（见注记 5.3.1）。我们通过以下步骤对满足此类约束的态进行完整分类：

首先对满足这些约束的适当局部版本的所有态进行分类。我们指出，本节所述方法足以证明，在纠缠自举程序 $\mathcal{D}(G)$ 的背景下，量子双模型的任意子类型与量子双代数[SKK19]的不可约表示一一对应。

5.3.1 带状算子、规范构型与规范变换

在本小节中，我们将介绍格点、三角形和带，以便随后描述由 [Kit03] 引入的带状算子。从第5.4 节开始，这些带状算子将发挥关键作用。随后，我们将介绍局域规范变换的概念。

设 Γ 是一个闭合曲面的正则格点，$\vec{\Gamma}^E$ 是其有向对偶边集合。

5.3.1.1 格点和三角形

一个格点 s 是顶点与面组成的一对 $s=(v,\ f)$，其中 v 位于 f 的边界上。我们将 s 的顶点记为 $v(s)=v$，将 s 的面记为 $f(s)=f$。图示中，我们用一条从格点的顶点指向其面的中心的直线来表示一个格点。

一个正向三角形 $\tau=(s_0,s_1,e)$ 由一对共享同一面的格点 s_0、s_1 以及连接 s_0 和 s_1 的顶点的边 $e\in\Gamma^E$ 组成。我们将正向三角形 τ 的初始格点和末端格点分别记为 $\partial_0\tau=s_0$ 和 $\partial_1\tau=s_1$，并将与 τ 关联的有向边记为 $e_\tau=(v(s_0)\ v(s_1))$，见图 5.3。注意，e 和 e_τ 不必相同；e 始终采用定义 Γ^E 时使用的从左到右的定向，而 e_τ 则沿正向三角形的方向定向。与 τ 相反的三角形是正向三角形 $\bar{\tau}=(s_1,s_0,e)$。如果面 $f=f(s_0)=f(s_1)$ 位于 e_τ 的左侧，则正向三角形 $\tau=(s_0,s_1,e)$ 为正，否则为反向。

类似地，对偶三角形 $\tau=(s_0,s_1,e)$ 由一对共享同一顶点的格点 s_0,s_1，以及边 $e\in\Gamma^E$ 组成；与该边对应的对偶边 δ 连接 s_0 和 s_1 的面。我们仍记作 $\partial_0\tau=s_0$ 和 $\partial_1\tau=s_1$，并将与 τ 对应的有向对偶边记作 $e^*_\tau=(f(s_0)\ f(s_1))$。我们还将对偶边为 e^*_τ 的有向边记作 e_τ。再次注意，e^* 和 e^*_τ 不必相同。e^* 的定向由 $e\in\Gamma^E$ 从左到右的定向决定，而 e^*_τ 则沿对偶三角形的方向定向。我们将反向对偶三角形定义为 $\bar{\tau}=(s_1,s_0,e)$。若顶点 $v=v(s_0)=v(s_1)$ 位于 e^*_τ 的右侧，则称对偶三角形 $\tau=(s_0,s_1,e)$ 为正；否则称为反向。

对于每个对偶三角形 $\tau=(s_0,s_1,e)$，我们关联支撑于边 e 的酉算子 L^h_τ。L^h_τ 的作用方式取决于与 e 对偶的边 e^* 是否满足 $e^*=(f(s_0)\ f(s_1))$ 或 $e^*=(f(s_1)\ f(s_0))$，以及 $v(s_0)=\partial_0 e$ 还是 $v(s_0)=\partial_1 e$，具体如下。若 $e^*=(f(s_0)\ f(s_1))$

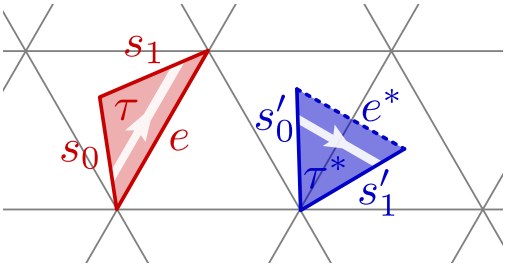


图 5.3：红色的正向三角形 $\tau = (s_0,\ s_1,\ e)$，以及蓝色的对偶三角形 $\tau^* = (s'_0,\ s'_1,\ e')$。与 e' 相关联的对偶边 e^* 以蓝色虚线表示。请注意，对于这个特定的对偶三角形，e^* 的定向与白色箭头相反，而白色箭头遵循 $(e_{\tau^*})^*$ 的定向。

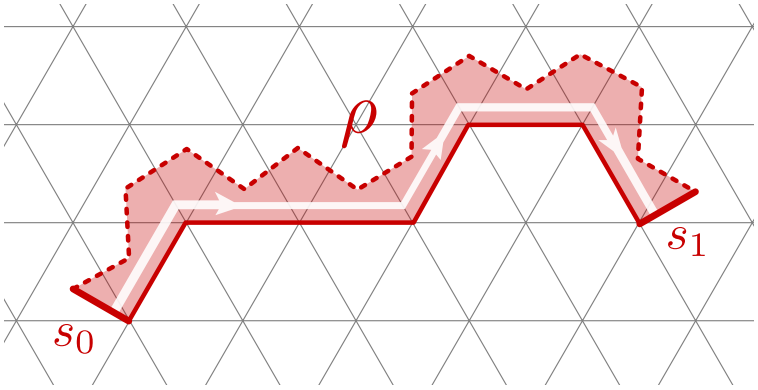


图 5.4：一个正有限带 ρ，具有 $\partial_0\rho = s_0$ 和 $\partial_1\rho = s_1$。 ρ的直接路径由红色实线边组成。

且 $v(s_0) = \partial_0 e$，则 $L^h_\tau := L^h_e$。若 $e^* = (f(s_0)\ f(s_1))$ 且 $v(s_0) = \partial_1 e$，则 $L^h_\tau := R^{\bar{h}}_e$。若 $e^* = (f(s_1)\ f(s_0))$ 且 $v(s_0) = \partial_0 e$，则 $L^h_\tau := L^{\bar{h}}_e$（$L^h_e$、$R^h_e$ 已在第5.2节第2小节中定义）。最后，若 $e^* = (f(s_1)\ f(s_0))$ 且 $v(s_0) = \partial_1 e$，则 $L^h_\tau := R^h_e$。类似地，对于每个正向三角形 $\tau = (s_0, s_1, e)$，若 $e = (v(s_0)\ v(s_1))$，我们关联投影算子 $T^g_\tau := T^g_e$；若 $e = (v(s_1)\ v(s_0))$，则关联投影算子 $T^g_\tau := T^{\bar{g}}_e$。

5.3.1.2 带

我们将有限带 $\rho := \{\tau_i\}_{i=1}^{l}$ 定义为满足以下条件的三角形有序元组：对于所有 $i = 1、\cdots、l-1$，均有 $\partial_1\tau_i = \partial_0\tau_{i+1}$；并且对于每条边 $e \in \Gamma^E$，至多存在一个三角形τ_i 使得 $\tau_i = (\partial_0\tau_i, \partial_1\tau_i, e)$。空带记作 ϵ。对于非空带 ρ，我们用 $\partial_0\rho := \partial_0\tau_1$ 表示该带的初始点，用 $\partial_1\rho := \partial_1\tau_n$ 表示该带的末端点。参见图 5.4。如果属于带 ρ 的所有三角形都是正向三角形，我们就称 ρ 为直接带；如果属于带 ρ 的所有三角形都是对偶三角形，我们就称 ρ 为对偶带。

如果一条带上的所有三角形都是正的，则称这条带为正带；如果所有三角形都是反向的，则称这条带为反向带。所有非空带不是正带就是反向带。

如果我们有两个元组 $\rho_1 = \{\tau_i\}_{i=1}^{l_1}$ 和 $\rho_2 = \{\tau_i\}_{i=l_1+1}^{l_2}$，那么可以将它们串接起来，形成一个元组 $\rho = \{\tau_i\}_{i=1}^{l_1+l_2}$。我们用 $\rho = \rho_1\rho_2$ 表示这个串接后的元组。注意，如果 ρ 是

一条有限带且 $\rho=\rho_1\rho_2$，那么 ρ_1 和 ρ_2 自动也是有限带，并且（如果 ρ_1 和 ρ_2 非空），$\partial_0\rho=\partial_0\rho_1$、$\partial_1\rho=\partial_1\rho_2$ 和 $\partial_1\rho_1=\partial_0\rho_2$。

带 $\rho=\{\tau_i\}_{i=1}^l$的定向反转是带 $\bar{\rho}=\bar{\tau}_l\cdots\bar{\tau}_1$。如果有限带 ρ 满足 $\partial_0\rho=\partial_1\rho$，我们就称其为闭集。

带 $\rho=\{\tau_i=(s_0^{(i)},s_1^{(i)},e_i)\}_{i=1}^l$ 的支撑是 $\mathrm{supp}(\rho):=\{e_i\}_{i=1}^l$. 如果 $\mathrm{supp}(\rho)\subseteq S\subseteq\Gamma^E$，我们就称 ρ 支撑于 S。

5.3.1.3 有向路径

直接路径 $\gamma=\{e_i\}_{i=1}^l$ 是由有向边 $e_i\in\vec{\Gamma}^E$ 构成的有序元组，满足 $\partial_1 e_i=\partial_0 e_{i+1}$，其中 $i=1,\cdots,l-1$。我们将 $\partial_0\gamma=\partial_0 e_1$ 记作 γ的起始顶点，将 $\partial_1\gamma=\partial_1 e_l$ 记作 γ的终止顶点。给定两个直接路径 $\gamma_1=\{e_i\}_{i=1}^{l_1}$ 和 $\gamma_2=\{e_i\}_{i=l_1+1}^{l_1+l_2}$，满足$\partial_1\gamma_1=\partial_0\gamma_2$，我们可以将它们串接成新的直接路径 $\gamma=\{e_i\}_{i=1}^{l_1+l_2}$。我们将串接后的路径记作 $\gamma=\gamma_1\gamma_2$。直接路径 $\gamma=\{e_i\}_{i=1}^l$ 的定向反转是直接路径 $\bar{\gamma}=\bar{e}_l\cdots\bar{e}_1$。直接路径 $\gamma=\{e_i\}_{i=1}^l$的支撑是

$$\mathrm{supp}(\gamma):=\{e\in\Gamma^E:e=e_i\text{ or }\bar{e}=e_i\text{ for some }i=1,\cdots,l\}.$$

如果 $\mathrm{supp}(\gamma)\subseteq S\subseteq\Gamma^E$，我们就说 γ 支撑于 S。

对每条带 ρ，我们都可以按如下方式关联一条直接路径。设 $\rho=\{\tau_1,\cdots,\tau_l\}$ 是一条有限带，$J=\{j_1,\cdots,j_{l'}\}\subset\{1,\cdots,l\}$ 是满足以下条件的有序子集：τ_j是正向三角形，当且仅当 $j\in J$。那么 $\rho^{dir}:=\{e_{\tau_j}:j\in J\}$就是 ρ的直接路径。为证明这确实是一条直接路径，取指标 j_ν，$j_{\nu+1}\in J$，并假设 $j_{\nu+1}=j_\nu+m$。接下来我们要证明 $\partial_1 e_{\tau_{j_\nu}}=\partial_0 e_{\tau_{j_{\nu+1}}}$。根据构造，对于 $n=1,\cdots,m-1$，所有三角形 $\tau_{j_\nu+n}$ 都是对偶的，因此 $v=v(\partial_0\tau_{j_\nu+n})=v(\partial_1\tau_{j_\nu+n})$ 对所有这些 n都相等。由此可得 $\partial_1 e_{\tau_{j_\nu}}=v(\partial_1\tau_{j_\nu})=v$ 且 $\partial_0 e_{\tau_{j_\nu+m}}=v(\partial_0\tau_{j_{\nu+1}})=v$，如所需。我们有 $\bar{\rho}^{dir}=\rho^{dir}$；如果 ρ 支撑于 $S\subseteq\Gamma^E$，那么 ρ^{dir} 也支撑于 S。

5.3.1.4 带状算子

这里我们介绍 [Kit03], 引入的带状算子，并陈述其一些基本性质。关于证明及更多性质，请参见本文附录5.A或 [BMD07]的附录 B 和 C。对每条带 ρ，我们按如下方式定义与之对应的带状算子 $F^{h:\ \rho\ g}$若 ϵ是平凡带状区域，则令 $F^{h,\ \epsilon\ g}=\delta_{1,\ g}\mathbb{1}$。对于由单个正向三角形 τ组成的带，令 $F^{h,\ \tau\ g}=T^g_\tau$。对于由单个对偶三角形 τ组成的带，令 $F^{h,\ \tau\ g}=\delta_{g,\ {}_1}L^h_\tau$。对于较长的带，其带状算子归纳地定义为

$$F^{h,g}_\rho=\sum_{k\in G}F^{h,k}_{\rho_1}F^{\bar{k}hk,\bar{k}g}_{\rho_2}\tag{5.1}$$

对于 $\rho=\rho_1\rho_2$。由附录 5.A 开头的讨论可知，该定义与将 ρ 拆分为两条较小的带的方式无关。根据构造，带算子 $F^{h,\ \rho\ g}$支撑于 $\mathrm{supp}(\rho)$。定义

$$T^g_\rho:=F^{1,g}_\rho,\qquad L^h_\rho:=\sum_{g\in G}F^{h,g}_\rho$$

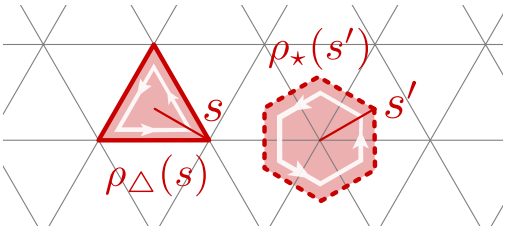


图 5.5：与格点 s 相关联的初等直接带 $\rho_\triangle(s)$，以及与格点 s' 相关联的初等对偶带 $\rho_\star(s')$。

使得 $F^{h,\ g}_{\rho} = L^h_\rho T^g_\rho = T^g_\rho L^h_\rho$（引理 5.A.1）。

我们用带算子定义格点 s 处的规范变换 A^h_s 和磁通投影算符 B^g_s，如下：

$$A^h_s := F^{h,1}_{\rho_\star(s)}, \qquad B^g_s := F^{1,g}_{\rho_\triangle(s)}$$

其中，$\rho_\triangle(s)$（分别为 $\rho_\star(s)$）是唯一一个端点格点位于 s 的逆时针闭合直接带（对偶带），参见图 5.5。容易验证，对于所有 $h_1, h_2 \in G$，都有 $A^{h_1}_s A^{h_2}_s = A^{h_1 h_2}_s$，因此格点 s 处的规范变换构成 G 的一个表示。类似地，可以验证，对于所有 $g_1, g_2 \in G$，都有 $B^{g_1}_s B^{g_2}_s = \delta_{g_1,g_2} B^{g_1}_s$。我们还注意到，规范变换 A^h_s 仅取决于顶点 $v(s)$，因此对于任意满足 $v = v(s)$ 的格点 s，我们可以令 $A^h_v := A^h_s$，并称之为顶点 v 处的规范变换。类似地，投影到平凡磁通的投影算符 B^1_s 仅取决于面 $f(s)$，因此对于任意满足 $f = f(s)$ 的格点 s，我们可以令 $B^1_f = B^1_s$。

注记 5.3.1. 对于每个格点 s，算子 A^h_s 和 B^g_s 生成了 G的一个量子双代数实现。这个事实解释了该模型名称的由来，并将成为我们分析的核心。

量子双哈密顿量中出现的投影算子 A_v，B_f 现在可以写成如下形式：

$$A_v = \frac{1}{|G|}\sum_h A^h_v, \quad B_f = B^1_f.$$

它们分别是投影到在 v 处规范不变的态，以及具有平凡磁通的态上的投影算子。

5.3.1.5 规范构型与规范变换

将量子双模型的无挫折基态视为弦网凝聚态很有帮助，参见 [LW05]。接下来我们将建立弦网的语言；在此情形下，弦网对应于规范构型。对于任意 $S \subseteq \Gamma^E$，我们将 $\mathfrak{G}_S$记为映射 $\alpha : S \to G$的集合。我们将 α_e 记为 α 在边 $e \in S$上的取值。我们称这类映射为 S上的规范构型。记 $\overrightarrow{S} = \{e \in \overrightarrow{\Gamma}^E : e \in S \text{ 或 } \bar{e} \in S\}$ 为对应于 S的有向边集合。$S \subseteq \Gamma^E$ 上的任意规范构型 α 都可扩展为有向边上的函数 $\alpha : \overrightarrow{S} \to G$，令 $\alpha_{\bar{e}} = \bar{\alpha}_e$即可。$\alpha_e$ 的含义是

离散规范场沿边 e传输时的平行输运。

对于任意有限的 $V \subset \Gamma^V$，我们将 $\mathcal{G}[V]$ 定义为由 $\{A_v^{g_v}$生成的酉算子群：$v \in V$，$g_v \in G\}$。由于当 $v \neq v'$时，A_v^g 与 $A_{v'}^{g'}$ 彼此对易，因此任意元素 $U \in \mathcal{G}[V]$ 都由一个赋值 $V \ni v \mapsto g_v \in G$ 唯一确定：该赋值为 V中的每个顶点指定一个群元素，使得

$$U = U[\{g_v\}] = \prod_{v \in V} A_v^{g_v}.$$

我们将 $\mathcal{G}[V]$ 称为作用在 V上的规范变换群。

如果每个 $U \in \mathcal{G}[V]$ 都支撑于集合 $S \subseteq \Gamma^E$ 上，那么规范群 $\mathcal{G}[V]$ 按如下方式作用于规范构型 $\mathfrak{G}_S$。规范变换 $U = U[\{g_v\}] \in \mathcal{G}[V]$ 作用于规范构型 $\alpha \in \mathfrak{G}_S$，得到新的规范构型 $\alpha' := U(\alpha) \in \mathfrak{G}_S$ 由 $\alpha'_e = g_{\partial_0 e}\, \alpha_e\, \bar{g}_{\partial_1 e}$给出，其中当 $v \notin V$时，我们令 $g_v = 1$。

如果 $S \subset \Gamma^E$ 是有限的，那么令 $\mathcal{H}_S := \bigotimes_{e \in S} \mathcal{H}_e$。规范构型集合 $\mathfrak{G}_S$ 因此标记了 $\mathcal{H}_S$ 的一组标准正交基，其定义为 $|\alpha\rangle := \bigotimes_{e \in S} |\alpha_e\rangle$。如果某个有限 $V \subset \Gamma^V$ 对应的规范变换 $\mathcal{G}[V]$ 支撑于 S，那么这些规范变换在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_S$ 上的作用为 $U|\alpha\rangle = |U(\alpha)\rangle$，也就是说，规范变换将基态映射为基态。

5.3.2 局域规范构型与边界条件

回顾一下，dist$(\cdot,\cdot)$ 是 Γ^V 上的图距离。固定任意一个格点 $s_0 = (v_0, f_0)$，并定义（见图5.6）：

$$\begin{aligned}
\Gamma_n^V(s_0) &:= \{v \in \Gamma^V \,:\, \mathrm{dist}(v, v_0) \leq n\},\\
\Gamma_n^F(s_0) &:= \{f \in \Gamma^F \,:\, \exists v \in f \text{ such that } v \in \Gamma_n^V\},\\
\Gamma_n^E(s_0) &:= \{e \in \Gamma^E \,:\, \exists f \in \Gamma_n^F \text{ such that } e \in f\},\\
\partial\Gamma_n^E(s_0) &:= \{e \in \Gamma_n^E \,:\, \exists! f \in \Gamma_n^F \text{ with } e \in f\},\\
\partial\Gamma_n^V(s_0) &:= \Gamma_{n+1}^V \setminus \Gamma_n^V.
\end{aligned}$$

请注意，这些区域取决于原点 s_0 的选择。本文中，我们会将不同的格点作为原点来讨论。为简化记号，我们仍会省略记号中的 s_0，只写作 $\Gamma_n^V, \Gamma_n^F, \Gamma_n^E$ 和 $\partial\Gamma_n^E$，只要上下文能够明确哪个格点充当原点即可。

在本节余下部分，我们固定一个格点 s_0 作为原点。我们将 $\mathfrak{G}_n := \mathfrak{G}_{\Gamma_n^E}$ 记作 Γ_n^E 上的规范构型，并令

$$\mathcal{H}_n := \mathcal{H}_{\Gamma_n^E} = \bigotimes_{e \in \Gamma_n^E} \mathcal{H}_e$$

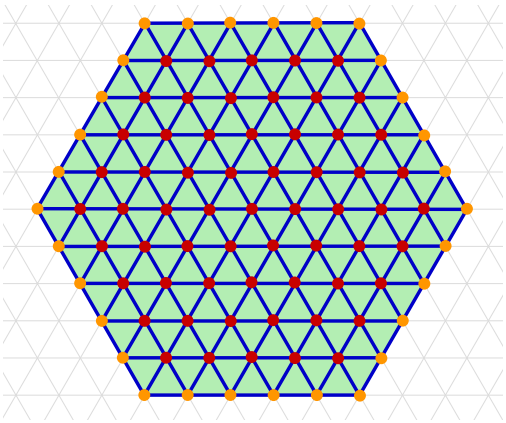


图 5.6：图中展示了格点 $s_0 = (v_0, f_0)$对应的集合 $\Gamma_n^V(s_0)$（红色）、 $\Gamma_n^F(s_0)$（绿色）、 $\Gamma_n^E(s_0)$（蓝色）和 $\partial\Gamma_n^V(s_0)$（橙色）。顶点 v_0 位于图形中心。集合 $\partial\Gamma_n^E$由图形边界上的蓝色边组成。

表示与区域 Γ_n^E相关联的希尔伯特空间。规范构型集合 $\mathfrak{G}_n$ 于是标记了 $\mathcal{H}_n$的一组标准正交基，记为$|\alpha\rangle = \bigotimes_{e\in\Gamma_n^E} |\alpha_e\rangle$ ，其中 $\alpha \in \mathfrak{G}_n$取遍所有可能值。

对于任意 $\alpha \in \mathfrak{G}_n$，相应的基态 $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_n$ 都有图形表示，示意图见图 5.7。

定义 5.3.2. 对于一个规范构型 α， 穿过带 ρ 的通量定义为

$$\phi_\rho(\alpha) := \prod_{e\in\rho^{dir}} \alpha_e$$

其中，乘积按照 ρ^{dir}的顺序排列，而带的直接路径 ρ 定义见第 5.3.1.3节。

我们将关注满足某些约束的规范构型。回顾一下，对于任意格点 s，我们都可以关联一个初等闭合直接带状路径 $\rho_\triangle(s)$，它以 s 为起点和终点，并沿逆时针方向环绕 $f(s)$。设 α 是定义在某个区域上的规范构型，该区域包含 $f(s)$的所有边，并定义

$$\phi_s(\alpha) := \phi_{\rho_\triangle(s)}(\alpha)$$

是 α 在 s处的通量。根据构造，我们有 $B_s^g |\alpha\rangle = \delta_{g,\ \phi_s(\alpha)} |\alpha\rangle$。例如，图 s 中所示规范构型 α 在 5.2 处的通量为 $\phi_s(\alpha) = g_1\bar{g}_2\bar{g}_3$。

令 $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{G}_{\partial\Gamma_n^E}$ 为 $\partial\Gamma_n^E$上的规范构型集合。我们将其元素称为 b： $\partial\Gamma_n^E \to G$ 边界条件。对于任意规范构型 $\alpha \in \mathfrak{G}_n$ ，记$b(\alpha) = \alpha|_{\partial\Gamma_n^E}$ 为由 α 限制到边界 $\partial\Gamma_n^E$所给出的 α 边界条件。对于所有 $e \in \partial\Gamma_n^E$，我们用 $b = \emptyset$ 表示平凡边界条件 $\emptyset_e = 1 \in G$ 。

固定一个格点 $s_0 = (v_0,\ f_0)$ 后，我们可以将 v_0 视为平面的原点，并按如下方式定义 $\mathbb{R}^2$ 中的单位向量。令 $\hat{}y$ 为以 v_0 为基点、指向

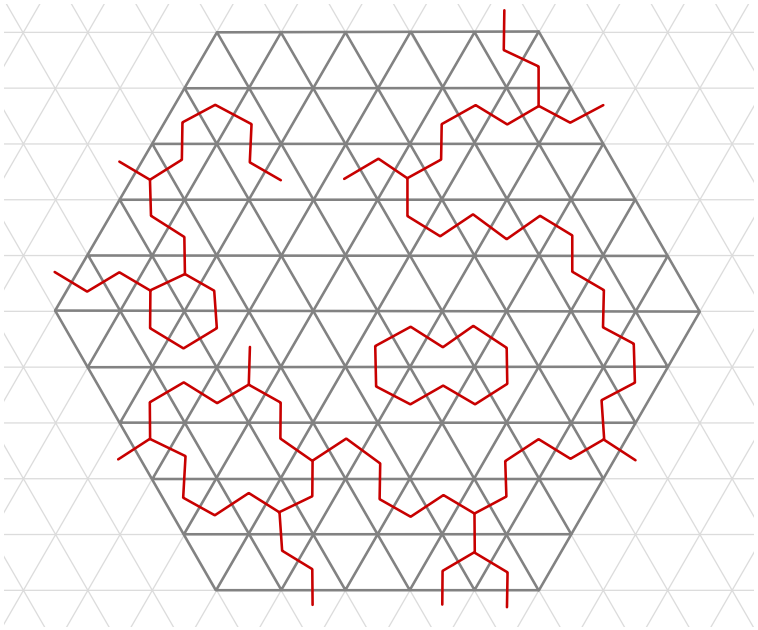


图 5.7： Γ_5^E上的规范构型示例。深灰色的边属于Γ_5^E，红色有向弦穿过这些边，并携带群标记。对于未被任何红色弦穿过的边，其规范自由度取值为 $1 \in G$。图中未显示红色弦的定向和群标记。此图对应于某个 $\alpha \in \mathfrak{G}_n$的一个确定基态 $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_n$ 。

面 f_0中心的单位向量，并令 $\hat{}x$ 为以 v_0为基点、垂直于 $\hat{}y$ 且满足 $\hat{}x \times \hat{}y = 1$ 的单位向量，即 ($\hat{}x$, $\hat{}y$) 是 $\mathbb{R}^2$的一个正向基。现在令 $\hat{}\, l_1 = \hat{}x$ ，且 $\hat{}l_2 = \cos(\pi/3)\hat{}x + \sin(\pi/3)\hat{}y$。于是，每个顶点 $v \in \Gamma^V$都可以用相对于 v_0的坐标 $\hat{}\,\hat{}\,(n_1,\ n_2)$ 来表示，即 $v = v_0 + n_1 l_1 + n_2 l_2$。使用这些坐标，令 $v_i = (i,\ 0)$，其中 $i \in \mathbb{Z}$，并考虑直接路径 $\nu_n^{dir} = ((v_0,\ v_1),\ (v_1,\ v_2)\ \cdots,\ (v_{n-1},\ v_n))$。

我们将基准带 ν_n 定义为满足以下条件的唯一正向带： $\partial_0 \nu_n = s_0$，且 ν_n^{dir}是 ν_n的直接路径，并且 ν_n 的末端三角形是直接的。我们令$s_n = \partial_1 \nu_n$ 表示 ν_n的末端格点。见图5.8。

我们将边界带 β_n 定义为从 s_n 出发并终止于该点的唯一闭集正向带，其直接路径由 $\partial\Gamma_n^E$中的边构成，并以逆时针方向环绕Γ_n^E。见图5.8。

定义 5.3.3. 对于任意边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n$ ，我们定义投影算子 $P_b \in \mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$ 如下：

$$P_b = \prod_{\{\tau_e \in \beta_n | \tau_e \text{ direct}\}} T_{\tau_e}^{b_e}.$$

定义 5.3.4. 我们称 $\phi_{\beta_n}(\alpha)$ 为规范构型 $\alpha \in \mathfrak{G}_n$ 的边界磁通 。

定义 5.3.5. 对于任意边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n$ ，我们将 $\phi_{\beta_n}(b)$ 记作通过边界带 β_n 测得的相应边界磁通。

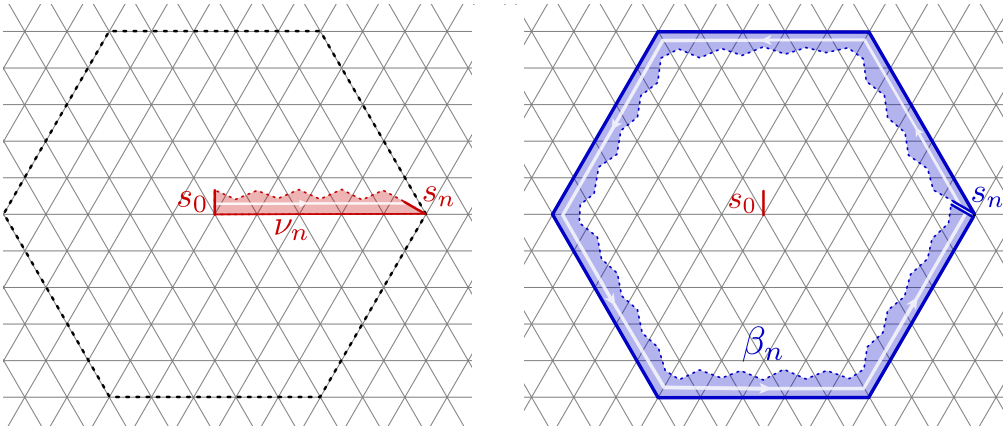


图 5.8：给定格点 s_0 和 $n=5$ 时，红色的基准带 ν_n（左）和蓝色的边界带 β_n（右）。对于基准带 ν_n，有 $\partial_0\nu_n=s_0$ 和 $\partial_1\nu_n=s_n$。对于边界带 β_n，有 $\partial_0\beta_n=\partial_1\beta_n=s_n$，且其绕 $\partial\Gamma_n^E$ 的定向为逆时针。任意格点 s 都可通过晶格旋转和平移与格点 s_0 关联。对于任意 s，我们将其基准带和边界带定义为对 s_0 的基准带和边界带作相应旋转和平移所得。

5.3.3 $\mathcal{D}(G)$ 的不可约表示、Wigner 投影算子与局域约束

如上所述，在每个格点 s 处，我们都有由该处的规范变换和磁通投影算符生成的量子双代数 $\mathcal{D}(G)$ 的一个实现。

下面介绍一些术语和约定，以便分析量子双代数的表示。用 $(G)_{cj}$ 表示 G 的共轭类集合。对于每个共轭类 $C\in(G)_{cj}$，令 $C=\{c_i\}_{i=1}^{|C|}$ 为其元素的一个标记。任意 $g\in C$ 对于确定的标签 i 都有 $g=c_i$，我们定义标记函数 $i:=i(g)$。任取一个代表元 $r_C\in C$。C 的所有元素都与选定的代表元 r_C 共轭，因此我们可以固定群元素 q_i，使得对所有 $c_i\in C$，都有 $c_i=q_ir_Cq_i$。令 $Q_C:=\{q_i\}_{i=1}^{|C|}$ 为 C 的迭代集合。令 $N_C:=\{n\in G|nr_C=r_Cn\}$ 为 r_C 在 G 中的交换子。注意，N_C 的群结构不取决于 r_C 的选择，它是 C 的中心化子的一个实现。用 $(N_C)_{irr}$ 表示 N_C 的不可约表示集合。

如设置中所述，G 的量子双代数的不可约表示与数对一一对应，其中 $C\in(G)_{cj}$ 是一个共轭类，而 $R\in(N_C)_{irr}$ 是群 N_C 的一个不可约表示。

对于每个 $R\in(N_C)_{irr}$，我们固定一个具体的酉矩阵表示 $N_C\ni m\mapsto R(m)\in\mathcal{M}_{\dim R}(\mathbb{C})$，其分量为 $R^{jj'}(m)$。

接下来我们常常会同时考虑 C 的标签 $i\in\{1,\cdots,|C|\}$ 和一个标签 $j\in\{1,\cdots,\dim R\}$。我们定义 $I_{RC}:=\{1,\cdots,|C|\}\times\{1,\cdots,\dim R\}$，使得 $(i,\ j)\in I_{RC}$。

定义 5.3.6. 我们将格点 s 处的维格纳投影算子定义为 RC

$$D_s^{RC}:=\frac{\dim R}{|N_C|}\sum_{m\in N_C}\chi_R(m)^*\sum_{q\in Q_C}A_s^{qm\bar{q}}B_s^{qr_C\bar{q}}.$$

D_s^{RC}可分解为若干对易投影算子的和 $\{D_s^{RC;u}\}_{u\in I_{RC}}$（引理 5.A.13）。对于$u=(i,\ j)$，它们由下式给出

$$D_s^{RC;u}:=\frac{\dim R}{|N_C|}\sum_{m\in N_C}R^{jj}(m)^*A_s^{q_i m\bar{q}_i}B_s^{c_i}.$$

固定一个格点 $s_0=(v_0,\ f_0)$，并引入以下记号

$$\overline{\Gamma}^F:=\Gamma^F\setminus\{f_0\}\qquad\overline{\Gamma}^V:=\Gamma^V\setminus\{v_0\}.$$

本节中格点 s_0 将始终固定，因此记号中通常不再明确写出。

定义以下态集。

定义 5.3.7。令$\mathcal{S}_{s_0}$ 为满足以下条件的 $\mathcal{A}$ 上的态集 ω

$$\omega(A_v)=\omega(B_f)=1\quad\text{for all}\quad v\in\overline{\Gamma}^V,\quad f\in\overline{\Gamma}^F. \tag{5.2}$$

类似地，我们用 $\mathcal{S}_{s_0}^{RC}$表示以下态集 ω，其定义在 $\mathcal{A}$ 上，且除满足（5.2）外，还满足

$$\omega(D_{s_0}^{RC})=1, \tag{5.3}$$

并用 $\mathcal{S}_{s_0}^{RC;u}$表示除满足（5.2）外，还满足以下条件的态集

$$\omega(D_{s_0}^{RC;u})=1. \tag{5.4}$$

在本节中，我们将证明集合 $\mathcal{S}_{s_0}^{RC;u}$只包含一个纯态。考虑 $C=C_1:=\{1\}$ 为平凡共轭类，且 R 为 $N_{\{1\}}=G$的平凡表示的情形，我们看到 $\mathcal{S}_{s_0}^{RC_1}$恰好是无挫折基态的集合，因此我们特别得到命题 5.2.2的一个新证明。

5.3.4 局域约束

我们将通过考察属于这些空间的态在有限体积 $\mathcal{S}_{s_0}$、$\mathcal{S}_{s_0}^{RC}$和 $\mathcal{S}_{s_0}^{RC;u}$上的限制，来刻画状态空间 Γ_n^E。这些限制对应于作用在 $\mathcal{H}_n$ 上的密度矩阵，其支撑于 $\mathcal{H}_n$ 的子空间，而这些子空间由约束（5.2）、（5.3）和（5.4）的局域版本所定义。这里我们引入这些子空间。

记作

$$\overline{\Gamma}_n^F:=\Gamma_n^F\setminus\{f_0\}\qquad\overline{\Gamma}_n^V:=\Gamma_n^V\setminus\{v_0\}.$$

定义 5.3.8。令 $\overline{\mathcal{V}}_n\subset\mathcal{H}_n$ 为由满足以下条件的向量 $|\psi\rangle\in\mathcal{H}_n$ 构成的子空间

$$A_v|\psi\rangle=B_f|\psi\rangle=|\psi\rangle\quad\text{for all } v\in\overline{\Gamma}_n^V, f\in\overline{\Gamma}_n^F. \tag{5.5}$$

令$\mathcal{V}_n^{RC}\subset\overline{\mathcal{V}_n}$为由向量组成的子空间 $|\psi\rangle\in\mathcal{V}_n$，这些向量除了满足（5.5）之外，还满足

$$D_{s_0}^{RC}|\psi\rangle=|\psi\rangle, \tag{5.6}$$

并令 $\mathcal{V}_n^{RC;u}\subset\mathcal{V}_n^{RC}$为由满足以下条件的向量组成的子空间：$|\psi\rangle\in\mathcal{V}_n^{RC}$除满足（5.5）外，还满足

$$D_{s_0}^{RC;u}|\psi\rangle=|\psi\rangle. \tag{5.7}$$

注意，由于 $\mathbb{1} = \sum_{RC} D_{s_0}^{RC}$（引理 5.A.14）以及 $D_{s_0}^{RC} = \sum_u D_{s_0}^{RC;u}$（引理 5.A.13），我们有正交分解

$$\overline{\mathcal{V}_n} = \bigoplus_{RC} \mathcal{V}_n^{RC} \quad \text{and} \quad \mathcal{V}_n^{RC} = \bigoplus_u \mathcal{V}_n^{RC;u}$$

5.3.5 施加磁通约束和边界条件

对于每个 RC 和 $u = (i,\ j) \in I_{RC}$，以及每个格点 s，我们定义

$$A_s^{RC;u} := \frac{\dim R}{|N_C|} \sum_{m \in N_C} R^{jj}(m)^*\, A_s^{q_i m \bar{q}_i},$$

因此 $D_s^{RC;u} = A_s^{RC;u} B_s^{c_i}$。由引理 5.A.12 可知，$A_s^{RC;u}$ 是与 $B_s^{c_i}$ 对易的投影算子。换言之，投影算子 $D_{s_0}^{RC;u}$ 实际上施加了两个相互独立的约束，即磁通约束 $B_{s_0}^{c_i}$ 和规范约束 $A_{s_0}^{RC;u}$。

本节中，我们将发现以下引理很有用。回顾定义 P_b 5.3.3 中的投影算子，它们投影到边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n$。

引理 5.3.9。对于任意 $C \in (G)^{cj}$、任意 $R \in (N_C)_{irr}$、任意 $u = (i, j) \in I_{RC}$，以及任意边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n$，集合

$$\{B_f\}_{f \in \overline{\Gamma}_n^F} \cup \{A_v\}_{v \in \overline{\Gamma}_n^V} \cup \{B_{s_0}^{c_i},\ A_{s_0}^{RC;u},\ P_b\}$$

是一个由对易投影算子构成的集合。

证明：该集合

$$\{B_f\}_{f \in \overline{\Gamma}_n^F} \cup \{A_v\}_{v \in \overline{\Gamma}_n^V} \cup \{B_{s_0}^{c_i},\ A_{s_0}^{RC;u}\}$$

根据公式 (5.17) 和引理 5.A.12，是一组对易投影算子。投影算子 $\{A_v\}_{v \in \Gamma_n^V} \cup \{B_{s_0}^{c_i},\ A_{s_0}^{RC;u}\}$ 都支撑于 $\Gamma_n^E \setminus \partial\Gamma_n^E$，而 P_b 支撑于 $\partial\Gamma_n^E$，因此这些投影算子与 P_b 对易。投影算子 $\{B_f\}_{f \in \Gamma_n^F}$ 和 P_b 在规范构型基下均为对角形式，因此它们也对易。□

我们首先考察 $\mathcal{H}_n$ 中满足磁通约束的向量空间。

定义 5.3.10。令 $\mathcal{W}_n^{C;i} \subset \mathcal{H}_n$ 为由满足以下条件的向量 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_n$ 组成的子空间：

$$|\psi\rangle = B_f\,|\psi\rangle = B_{s_0}^{c_i}\,|\psi\rangle$$

对所有 $f \in \Gamma_n^F$ 均成立。

空间 $\mathcal{W}^C{}_n{}^{;i}$ 由满足这些约束的某些 $\alpha \in \mathfrak{G}_n$ 的向量 $|\alpha\rangle$ 张成 .

定义 5.3.11. 对于任意共轭类 C 以及任意 $i = 1, \cdots, |C|$，我们定义

$$\mathcal{P}_n^{C;i} := \{\alpha \in \mathfrak{G}_n\ :\ |\alpha\rangle = B_{s_0}^{c_i}\,|\alpha\rangle = B_f\,|\alpha\rangle \quad \text{for all } f \in \overline{\Gamma}_n^F\}.$$

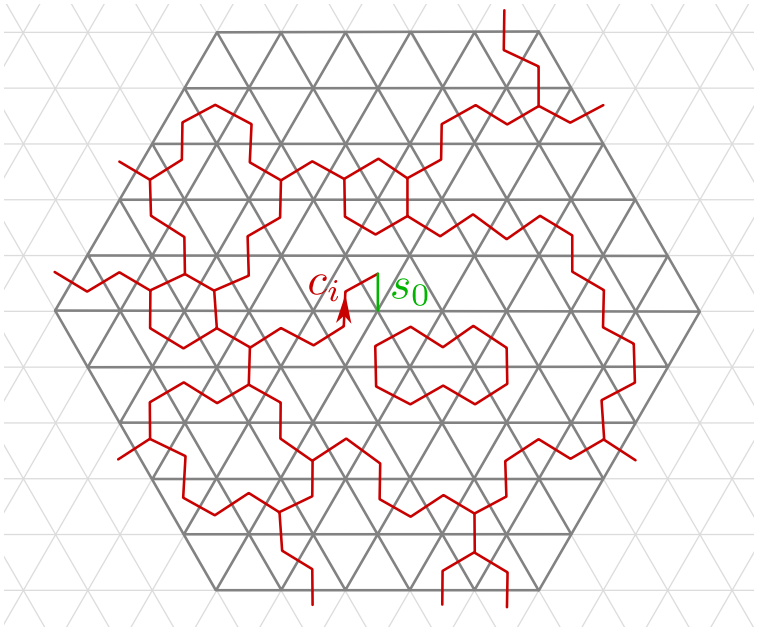


图5.9：弦网 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;i}$ 的图形表示。红色弦的定向和标签未显示，只有确保约束 $B_{s_0}^{c_i}|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ 得以满足的那一段除外。

示例见图 5.9，其中展示了一个弦网 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;i}$。

引理 5.3.12。我们有

$$\mathcal{W}_n^{C;i} = \mathrm{span}\{|\alpha\rangle : \alpha \in \mathcal{P}_n^{C;i}\}.$$

证明：当 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;i}$ 时，$|\alpha\rangle \in \mathcal{W}_n^{C;i}$ 显然成立。反过来，由于 $\{B_f\}_{f\in\Gamma_n^F} \cup \{B_{s_0}^{c_i}\}$ 是一组对易投影算子，我们有

$$\mathcal{W}_n^{C;i} = \left(\prod_{f\in\overline{\Gamma}_n^F} B_f\right) B_{s_0}^{c_i}\, \mathcal{H}_n.$$

现在注意到，对于 $\alpha \in \mathfrak{G}_n$，向量 $|\alpha\rangle$ 构成 $\mathcal{H}_n$ 的一组标准正交基，并且

$$\left(\prod_{f\in\overline{\Gamma}_n^F} B_f\right) B_{s_0}^{c_i}|\alpha\rangle = \begin{cases} |\alpha\rangle & \text{if} \quad \alpha \in \mathcal{P}_n^{C;i} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

结论由此得出。 □

我们还可以通过指定边界条件，进一步细化空间 $\mathcal{W}_n^{C;i}$.

定义5.3.13. 如果边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n$ 与共轭类 C 满足 $\phi_{\beta_n}(b) \in C$，我们就称该边界条件与该共轭类兼容。我们用 $\mathfrak{B}_n^C$ 表示与 C兼容的边界条件集合。对于 $b \in \mathfrak{B}_n^C$，有 $\phi_{\beta_n}(b) = c_i \in C$，其中指标 $i \in \{1, \cdots, |C|\}$是确定的。我们记为 $i = i(b)$。

定义 5.3.14. 对于任意共轭类 $C \in (G)^{cj}$、任意 $i = 1, \cdots, |C|$，以及任意边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n$，我们令 $\mathcal{W}_n^{C;ib} \subset \mathcal{H}_n$ 为满足以下条件的向量空间 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_n$

$$|\psi\rangle = B_f |\psi\rangle = B_{s_0}^{c_i} |\psi\rangle = P_b |\psi\rangle$$

对所有 $f \in \Gamma_n^F$。H 这是 P_b 边界条件 b 的投影算子，见定义 5.3.3。

定义 5.3.15。 对于任意边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n$，我们令

$$\mathcal{P}_n^{C;ib} := \{\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;i} : b(\alpha) = b\}.$$

引理 5.3.16。 我们有

$$\mathcal{W}_n^{C;ib} := \mathrm{span}\{|\alpha\rangle : \alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}\}.$$

证明：这由 $\mathcal{W}_n^{C;i} =$ 张成$\{|\alpha\rangle : \alpha \in \mathcal{P}_n^{C;i}\}$（引理 5.3.12）、$\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}$当且仅当 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;i}$且 $P_b |\alpha\rangle = |\alpha\rangle$，以及以下事实（引理 5.3.9）：$\{B_f\}_{f \in \Gamma_n^F} \cup \{B_{s_0}^{c_i}, P_b\}$ 是一组对易投影算子。□

引理 5.3.17。 我们有一个不交并

$$\mathcal{P}_n^{C;i} = \bigsqcup_{b \in \mathfrak{B}_n^C} \mathcal{P}_n^{C;ib}$$

以及一个正交分解

$$\mathcal{W}_n^{C;i} = \bigoplus_{b \in \mathfrak{B}_n^C} \mathcal{W}_n^{C;ib}.$$

特别地，若 b 与 C 不相容，则 $\mathcal{P}_n^{C;ib}$ 为空。

证明：要证明第一个结论，只需证明 $\mathcal{P}_n^{C;ib}$在 b 与 C不相容时为空。这由引理 5.B.3 得出。第二个结论则可直接由引理 5.3.16 和引理 5.3.12 得出。□

5.3.6 基准磁通

基准磁通由投影算子 $T_{\nu_n}^g$ 测量，但不受定义空间 $\mathcal{W}_n^{C;ib}$ 的投影算子约束，因此我们可以进一步按照基准磁通对空间 $\mathcal{W}_n^{C;ib}$进行分解。

引理 5.3.18。 对于任意 $C \in (G)^{cj}$、任意 $i = 1$、$\cdots$、$|C|$、任意 $g \in G$，以及任意边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n$，集合

$$\{B_f\}_{f \in \overline{\Gamma}_n^F} \cup \{A_v\}_{v \in \overline{\Gamma}_n^V} \cup \{B_{s_0}^{c_i}, P_b, T_{\nu_n}^g\}$$

是一组对易投影算子。

证明：该

$$\{B_f\}_{f\in\overline{\Gamma}_n^F}\cup\{A_v\}_{v\in\overline{\Gamma}_n^V}\cup\{B_{s_0}^{c_i},\,P_b\}$$

是一组对易投影算子，这由引理5.3.9可知。为证明该引理，我们必须证明 $T_{\nu_n}^g$ 与这组中的所有投影算子对易。由引理 5.A.2 可知，$T_{\nu_n}^g$ 与所有 A_v（对 $v\in\Gamma_n^V$而言）、所有 B_f（对 $f\in\Gamma_n^F$而言）以及 $B_{s_0}^{c_i}$对易。要证明 $T_{\nu_n}^g$与 P_b对易，只需注意到 P_b 支撑于 $\partial\Gamma_n^E$，而 $T_{\nu_n}^g$ 支撑于带 ν_n，其支撑不包含 $\partial\Gamma_n^E$的任何边。□

注意，由引理 5.B.4 可知，对任意 $\alpha\in\mathcal{P}_n^{C;ib}$，都有 $\bar{q}_i\phi_{\nu_n}(\alpha)q_{i(b)}\in N_C$。这启发了下面的定义。

定义 5.3.19。对于任意共轭类 $C\in(G)^{c_j}$、任意 $i=1,\cdots,|C|$、任意边界条件 $b\in\mathfrak{B}_n$ 以及任意 $m\in N_C$，我们令 $\mathcal{W}_n^{C;ib}(m)\subset\mathcal{H}_n$ 为满足以下条件的向量空间 $|\psi\rangle\in\mathcal{H}_n$

$$|\psi\rangle=B_f|\psi\rangle=B_{s_0}^{c_i}|\psi\rangle=P_b|\psi\rangle=T_{\nu_n}^{q_im\bar{q}_{i(b)}}|\psi\rangle$$

对所有 $f\in\mathbb{T}_n^F$。

这些空间同样由具有确定基准磁通的某些弦网态张成。

定义 5.3.20。对于任意 $m\in N_C$ 我们定义

$$\mathcal{P}_n^{C;ib}(m):=\{\alpha\in\mathcal{P}_n^{C;ib}\,:\,\bar{q}_i\phi_{\nu_n}(\alpha)q_{i(b)}=m\}.$$

引理 5.3.21。我们有

$$\mathcal{W}_n^{C;ib}(m)=\mathrm{span}\{|\alpha\rangle\,:\,\alpha\in\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)\}.$$

证明：这由引理5.3.18 以及以下事实得出

$$T_{\nu_n}^g|\alpha\rangle=\delta_{\phi_{\nu_n}(\alpha),g}|\alpha\rangle\,,$$

参见引理5.B.9。 □

5.3.7 在 Γ_n^V 上施加规范不变性

定义 5.3.22. 对于任意共轭类 C、任意 $i=1,\cdots,|C|$、任意边界条件$b\in\mathfrak{B}_n^C$以及任意 $m\in N_C$，我们将满足以下条件的向量空间 $\mathcal{V}_n^{C;ib}(m)\subset\mathcal{H}_n$ 定义为由向量 $|\psi\rangle\in\mathcal{H}_n$ 构成的空间：

$$|\psi\rangle=B_f|\psi\rangle=B_{s_0}^{c_i}|\psi\rangle=P_b|\psi\rangle=T_{\nu_n}^{q_im\bar{q}_{i(b)}}|\psi\rangle=A_v|\psi\rangle$$

对于所有 $f\in\Gamma_n^F$ 和所有 $v\in\mathbb{T}_n^V$。

我们将证明，空间 $\mathcal{V}_n^{C;ib}(m)$ 是一维的。为此，我们引入以下规范变换群。

定义 5.3.23。 我们令 $\mathcal{G}_n := \mathcal{G}[\Gamma_n^V]$ 为 Γ_n^V 上的规范变换群。其所有元素都是如下形式的酉算子:

$$U[\{g_v\}] = \prod_{v \in \overline{\Gamma}_n^V} A_v^{g_v}$$

对于某个 $\{g_v\} \in G^{|\Gamma_n^V|}$。

正如对于规范群 $\mathcal{G}_n$ 的规范群平均，我们有

$$\frac{1}{|\overline{\mathcal{G}}_n|} \sum_{U \in \overline{\mathcal{G}}_n} U = \frac{1}{|G|^{|\overline{\Gamma}_n^V|}} \sum_{\{g_v\} \in G^{|\overline{\Gamma}_n^V|}} \prod_{v \in \overline{\Gamma}_n^V} A_v^{g_v} = \prod_{v \in \overline{\Gamma}_n^V} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g_v \in G} A_v^{g_v} \right) = \prod_{v \in \overline{\Gamma}_n^V} A_v.$$

引理 5.3.24。我们有

$$\mathcal{V}_n^{C;ib}(m) = \left(\frac{1}{|\overline{\mathcal{G}}_n|} \sum_{U \in \overline{\mathcal{G}}_n} U \right) \mathcal{W}_n^{C;ib}(m).$$

证明: 由于 $\frac{1}{|\mathcal{G}_n|} \sum_{U \in \mathcal{G}_n} U = \prod_{v \in \Gamma_n^V} A_v$ 因此只需证明

$$\mathcal{V}_n^{C;ib}(m) = \left(\prod_{v \in \overline{\Gamma}_n^V} A_v \right) \mathcal{W}_n^{C;ib}(m).$$

这直接由定义 5.3.19 和引理 5.3.18得出。 □

现在我们定义单位向量，正如我们将看到的，它们张成空间 $\mathcal{V}_n^{C;ib}(m)$。

定义 5.3.25。 对于所有 $n > 1$、所有共轭类 $C \in (G)^{cj}$、所有标签 $i = 1, \cdots, |C|$、所有边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n^C$以及所有 $m \in N_C$，我们定义单位向量

$$\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle := \frac{1}{\left|\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)\right|^{1/2}} \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m)} |\alpha\rangle .$$

现在我们可以利用这样一个事实来证明: $\mathcal{W}_n^{C;ib}(m)$由满足 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$ 的向量 $|\alpha\rangle$ 张成，并且规范群 $\mathcal{G}_n$ 在 $\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$ 上自由且传递地作用。

引理 5.3.26。 空间 $\mathcal{V}_n^{C;ib}(m) \subset \mathcal{H}_n$ 是一维的，由向量$\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle$张成。特别地，向量 $\left\{ \left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle \right\}_{C,\ i,\ b,\ m}$ 构成一个标准正交族。

证明: 由引理 5.3.21，我们有 $\mathcal{W}_n^{C;ib}(m) = \text{张成}\{|\alpha\rangle : \alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m)\}$。由引理5.3.24，只需证明

$$\sum_{U \in \overline{\mathcal{G}}_n} U |\alpha\rangle \propto \left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle$$

对所有 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$ 。这由引理 5.B.8 直接得出，该引理指出 $\mathcal{G}_n$ 在 $\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$上自由且传递地作用：

$$\sum_{U\in\overline{\mathcal{G}}_n} U\left|\alpha\right\rangle = \sum_{\alpha'\in\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)} \left|\alpha'\right\rangle = \left|\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)\right|^{1/2} \left|\eta_n^{C;ib(m)}\right\rangle .$$

□

5.3.8 对 N_C 在基准磁通和不可约子空间上的作用 S

规范变换 $A_{v_0}^{q_i m \bar{q}_i}$在向量 $\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle$上实现了 N_C 的左群作用 .

引理 5.3.27. 对于任意 $m_1, m_2 \in N_C$， 我们有

$$A_{s_0}^{q_i m_1 \bar{q}_i} \left|\eta_n^{C;ib}(m_2)\right\rangle = \left|\eta_n^{C;ib}(m_1 m_2)\right\rangle .$$

证明：若 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m_2)$，则根据定义 $\phi_{\nu_n}(\alpha) = q_i m_2 \bar{q}_{i(b)}$。规范变换 $A_{s_0}^{q_i m_1 \bar{q}_i}$作用于这样的弦网，得到一个新的弦网 α'对应的 $\left|\alpha'\right\rangle = A_{s_0}^{q_i m_1 \bar{q}_i}\left|\alpha\right\rangle$。由于 $A_{s_0}^{q_i m_1 \bar{q}_i}$与投影算子 $\{B_{s_0}^{c_i}, P_b\} \cup \{B_f\}_{f\in\Gamma_n^F}$对易（引理 5.3.9），且根据引理 5.A.2，我们有 $\phi_{\nu_n}(\alpha') = q_i m_1 m_2 \bar{q}_{i(b)}$，因此可得 $\alpha' \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m_1 m_2)$。由于 $A_{s_0}^{q_i m_2 \bar{q}_i}$在弦网上可逆地作用，我们看到它给出了从 $\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_1)$ 到 $\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_1 m_2)$ 的一个双射。特别地，这些集合具有相同的基数，并且

$$\begin{aligned} A_{s_0}^{q_i m_1 \bar{q}_i} \left|\eta_n^{C;ib}(m_2)\right\rangle &= \frac{1}{\left|\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_2)\right|^{1/2}} \sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_2)} q_i m_1 \bar{q}_i \left|\alpha\right\rangle \\ &= \frac{1}{\left|\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_1 m_2)\right|^{1/2}} \sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_1 m_2)} \left|\alpha\right\rangle \\ &= \left|\eta_n^{C;ib}(m_1 m_2)\right\rangle . \end{aligned}$$

□

由向量张成的空间 $\left\{\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle\right\}_{m\in N_C}$ 因此承载 N_C 的正则表示，其左群作用由规范变换 $A_{s_0}^{q_i m \bar{q}_i}$给出，针对$m \in N_C$，这些变换支撑于格点 s_0 附近。事实证明，该空间还承载 N_C 的自然右作用，该作用由支撑于 Γ_n^E 边界附近的酉算子给出，见引理 5.B.15。

我们可以如下刻画这个空间。定义

定义 5.3.28。 $\mathcal{V}_n^{C;ib} \subset \mathcal{H}_n$ 是由满足以下条件的向量 $\left|\psi\right\rangle \in \mathcal{H}_n$ 构成的子空间

$$\left|\psi\right\rangle = A_v\left|\psi\right\rangle = B_f\left|\psi\right\rangle = B_{s_0}^{c_i}\left|\psi\right\rangle = P_b\left|\psi\right\rangle$$

对所有 $v \in \Gamma_n^V$ 和所有 $f \in \Gamma_n^F$。

Then

引理 5.3.29。

$$\mathcal{V}_n^{C;ib} = \bigoplus_{m\in N_C} \mathcal{V}_n^{C;ib}(m) = \mathrm{span}\{\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle \,:\, m\in N_C\}.$$

证明：空间 $\mathcal{V}_n^{C;ib}(m)$由与空间 $\mathcal{V}_n^{C;ib}$相同的约束定义，此外还满足基准磁通上的约束 $T_{\nu_n}^{q_i m \bar{q}_{i(b)}}$（定义5.3.22 和5.3.28）。

由于 $\mathcal{V}_n^{C;ib} \subset \mathcal{W}_n^{C;ib}$（参见定义5.3.14）由向量 $|\alpha\rangle$张成，其中 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}$（引理5.3.16）满足 $q_i\phi_{\nu_n}(\alpha)\bar{q}_{i(b)} \in N_C$（引理5.B.4），我们有（利用引理5.B.9）$\sum_{m\in N_C} T_{\nu_n}^{q_i m\bar{q}_{i(b)}} |\phi\rangle = |\phi\rangle$ 对所有 $|\phi\rangle \in \mathcal{V}_n^{C;ib}$均成立。

利用引理5.3.18，可得：

$$\mathcal{V}_n^{C;ib} = \sum_{m\in N_C} T_{\nu_n}^{q_i m\bar{q}_{i(b)}} \mathcal{V}_n^{C;ib} = \bigoplus_{m\in N_C} \mathcal{V}_n^{C;ib}(m)$$

如所需。

The 现在，断言中的第二个等式可由引理 5.3.26立即得出 . □

由于 $\mathcal{V}_n^{C;ib}$承载着 N_C的正则表示，我们可以构造 $\mathcal{V}_n^{C;ib}$的一个标准正交基，使其与 $\mathcal{V}_n^{C;ib}$的不可约子空间相适应，并同时适用于 N_C的左作用和右作用。

定义 5.3.30。对于任意共轭类 $C \in (G)_{cj}$、任意不可约表示 $R \in (N_C)_{irr}$、任意标签 $u = (i,j) \in I_{RC}$、任意边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n^C$，以及任意标签 $j' = 1,\cdots,\dim R$，并记 $v = (b,j')$，我们定义一个向量

$$\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle := \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{1/2} \sum_{m\in N_C} R^{jj'}(m)^* \left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle .$$

我们将用 $I'_{RC} := \mathfrak{B}_n^C \times \{1,\cdots,\dim R\}$ 表示标签 $v = (b,j')$ 的可能取值 .

引理 5.3.31。向量 $\{\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle\}$ 构成一个标准正交族，即

$$\langle \eta_n^{R_1C_1;u_1v_1}, \eta_n^{R_2C_2;u_2v_2}\rangle = \delta_{R_1C_1,R_2C_2}\delta_{u_1,u_2}\delta_{v_1,v_2}.$$

证明：令 $u_1 = (i_1,\ j_1)$、$u_2 = (i_2,\ j_2)$、$v_1 = (b_1,\ j'_1)$ 和 $v_2 = (b_2,\ j'_2)$。则

$$\langle \eta_n^{R_1C_1;u_1v_1}, \eta_n^{R_2C_2;u_2v_2}\rangle = \frac{(\dim(R_1)\dim(R_2))^{1/2}}{|N_{C_1}|}\,\delta_{C_1,C_2}\,\delta_{i_1,i_2}\delta_{b_1,b_2} \sum_{m\in N_{C_1}} R_1^{j_1j'_1}(m)\, R_2^{j_2j'_2}(m)^*$$

其中我们用到了向量 $\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle$ 是标准正交的（引理 5.3.26）。现在利用舒尔正交关系（5.18）即可得到所需结果。□

$\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle$ 实际上是通过对态 $\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle$施加酉旋转得到的，并且该旋转可以逆转。

引理 5.3.32。对于所有 $C\in(G)_{cj}$、所有 $i=1$、$\cdots$、$|C|$、所有 $b\in\mathfrak{B}_n^C$以及所有 $m\in N_C$，有

$$\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle=\sum_{R\in(N_C)_{irr}}\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{1/2}\sum_{j,j'}R^{jj'}(m)\left|\eta_n^{RC;(i,j)(b,j')}\right\rangle.$$

证明：我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{R\in(N_C)_{irr}}\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{1/2}\sum_{j,j'}R^{jj'}(m)\left|\eta_n^{RC;(i,j)(b,j')}\right\rangle\\
&\quad=\sum_{R\in(N_C)_{irr}}\frac{\dim R}{|N_C|}\sum_{j,j'}\sum_{m'\in N_C}R^{jj'}(m)R^{jj'}(m')^*\left|\eta_n^{C;ib}(m')\right\rangle\\
&\quad=\sum_{R\in(N_C)_{irr}}\frac{1}{|N_C|}\sum_{m'\in N_C}\chi_R(m\bar{m}')\chi_R(1)^*\left|\eta_n^{C;ib}(m')\right\rangle\\
&\quad=\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle
\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\chi_R(1)$ = 维数R 以及不可约特征标的舒尔正交关系（5.19）。□

5.3.9 对空间 $\mathcal{V}_n$、$\mathcal{V}_n^{RC}$ 和 $\mathcal{V}^{RC}{}_{;n}{}^{u}$ 的刻画

现在我们可以用向量 $\mathcal{V}_n$、$\mathcal{V}_n^{RC}$和 $\overline{\mathcal{V}}_n^{RC;u}$来描述定义 5.3.8 中的空间 $\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle$。

命题 5.3.33。我们有

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{V}_n}&=\mathrm{span}\{\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle:C\in(G)_{cj},R\in(N_C)_{irr},u\in I_{RC},v\in I'_{RC}\},\\
\mathcal{V}_n^{RC}&=\mathrm{span}\{\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle:u\in I_{RC},v\in I'_{RC}\},\\
\mathcal{V}_n^{RC;u}&=\mathrm{span}\{\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle:v\in I'_{RC}\}.
\end{aligned}$$

证明：我们首先注意到，由引理5.3.17、定义 5.3.14和引理5.3.9 可得

$$B_{s_0}^{c_i}\left(\prod_{f\in\overline{\Gamma}_n^F}B_f\right)P_b=0$$

每当 $b\in\mathfrak{B}_n$ C $\sum_{C\,i}B_{s_0}^{c_i}=\sum_{b\in\mathfrak{B}_n}P_b=$ $\mathbb{1}$ 5.3.9 与.....不相容时。利用这一点，以及和引理..，我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{V}_n}&=\left(\prod_{v\in\overline{\Gamma}_n^V}A_v\prod_{f\in\overline{\Gamma}_n^F}B_f\right)\mathcal{H}_n=\sum_{C\in(G)_{cj}}\sum_{i=1}^{|C|}\sum_{b\in\mathfrak{B}_n}\left(\prod_{v\in\overline{\Gamma}_n^V}A_v\right)B_{s_0}^{c_i}\left(\prod_{f\in\overline{\Gamma}_n^F}B_f\right)P_b\,\mathcal{H}_n\\
&=\sum_{C\in(G)_{cj}}\sum_{i=1}^{|C|}\sum_{b\in\mathfrak{B}_n^C}\left(\prod_{v\in\overline{\Gamma}_n^V}A_v\right)B_{s_0}^{c_i}\left(\prod_{f\in\overline{\Gamma}_n^F}B_f\right)P_b\,\mathcal{H}_n\\
&=\bigoplus_{C\in(G)_{cj}}\bigoplus_{i=1}^{|C|}\bigoplus_{b\in\mathfrak{B}_n^C}\mathcal{V}_n^{C;ib},
\end{aligned}$$

这里用到了5.3.28 关于空间 $\mathcal{V}_n^{C;ib}$的定义。由引理5.3.29可得

$$\overline{\mathcal{V}_n} = \mathrm{span}\{\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle : C \in (G)_{cj}, i = 1, \cdots, |C|, b \in \mathfrak{B}_n^C, m \in N_C\}.$$

Tog以及定义5.3.30 和引理5.3.32 这就得到了第一个断言 m.

为证明第二个断言，我们注意到 $\mathcal{V}_n^{RC} = D_{s_0}^{RC}\mathcal{V}_n$；对于任意 C_1、$C_2 \in (G)_{cj}$、$R_1 \in (N_{C_1})_{irr}$、$R_2 \in (N_{C_2})_{irr}$、$u = (i,j) \in I_{R_2C_2}$ 以及 $v = (b,j') \in I'_{R_2C_2}$，我们有（引理 5.B.13）

$$D_{s_0}^{R_1C_1}\left|\eta_n^{R_2C_2;uv}\right\rangle = \delta_{R_1C_1,R_2C_2}\left|\eta_n^{R_2C_2;uv}\right\rangle.$$

命题的第二个断言由以下事实得到：$\mathcal{V}_n$ 由向量 $\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle$ 张成，其中 $R\overline{C}$ 和 $u \in I_{RC}$、$v \in I'_{RC}$ 任意。

为证明最后一个断言，我们注意到有 $\mathcal{V}_n^{RC;u} = D_{s_0}^{RC;u}\mathcal{V}_n^{RC}$；对于任意 u_1，$u_2 \in I_{RC}$以及任意 $v \in I'_{RC}$，我们有（引理5.B.14）

$$D_{s_0}^{RC;u_1}\left|\eta_n^{RC;u_2v}\right\rangle = \delta_{u_1,u_2}\left|\eta_n^{RC;u_2v}\right\rangle.$$

最终的结论由以下事实得出：$\mathcal{V}_n^{RC}$由向量 $\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle$（$u \in I_{RC}$ 和 $v \in I'_{RC}$）张成。□

5.3.10 体区与边界条件无关 s

我们定义以下算子

定义 5.3.34。对于任意格点 s、任意 n、任意 $u_1 = (i_1, j_1)$ $u_2 = (i_2, j_2) \in I_{RC}$，以及任意 $v_1 = (b_1, j'_1)$ $v_2 = (b_2, j'_2) \in I'_{RC}$，我们定义

$$A_s^{RC;u_2u_1} := \frac{\dim R}{|N_C|}\sum_{m\in N_C} R^{j_2j_1}(m)^* A_s^{q_{i_2}m\overline{q}_{i_1}},$$

$$\tilde{A}_n^{RC;v_2v_1} := \frac{\dim R}{|N_C|}\sum_{m\in N_C} R^{j'_2j'_1}(m)U_{b_2b_1}L_{\beta_n}^{q_{i(b_1)}\overline{m}\,\overline{q}_{i(b_1)}}$$

其中 β_n 是边界带，$U_{b_2b_1}$ 是引理 5.B.7给出的边界幺正算子，我们选择它使得 $U_{b_2b_1} = U^*_{b_1b_2}$。这些边界幺正算子满足以下性质：对于任意 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib_1}$，有 $U_{b_2b_1}|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ 其中 $\alpha' \in \mathcal{P}_n^{C;ib_2}$，且 $\alpha'_e = \alpha_e$ 对所有 $e \in \Gamma_{n-1}^E$ 和$b(\alpha') = b_2$。

注意，$\tilde{A}_n^{RC;v_2v_1}$支撑于 $\Gamma_n^E \setminus \Gamma_{n-1}^E$ 且 $A_{s_0}^{RC;u_2u_1}$支撑于 Γ_1^E。由引理5.B.16 可知，对于任意 u，u_1，$u_2 \in I_{RC}$ 以及任意 v，v_1，$v_2 \in I'_{RC}$有

$$A_{s_0}^{RC;u_2u_1}\left|\eta_n^{RC;u_1v}\right\rangle = \left|\eta_n^{RC;u_2v}\right\rangle, \qquad \tilde{A}_n^{RC;v_2v_1}\left|\eta_n^{RC;uv_1}\right\rangle = \left|\eta_n^{RC;u,v_2}\right\rangle$$

以及

$$(A_{s_0}^{RC;u_1u_2})^*\left|\eta_n^{RC;u_1v}\right\rangle = \left|\eta_n^{RC;u_2v}\right\rangle, \qquad (\tilde{A}_n^{RC;v_1v_2})^*\left|\eta_n^{RC;uv_1}\right\rangle = \left|\eta_n^{RC;u,v_2}\right\rangle$$

也就是说，这些算子作用于态 $\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle$时，会改变标签 u 和 v。我们可以利用这些“标签变换算子”来证明，在态 $\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle$ 中，支撑于 Γ_{n-1}^E 上的算子的期望值与边界标签 v无关。

引理 5.3.35. 对于所有 $O \in \mathcal{A}_{\Gamma^E_{n-1}}$、所有 u、$u' \in I_{RC}$，以及所有 v、v'、$v'' \in I'_{RC}$，我们有

$$\langle \eta_n^{uv}, O\eta_n^{u'v'}\rangle = \delta_{vv'}\langle \eta_n^{u'v''}, O\,\eta_n^{u'v''}\rangle.$$

特别地，$\langle \eta_n^{RC;uv}, O\,\eta_n^{RC;uv}\rangle$ 与 v无关。

证明：利用引理 5.B.16 以及任意 $O \in \mathcal{A}_{\Gamma^E_{n-1}}$ 都与 $\tilde{A}_n^{RC;vv'}$ 对易这一事实，我们发现，若 $v=(b,j)$ 和 $v'=(b',j')$ 则有

$$\begin{aligned}\langle \eta_n^{uv}, O\eta_n^{u'v'}\rangle &= \langle \eta_n^{uv}, P_b O P_{b'}\eta_n^{u'v'}\rangle = \delta_{bb'}\langle \eta_n^{uv}, O\eta_n^{u'v'}\rangle \\ &= \langle \eta_n^{RC;uv''}, O\,(\tilde{A}_n^{RC;vv''})^*\tilde{A}_n^{RC;v'v''}\eta_n^{RC;u'v''}\rangle = \delta_{vv'}\langle \eta_n^{u'v''}, O\,\eta_n^{u'v''}\rangle,\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们用到了如下事实：若 v, v' 具有相同的边界 b，则根据引理 5.B.17, $(\tilde{A}_n^{RC;v'v''})^*\tilde{A}_n^{RC;vv''}\left|\eta_n^{RC;u'v''}\right\rangle = \delta_{vv'}\left|\eta_n^{RC;u'v''}\right\rangle$。□

这个引理表明，以下定义是良定义的。

定义 5.3.36。 对于任意 n，我们定义作用在 $\mathcal{A}_{\Gamma^E_n}$ 上的态 $\eta_n^{RC;u}$为

$$\eta_n^{RC;u}(O) := \langle \eta_{n+1}^{RC;uv}, O\,\eta_{n+1}^{RC;uv}\rangle$$

对于任意 $O \in \mathcal{A}_{\Gamma^E_n}$ 以及任意边界标签 v。由于引理5.3.35，边界标签的选择并不重要。

5.3.11 Co态 $\omega_{s_0}^{RC;u}$的构造及其纯性的证明 y

以下基本引理将在全文中发挥作用。

引理 5.3.37. 设 $\omega = \sum_\kappa \lambda_\kappa \omega^{(\kappa)}$ 是 $\mathcal{A}_{\Gamma^E_n}$ 上的一个态，可表示为纯态 $\omega^{(\kappa)}$ 的有限凸组合，且系数 $\lambda_\kappa > 0$均为正。若 $P \in \mathcal{A}_{\Gamma^E_n}$ 是一个投影算子，且 $\omega(P) = 1$，则对于所有 κ，都有 $\omega^{(\kappa)}(P) = 1$。

此外，若 $\left|\Omega^{(\kappa)}\right\rangle \in \mathcal{H}_n$ 是一个单位向量，满足 $\omega^{(\kappa)}(O) = \langle\Omega^{(\kappa)}$，且对于所有 $O \in \mathcal{A}_{\Gamma^E_n}$，都有 $O\,\Omega^{(\kappa)}\rangle$，则 $P\left|\Omega^{(\kappa)}\right\rangle = \left|\Omega^{(\kappa)}\right\rangle$。

证明：由于 $\omega^{(\kappa)}(P) \le 1$，且正数 $\lambda_\kappa > 0$ 之和为一，等式

$$1 = \omega(P) = \sum_\kappa \lambda_\kappa \omega^{(\kappa)}(P)$$

只有在对所有 κ，$\omega^{(\kappa)}(P) = 1$时才能成立。若 $\omega^{(\kappa)}(\cdot) = \langle\Omega^{(\kappa)}, \cdot\,\Omega^{(\kappa)}\rangle$ 对于单位向量 $\left|\Omega^{(\kappa)}\right\rangle \in \mathcal{H}_n$，则特别有

$$1 = \omega^{(\kappa)}(P) = \langle\Omega^{(\kappa)}, P\,\Omega^{(\kappa)}\rangle.$$

由于 P是一个正交投影算子，这意味着 $P\left|\Omega^{(\kappa)}\right\rangle = \left|\Omega^{(\kappa)}\right\rangle$。□

我们定义 $\mathcal{A}_{\Gamma^E_n}$ 上的以下态集。

定义 5.3.38。 集合 $\mathcal{S}_n^{RC;u}$由 $\mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$ 上满足以下条件的态 ω 组成

$$1 = \omega(D_{s_0}^{RC;u}) = \omega(A_v) = \omega(B_f)$$

对于所有 $v \in \Gamma_n^V$ 和所有 $f \in \mp_n^F$。

引理 5.3.39。 设 $1 \leq m < n$。若 $\omega \in \mathcal{S}_n^{RC;u}$，且 ω_m 是其在 $\mathcal{A}_{\Gamma_m^E}$ 上的限制，则 $\omega_m = \eta_m^{RC;u}$。

证明：设 ω_{m+1} 是 ω 在 $\mathcal{A}_{\Gamma_{m+1}^E}$上的限制，则 $\omega_{m+1} \in \mathcal{S}_{m+1}^{RC;u}$。设 $\omega_{m+1} = \sum_\kappa \lambda_\kappa \omega_{m+1}^{(\kappa)}$ 是将 ω_{m+1} 分解为有限个纯分量 $\omega_{m+1}^{(\kappa)}$。设 $\left|\Omega_{m+1}^{(\kappa)}\right\rangle \in \mathcal{H}_{m+1}$ 是与这些纯态对应的单位向量。由引理5.3.37 可得

$$A_v \left|\Omega_{m+1}^{(\kappa)}\right\rangle = B_f \left|\Omega_{m+1}^{(\kappa)}\right\rangle = D_{s_0}^{RC;u} \left|\Omega_{m+1}^{(\kappa)}\right\rangle = \left|\Omega_{m+1}^{(\kappa)}\right\rangle$$

对于所有 κ、所有 $v \in \Gamma_{m+1}^V$以及所有 $f \in \Gamma_{m+1}^F$。根据定义 5.3.8，这意味着 $\left|\Omega_{m+1}^{(\kappa)}\right\rangle \in \mathcal{V}_{m+1}^{RC;u}$ 对于所有 κ。由命题 5.3.33 可知，单位向量 $\left|\Omega_{m+1}^{(\kappa)}\right\rangle$ 是 $|\eta_{m+1}^{RC;uv}\rangle$ 的线性组合，其中 $v \in I'_{RC}$。利用引理 5.3.35 和定义 5.3.36，于是对于任意 $O \in \Gamma_m^E$

$$\omega_{m+1}^{(\kappa)}(O) = \langle \Omega_{m+1}^{(\kappa)}, O\, \Omega_{m+1}^{(\kappa)} \rangle = \eta_m^{RC;u}(O)$$

独立于 κ。断言得证。 □

我们定义将这些态 $\eta_n^{RC;u}$延拓到整个可观测代数的扩张。

定义 5.3.40. 令 $\tilde{\eta}_n^{RC;u}$为将 $\eta_n^{RC;u}$延拓到整个可观测代数的如下扩张。对于每个 $e \in \Gamma^E$，令 ζ_e 为 $\mathcal{A}_e$ 上与向量 $|1_e\rangle \in \mathcal{H}_e$对应的纯态，并令

$$\tilde{\eta}_n^{RC;u} := \eta_n^{RC;u} \otimes \left(\bigotimes_{e \in \Gamma^E \setminus \Gamma_n^E} \zeta_e \right).$$

回忆定义$\mathcal{S}_{s_0}^{RC;u}$中的态空间 5.3.7。

引理 5.3.41. 态的序列 $\tilde{\eta}_n^{RC;u}$在弱-* 拓扑下收敛到一个态$\omega_{s_0}^{RC;u} \in \mathcal{S}_{s_0}^{RC;u}$。

证明：如果 $O \in \mathcal{A}_{\Gamma_m^E}$，那么根据构造，对于所有 $n > m$，$\tilde{\eta}_n^{RC;u}(O) = \eta_n^{RC;u}(O)$。由于 $\eta_n^{RC;u} \in \mathcal{S}_n^{RC;u}$，由引理 5.3.39 可得 $\tilde{\eta}_n^{RC;u}|_m = \eta_m^{RC;u}$。因此，对于所有 $n > m$，$\tilde{\eta}_n^{RC;u}(O)$ 为常数，因而收敛。由于 m 是任意选取的，对于任意局域可观测量 $O \in \mathcal{A}_{loc}$，$\tilde{\eta}_n^{RC;u}$ 都收敛。由于 $\mathcal{A}_{loc}$ 在 $\mathcal{A}$ 中稠密，态 $\omega_n^{RC;u}$ 在弱 -* 拓扑下收敛到某个满足约束条件 (5.2) 和 (5.4) 的态 $\omega_{s_0}^{RC;u}$，即 $\omega_{s_0}^{RC;u} \in \mathcal{S}_{s_0}^{RC;u}$。□

引理 5.3.42。 $\omega_{s_0}^{RC;u}$ 是 $\mathcal{S}_{s_0}^{RC;u}$ 中唯一的态。因此，它是一个纯态。

证明：考虑任意另一个态 $\omega' \in \mathcal{S}_{s_0}^{RC;u}$。那么它在 ω'_n 上的 $\mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$ 限制是 $\mathcal{S}_n^{RC;u}$中的一个态。根据引理 5.3.39，我们有 $\omega'(O) = \omega'_n(O) = \eta_m^{RC;u}(O) = \omega_n^{RC;u}(O)$，对所有 $m < n$以及所有 $O \in \mathcal{A}_{\Gamma_m^E}$均成立。因此， ω' 在所有局域可观测量上都与 $\omega_{s_0}^{RC;u}$一致，故必定是同一个态。

为了说明这意味着 $\omega_{s_0}^{RC;u}$是纯的，假设 $\omega_{s_0}^{RC;u} = \lambda\omega' + (1-\lambda)\omega''$ 可以写成态 ω' 和 ω''的凸组合。那么对任意 $v \in \Gamma^V$，我们有 $1 = \omega_0(A_v) = \lambda\omega'(A_v) + (1-\lambda)\omega''(A_v)$。由于 A_v是投影算子，我们有 $|\omega'(A_v)|, |\omega''(A_v)| \leq 1$，因此，只有当 $1 = \omega'(A_v) = \omega''(A_v)$时，前一个等式才可能成立。同理，$1 \equiv \omega'(B_f) = \omega''(B_f)$对所有 $f \in \Gamma^F$均成立；对投影算子 $D_{s_0}^{RC;u}$ 也有类似结论。由此可知， ω' 和 ω'' 都属于 $\mathcal{S}_{s_0}^{RC;u}$，因此都等于 $\omega_{s_0}^{RC;u}$。所以 $\omega_{s_0}^{RC;u}$是纯的。□

由于格点 s_0 是任意的，我们特别证明了

命题 5.3.43。 对于任意格点 s_0、任意不可约表示 RC 在 $\mathcal{D}(G)$以及任意标签 u，定义 $\mathcal{S}_{s_0}^{RC;u}$*5.3.7*中的态空间只包含一个纯态 $\omega_{s_0}^{RC;u}$。

5.4 任意子表示的构造

在本节中，我们将证明，只要 $\omega^{R_1C_1;\ s_1\ \ u_1}$，$\omega^{R_2C_2;\ s_2\ \ u_2}$，上一节构造的纯态彼此等价。对于固定的 $R_1C_1 = R_2C_2$，纯态集合$\{\omega_s^{RC;u}\}_{s,\ u}$ 因此属于同一个可观测代数的不可约表示 RC π^{RC}。我们将证明这些不可约表示 $\{\pi^{RC}\}_{RC}$ 两两不相交。换言之，我们将证明不同的 RC 标签对应不同的超选择扇区。最后，我们将通过将这些表示 π^{RC} 与所谓的 [Naa15] 的放大态射表示联系起来，证明它们是任意子表示。

5.4.1 带状算子及其极限映射

从此处开始，带状算子 在第5.3.1节中引入的带状算子将在分析中发挥越来越重要的作用。通过对这些带状算子取某些线性组合，我们构造出新的带状算子，它们能够在无挫折基态之上产生、输运并探测任意子激发。

回顾第5.3.1节，我们可以为任意有限带 ρ关联一些带状算子 $F^{h,\ g}_{\ \rho}$。这些带状算子的下列线性组合经过专门设计，使其作用于基态时，能够产生处于 ρ 端点处量子双代数作用的不可约表示中的激发。

定义 5.4.1 ([BMD07])。 对于量子双的每个不可约表示 RC 我们定义

$$F_\rho^{RC;uv} := \frac{\dim R}{|N_C|} \sum_{m \in N_C} R^{jj'}(m)^* F_\rho^{\bar{c}_i, q_i m \bar{q}_{i'}}$$

其中 $u=(i,\ j)\in I_{RC}$和 $v=(i',\ j')\in I_{RC}$。

定义 5.4.2 ([Naa12b], [Naa15])。 对于任意有限带 ρ、任意 RC以及任意 $u_1,\ u_2\in I_{RC}$我们定义一个从 $\mathcal{A}$ 到其自身的线性映射如下:

$$\mu_\rho^{RC;u_1u_2}(O):=\left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^2\sum_v\left(F_\rho^{RC;u_1v}\right)^*O\,F_\rho^{RC;u_2v}$$

对于任意 $O\in\mathcal{A}$。

我们将半无限带定义为满足以下条件的三角形序列 $\rho=\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$: 对所有 $i\in\mathbb{N}$，都有$\partial_1\tau_i=\partial_0\tau_{i+1}$ ；并且对于每条边 $e\in\Gamma^E$，至多存在一个三角形τ_i使得 $\tau_i=(\partial_0\tau_i,\ \partial_1\tau_i,\ e)$。我们用 $\partial_0\rho=\partial_0\tau_1$表示该半无限带的初始点，用 $\rho_n=\{\tau_i\}_{i=1}^n$ 表示由 ρ的前 n 个三角形构成的有限带。若半无限带的所有三角形均为正，则称其为正半无限带；若所有三角形均为反向，则称其为反向半无限带。任意半无限带必为正半无限带或反向半无限带。

以下命题由 [Naa15] 提出，说明我们可以将 $\mu_\rho^{RC;u_1u_2}$定义为 $\mu_{\rho_n}^{RC;u_1u_2}$的极限，并陈述了这些极限映射的一些性质。

命题 5.4.3 （ [Naa15]中的引理 5.2）。 设 ρ 是一条半无限带。极限

$$\mu_\rho^{RC;u_1u_2}(O):=\lim_{n\to\infty}\mu_{\rho_n}^{RC;u_1u_2}(O)$$

对所有 $O\in\mathcal{A}$和所有 $u_1,u_2\in I_{RC}$均存在，并定义了一个从 $\mathcal{A}$ 映射到其自身的线性映射。此外，映射 $\mu_\rho^{RC;uu}$是正的，并且

1. 若 $O\in\mathcal{A}_{loc}$，则存在一个有限的 n_0，使得 $\mu_\rho^{RC;u_1u_2}(O)=\mu_{\rho_n}^{RC;u_1u_2}(O)$ 对所有 $n\geq n_0$均成立，
2. $\mu_\rho^{RC;u_1u_2}(\mathbb{1})=\delta_{u_1,u_2}\mathbb{1}$.
3. $\mu_\rho^{RC;u_1u_2}(O^*)=\mu_\rho^{RC;u_2u_1}(O)^*$.
4. 若 O 的支撑与 ρ 的支撑不相交，则 $\mu_\rho^{RC;u_1u_2}(O)=\delta_{u_1,u_2}O$.
5. $\mu_\rho^{RC;u_1u_2}(O)=\sum_{u_3\in I_{RC}}\mu_\rho^{RC;u_1u_3}(\mathbb{1})\mu_\rho^{RC;u_3u_2}(O)$.

证明: 唯一不能直接由 [Naa15] 的引理 5.2 得出的结论，是映射 $\mu_\rho^{RC;uu}$为正。为此，只需注意，对于任意 $O\in\mathcal{A}$ 并使用第 4 和第 5 项，我们有

$$\mu_\rho^{RC;uu}(O^*O)=\sum_v\mu_\rho^{vu}(O)^*\,\mu_\rho^{vu}(O)\geq 0.$$

□

设 ω_0 为无挫折基态，其 GNS 三元组为 $(\pi_0,\ \mathcal{H}_0,\ |\Omega_0\rangle)$。我们记作$\chi_\rho^{RC;uv}:=\pi_0\circ\mu_\rho^{RC;uv}:\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$。

引理 5.4.4. 设 ρ 为半无限带，且对任意格点 s_0有 $\partial_0\rho = s_0$ 。对于任意 RC和任意 $u \in I_{RC}$，我们有

$$\omega_{s_0}^{RC;u} = \omega_0 \circ \mu_\rho^{RC;uu}.$$

证明： $\omega_0 \circ \mu_\rho^{RC;uu}$由命题5.4.3可知是正线性泛函。根据命题5.4.3的第 2 项，归一化条件成立。

由于 $\omega_{s_0}^{RC;u}$由以下条件完全刻画：

$$1 = \omega_{s_0}^{RC;u}(A_v) = \omega_{s_0}^{RC;u}(B_f) = \omega_{s_0}^{RC;u}(D_{s_0}^{RC;u})$$

对所有 $v \in \Gamma^V$ 和所有 $f \in \Gamma^F$ （命题5.3.43），因此只需证明 $\omega_0 \circ \mu_\rho^{RC;uu}$也满足这些约束。

由于对于任意可观测量 $O \in \mathcal{A}$，我们有

$$(\omega_0 \circ \mu_\rho^{RC;uu})(O) = \langle \Omega_0, \chi_\rho^{RC;uu}(O)\,\Omega_0 \rangle,$$

这可由引理5.A.24 和5.A.25立即得出。 □

引理 5.4.5。对于任意两个格点 s、 s'，任意 RC 以及任意两个标签 u、 $u' \in I_{RC}$，存在一个局部算子 $T \in \mathcal{A}_{loc}$ ， 使得

$$\omega_{s'}^{RC;u'}(O) = \omega_s^{RC;u}(TOT^*)$$

对所有 $O \in \mathcal{A}$.

证明： 设 ρ 是一个半无限带，满足 $\partial_0\rho = s$，且半无限子带 ρ'满足 $\partial_0\rho' = s'$。则 $\rho = \rho_1\rho'$ 对于一个有限带 ρ_1。设 $O \in \mathcal{A}$。利用引理 5.4.4 ，现在计算

$$\begin{aligned}
\omega_s^{RC;u}(O) &= (\omega_0 \circ \mu_\rho^{RC;uu})(O) \\
&= \lim_{n\uparrow\infty} \left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^2 \langle \Omega_0, \sum_v (F_{\rho_1\rho'_n}^{RC;uv})^*\, O\, F_{\rho_1\rho'_n}^{RC;uv}\, \Omega_0 \rangle
\end{aligned}$$

利用引理 5.A.16

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^4 \sum_{v,w_1,w_2} \langle \Omega_0, (F_{\rho'_n}^{RC;w_1v})^* (F_{\rho_1}^{RC;uw_1})^*\, O\, F_{\rho_1}^{RC;uw_2}\, F_{\rho'_n}^{RC;w_2v}\, \Omega_0 \rangle$$

然后利用引理5.A.20

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\uparrow\infty} \left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^4 \sum_{v,w_1,w_2} \langle \Omega_0, (F_{\rho'_n}^{RC;u'v})^* (A_{s'}^{RC;w_1u'})^* (F_{\rho_1}^{RC;uw_1})^* \\
&\qquad\qquad \times\, O\, F_{\rho_1}^{RC;uw_2}\, A_{s'}^{RC;w_2u'}\, F_{\rho'_n}^{RC;u'v}\, \Omega_0 \rangle \\
&= (\omega_0 \circ \mu_{\rho'}^{RC;u'u'}) \left(\left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^2 \sum_{w_1,w_2} (A_{s'}^{RC;w_1u'})^* (F_{\rho_1}^{RC;uw_1})^*\, O\, F_{\rho_1}^{RC;uw_2}\, A_{s'}^{RC;w_2u'} \right)
\end{aligned}$$

由此证明了该结论，其中

$$T = \left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right) \sum_w (A_{s'}^{RC;wu'})^* (F_{\rho_1}^{RC;uw})^*.$$

□

5.4.2 由 RC 标记的任意子表示

我们定义以下 GNS 表示。

定义 5.4.6。 固定一个格点 s_0。对于每个 RC，令 $(\pi^{RC},\ \mathcal{H}^{RC},\ \left|\Omega_{s_0}^{RC;(1,1)}\right\rangle)$ 为纯态 $\omega_{s_0}^{RC;(1,1)}$ 对应的 GNS 三元组。

注意，$\omega^{1,\ C_1;\ (1,\ 1)s_0} = \omega_0$ 是无挫折基态，因此 $\pi^{1,\ C_1} = \pi_0$ 是基态表示。

本节将证明，表示 $\{\pi^{RC}\}_{RC}$ 是相对于基态表示 π_0而言两两不相交的任意子表示。在 5.5 节中，我们将证明任意任意子表示都与某个 π^{RC} 酉等价。

定义 5.4.7。 若存在一个密度算子 $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得……，则称态 ψ 属于可观测代数的表示 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

$$\psi(O) = \mathrm{Tr}\{\rho\pi(O)\}$$

对所有 $O \in \mathcal{A}$ （在算子代数文献中，这一概念称为 π-正规 ）。若ψ 是纯态且属于不可约表示 π，则相应的密度算子是秩一投影算子，即 ψ 在表示 π中有一个向量代表。在这种情形下，我们称 ψ 是 π的向量态。反过来，若 ψ 属于表示 π，则称 π 包含 态 ψ。

我们首先指出，表示 π^{RC} 包含所有纯态$\{\omega_s^{RC;u}\}_{s,\ u}$。由于$\pi_{RC}$ 是不可约的，因此所有这些态彼此等价。

引理 5.4.8。 对于所有格点 s 以及所有 $u \in I_{RC}$，纯态 $\omega_s^{RC;u}$都是 π^{RC} 的向量态 .

证明：这直接由引理5.4.5得出。 □

我们为态 $\omega_s^{RC;(1,1)}$选取如下向量代表。

定义 5.4.9。 对于所有格点 $s \neq s_0$，我们选择单位向量 $\left|\Omega_s^{RC;(1,1)}\right\rangle \in \mathcal{H}^{RC}$，使得

$$\omega_s^{RC;(1,1)}(O) = \langle \Omega_s^{RC;(1,1)}, \pi^{RC}(O)\,\Omega_s^{RC;(1,1)} \rangle$$

对于所有 $O \in \mathcal{A}$。此类向量由引理5.4.8保证存在（注意，对应格点 $\left|\Omega_{s_0}^{RC;(1,1)}\right\rangle$ 的向量 s_0 已在定义 5.4.6中固定。）

5.4.3 表示的互不相交性 π^{RC}

我们证明，当 π^{RC} 和 $\pi^{R'C'}$ 满足 $RC \neq R'C'$时，它们不相交。首先，我们来证明以下基本引理，该引理归功于 [AFH07]。

引理 5.4.10。 设 ω 是 $\mathcal{A}$ 上的一个态，$P \in \mathcal{A}$ 是满足$\omega(P) = 1$的正交投影算子。那么，对于所有 $O \in \mathcal{A}$，$\omega(PO) = \omega(OP) = \omega(O)$ 。

证明： 利用柯西-施瓦茨不等式，

$$|\omega(O-PO)|^2=|\omega(O(\mathbb{1}-P)(\mathbb{1}-P))|^2\leq\omega(O(\mathbb{1}-P)O^*)\omega(\mathbb{1}-P)=0$$

这表明 $\omega(O)=\omega(PO)$。等式 $\omega(O)=\omega(OP)$ 也可以用同样的方法得到。 □

定义 5.4.11。 ([BMD07，公式 (B75)]) 对于任意闭合带状图 σ 我们定义

$$K_\sigma^{RC}:=\frac{\dim R}{|N_C|}\sum_{m\in N_C}\chi_R(m)^*\sum_{q\in Q_C}F_\sigma^{qm\bar{q},qr_C\bar{q}}.$$

引理 5.4.12。 如果 $\omega\in\mathcal{S}_{s_0}^-$，则 $\omega(OD_{s_0}^{RC})=\omega(OK_{\beta_n}^{RC})=\omega(D_{s_0}^{RC}O)=\omega(K_{\beta_n}^{RC}O)$ 对所有 RC、所有 $n>1$ 以及所有 $O\in\mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$ 都成立。事实上，$\omega(OD_{s_0}^{RC})=\omega(D_{s_0}^{RC}O)$ 对所有 $O\in\mathcal{A}$ 都成立。

证明： ω 对 $\mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$ 的限制 ω_n 满足

$$1=\omega_n(A_v)=\omega_n(B_f)$$

对所有 $v\in\Gamma_n^V$ 以及所有 $f\in\Gamma_n^F$ 都成立。设 ω_n 分解为其纯分量 $\omega_n^{(\kappa)}$ 的凸分解为 $\omega_n=\sum_\kappa\lambda_\kappa\omega_n^{(\kappa)}$，并设 $\left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle\in\mathcal{H}_n$ 是满足下式的单位向量

$$\omega_n^{(\kappa)}(O')=\langle\Omega_n^{(\kappa)},O'\,\Omega_n^{(\kappa)}\rangle$$

对所有 $O'\in\mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$。由引理 5.3.37 可知

$$1=\omega_n^{(\kappa)}(A_v)=\omega_n^{(\kappa)}(B_f)$$

and

$$\left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle=A_v\left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle=B_f\left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle$$

对所有 $v\in\Gamma_n^V$ 以及所有 $f\in\Gamma_n^F$。

对每个 RC 以及每个 κ，考虑向量 $\left|\Omega_n^{(RC,\kappa)}\right\rangle:=D_{s_0}^{RC}\left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle$。由于 A_v，B_f与 $D_{s_0}^{RC}$对 $v\in\Gamma_n^V$ 以及 $f\in\Gamma_n^F$（引理 5.A.15）可交换，因此有

$$\left|\Omega_n^{(RC,\kappa)}\right\rangle=A_v\left|\Omega_n^{(RC,\kappa)}\right\rangle=B_f\left|\Omega_n^{(RC,\kappa)}\right\rangle=D_{s_0}^{RC}\left|\Omega_n^{(RC,\kappa)}\right\rangle$$

对所有 RC，κ，$v\in\Gamma_n^V$ 以及 $f\in\Gamma_n^F$。也就是说，我们有 $\left|\Omega_n^{(RC,\kappa)}\right\rangle\in\mathcal{V}_n^{RC}$（参见定义 5.3.8）。由命题 5.3.33 可知

$$\left|\Omega_n^{(RC,\kappa)}\right\rangle=\sum_{uv}c_{uv}^{RC,\kappa}\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle$$

对于某些系数 $c^{RC,\kappa}_{uv}\in\mathbb{C}$。由于 $\sum_{RC}D_{s_0}^{RC}=\mathbb{1}$（引理5.A.14），可得

$$\left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle=\sum_{RC}\left|\Omega_n^{(RC,\kappa)}\right\rangle=\sum_{RC}\sum_{uv}c_{uv}^{RC,\kappa}\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle.$$

现在使用引理5.B.12 可得到

$$K_{\beta_n}^{R'C'}\left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle=\sum_{RC}\sum_{uv}c_{uv}^{RC,\kappa}\,K_{\beta_n}^{R'C'}\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle=\sum_{uv}c_{uv}^{R'C',\kappa}|\eta_n^{R'C';uv}\rangle=D_{s_0}^{R'C'}\left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle$$

由此可得

$$\omega(OD_{s_0}^{RC})=\sum_{\kappa}\lambda_\kappa\langle\Omega_n^{(\kappa)},OD_{s_0}^{RC}\,\Omega_n^{(\kappa)}\rangle=\sum_{\kappa}\lambda_\kappa\langle\Omega_n^{(\kappa)},OK_{\beta_n}^{RC}\,\Omega_n^{(\kappa)}\rangle=\omega(OK_{\beta_n}^{RC})$$

对所有 $O\in\mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$。利用 K_σ^{RC}是厄米的（引理 5.A.18），并注意到 $\omega(A^*B)=\omega(B^*A)$ 对所有 $A,\ B\in\mathcal{A}$ 还可得到

$$\omega(D_{s_0}^{RC}O)=\omega(K_{\beta_n}^{RC}O)$$

对所有 $O\in\mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$。

为证明第二个断言，注意对任意 $O\in\mathcal{A}_{loc}$，我们可以取足够大的 n，使得 $O\in\mathcal{A}_{\Gamma_{n-1}^E}$。于是 $[K_{\beta_n}^{RC},O]=0$，因此 $\omega(OK_{\beta_n}^{RC})=\omega(K_{\beta_n}^{RC}O)$。利用上面得到的结果$\omega(K_{\beta_n}^{RC}O)=\omega(D_{s_0}^{RC}O)$ 和 $\omega(OK_{\beta_n}^{RC})=\omega(OD_{s_0}^{RC})$，可得

$$\omega(D_{s_0}^{RC}O)=\omega(OD_{s_0}^{RC})$$

对任意 $O\in\mathcal{A}_{loc}$。由连续性，该结果可推广到所有 $O\in\mathcal{A}$。 □

引理 5.4.13。若 $\omega\in\mathcal{S}_{s_0}^{RC}$则

$$\omega(K_{\beta_n}^{R'C'})=\delta_{RC,R'C'}$$

对所有 $n>1$。

证明：根据定义 $\omega(D_{s_0}^{RC})=1$ 因此由引理 5.4.10 可得 $\omega(O)=\omega(OD_{s_0}^{RC})=\omega(D_{s_0}^{RC}O)$ 对所有 $O\in\mathcal{A}$。取 $O=K_{\beta_n}^{R'C'}$ 并使用引理 5.4.12 和 5.A.14 得到

$$\omega(K_{\beta_n}^{R'C'})=\omega(D_{s_0}^{RC}K_{\beta_n}^{R'C'})=\omega(D_{s_0}^{RC}D_{s_0}^{R'C'})=\delta_{RC,R'C'}\omega(D_{s_0}^{RC})=\delta_{RC,R'C'}$$

如所需。 □

引理 5.4.14。当 $RC\neq R'C'$ 时，表示 π^{RC} 与 $\pi^{R'C'}$ 不相交

证明：我们有 $\omega_{s_0}^{RC;(1,1)}\in\mathcal{S}_{s_0}^{RC}$因此引理 5.4.13 指出

$$\omega_{s_0}^{RC,(1,1)}(K_{\beta_n}^{R'C'})=\delta_{RC,R'C'}$$

对所有 $n>1$。注意到对于任意有限区域 $S\subset\Gamma^E$，我们可以取 n 足够大，使得投影算子 $K_{\beta_n}^{RC}\in\mathcal{A}_{loc}$ 支撑于 S之外，因此结论由 [BR87]中的推论 2.6.11 得出。□

5.4.4 放大态射表示的构造

为了证明表示 π^{RC} 是任意子表示，我们首先证明它们与所谓的放大态射表示酉等价。这些表示可以由基态表示 π_0 与$\pi_0 \otimes \mathrm{Id}^{|I_{RC}|}$ 复合放大态射 $\mathcal{A} \to \mathcal{M}_{|I_{RC}|}(\mathcal{A})$得到，其分量由以下映射给出： $\mu_\rho^{RC;u_1u_2}$对于固定的半无限带 ρ。根据命题5.4.3中列出的性质，该放大态射是 C^*-代数的同态，而与 π_0 复合后则得到 $\mathcal{A}$的表示。放大态射仅在带 ρ 附近非平凡地作用，这使我们能够在第5.4.6 节证明表示 π^{RC} 是任意子表示。

放大态射，尤其是在非阿贝尔量子双模型的语境中，最早由 [Naa15] 引入。此处的论述实质上是对该文献中所概述论证的补全。放大态射最初被引入，作为研究晶格自旋模型和量子场论中的广义对称性的工具，参见[SV93、Vec94、FGV94、NS97]。

回顾一下，$(\pi_0,\ \mathcal{H}_0,\ |\Omega_0\rangle)$ 是无挫折基态 ω_0 的 GNS 三元组，并令 $\chi_\rho^{RC;uv} := \pi_0 \circ \mu_\rho^{RC;uv}$: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$。在本节剩余部分中，当我们在忠实表示 π_0中工作时，通常将使用 O 来代替 $\pi_0(O)$。

现在我们定义放大态射表示。

定义 5.4.15。令

$$\chi_\rho^{RC} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \otimes M_N(\mathbb{C}) : O \mapsto \begin{bmatrix} \chi_\rho^{RC;u_1u_1}(O) & \cdots & \chi_\rho^{RC;u_1u_N}(O) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_\rho^{RC;u_Nu_1}(O) & \cdots & \chi_\rho^{RC;u_Nu_N}(O) \end{bmatrix}$$

其中 $N = |I_{RC}| = |C|\dim R$ 是标签 $u \in I_{RC}$ 可以取的不同值的数量。

利用命题 5.4.3中列出的性质，很容易验证这是准局域代数的含单位元的 *-表示。

放大态射表示作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{C}^N$ 上。我们选取 $\mathbb{C}^N$ 的一组基 $\{|u\rangle\}_{u \in I_{RC}}$，使得

$$\langle \Phi \otimes u, \chi_\rho^{RC}(O)\, \Psi \otimes v \rangle = \langle \Phi, \chi_\rho^{RC;uv}(O)\, \Psi \rangle$$

对所有 $|\Phi\rangle,\ |\Psi\rangle \in \mathcal{H}_0$ 均成立。

5.4.5 χ_ρ^{RC}与 π^{RC}的酉等价

固定一条半无限带 ρ，满足 $\partial_0 \rho = s_0$。

引理 5.4.16. 对于任意 $u \in I_{RC}$，向量 $|\Omega_0 \otimes u\rangle$ 在表示 χ_ρ^{RC}中表示纯态 $\omega_{s_0}^{RC;u}$。

证明： 对于任意 $O \in \mathcal{A}$，我们有

$$\langle \Omega_0 \otimes u, \chi_\rho^{RC}(O)\, \Omega_0 \otimes u \rangle = \langle \Omega_0, \chi_\rho^{RC;uu}(O)\, \Omega_0 \rangle = \omega_0 \circ \mu_\rho^{RC;uu}(O) = \omega_{s_0}^{RC;u}(O)$$

其中最后一步由引理5.4.4。 □

也就是说，放大态射表示 χ_ρ^{RC}包含态 $\omega^{RC;u}$，因此有一个与 π^{RC}酉等价的子表示。事实上，我们将证明 χ_ρ^{RC}与 π^{RC}酉等价。为此，我们必须证明 $|\Omega_0 \otimes u\rangle$ 是χ_ρ^{RC}的循环向量。

Pro命题 5.4.17。对于任意 $u \in I_{RC}$，向量 $|\Omega_0 \otimes u\rangle$ 是 χ^R的循环向量 ${}_\rho{}^C$.

证明：令

$$\mathcal{H}_u := \overline{\chi_\rho^{RC}(\mathcal{A})|\Omega_0 \otimes u\rangle} \subseteq \mathcal{H}.$$

我们证明实际上 $\mathcal{H}_u = \mathcal{H}$。

考虑子空间

$$\mathcal{V} := \left\{ \sum_{v \in I_{RC}} |\Psi_v \otimes v\rangle \ : \ |\Psi_v\rangle \in \mathcal{A}_{loc}|\Omega_0\rangle \right\} \subset \mathcal{H}.$$

该空间在 $\mathcal{H}$ 中稠密。

任取向量 $|\Psi\rangle = \sum_v |\Psi_v \otimes v\rangle \in \mathcal{V}$，使得 $|\Psi_v\rangle = O_v|\Omega_0\rangle$，其中 $O_v \in \mathcal{A}_{loc}$ 对每个 $v \in I_{RC}$ 都成立。

我们要证明，若 $|\Psi\rangle$ 与 $\mathcal{H}_u$ 近似正交，则 $\||\Psi\rangle\|$ 很小。令 P_u 为到 $\mathcal{H}_u$ 上的正交投影算子，并假设 $\|P_u|\Psi\rangle\|^2 < \epsilon$。

现在我们使用映射 $t_{\rho_n}^{RC;vu}$，它们来自定义 5.A.26。对于任意 $n \in \mathbb{N}$、任意 RC以及任意u, $v \in I_{RC}$，这些映射定义如下

$$t_{\rho_n}^{RC;uv}(O) := \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_{w,u'} F_{\rho_n}^{RC;uw}\, O\, \left(F_{\rho_n}^{RC;u'w}\right)^* A_{s_0}^{RC;u'v} D_{s_0}^{RC;v}$$

对于任意 $O \in \mathcal{A}$。这里 $a_{s_0}^{RC;u'u}$是定义 5.3.34中的标签变换器，而 $D_{s_0}^{RC;u}$是定义 5.3.6中的投影算子。对于任意 $O \in \mathcal{A}_{loc}$，引理 5.A.27 指出，当 n 足够大时

$$\chi_\rho^{RC;u_1v_1}\left(t_{\rho_n}^{RC;u_2v_2}(O)\right)|\Omega_0\rangle = \delta_{u_1u_2}\delta_{v_1v_2}\, O|\Omega_0\rangle.$$

因此，我们可以将 n 取足够大，使得

$$\begin{aligned}\chi_\rho^{RC}\left(t_{\rho_n}^{RC;vu}(O_v)\right)|\Omega_0 \otimes u\rangle &= \sum_w |\chi_\rho^{RC;wu}(t_{\rho_n}^{RC;vu}(O_v))\Omega_0 \otimes w\rangle \\ &= \sum_w \delta_{w,v}\, |O_v\Omega_0 \otimes w\rangle = |\Psi_v \otimes v\rangle \in \mathcal{H}_u\end{aligned}$$

现在由我们的假设 $\|P_u|\Psi\rangle\|^2 < \epsilon$ 可知

$$\||\Psi_v\rangle\|^2 = \left|\langle \Psi, \chi_\rho^{RC}\left(t_{\rho_n}^{RC;vu}(O_v)\right)\, \Omega_0 \otimes u\rangle\right| < \epsilon$$

对所有 $v \in I_{RC}$ 均成立，因此

$$\||\Psi\rangle\|^2 = \sum_v \||\Psi_v\rangle\|^2 < N\epsilon.$$

现在取 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$，并设 $|\Psi\rangle$ 与 $\mathcal{H}_u$ 正交。由于 $\mathcal{V}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，存在一个向量序列 $|\Psi_i\rangle \in \mathcal{V}$，使其在范数意义下收敛到 $|\Psi\rangle$。对于任意 $\epsilon > 0$，我们可以找到 i_0，使得

$$\|P_u|\Psi_i\rangle\|^2 = \|P_u(|\Psi_i\rangle - |\Psi\rangle)\|^2 < \epsilon$$

对所有 $i \geq i_0$ 均成立。由上可得

$$\||\Psi_i\rangle\|^2 < N\epsilon$$

对所有 $i \geq i_0$ 均成立。可以看出该序列收敛于零，因此 $|\Psi\rangle = 0$。

由于 $\mathcal{H}$ 中任何与 $\mathcal{H}_u$ 正交的向量都必须为零，且由于 $\mathcal{H}_u \subseteq \mathcal{H}$，我们得到 $\mathcal{H}_u = \mathcal{H}$。这表明 $|\Omega_0 \otimes u\rangle$ 是表示 χ_ρ^{RC} 的一个循环向量。□

命题 5.4.18. 对于任意具有初始点 $s = \partial_0\rho$ 的半无限带 ρ、任意 RC 以及任意 $u \in I_{RC}$，放大态射表示 χ_ρ^{RC} 与纯态 $\omega_s^{RC;u}$ 的 *GNS* 表示酉等价。特别地，放大态射表示 χ_ρ^{RC} 不可约，且与 π^{RC} 酉等价。

证明：与 $\omega_s^{RC;u}$的 GNS 表示酉等价，这由引理5.4.16 和命题 5.4.17立即得出。由于 $\omega_s^{RC;u}$是不可约表示 π^{RC} 中的一个向量态（引理 5.4.8），我们得到 χ_ρ^{RC}与 π^{RC} 酉等价，因此特别是不可约的。□

5.4.6 表示 π^{RC} 是任意子表示

对于任意锥 Λ，令 $\mathcal{R}(\Lambda) := \pi_0(\mathcal{A}_\Lambda)'' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ 表示基态表示中由$\mathcal{A}_\Lambda$ 生成的冯·诺伊曼代数。

以下命题是对 [Naa15] 定理 5.4 中部分内容的略微改编。

命题 5.4.19 ([Naa15])。若 ρ是支撑包含于锥 Λ中的半无限带，则存在一个表示 ν_Λ^{RC}: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，它与放大态射表示 χ_ρ^{RC}酉等价，并满足

$$\nu_\Lambda^{RC}(O) = \pi_0(O)$$

对所有 $O \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$。

证明与 [Naa15] 的定理 5.4 完全相同；我们只需指出，该定理中假设的 Haag 对偶性并非本陈述这一部分所必需。

现在我们可以证明

命题 5.4.20。 这些表示 π^{RC} 是任意子表示 .

证明： 固定任意一个锥 Λ。我们要证明

$$\pi^{RC}|_{\mathcal{A}_\Lambda} \simeq \pi_0|_{\mathcal{A}_\Lambda}.$$

为此，设 ρ 是一个支撑于锥 Λ 中的半无限带，且该锥与 Λ不相交。由于 π^{RC} 与放大态射表示 χ_ρ^{RC}酉等价（命题 5.4.18），由命题 5.4.19 可得一个表示 $\nu_{\widetilde{\Lambda}}^{RC}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，它与 π^{RC} 酉等价，并满足 $\nu_{\widetilde{\Lambda}}^{RC}(O) = \pi_0(O)$，对所有 $O \in \mathcal{A}_\Lambda \subset \mathcal{A}_{\widetilde{\Lambda}^c}$均成立。根据酉等价性，存在酉算子 $U_\Lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，使得

$$\pi^{RC}(O) = U_\Lambda \, \nu_{\widetilde{\Lambda}}^{RC}(O) \, U_\Lambda^*$$

对所有 $O \in \mathcal{A}$ 均成立。因此，对于 $O \in \mathcal{A}_\Lambda$，我们得到

$$\pi^{RC}(O) = U_\Lambda \, \pi_0(O) \, U_\Lambda^*.$$

由于锥 Λ是任意的，这就证明了该命题。 □

5.5 完备性

为了证明所有任意子表示都与表示 π^{RC}中的某一个酉等价，我们证明任意任意子表示 π 都包含一个纯态 $\omega_{s_0}^{RC;u}$。证明如下。在小节 5.5.1 中，我们证明任意任意子表示 π 都包含一个规范不变的纯态，且在某个有限区域之外处处具有平凡磁通。在小节 5.5.2中，我们证明这样的态与一个满足（5.2）的纯态酉等价。最后，在小节 5.5.3 中，我们将证明任何满足（5.2）的纯态都与某个 $\omega_{s_0}^{RC;u}$等价，因此属于一个确定的任意子表示 π^{RC}。结合这些结果与上一节的结果，我们发现，任意子扇区与 G 的量子双的不可约表示等价类之间存在一一对应关系。

5.5.1 任意子表示都包含一个态，该态是规范不变的，且在有限区域之外具有平凡磁通

设 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{H}$ 是一个任意子表示。

对于任意 $S \subset \mathbb{R}^2$，令 $S^V := \{v \in \Gamma^V : \ A_v \in \mathcal{A}_S\}$ 且 $S^F := \{f \in \Gamma^F : \ B_f \in \mathcal{A}_S\}$。我们也记作 $S^{VF} = S^V \cup S^F$。如果 $S \subset \mathbb{R}^2$是有界的，那么我们定义

$$P_S := \prod_{v \in S^V} A_v \prod_{f \in S^F} B_f$$

这是一个投影 算子，作用于 $\mathcal{A}_S$中。它将态投影到在 S上规范不变且平坦的态 .

我们希望为无限区域定义类似的投影算子，但显然，这类投影算子无法存在于准局域代数 $\mathcal{A}$ 中。相反，我们将在 von Neumann 代数 $\pi(\mathcal{A})''$ 中构造它们。

定义 5.5.1. 如果非递减序列 $\{S_n\}$ 个集合 $S_n \subset \mathbb{R}^2$ 收敛到$S \subset \mathbb{R}^2$，则称其为 $\bigcup_n S_n = S$。

设 $\{S_n\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非递减有界子集序列，其极限为可能无限的 $S \subset \mathbb{R}^2$。那么正交投影算子序列 $\{\pi(P_{S_n})\}$ 是非递增的，因此在强算子拓扑下收敛到一个正交投影算子，该算子投影到 $\pi(P_{S_n})$ [Wei80，定理 4.32(a)]。特别地，极限 p_S不依赖于所选的特定序列 $\{S_n\}$。若 S 有限，则 $p_S = \pi(P_S)$。

对于任意 $r \geq 0$，令 $B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq r\}$ 为半径为 r 的闭球。

命题 5.5.2。对于任意任意子表示 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，存在一个 $n > 0$ 和一个属于 π 的纯态 ω，使得

$$\omega(A_v) = \omega(B_f) = 1$$

对于所有满足 A_v、$B_f \in \mathcal{A}_{B_n^c}$ 的 v 和 f。

证明：取两个锥 Λ_1，Λ_2 使得任意 A_v 和任意 B_f 都支撑于其中至少一个锥。特别地，$\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \mathbb{R}^2$。由于 π 是一个任意子表示，我们有酉算子$U_i : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$，对于 $i = 1, 2$ 满足

$$\pi(O) = U_i \pi_0(O) U_i^* \qquad \forall O \in \mathcal{A}_{\Lambda_i}.$$

由此可得

$$\omega_0(O) = \langle \Omega_0, \pi_0(O)\Omega_0 \rangle = \langle U_i\Omega_0, \pi(O)U_i\Omega_0 \rangle \quad \forall\, O \in \mathcal{A}_{\Lambda_i}.$$

在 $\mathcal{A}$ 上定义纯态 ω_i，其定义为 $\omega_i(O) := \langle \Omega_i, \pi(O)\Omega_i \rangle$，其中 $|\Omega_i\rangle = U_i |\Omega_0\rangle \in \mathcal{H}$。这些态 ω_i 属于 π，并且对所有 $O \in \mathcal{A}_{\Lambda_i}$满足 $\omega_i(O) = \omega_0(O)$。

令 $\Lambda_i^{>n} := \Lambda_i \setminus B_n$，以及 $\Lambda^{n,\,n+m}_{i} := \Lambda_i^{>n} \setminus \Lambda_i^{>n+m}$，对所有 $m,\ n \in \mathbb{N}$成立。则序列$m \mapsto \Lambda^{n,\,n+m}_{i}$ 是一个收敛到 $\Lambda_i^{>n}$ 的有界集非递减序列。我们有

$$1 = \omega_0\big(P_{\Lambda_i^{n,n+m}}\big) = \omega_i\big(P_{\Lambda_i^{n,n+m}}\big) = \langle \Omega_i, \pi\big(P_{\Lambda_i^{n,n+m}}\big)\Omega_i \rangle,$$

这里用到了所有这些投影算子都支撑于 Λ_i。现在我们得到

$$\langle \Omega_i, p_{\Lambda_i^{>n}}\Omega_i \rangle = 1$$

where $p_{\Lambda_i^{>n}}$ 是投影算子序列 $\{\pi\big(P_{\Lambda_i^{n,n+m}}\big)\}_m$ 的强极限 $>n$.

纯态 ω_1 和 ω_2 酉等价，因为它们都是不可约表示 π中的向量态。由 [BR87] 的推论 2.6.11 可知，对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ 使得

$$|\omega_1(O) - \omega_2(O)| \leq \epsilon \|O\|$$

对所有 $O \in \mathcal{A}_{loc} \cap \mathcal{A}_{B^c_{n(\epsilon)}}$ 均成立。

由此可得

$$|\langle \Omega_1, \pi(P_{\Lambda_i^{n,n+m}})\Omega_1 \rangle - \langle \Omega_2, \pi(P_{\Lambda_i^{n,n+m}})\Omega_2 \rangle| < \epsilon$$

对于所有的 m 和 $n \geq n(\epsilon)$，存在某个 $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$。取强极限后，我们得到

$$\langle \Omega_1, p_{\Lambda_2^{\geq n}} \Omega_1 \rangle > 1 - \epsilon$$

其中我们使用了 $\langle \Omega_2, \pi(P_{\Lambda^{n,}{}_{2}{}^{n+m}}) \Omega_2 \rangle = 1$。

利用 $p_{\Lambda_1^{\geq n}}$ 是投影算子这一事实，以及对于所有 $n \geq n(\epsilon)$，都有 $\langle \Omega_1, p_{\Lambda_1^{\geq n}} \Omega_1 \rangle = 1$，我们还可以得到，对于所有这样的 n，都有 $p_{\Lambda_1^{\geq n}} |\Omega_1\rangle = |\Omega_1\rangle$。

现在，我们利用 $p_{\Lambda_2^{\geq n}} p_{\Lambda_1^{\geq n}}$ 投影到 $p_{B_{n+1}^c}$ 的值域的一个子空间这一事实，得到

$$\langle \Omega_1, p_{B_{n+1}^c} \Omega_1 \rangle \geq \langle \Omega_1, p_{\Lambda_2^{\geq n}} p_{\Lambda_1^{\geq n}} \Omega_1 \rangle = \langle \Omega_1, p_{\Lambda_2^{\geq n}} \Omega_1 \rangle > 1 - \epsilon$$

对于所有 $n > n(\epsilon)$。

由此可知，对于 $\epsilon < 1$，对于所有 $n \geq n(\epsilon)$，都有 $p_{B_{n+1}^c} |\Omega_1\rangle \neq 0$。因此，我们固定某个 $\epsilon < 1$ 和 $n \geq n(\epsilon)$，并定义一个归一化向量

$$|\Omega\rangle := \frac{p_{B_{n+1}^c} |\Omega_1\rangle}{||p_{B_{n+1}^c} |\Omega_1\rangle||} \in \mathcal{H}.$$

向量 $|\Omega\rangle$ 通过 $\omega(O) := \langle \Omega\ \pi(O) \Omega \rangle$ 对所有 $O \in \mathcal{A}$ 定义了一个纯态。此态属于任意子表示 π。

为完成证明，我们验证当 $A_v,\ B_f \in \mathcal{A}_{B_{n+1}^c}$ 时，$\omega(A_v) = \omega(B_f) = 1$。我们有

$$\omega(A) = \frac{\langle \Omega_1, p_{B_{n+1}^c} \pi(A_v) p_{B_{n+1}^c} \Omega_1 \rangle}{||p_{B_{n+1}^c} |\Omega_1\rangle||^2} = \frac{\langle \Omega_1, p_{B_{n+1}^c} p_{\{v\}} p_{B_{n+1}^c} \Omega_1 \rangle}{||p_{B_{n+1}^c} |\Omega_1\rangle||^2} = \frac{\langle \Omega_1, p_{B_{n+1}^c} p_{B_{n+1}^c} \Omega_1 \rangle}{||p_{B_{n+1}^c} |\Omega_1\rangle||^2} = 1$$

其中我们使用了 $p_{B_{n+1}^c} \pi(A_v) = p_{B_{n+1}^c}$。证明当 $B_f \in \mathcal{A}_{B_{n+1}^c}$ 时，$\omega_\pi(B_f) = 1$ 的方法完全相同。这就完成了该命题的证明。□

5.5.2 基态约束的有限次违例可以转移到单个格点上

设 ω 是 $\mathcal{A}$ 上的纯态，且 $(\pi,\ \mathcal{H},\ |\Omega\rangle)$ 是其 GNS 三元组。由于 $\mathcal{A}$ 是一个单代数，表示 π 是忠实的，因此我们可以将 $\mathcal{A}$ 与其像 $\pi(\mathcal{A})$ 视为相同。对于任意 $O \in \mathcal{A}$，在本节余下部分我们将写作 O，而不写作 $\pi(O)$。

在本节余下部分，我们固定一个任意的格点 $s_* = (v_*,\ f_*)$。我们将证明，可以将基态约束的任意有限次违例转移到格点 s_* 上。

下面的引理在实现这一点时会很有用：

引理 5.5.3. *([BMD07], 公式 B46, B47)* 设 ρ 为一条带，使得 $v = v(\partial_0 \rho)$ 或 $v = v(\partial_1 \rho)$，且 $v(\partial_0 \rho) \neq v(\partial_1 \rho)$，并且 $f = f(\partial_0 \rho)$ 或 $f = f(\partial_1 \rho)$，且 $f(\partial_0 \rho) \neq f(\partial_1 \rho)$。则有以下恒等式：

$$|G| \sum_{g \in G} T_\rho^g A_v T_\rho^g = 1, \qquad \sum_{h \in G} L_\rho^{\bar{h}} B_f L_\rho^h = 1 \tag{5.8}$$

对于任意向量 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$，定义

$$V_\Psi := \{v \in \Gamma^V \,:\, A_v |\Psi\rangle \neq |\Psi\rangle\} \setminus \{v_*\}$$

and

$$F_\Psi := \{f \in \Gamma^F \,:\, B_f |\Psi\rangle \neq |\Psi\rangle\} \setminus \{f_*\}.$$

V_Ψ 由所有顶点组成，但不包括 v_*，其中规范约束 A_v 在态 $|\Psi\rangle$中被违反； F_Ψ 则是所有面组成的集合，但不包括 f_*，其中磁通约束 B_f 在态 $|\Psi\rangle$中被违反。

下面的引理说明，我们可以消除一次对规范约束的违反。

引理 5.5.4。 设 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ 为一个单位向量， $v \in \Gamma^V \setminus \{v_*\}$ 为一个顶点。则存在一个单位向量 $|\Psi'\rangle \in \mathcal{H}$，使得 $V_{\Psi'} \subseteq V_\Psi \setminus \{v\}$ 和 $F_{\Psi'} \subseteq F_\Psi$。

证明： 设 ρ 为一条带，使得 $v(\partial_0\rho) = v_*$ 且 $v(\partial_1\rho) = v$。对于任意 $g \in G$，我们定义向量

$$|\Psi_g\rangle := A_v T^g_\rho |\Psi\rangle .$$

根据定义可立即得到 $A_v |\Psi_g\rangle = |\Psi_g\rangle$，因此 $v \notin V_{\Psi_g}$。现在说明所有不属于 $V_\Psi \setminus \{v\}$ 的顶点也不属于 V_{Ψ_g}，即 $V_{\Psi_g} \subseteq V_\Psi \setminus \{v\}$。我们刚刚已经对 v 自身证明了这一点，而根据定义，对于 v_*，该结论也成立。剩下需要对任意$v' \notin V_\Psi$ 满足 $v' \neq v$、 v_*的情形进行证明。于是 $A_{v'} |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$，并且由于 $A_{v'}$ 与 A_v（公式（5.17））以及 T^g_ρ（引理 5.A.3）对易，我们得到 $A_{v'} |\Psi_g\rangle = |\Psi_g\rangle$。即 $v' \notin V_{\Psi_g}$。

同样地，如果 $f \notin F_\Psi$，即 $B_f |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$，那么也有 $B_f |\Psi_g\rangle = |\Psi_g\rangle$，因为 B_f 与 A_v（公式（5.17））以及 T^g_ρ（引理 5.A.4）对易。这表明 $F_{\Psi_g} \subseteq F_\Psi$。

剩下需要证明的是， $|\Psi_g\rangle$ 中至少有一个不为零。

利用引理 5.5.3 中的第一个恒等式，我们得到

$$|\Psi\rangle = |G| \sum_{g\in G} T^g_\rho A_v T^g_\rho |\Psi\rangle = |G| \sum_{g\in G} T^g_\rho |\Psi_g\rangle .$$

由于 $|\Psi\rangle$ 是单位向量，因此至少存在一个 $g \in G$ 使得 $|\Psi_g\rangle \neq 0$。令 $g \in G$满足 $|\Psi_g\rangle \neq 0$。我们可以将该向量归一化，从而得到一个单位向量

$$|\Psi'\rangle = \frac{|\Psi_g\rangle}{\||\Psi_g\rangle\|}.$$

$V_{\Psi'} \subseteq V_\Psi \setminus \{v\}$ 和 $F_{\Psi'} \subseteq F_\Psi$ 所具有的性质直接源于 $|\Psi_g\rangle$满足这一性质，正如上文所示。这就证明了引理。□

同样，我们可以消除一个磁通约束的单个违反。其证明与前述引理的证明基本相同，因此从略。

命题 5.5.5. 设 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ 为一个单位向量， $f \in \Gamma^F \setminus \{f_*\}$ 为一个面。那么存在一个单位向量 $|\Psi'\rangle \in \mathcal{H}$，使得 $V_{\Psi'} \subseteq V_\Psi$ 且 $F_{\Psi'} \subseteq F_\Psi \setminus \{f\}$。

命题 5.5.6。 若 ω 是 $\mathcal{A}$ 上的纯态，且存在一个 n 使得 $\omega(A_v) = \omega(B_f) = 1$ 对所有 A_v、$B_f \in \mathcal{A}_{B^c_n}$ 均成立，那么对于任意格点 s_*，都存在一个纯态 $\psi \in \mathcal{S}_{s_*}$，它与 ω 酉等价。

证明： 设 $s_* = (v_*, f_*)$ 并设 $(\pi, \mathcal{H}, |\Omega\rangle)$ 是对应于 ω 的 GNS 三元组。由引理 5.A.19可得

$$A_v |\Omega\rangle = B_f |\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$

对所有 A_v， $B_f \in \mathcal{A}_{B_n^c}$。特别地，这些集合

$$V_\Omega = \{v \in \Gamma^V \ : \ A_v |\Omega\rangle \neq |\Omega\rangle\} \setminus \{s_*\}$$

and

$$F_\Omega = \{f \in \Gamma^F \ : \ B_g |\Omega\rangle \neq |\Omega\rangle\} \setminus \{f_*\}$$

是有限的。

因此，我们可以有限次应用引理 5.5.4 和 5。5。5，得到一个单位向量 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$，使得 $V_\Psi = \emptyset$ 并且 $F_\Psi = \emptyset$。换言之，向量 $|\Psi\rangle$ 满足

$$A_v |\Psi\rangle = B_f |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$$

对所有 $v \neq v_*$ 以及所有 $f \neq f_*$。

向量 $|\Psi\rangle$ 对应于由以下公式给出的纯态 ψ

$$\psi(O) = \langle \Psi, O\, \Psi \rangle$$

对所有 $O \in \mathcal{A}$。

由于 ω 和 ψ 是同一表示 π 中的向量态，因此这些态在酉意义下等价。此外，

$$\psi(A_v) = \langle \Psi, A_v\, \Psi \rangle = 1, \quad \text{and} \quad \psi(B_f) = \langle \Psi, B_f\, \Psi \rangle = 1$$

对所有 $v \neq v_*$ 及所有 $f \neq f_*$，因此 $\psi \in \mathcal{S}_{s_*}$（定义 5.3.7），如所要求的。 □

5.5.3 $\mathcal{S}_{s_0}$中的态的分解

回顾态集 5.3.7 的定义 $\mathcal{S}_{s_0}$。现在我们证明， $\overline{\mathcal{S}}_{s_0}$中的任意态都可分解为属于任意子表示 π^{RC}的态。固定一个态$\omega \in \mathcal{S}_{s_0}$。

定义 5.5.7。 对每个 RC，定义正线性泛函 $\tilde{\omega}^{RC}$ 如下

$$\tilde{\omega}^{RC}(O) := \omega(D_{s_0}^{RC} O D_{s_0}^{RC})$$

对所有 $O \in \mathcal{A}$成立，并且是一个非负数

$$\lambda_{RC} := \omega(D_{s_0}^{RC}) = \tilde{\omega}^{RC}(\mathbb{1}) \geq 0.$$

引理 *5.5.8。 </style>*当且仅当 $\tilde{\omega}^{RC} \equiv 0$，有 $\lambda_{RC} = 0$

证明： 若 $\tilde{\omega}^{RC}(1) = 0$，则 $\omega(D_{s_0}^{RC}) = 0$，因此根据柯西-施瓦茨

$$\left|\tilde{\omega}^{RC}(O)\right|^2 = \left|\omega(D_{s_0}^{RC} O D_{s_0}^{RC})\right|^2 \leq \omega(D_{s_0}^{RC}) \omega(D_{s_0}^{RC} O^* O D_{s_0}^{RC}) = 0$$

对任意 $O \in \mathcal{A}$。即 $\tilde{\omega}^{RC} \equiv 0$ 当且仅当 $\tilde{\omega}^{RC}(1) = 0$。但是 $\tilde{\omega}^{RC}(1) = \omega(D_{s_0}^{RC}) = \lambda_{RC}$，从而得到该结论。□

引理 5.5.9。 若 $\lambda_{RC} > 0$，我们定义线性泛函 ω^{RC} 为

$$\omega^{RC}(O) := \lambda_{RC}^{-1}\, \tilde{\omega}^{RC}(O) \qquad\qquad \forall\, O \in \mathcal{A}.$$

那么 $\omega^{RC}(O)$ 是 $\mathcal{S}_{s_0}^{RC}$中的一个态。

证明： 我们先证明 ω^{RC} 是一个态。线性泛函 $\tilde{\omega}^{RC}$ 根据构造是正的，并且

$$\omega^{RC}(\mathbb{1}) = \lambda_{RC}^{-1}\tilde{\omega}^{RC}(\mathbb{1}) = 1,$$

因此 ω^{RC} 是归一化的。由此可得， ω^{RC} 确实是一个态。

现在我们来验证 $\omega^{RC} \in \mathcal{S}_{s_0}^{RC}$。首先注意到

$$\omega^{RC}(D_{s_0}^{RC}) = \lambda_{RC}^{-1}\tilde{\omega}^{RC}(D_{s_0}^{RC}) = 1$$

因为 $D_{s_0}^{RC}$是一个正交投影算子。此外，由于投影算子 A_v 与 $D_{s_0}^{RC}$对所有 $v \in \Gamma_n^V$ （引理 5.A.15 ）都可交换，我们有

$$\omega^{RC}(A_v) = \lambda_{RC}^{-1}\tilde{\omega}^{RC}(A_v) = \lambda_{RC}^{-1}\omega\big(D_{s_0}^{RC}A_v D_{s_0}^{RC}\big) = \lambda_{RC}^{-1}\omega(D_{s_0}^{RC}A_v) = \lambda_{RC}^{-1}\omega(D_{s_0}^{RC}) = 1$$

这里用到了 $\omega(A_v) = 1$ 以及引理 5.4.10。同理，我们可以证明 $\omega^{RC}(B_f) = 1$对所有 $f \in \Gamma_n^F$ 都成立。由此可得 $\omega^{RC} \in \mathcal{S}_{s_0}^{RC}$， 证毕。 □

引理 5.5.10。 对于任意态 $\omega \in \mathcal{S}_{s_0}$，我们有

$$\omega = \sum_{RC\,:\,\lambda_{RC}>0} \lambda_{RC}\,\omega^{RC}$$

其中的态 ω^{RC} 是引理 5.5.9中定义的。

证明： 利用分解 $\mathbb{1} = \sum_{RC} D_{s_0}^{RC}$（引理 5.A.14）和引理 5.4.12，我们得到

$$\omega(O) = \sum_{RC}\omega\big(O\, D_{s_0}^{RC}\big) = \sum_{RC}\omega\big(D_{s_0}^{RC}\, O\, D_{s_0}^{RC}\big) = \sum_{RC\,:\,\lambda_{RC}>0} \lambda_{RC}\,\omega^{RC}(O)$$

其中在最后一步，我们使用了 ω^{RC} 的定义和引理 5.5.8。 □

剩下要证明的是，态 ω^{RC} 属于 π^{RC}。

引理 5.5.11。 任意态 $\omega \in \mathcal{S}_{s_0}^{RC}$都属于 π^{RC}

证明： ω_n 对 ω 的限制 $\mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$ 满足

$$1 = \omega_n(A_v) = \omega_n(B_f) = \omega_n(D_{s_0}^{RC})$$

对所有 $v \in \Gamma_n^{VF}$ 以及所有 $f \in \Gamma_n^F$。设 $\omega_n = \sum_\kappa \lambda_\kappa \omega_n^{(\kappa)}$为 ω_n的纯分量 $\omega_n^{(\kappa)}$的凸分解，并设 $\big|\Omega_n^{(\kappa)}\big\rangle \in \mathcal{H}_n$ 为满足以下条件的单位向量

$$\omega_n^{(\kappa)}(O) = \langle \Omega_n^{(\kappa)}, O\,\Omega_n^{(\kappa)}\rangle$$

对所有 $O \in \mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$。于是引理 5.3.37 给出

$$\left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle = A_v \left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle = B_f \left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle = D_{s_0}^{RC} \left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle$$

对所有 $v \in \Gamma_n^V$ 以及所有 $f \in \Gamma_n^F$。根据空间 $\mathcal{V}_n^{RC}$的定义 5.3.8，我们便有 $\left|{}^{(\kappa)}_{n}\right\rangle \in \mathcal{V}_n^{RC}$对所有 κ。由命题 5.3.33 可得

$$\left|\Omega_n^{(\kappa)}\right\rangle = \sum_{u,v} c_{uv}^{(\kappa)} \left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle$$

对于某些系数 $c_{uv}^{(\kappa)} \in \mathbb{C}$。由此可得

$$\omega_n(O) = \mathrm{Tr}\{\rho O\}$$

对于任意 $O \in \mathcal{A}_{\Gamma_n^E}$，其中 ρ 是 $\mathcal{H}_n$ 上的密度矩阵，定义为

$$\rho = \sum_{u_1 v_1; u_2 v_2} \rho_{u_1 v_1; u_2 v_2} \left|\eta_n^{RC;u_1 v_1}\right\rangle \left\langle \eta_n^{RC;u_2 v_2}\right|$$

其中 $\rho_{u_1 v_1;\ u_2 v_2} = \sum_\kappa \lambda_\kappa\, c_{u_1 v_1}^{(\kappa)} (c_{u_2 v_2}^{(\kappa)})^*$。

令 $O \in \mathcal{A}_{\Gamma_{n-1}^E}$。根据引理 5.3.35，我们有

$$\langle \eta_n^{RC;u_1 v_1}, O \eta_n^{RC;u_2 v_2}\rangle = \delta_{v_1,v_2} \langle \eta_n^{RC;u_1 v_1}, O \eta_n^{RC;u_2 v_1}\rangle$$

与 v_1 无关，因此对于任意选择 v_0，我们有

$$\mathrm{Tr}\{\rho O\} = \sum_{u_1 u_2} \left(\sum_v \rho_{u_1 v; u_2 v} \right) \langle \eta_n^{RC;u_1 v_0}, O\, \eta_n^{RC;u_2 v_0}\rangle.$$

现在这些数

$$\tilde{\rho}_{u_1 u_2} := \sum_v \rho_{u_1 v; u_2 v}$$

是密度矩阵 $\tilde{\rho}$ 的分量，而该矩阵是对边界标签 $v_{1;u_2 v_2}$, v_2取偏迹所得。由此可知，存在一个基，使得密度矩阵 $\tilde{\rho}$ 为对角矩阵；也就是说，存在一个酉矩阵 U，其分量为 $U_{uu'} \in \mathbb{C}$，满足

$$\sum_{u_1 u_2} (U^*)_{u_1' u_1}\, \tilde{\rho}_{u_1 u_2}\, U_{u_2 u_2'} = \mu_{u_1'}^{(n)} \delta_{u_1' u_2'}$$

其中 $\mu_{u'}^{(n)}$ 为非负数，且总和为一。

我们得到

$$\omega_n(O) = \mathrm{Tr}\{\rho O\} = \sum_{u'} \mu_{u'}^{(n)}\, \tilde{\eta}_n^{RC;u' v_0}(O)$$

其中，$\tilde{\eta}_n^{RC;u' v_0}$ 是由以下给出的纯态

$$\tilde{\eta}_n^{RC;u' v_0}(O) = \langle \tilde{\eta}_n^{RC;u' v_0}, O\, \tilde{\eta}_n^{RC;u' v_0}\rangle$$

with

$$|\tilde{\eta}_n^{RC;u'v_0}\rangle := \sum_u (U^*)_{u'u}\,|\eta_n^{RC;uv_0}\rangle.$$

利用引理 5.3.39，定义 5.3.36，以及引理 5.B.16 对于任意 $u'' \in I_{RC}$ tha t

$$\tilde{\eta}_n^{RC;u'v_0}\Big(\sum_{w_1,w_2} D_{s_0}^{RC;w_1}\,(U^*)_{u''w_1}\,U_{w_2u''}\,D_{s_0}^{RC;w_2}\Big) = \delta_{u',u''}.$$

由于对于所有 $n \geq 3$， $D_{s_0}^{RC;w}$都支撑于 $\mathcal{A}_{\Gamma_{n-1}^E}$，因此我们得到，对于所有 $u'' \in I_{RC}$ 以及所有 n， $m \geq 3$， $\mu_{u''}^{(n)} = \mu_{u''}^{(m)}$；也就是说，如果 $n \geq 3$，数值 $\mu_u^{(n)}$ 不依赖于 n。对于所有 $n \geq 3$，记 $\mu_u = \mu_u^{(n)}$。

对于任意 $u \in I_{RC}$，令 $A^u := A_{s_0}^{RC;u(1,1)}$为定义 5.3.34中的标签变换算子，并定义向量

$$\left|\Omega_{s_0}^{RC;u}\right\rangle := \pi^{RC}\left(A^u\right)\left|\Omega_{s_0}^{RC;(1,1)}\right\rangle.$$

这些是单位向量，在表示 π^{RC} 中表示态 $\omega_{s_0}^{RC;u}$。在 $\mathcal{A}$ 上定义纯态 $\tilde{\omega}^{RC;u'}$，如下：

$$\tilde{\omega}^{RC;u'}(O) := \langle\widetilde{\Omega}^{RC;u'}, \pi^{RC}(O)\,\widetilde{\Omega}^{RC;u'}\rangle$$

对应于 GNS 向量

$$|\widetilde{\Omega}^{RC;u'}\rangle := \sum_u (U^*)_{u'u}\,|\Omega^{RC;u}\rangle \in \mathcal{H}^{RC}.$$

于是我们得到

$$\tilde{\omega}^{RC;u'}(O) = \omega_{s_0}^{RC;(1,1)}\Big(\sum_{u_1,u_2} U_{u_1u'}(U^*)_{u'u_2}\,(A^{u_1})^*OA^{u_2}\Big)$$

对于任意 $O \in \mathcal{A}$。利用引理 5.3.39、定义 5.3.36 引理 5.B.16，以及 A^u支撑于 s_0这一事实，对于任意 O 支撑于 Γ_{n-1}^E 的，我们得到：

$$\tilde{\omega}^{RC;u'}(O) = \eta_n^{RC;u'v_0}\Big(\sum_{u_1,u_2} U_{u_1u'}(U^*)_{u'u_2}\,(A^{u_1})^*OA^{u_2}\Big) = \tilde{\eta}_n^{RC;u'v_0}(O).$$

我们得出

$$\omega(O) = \mathrm{Tr}\{\rho O\} = \sum_{u'} \mu_{u'}\,\tilde{\omega}^{RC;u'}(O)$$

对于所有 $n \geq 3$ 和所有 $O \in \mathcal{A}_{\Gamma_{n-1}^E}$。由此可知，态之间存在等式

$$\omega = \sum_{u'} \mu_{u'}\tilde{\omega}^{RC;u'},$$

该等式将 ω 表示为属于 π^{RC}的纯态的有限混合。由此可知， ω 也属于 π^{RC}，这正是需要证明的结论。□

结合以上所得结果，可以证明以下命题。

命题 5.5.12。 设 $\omega \in \mathcal{S}_{s_0}$ 对某个格点 s_0 成立。那么 ω 有一个凸分解

$$\omega = \sum_{RC} \lambda_{RC}\, \omega^{RC}$$

转化为属于表示 π^{RC} 的态 ω^{RC} 。特别是，如果 ω 是纯态，那么对于某个确定的 RC， ω 属于 π^{RC} 。

证明：引理5.5.10 给出了分解

$$\omega = \sum_{RC:\lambda_{RC}>0} \lambda_{RC}\, \omega^{RC}$$

其中正的 λ_{RC} 以及态 ω^{RC} 定义于定义5.5.7 和引理5.5.9。此外，引理5.5.9 指出，对于 RC 每个 $\omega^{RC} \in \mathcal{S}_{s_0}^{RC}$满足 $\lambda_{RC} > 0$的情形。由此根据引理5.5.11 可知，态 ω^{RC} 属于 π^{RC}。证明至此完成。□

5.5.4 任意子扇区的分类

最后，我们将以上得到的结果汇总起来，以证明我们的主要结果——定理5.2.4。为方便起见，我们在此重述该定理。

定理 5.5.13。对于 $\mathcal{D}(G)$ 的每个不可约表示 RC ，都存在一个任意子表示 π^{RC}。这些表示 $\{\pi^{RC}\}_{RC}$ 两两不相交，并且任何任意子表示都与其中一个酉等价。

证明：两两不相交的任意子表示的存在性可由引理5.4.14 和命题5.4.20立即得出。

设 π 是一个任意子表示。根据命题 5.5.2，存在 $n \in \mathbb{N}$ ，使得任意子表示 π 包含一个纯态 ω ，满足对所有 A_v、 $B_f \in \mathcal{A}_{B_n^c}$， $\omega(A_v) = \omega(B_f) = 1$ 。对于任意格点 s_0，命题 5.5.6 随即给出一个属于 π 的纯态 $\psi \in \mathcal{S}_{s_0}$ 。命题 5.5.12 表明，对于某个确定的 RC，该态属于一个任意子表示 π^{RC} 。由于不可约表示 π 和 π^{RC} 包含同一个纯态，它们酉等价。这就证明了定理。□

5.6 讨论与展望

本文在无限体积情形下，完整分类了任意有限规范群 G 对应的 Kitaev量子双模型的任意子扇区。分类证明包含若干要素。首先，我们为量子双代数的每个不可约表示RC 构造了一组纯态 $\{\omega_s^{RC;u}\}_{s,\ u}$ 这些纯态彼此均酉等价。随后，我们证明相应的不可约 GNS 表示 $\{\pi^{RC}\}_{RC}$ 是一组互不相交的任意子表示。证明这些表示是任意子表示的关键，在于将其识别为“放大态射表示”。为证明完备性，我们证明量子双模型的任意子表示都包含其中一个态 $\omega_s^{RC;u}$，因此任何任意子表示都与某个 π^{RC}酉等价。

这一结果是将非阿贝尔量子双模型纳入 [Naa11、Naa12a、CNN18、CNN20、Oga22] 中所建立的拓扑序数学框架的第一步。要完整阐明这一理论，我们希望推导出所识别的任意子类型的融合规则和编织统计。第 5.4 节中的放大态射有望成为完成这项工作的理想工具，参见 [Naa15、SV93]。我们将这项分析留待后续工作。无限量子自旋系统拓扑序一般理论中的一个关键假设是锥的（近似）Haag 对偶性。阿贝尔量子双模型已满足这一性质 [FN15、Naa12a], ，但非阿贝尔情形尚未得到证明。

无挫折基态的纯性以及态的纯性证明 $\omega_s^{RC;u}$采用了弦网凝聚图景 [LW05]。同样的方法也可用于证明其他对易投影算符模型的基态具有纯性（例如 [BKM24]证明了双半子无挫折基态的纯性，而 [Vad23]证明了三维环面码无挫折基态的纯性）。原则上，同样的技巧可用于证明基于（弱）Hopf代数的 Levin-Wen 模型 [LW05] 和量子双模型在无限体积下具有唯一的无挫折基态（采用不同技巧证明 Levin-Wen 模型这一点的工作，已见 [JNPW23]）。

5.A 带状算子、Wigner 投影与 *-同态

5.A.1 带状算子、规范变换和磁通投影算符的基本性质

回顾第5.3.1 节中对带和带状算子的定义，以及规范变换 A_s^h 和磁通投影算符 B_s^g的定义；这些定义最初均由Kitaev提出 [Kit03]。

带状算子具有以下基本性质，这些性质很容易验证。另请参阅 [BMD07]的附录 B。

$$F_\rho^{h,g}F_\rho^{h',g'} = \begin{cases} \delta_{g,g'}F_\rho^{h'h,g} & \text{if } \rho \text{ is positive} \\ \delta_{g,g'}F_\rho^{hh',g} & \text{if } \rho \text{ is negative} \end{cases} \qquad (F_\rho^{h,g})^* = F_\rho^{\bar{h},g}. \tag{5.9}$$

设 ρ 满足其端点格点 $s_i = \partial_i\rho = (v_i,\ f_i)$ 满足 $v_0 \neq v_1$ 和 $f_0 \neq f_1$。那么，如果 ρ 为正，我们有

$$\begin{aligned} A_{s_0}^k F_\rho^{h,g} &= F_\rho^{kh\bar{k},kg}A_{s_0}^k & A_{s_1}^k F_\rho^{h,g} &= F_\rho^{h,g\bar{k}}A_{s_1}^k \\ B_{s_0}^k F_\rho^{h,g} &= F_\rho^{h,g}B_{s_0}^{hk} & B_{s_1}^k F_\rho^{h,g} &= F_\rho^{h,g}B_{s_1}^{k\bar{g}\bar{h}g} \end{aligned} \tag{5.10}$$

且如果 ρ 为反向

$$\begin{aligned} A_{s_0}^k F_\rho^{h,g} &= F_\rho^{kh\bar{k},kg}A_{s_0}^k & A_{s_1}^k F_\rho^{h,g} &= F_\rho^{h,g\bar{k}}A_{s_1}^k \\ B_{s_0}^k F_\rho^{h,g} &= F_\rho^{h,g}B_{s_0}^{kh} & B_{s_1}^k F_\rho^{h,g} &= F_\rho^{h,g}B_{s_1}^{\bar{g}\bar{h}gk}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

重要的是，带在其端点之外对规范变换和磁通投影算符不可见。也就是说，若 ρ 是一个带有 $\partial_0\rho = s_0$ 和 $\partial_1\rho = s_1$ 的有限带，且 $s = (v,\ f)$ 满足 $v \neq v(s_0)\ v(s_1)$，而 $s' = (v',\ f')$ 满足 $f' \neq f(s_0)\ f(s_1)$，那么

$$[F_\rho^{h,g}, A_s^k] = 0 = [F_\rho^{h,g}, B_{s'}^l] \tag{5.12}$$

对所有 g、h、k、$l \in G$。

规范变换和磁通投影算符的以下性质可由上文列出的带算子的性质立即推出。

$$A_s^1 = \mathbb{1} \qquad (A_s^h)^* = A_s^{\bar{h}} \qquad A_s^h A_s^{h'} = A_s^{hh'} \tag{5.13}$$

$$\sum_{g\in G} B_s^g = 1 \qquad (B_s^g)^* = B_s^g \qquad B_s^g B_s^{g'} = \delta_{g,g'} B_s^g \tag{5.14}$$

$$A_s^h B_s^g = B_s^{hg\bar{h}} A_s^h \tag{5.15}$$

若 $s \neq s'$，则对任意 h、h'、g、$g' \in G$，

$$[A_s^h, B_{s'}^g] = [A_s^h, A_s^{h'}] = [B_s^g, B_{s'}^{g'}] = 0 \tag{5.16}$$

回顾第 5.3.1 节，投影算符 $A_v := \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} A_s^h$ 和 $B_f := B_s^1$（其中 v 是 s 的顶点，而 f 是 f 的面）定义良好。对于任意顶点 v、v' 以及任意面 f、f'，有（[Kit03]）

$$[A_v, B_f] = [A_v, A_{v'}] = [B_f, B_{f'}] = 0. \tag{5.17}$$

5.A.2 将 $F^{h,\ g}_{\ \rho}$ 分解为 L_ρ^h、T_ρ^g

5.A.2.1 基本性质

回顾第 5.3.1 节中的定义 $T_\rho^g := F^{1,\ g}_{\ \rho}$ 和 $L_\rho^h := \sum_{g\in G} F^{h,\ g}_{\ \rho}$。

引理 5.A.1. $F^{h,\ g}_{\ \rho} = L_\rho^h T_\rho^g = T_\rho^g L_\rho^h$

证明：利用公式 (5.9) 可得

$$L_\rho^h T_\rho^g = \sum_{g'} F_\rho^{h,g'} F_\rho^{1,g} = F_\rho^{h,g} = F_\rho^{1,g} \sum_{g'} F_\rho^{h,g'} = T_\rho^g L_\rho^h$$

□

引理 5.A.2. 设 ρ 是一条有限带，满足 $v(\partial_0\rho) \neq v(\partial_1\rho)$。那么，若 s_0, s_1 是格点，且满足 $v(s_0) = \partial_0\rho$ 和 $v(s_1) = \partial_1\rho$，则有

$$A_{s_0}^h\, T_\rho^g = T_\rho^{hg}\, A_{s_0}^h \quad and \quad A_{s_1}^h\, T_\rho^g = T_\rho^{g\bar{h}}\, A_{s_1}^h$$

而对于满足 $v(s) \neq v(s_0)\ v(s_1)$ 的格点 s，有

$$[A_s^h, T_\rho^g] = 0$$

对所有 $g, h \in G$ 均成立。此外，

$$[B_s^k, T_\rho^g] = 0$$

对所有 k、$g \in G$，以及任意格点 s。

证明： 这可直接由 $T^g_\rho = F^{1,\ g}_{\rho}$ 以及方程（5.10）、（5.11）和（5.12）得出。 □

引理 5.A.3。 设 ρ 为一个有限带。对于所有 $v \neq v\,(\partial_i\rho)$ 和 $f \neq f\,(\partial_i\rho)$，有

$$[A_v, T^g_\rho] = 0 = [B_f, L^h_\rho].$$

证明： 这是公式（5.12）的一个平凡推论。 □

引理 5.A.4。 设 ρ 为一个有限带。对于所有满足 $v \neq v\,(\partial_0\rho)$ 的 v 以及所有满足$f \neq f\,(\partial_0\rho)$的 f，有

$$[A_v, L^h_\rho] = 0 = [B_f, T^g_\rho].$$

证明： 若对于 $i = 0,\ 1$ 有 $(\partial_i\rho)$ 或 $f \neq f\,(\partial_i\rho)$，则该结论由公式（5.12）立即得到。现在设 $(\partial_1\rho)$、$f = f\,(\partial_1\rho)$，并设，s' 为满足 $v\,(s) = v$和 $f\,(s') = f$的格点。于是有，

$$A_v L^h_\rho = \sum_k A^k_s L^h_\rho = \sum_{g,k} A^k_s F^{h,g}_\rho = \sum_{g,k} F^{h,g\bar{k}}_\rho A^k_s = \sum_k L^h_\rho A^k_s = L^h_\rho A_v$$
$$B_f T^g_\rho = B^1_{s'} F^{1,g}_\rho = F^{1,g}_\rho B^1_{s'} = T^g_\rho B_f$$

这就证明了该结论。 □

5.A.2.2 L^h_ρ 的交替分解

本节将算子 L^h_ρ 表示为 ρ 分解成其交替的直接子带与对偶子带的形式。此结果将在第 5.B.4 节中派上用场。

引理 5.A.5. 设 $\rho = \tau\rho'$ 是一个有限带，其初始三角形 τ 是正向三角形。那么

$$L^h_\rho = \sum_{k\in G} T^k_\tau\, L^{\bar{k}hk}_{\rho'}.$$

证明： 根据定义，$L^h_\rho = \sum_g F^{h,\ g}_{\rho}$。利用公式（5.1），可得

$$L^h_\rho = \sum_g \sum_k F^{h,k}_\tau F^{\bar{k}hk,g}_{\rho'} = \sum_k T^k_\tau\, L^{\bar{k}hk}_{\rho'},$$

这里我们用到了 $F^{h,\ k}_{\tau} = T^k_\tau$，因为 τ 是正向三角形。 □

引理 5.A.6. 设 $\rho = \tau\rho'$ 是一个有限带，且其初始三角形 τ 是一个对偶三角形。那么

$$L^h_\rho = L^h_\tau\, L_{\rho'}.$$

证明： 根据定义，$L^h_\rho = \sum_g F^{h,\ g}_{\rho}$。利用公式（5.1），可得

$$L^h_\rho = \sum_g \sum_k F^{h,k}_\tau F^{\bar{k}hk,g}_{\rho'} = L^h_\tau\, L^h_{\rho'},$$

其中我们使用了 $F^{h,\ k}_{\tau} = \delta_{k,\ 1} L^h_\tau$，因为 τ 是一个对偶三角形。 □

引理 5.A.7。 如果 $\rho=\{\tau_i\}_{i=1}^N$ 是一个直接带，那么

$$T_\rho^g=\sum_{k_1\cdots k_N=g}\prod_{i=1}^N T_{\tau_i}^{k_i}.$$

证明：根据定义， $T_\rho^g=F^{1,\ g}_{\ \rho}$。利用公式（5.1），我们得到

$$T_\rho^g=F_\rho^{1,g}=\sum_{k_1}F_{\tau_1}^{1,k_1}F_{\rho\backslash\{\tau_1\}}^{1,\bar{k}_1 g}=\sum_{k_1}T_{\tau_1}^{k_1}T_{\rho\backslash\{\tau_1\}}^{\bar{k}_1 g}.$$

我们可以归纳地应用这一结果，得到

$$T_\rho^g=\sum_{k_1,\cdots,k_N}\prod_{i=1}^N T_{\tau_i}^{k_i}\,F_\epsilon^{1,\bar{k}_N\cdots\bar{k}_1 g}=\delta_{k_1\cdots k_N,g}\sum_{k_1,\cdots,k_N}\prod_{i=1}^N T_{\tau_i}^{k_i}.$$

这就证明了该断言。 □

引理 5.A.8。若 $\rho=\{\tau_i\}_{i=1}^N$ 是对偶带，则

$$L_\rho^h=\prod_{i=1}^N L_{\tau_i}^h.$$

证明：这可由反复应用引理 5.A.6立即得到。 □

任意带都可以分解为一系列子带，它们依次交替为正向和对偶。

定义 5.A.9。 任意有限带 ρ 均可唯一分解为带 $\{I_a,J_a\}_{a=1,\ \cdots,\ n}$ 使得 I_a 是直接的， J_a 是对偶的，并且

$$\rho=I_1J_1\cdots I_nJ_n.$$

（可能， I_1 和/或 J_n）为空。我们称之为 ρ 的交替分解 .

引理 5.A.10。 设 ρ 是一个具有交替分解 $\rho=I_1J_1\cdots I_nJ_n$ 的有限带。则有

$$L_\rho^h=\sum_{k_1,\cdots,k_n\in G}\prod_{i=1}^n T_{I_i}^{k_i}L_{J_i}^{\bar{K}_i h K_i}$$

其中 $K_i=k_1k_2\cdots k_i$。

证明：第一个子带 $I_1=\{\tau_1,\cdots,\tau_m\}$ 完全由正向三角形构成。反复应用引理5.A.5 可得

$$L_\rho^h=\sum_{l_1,\cdots,l_m}\prod_{i=1}^m T_{\tau_i}^{l_i}\ L_{\rho\backslash I_1}^{\bar{k}_1 h k_1}$$

其中 $k_1 = l_1 \cdots l_m$。利用引理5.A.7可将其改写为

$$L_\rho^h = \sum_{k_1} T_{I_1}^{k_1} L_{\rho\setminus I_1}^{\bar{k}_1 h k_1}.$$

现在我们写作 $\rho' = \rho \setminus I_1$ 并令 $J_1 = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_{m'}\}$ 为 ρ' 中完全由对偶三角形组成的第一个子带。反复应用引理5.A.6 可得

$$L_{\rho'}^{\bar{k}_1 h k_1} = \prod_{i=1}^{m'} L_{\sigma_i}^{\bar{k}_1 h k_1} L_{\rho'\setminus J_1}^{\bar{k}_1 h k_1} = L_{J_1}^{\bar{k}_1 h k_1} L_{\rho'\setminus J_1}^{\bar{k}_1 h k_1}$$

其中最后一步用到了引理5.A.8。

综合以上结果，我们得到

$$L_\rho^h = \sum_{k_1} T_{I_1}^{k_1} L_{J_1}^{\bar{k}_1 h k_1} L_{\rho\setminus I_1 J_1}^{\bar{k}_1 h k_2}.$$

对带 $\rho \setminus \{I_1 J_1\} = I_2 J_2 \cdots I_n J_n$ 重复同样的论证，可得

$$L_\rho^h = \sum_{k_1,k_2} T_{I_1}^{k_1} L_{J_1}^{\bar{K}_1 h K_1} T_{I_2}^{k_2} L_{J_2}^{\bar{K}_2 h K_2} L_{I_3 J_3 \cdots I_n J_n}^{\bar{K}_2 h K_2}.$$

再重复论证 $n-2$ 次，即可得到所要证明的结论。 □

5.A.3 维格纳投影算符及其分解

5.A.3.1 基本工具

本文将给出一些事实，用于全文涉及 $\mathcal{D}(G)$ 不可约表示的计算。

引理 5.A.11. 设 $C \in (G)^{cj}$，则每个元素 $g \in G$ 都能以唯一的方式写成 $g = qn$，其中 $q \in Q_C$ 且 $n \in N_C$。

证明：对某个 $q \in Q_C$，我们有 $g r_C \bar{g} = q r_C \bar{q}$。因此 $\bar{q} g = n \in N_C$，也就是说，我们有 $g = qn$。

关于唯一性，设 $q_1 n_1 = q_2 n_2$ 且 $q_1, q_2 \in Q_C$，以及 $n_1, n_2 \in N_C$。则 $\bar{q}_2 q_1 = n_2 \bar{n}_1 \in N_C$，因此 $r_C = \bar{q}_2 q_1 r_C \bar{q}_1 q_2$，由此可得 $q_2 r_C \bar{q}_2 = q_1 r_C \bar{q}_1$。根据迭代集合 Q_C的构造，这只有在 $q_1 = q_2$时才可能成立，因此$n_1 = n_2$也成立。□

我们经常需要用到舒尔正交关系，现列于此以供参考。设 H 是一个有限群，R_1, $R_2 \in (H)_{irr}$ 是 H 的不可约表示，其矩阵实现分别为 M_{R_1} 和 M_{R_2}。那么

$$\sum_{h\in H} M_{R_1}^{jk}(h) M_{R_2}^{lm}(h)^* = \delta_{R_1,R_2}\delta_{j,l}\delta_{k,m}\frac{|H|}{\dim R_1}. \tag{5.18}$$

若 χ_R 是不可约表示 R的特征标，则有，

$$\sum_{R\in(H)_{irr}} \chi_R(h_1)\chi_R(h_2)^* = \begin{cases} |\mathcal{Z}_{h_1}| & \text{if } h_1, h_2 \text{ belong to the same } C \in (H)_{cj} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.19}$$

其中 $\mathcal{Z}_{h_1}$ 是 H中 h_1 的交换子。

5.A.3.2 维格纳投影算符

回顾维格纳投影算符 D_s^{RC}和 $D_s^{RC;u}$（定义5.3.6），以及标签变换算子$A_s^{RC;u_2u_1}$（定义 5.3.34）。另请注意， $D_s^{RC;u} = A_s^{RC;u}B_s^{c_i}$满足

$$A_s^{RC;u} := \frac{\dim R}{|N_C|}\sum_{m\in N_C} R^{jj}(m)^* A_s^{q_i m \bar{q}_i}.$$

引理 5.A.12. 设 $s_0 = (v_0, f_0)$ 为一个格点。则 $A_{s_0}^{RC;(i,j)}$和 $B_{s_0}^{c_i}$ 是对易投影算子，并且对所有 $v \neq v_0$ 和所有 $f \neq f_0$，它们也分别与 A_v 和 B_f 对易。

证明： 首先检查 $A_{s_0}^{RC;(i,j)}$是投影算子。

$$\begin{aligned} A_{s_0}^{RC;(i,j)} A_{s_0}^{RC;(i,j)} &= \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_{m,m'\in N_C} R^{jj}(m)^* R^{jj}(m')^* A_{s_0}^{q_i m\bar{q}_i} A_{s_0}^{q_i m'\bar{q}_i} \\ &= \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_{m,m'\in N_C} R^{jj}(m)^* R^{jj}(m')^* A_{s_0}^{q_i mm'\bar{q}_i} \end{aligned}$$

重新标记 $M = mm'$ 并使用舒尔正交关系 公式 (5.18)，得到

$$= \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right) \sum_{M\in N_C} R^{jj}(M)^* A_{s_0}^{q_i M\bar{q}_i} = A_{s_0}^{RC;(i,j)}$$

证明 $(A_{s_0}^{RC;(i,j)})^* = A_{s_0}^{RC;(i,j)}$只需直接应用公式 (5.13)。

$A_{s_0}^{RC;u}$与 A_v 对所有 $v \in \Gamma_n^V$ 和 $B_{s_0}^{c_i}$ 与 B_f 对$f \in \Gamma_n^F$利用公式 (5.16) 平凡对易。使用同一公式，对于所有 $[A_{s_0}^{RC;u}, B_f] = 0 = [B_{s_0}^{c_i}, A_v]$，还有 $f \in \Gamma_n^F$， $v \in \Gamma_n^V$。

还需证明 $[a_{s_0}^{RC;u}, B_{s_0}^{c_i}] = 0$。这由公式 (5.15) 以及以下事实可得：$q_i m q_i$与 c_i对所有 $m \in N_C$都对易。这意味着 $[A_{s_0}^{q_i m q_i}, B_{s_0}^{c_i}] = 0$。 □

引理 5.A.13。 $\{D_s^{RC;u}\}_{u\in I_{RC}}$ 是一组对易投影算子，满足 $D_s^{RC} = \sum_u D_s^{RC;u}$。特别地，$D_s^{RC}$是一个投影算子。

证明： $D_s^{RC;u}$是投影算子，这可由 $D_s^{RC;u} = A_s^{RC;u}B_s^{c_i}$以及以下事实得出： $A_s^{RC;u}$和 $B_s^{c_1}$是对易投影算子（引理 5.A.12）。

现在证明交换性。令 $u_1 = (i_1, j_1)$ $u_2 = (i_2, j_2)$。于是，

$$D_s^{RC;u_1} D_s^{RC;u_2} = \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_{m_1,m_2\in N_C} R^{j_1 j_1}(m_1)^* A_s^{q_{i_1} m_1 \bar{q}_{i_1}} B_s^{c_{i_1}} R^{j_2 j_2}(m_2)^* A_s^{q_{i_2} m_2 \bar{q}_{i_2}} B_s^{c_{i_2}}$$

现在我们使用公式 (5.14)、(5.15) 得到：

$$= \delta_{i_1,i_2}\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_{m_1,m_2\in N_C} R^{j_1 j_1}(m_1)^* A_s^{q_{i_1} m_1 m_2 \bar{q}_{i_1}} R^{j_2 j_2}(m_2)^* B_s^{c_{i_1}}$$

重新标记 $m = m_1 m_2$ 并使用舒尔正交关系公式 (5.18)，可得

$$= \delta_{u_1,u_2} D_s^{RC;u_1}.$$

最后，为了证明它们的和等于 D_s^{RC}，

$$\sum_u D_s^{RC;u} = \sum_{i,j} \frac{\dim R}{|N_C|} \sum_{m\in N_C} R^{jj}(m)^* A_s^{q_i m \bar{q}_i} B_s^{c_i} = \sum_i \frac{\dim R}{|N_C|} \sum_{m\in N_C} \chi_R(m)^* A_s^{q_i m \bar{q}_i} B_s^{c_i}$$
$$= \frac{\dim R}{|N_C|} \sum_{m\in N_C} \chi_R(d)^* \sum_{q_i \in Q_C} A_s^{q_i m \bar{q}_i} B_s^{c_i} = D_s^{RC}.$$

□

投影算子 D_s^{RC} 满足以下性质。

引理 5.A.14。 D_s^{RC} 是正交投影算子，并且

$$D_s^{RC} D_s^{R'C'} = \delta_{RC,R'C'} D_s^{RC}, \quad \sum_{RC} D_s^{RC} = \mathbb{1}.$$

证明：这可 由 [BMD07]的命题 21 和公式（B77）立即得出。 □

引理 5.A.15。 设 $s_0 = (v_0, f_0)$ 是一个格点，则 $D_{s_0}^{RC}$ 与 A_v、B_f 对所有 $v \neq v_0$ 和所有 $f \neq f_0$ 都对易。

证明： 注意到 $D_{s_0}^{RC} = \sum_u D_{s_0}^{RC;u}$(引理 5.A.13) 以及 $D_{s_0}^{RC;(i,j)} = A_{s_0}^{RC;(i,j)} B_{s_0}^{c_i}$，结论立即由引理 5.A.12 得出。 □

5.A.4 带状算子的表示基

回顾带状算子的定义 5.4.1 $F_\rho^{RC;uv}$。这些带状算子满足以下基本性质。

引理 5.A.16。 *([Naa15，引理 4。11])* 若 $\rho = \rho_1 \rho_2$ 则

$$F_\rho^{RC;uw} = \left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right) \sum_v F_{\rho_1}^{RC;uv} F_{\rho_2}^{RC;vw}.$$

引理 5.A.17。 *([Naa15，公式 (5.1)])* 有

$$\sum_v (F_\rho^{RC;u_1 v})^* F_\rho^{RC;u_2 v} = \delta_{u_1,u_2} \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \mathbb{1} \quad and \quad \sum_v F_\rho^{RC;u_1 v} (F_\rho^{RC;u_2 v})^* = \delta_{u_1,u_2} \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \mathbb{1}$$

5.A.5 拓扑荷的探测器

回顾定义5.4.11 “电荷探测器”的K_σ^{RC}。这些探测器满足以下基本性质。

引理 5.A.18. *([BMD07，公式（B77）])* 这些 K_σ^{RC}是正交投影算子，并且

$$K_\sigma^{RC} K_\sigma^{R'C'} = \delta_{RC,R'C'} K_\sigma^{RC}, \quad \sum_{RC} K_\sigma^{RC} = \mathbb{1}.$$

5.A.6 无挫折基态上的作用

在本小节中，我们将考察带状算子 $F_\rho^{RC;uv}$、投影算子 $D_s^{RC;u}$（定义5.3.6）和标签变换算子 $A_s^{RC;u_2u_1}$（定义5.3.34）作用于无挫折基态的几种方式。我们将在无挫折基态π_0、 $\mathcal{H}_0$、 $|\Omega_0\rangle$ 的 GNS 表示中工作，并在本节余下部分的记号中省略 ω_0。也就是说，对于任意 π_0 ，我们只写 $O\in\mathcal{A}$ ，而不写 O $\pi_0(O)$。

首先注意以下结论。

引理 5. **A.19.** 若 O 是酉算子或投影算子，且 $\omega_0(O)=1$，则 $O|\Omega_0\rangle=|\Omega_0\rangle$。

证明：我们有

$$1=\omega_0(O)=\langle\Omega_0,O\,\Omega_0\rangle.$$

因为 $\|O\|\le 1$ ，这只有在 $O|\Omega_0\rangle=|\Omega_0\rangle$ 时才可能。 □

引理 5.A.20。 设 ρ 是满足 $\partial_0\rho=s_0$ 的有限带。则

$$A_{s_0}^{RC;u_2u_1}F_\rho^{RC;u_1v}|\Omega_0\rangle=F_\rho^{RC;u_2v}|\Omega_0\rangle.$$

证明： 设 $u_1=(i_1,\ j_2)$、 $u_2=(i_2,\ j_2)$ 和 $v=(i',\ j')$，则

$$\begin{aligned}A_{s_0}^{RC;u_2u_1}F^{RC;u_1v}&=\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2\sum_{m,n}R^{j_2j_1}(m)^*R^{j_1j'}(n)^*A_{s_0}^{q_{i_2}m\bar{q}_{i_1}}F_\rho^{\bar{c}_{i_2},q_{i_2}n\bar{q}_{i'}}\\&=\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2\sum_{m,n}R^{j_2j_1}(m)^*R^{j_1j'}(n)^*\,F_\rho^{\bar{c}_{i_1},q_{i_1}mn\bar{q}_{i'}}\,A_{s_0}^{q_{i_2}m\bar{q}_{i_1}}.\end{aligned}$$

其中我们使用了公式 (5.10)。由于 $A_{s_0}^h|\Omega_0\rangle=|\Omega_0\rangle$ （引理 5.A.19）对所有 $h\in G$ 均成立，故可得

$$\begin{aligned}A_{s_0}^{RC;u_2u_1}F_\rho^{RC;u_1v}|\Omega_0\rangle&=\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2\sum_{m,n}R^{j_2j_1}(m)^*R^{j_1j'}(n)^*\,F_\rho^{\bar{c}_{i_1},q_{i_1}mn\bar{q}_{i'}}\,|\Omega_0\rangle\\&=\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2\sum_{m,m'}\sum_l R^{j_2j_1}(m)^*R^{j_1l}(\bar{m})^*R^{lj'}(m')^*\,F_\rho^{\bar{c}_{i_2},q_{i_2}m'\bar{q}_{i'}}|\Omega_0\rangle\\&=\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)\sum_m\sum_l R^{j_2j_1}(m)^*R^{lj_1}(m)\,F_\rho^{RC;(i_2,l)v}|\Omega_0\rangle\\&=F_\rho^{RC;u_2,v}|\Omega_0\rangle\end{aligned}$$

其中我们在第二行代入了 $m'=mn$ ，并在最后一步使用了公式 (5.18)。 □

引理 5.A.21。 我们有

$$D_s^{RC;u}|\Omega_0\rangle=\delta_{RC,R_1C_1}|\Omega_0\rangle$$

其中 R_1C_1 是平凡表示。即 $C_1=\{1\}$，因此 $N_{C_1}=G$，而 R_1 是 G的平凡表示。

证明：注意到 $D_s^{R_1C_1} = A_{v(s)}B_{f(s)}$，因此无挫折基态满足$\omega_0(D_s^{R_1C_1}) = 1$，这证明了在 $RC = R_1C_1$ 情形下的结论。利用引理 5.3.37 和引理 5.A.14，我们得到 $\omega_0(D_s^{RC;u}) = \omega_0(D_s^{RC;u}D_s^{R_1C_1}) = 0$。最后，由于 $D_s^{RC;u}$是一个投影算子，且 $|\Omega_0\rangle$ 是 ω_0的 GNS 向量，可知 $D_s^{RC;u}|\Omega_0\rangle = 0$ （引理 5.A.19）。□

引理 5.A.22。 设 ρ 是一条带有 $\partial_0\rho = s_0$ 的有限带。那么

$$D_{s_0}^{RC;u_1}F_\rho^{RC;u_2v}|\Omega_0\rangle = \delta_{u_1,u_2}F_\rho^{RC;u_1v}|\Omega_0\rangle.$$

证明： 证明是利用 $A_{s_0}^h$ 和 $B_{s_0}^g$ 与带状算子之间的基本对易规则（公式 (5.10)）以及以下事实进行的一项计算： $B_{s_0}^g|\Omega_0\rangle = \delta_{g,e}|\Omega_0\rangle$ 和 $A_{s_0}^h|\Omega_0\rangle = |\Omega_0\rangle$ 对所有 $h,\ g \in G$ （引理 5.A.19）。

设 $u_1 = (i_1,\ j_2)$、$u_2 = (i_2,\ j_2)$ 和 $v = (i',\ j')$，则

$$\begin{aligned}
D_{s_0}^{RC;u_1}F_\rho^{RC;u_2v}|\Omega_0\rangle &= \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_{m,n\in N_C} R^{j_1j_1}(m)^*R^{j_2j'}(n)^*A_{s_0}^{q_{i_1}m\bar{q}_{i_1}}\ B_{s_0}^{c_{i_1}}\ F_\rho^{\bar{c}_{i_2},q_{i_2}n\bar{q}_{i'}}\ |\Omega_0\rangle \\
&= \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \delta_{i_1,i_2} \sum_{m,n\in N_C} R^{j_1j_1}(m)^*R^{j_2j'}(n)^*F_\rho^{\bar{c}_{i_1},q_{i_1}mn\bar{q}_{i'}}\ A_{s_0}^{q_{i_1}m\bar{q}_{i_1}}\ |\Omega_0\rangle \\
&= \delta_{i_1,i_2}\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_{n,n'\in N_C}\sum_l R^{j_1l}(n')^*R^{lj_1}(\bar{n})^*R^{j_2j'}(n)^*\ F_\rho^{\bar{c}_{i_1},q_{i_1}n'\bar{q}_{i'}}\ |\Omega_0\rangle \\
&= \delta_{i_1,i_2}\delta_{j_1,j_2}\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)\sum_{n'} R^{j_1j'}(n')^*F_\rho^{\bar{c}_{i_1},q_{i_1}n'\bar{q}_{i'}}|\Omega_0\rangle = \delta_{u_1,u_2}\ F_\rho^{RC;u_1v}\ |\Omega_0\rangle
\end{aligned}$$

这里我们利用舒尔正交性得到了最后一行。 □

5.A.7 $\mu_\rho^{RC;uv}$和 $\chi_\rho^{RC;uv}$的性质

5.A.7.1 无挫折基态上的各种作用

回忆一下，我们定义了 $\chi_\rho^{RC;u_1u_2} = \pi_0 \circ \mu_\rho^{RC;u_1u_2}$: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，其中（$\pi_0$，$\mathcal{H}_0$，$|\Omega_0\rangle$）是无挫折基态 ω_0 的 GNS 三元组。以下我们会在记号中省略 π_0。也就是说，对于任意 $O \in \mathcal{A}$，我们直接写作 O，而不写 $\pi_0(O)$。

引理 5.A.23。 设 ρ 是一条满足 $\partial_0\rho = s_0$ 的半无限带。对于任意 $O \in \mathcal{A}$，有

$$\chi_\rho^{RC;u_1u_2}(OA_{s_0}^{RC;u_3u_2})|\Omega_0\rangle = \chi_\rho^{RC;u_1u_3}(O)|\Omega_0\rangle.$$

特别地，

$$\chi_\rho^{RC;u_1u_2}(A_{s_0}^{RC;u_3u_2})|\Omega_0\rangle = \chi_\rho^{RC;u_1u_3}(\mathbb{1})|\Omega_0\rangle = \delta_{u_1u_3}|\Omega_0\rangle.$$

证明： 根据定义

$$\chi_\rho^{RC;u_1u_2}(OA_s^{RC;u_3u_2}) = \lim_{n\uparrow\infty}\left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^2 \sum_v \left(F_{\rho_n}^{RC;u_1v}\right)^* OA_{s_0}^{RC;u_3u_2}\ F_{\rho_n}^{RC;u_2v}$$

因此，利用引理5.A.20 可得

$$\chi_\rho^{RC;u_1u_2}(OA_{s_0}^{RC;u_3u_2})|\Omega_0\rangle = \lim_{n\uparrow\infty}\left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^2 \sum_v \left(F_{\rho_n}^{RC;u_1v}\right)^* O\, F_{\rho_n}^{RC;u_3v}|\Omega_0\rangle$$
$$= \chi_\rho^{RC;u_1u_3}(O)$$

如所要求。

最后一个结论可由第一个结论和引理 5.4.3中的第 2 项立即得出。 □

由此可得

引理 5.A.24。 设 ρ 是一条满足 $\partial_0\rho = s_0$ 的半无限带。对于任意 $O \in \mathcal{A}$， 我们有

$$\chi_\rho^{RC;u_2u_1}(OD_{s_0}^{RC;u_3})|\Omega_0\rangle = \delta_{u_1,u_3}\chi_\rho^{RC;u_2u_1}(O)\,|\Omega_0\rangle.$$

证明：我们有

$$\chi_\rho^{RC;u_2u_1}(OD_{s_0}^{RC;u_3})|\Omega_0\rangle = \lim_{n\uparrow\infty}\left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^2 \sum_v \left(F_{\rho_n}^{RC;u_2v}\right)^* OD_{s_0}^{RC;u_3}\, F_{\rho_n}^{RC;u_1v}\,|\Omega_0\rangle$$

利用引理 5.A.22可得

$$= \delta_{u_1,u_3}\lim_{n\uparrow\infty}\left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^2 \sum_v \left(F_{\rho_n}^{RC;u_2v}\right) O\, F_{\rho_n}^{RC;u_1v}|\Omega_0\rangle$$
$$= \delta_{u_1,u_3}\,\chi_\rho^{RC;u_2u_1}(O)|\Omega_0\rangle,$$

其中最后一步用到了 $\chi_\rho^{RC;u_1u_2} = \pi_0 \circ \mu_\rho^{RC;u_1u_2}$以及命题 $\mu_\rho^{RC;u_1u_2}$中给出的5.4.3的定义。□

引理 5.A.25。设 ρ 为一条满足 $\partial_0\rho = s_0$的半无限带。对于任意顶点 $v \neq v(s_0)$ 以及任意面 $f \neq v(s_0)$，有

$$\chi_\rho^{RC;uu}(A_v)\,|\Omega_0\rangle = \chi_\rho^{RC;uu}(B_f)\,|\Omega_0\rangle = |\Omega_0\rangle\,.$$

证明：由 $B_f|\ _0\rangle = |\ _0\rangle$ $v \in \Gamma^V$ $f \in \Gamma^{F^\rho}$ $F_\rho^{RC;uv}$ 5 10 $A_v|\ _0\rangle =$的定义、公式 (.)，以及 □
Ω Ω Ω 对任意 和任意 均成立这一事实可得。

5.A.7.2 A 也 1 以证明放大态射表示的非简并性

我们继续在无挫折基态的 GNS 表示（π_0， $\mathcal{H}_0$， $|\Omega_0\rangle$）中工作，并再次从记号中省略 ω_0 π_0 。

定义 5.A.26. 对于任意满足 $\partial_0\rho = s_0$ 且带有 ρ 的有限带，以及任意 RC 和 u， $v \in I_{RC}$ 定义线性映射 $t_\rho^{RC;uv}$: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ， 使得

$$t_\rho^{RC;uv}(O) := \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_{w,z} F_\rho^{RC;uw}\, O\, \left(F_\rho^{RC;zw}\right)^* A_{s_0}^{RC;zv} D_{s_0}^{RC;v}. \tag{5.20}$$

回顾一下，对于半无限带 ρ，我们用 ρ_n 表示由 ρ 的前 n 个三角形组成的有限带。我们有如下显著性质：

引理 5.A.27. 设 ρ 是一条满足 $\partial_0\rho = s_0$ 的半无限带。对于任意支撑与 $\rho \setminus \rho_n$ 不相交的局部 O，我们有

$$\chi_\rho^{RC;u_1v_1}\left(t_{\rho_n}^{RC;u_2v_2}(O)\right)|\Omega_0\rangle = \delta_{u_1u_2}\delta_{v_1v_2}\,O|\Omega_0\rangle. \tag{5.21}$$

证明： 我们计算

$$\chi_\rho^{RC;u_1v_1}\left(t_{\rho_n}^{RC;u_2v_2}(O)\right)|\Omega_0\rangle = \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_{w,u} \chi_\rho^{RC;u_1v_1}\left(F_{\rho_n}^{RC;u_2w}\,O\left(F_{\rho_n}^{RC;uw}\right)^* A_{s_0}^{RC;uv_2} D_{s_0}^{RC;v_2}\right)|\Omega_0\rangle$$

利用引理 5.A.23 和引理 5.A.24，可得：

$$= \delta_{v_1,v_2}\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_{w,u} \chi_\rho^{RC;u_1u}\left(F_{\rho_n}^{RC;u_2w}\,O\left(F_{\rho_n}^{RC;uw}\right)^*\right)|\Omega_0\rangle$$

取足够大的 $m > n$，我们得到

$$= \delta_{v_1,v_2}\sum_{u,v,w}\left(F_{\rho_m}^{RC;u_1v}\right)^* F_{\rho_n}^{RC;u_2w}\,O\left(F_{\rho_n}^{RC;uw}\right)^* F_{\rho_m}^{RC;uv}|\Omega_0\rangle$$

将 $\rho_m = \rho_n\rho'$ 分解后，利用引理 5.A.16，我们得到

$$\begin{aligned}= \delta_{v_1,v_2}\left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^2 \sum_{u,v,w}\sum_{y,z}&\left(F_{\rho_n}^{RC;u_1y}F_{\rho'}^{RC;yv}\right)^* F_{\rho_n}^{RC;u_2w}\,O\\ &\times\left(F_{\rho_n}^{RC;uw}\right)^* F_{\rho_n}^{RC;uz}F_{\rho'}^{RC;zv}\,|\Omega_0\rangle\end{aligned}$$

由于 O 的支撑与 $\rho \setminus \rho_n \supset \rho'$ 不相交，我们有 $[F_{\rho'}^{RC;zv}, O] = 0$。此外，我们还有 $[F_{\rho'}^{RC;zv}, F_{\rho_n}^{RC;u'w'}] = 0$，对所有 u'，$w' \in I_{RC}$ 都成立，因为 ρ' 和 ρ_n 不相交。因此，我们可以将 $F_{\rho'}^{RC;zv}$ 移到左侧并得到，

$$\begin{aligned}= \delta_{v_1,v_2}\left(\frac{|N_C|}{\dim R}\right)^2 \sum_{w}\sum_{y,z}&\left(\sum_v\left(F_{\rho'}^{RC;yv}\right)^* F_{\rho'}^{RC;zv}\right)\\ &\times\left(F_{\rho_n}^{RC;u_1y}\right)^* F_{\rho_n}^{RC;u_2w}O\left(\sum_u\left(F_{\rho_n}^{RC;uw}\right)^* F_{\rho_n}^{RC;uz}\right)|\Omega_0\rangle\end{aligned}$$

利用引理 5.A.17，对 u 求和得到一个 $\delta_{w,z}$ 而对 v 求和得到一个 $\delta_{y,z}$ 因此

$$\begin{aligned}&= \delta_{v_1,v_2}\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^2 \sum_w\left(F_{\rho_n}^{RC;u_1w}\right)^* F_{\rho_n}^{RC;u_2w}\,O\,|\Omega_0\rangle\\ &= \delta_{u_1,u_2}\delta_{v_1,v_2}\,O|\Omega_0\rangle\end{aligned}$$

如所需。 □

5.B 弦网的性质

5.B.1 有向路径与通量

回顾第 5.3.1 节中有向路径和带的直接路径的定义。

若直接路径 γ 支撑于区域 $S \subset \Gamma^E$，且 $\alpha \in \mathfrak{G}_S$ 是定义在 S 上的规范构型，则我们将 α 穿过 γ 的通量定义为

$$\phi_\gamma(\alpha) := \prod_{e\in\gamma} \alpha_e,$$

其中，乘积按照 γ 的顺序排列。我们有 $\phi_\gamma(\alpha) = \phi_\gamma(\alpha)$，并且若$\gamma = \gamma_1\gamma_2$，则有 $\phi_\gamma(\alpha) = \phi_{\gamma_1}(\alpha)\phi_{\gamma_2}(\alpha)$。

类似地，我们称有限带 $\rho = \{\tau_i\}_i^l$ 支撑于 $S \subset \Gamma^E$，如果对于所有 $i = 1, \cdots, l$，都有 $e_{\tau_i} \in S$ 或 $\bar{e}_{\tau_i} \in S$。在这种情形下，直接路径 ρ^{dir} 支撑于 S，并令$\phi_\rho(\alpha) := \phi_{\rho^{dir}}(\alpha)$。这与定义 5.3.2 相符。

5.B.2 弦网磁通

定义 5.B.1. 若两个直接路径 γ_1 和 γ_2 可通过围绕 $f \in \Gamma^F$ 的面变换相联系，则称它们相关；对于直接路径 $\gamma', \gamma'', \gamma_1^f$和 γ_2^f，有 $\gamma_1 = \gamma'\gamma_1^f\gamma''$和 $\gamma_2 = \gamma'\gamma_2^f\gamma''$，且 $\gamma_1^f\bar{\gamma}_2^f$是由三条边组成、环绕面 f的闭合直接路径。

引理 5.B.2. 设 γ_1, γ_2 是 Γ_n^E 中的直接路径，且二者通过围绕 $f \in \Gamma_n^F$ 的面变换相联系；再设 $\alpha \in \mathfrak{G}_n$ 满足 $B_f|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$，则

$$\phi_{\gamma_1}(\alpha) = \phi_{\gamma_2}(\alpha).$$

证明：根据定义，对于直接路径 $\gamma', \gamma'', \gamma_1^f$和 γ_2^f，有 $\gamma_1 = \gamma'\gamma_1^f\gamma''$和 $\gamma_2 = \gamma'\gamma_2^f\gamma''$，且 $\gamma_1^f\bar{\gamma}_2^f$是由三条边组成、环绕面 f的闭合直接路径。

由 $B_f|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ 可得 $\phi_{\gamma_1^f\bar{\gamma}_2^f}(\alpha) = 1$，或者 $\phi_{\gamma_1^f}(\alpha) = \phi_{\gamma_2^f}(\alpha)$。因此

$$\phi_{\gamma_1}(\alpha) = \phi_{\gamma'}(\alpha)\phi_{\gamma_1^f}(\alpha)\phi_{\gamma''}(\alpha) = \phi_{\gamma'}(\alpha)\phi_{\gamma_2^f}(\alpha)\phi_{\gamma''}(\alpha) = \phi_{\gamma_2}(\alpha)$$

如所要求的。 □

回顾第 ν_n 节中定义的基准带状图和边界带状图 β_n，见图5.3.2。5.8。

引理 5.B.3。设 $C \in (G)^{cj}$ 以及 $i = 1$、$\cdots$、$|C|$。若 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;i}$，则有

$$\phi_{\beta_n}(\alpha) = \overline{\phi_{\nu_n}(\alpha)}\, c_i\, \phi_{\nu_n}(\alpha) \in C.$$

证明：令 γ_{s_0} 为 $\rho_\triangle(s_0)$ 的直接路径，因此 $\phi_{\gamma_{s_0}}(\alpha) = c_i \in C$。令 γ_{ν_n} 为 ν_n 的直接路径，并令 $\underline{\gamma_{\beta_n}}$ 为边界带 β_n 的直接路径。考虑直接路径$\gamma = \gamma_{s_0}\gamma_{\nu_n}\gamma_{\beta_n}\gamma_{\nu_n}$。

由于 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;i}$根据定义，我们有 $B_f |\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ 对于所有 $f \in \Gamma_n^F$。由于 γ 可以通过在面 $f \in \Gamma_n^F$ 上进行一系列面变换收缩为空带，因此由引理5.B.2 可知 $\phi_\gamma(\alpha) = \phi_{\overline{\emptyset}}(\alpha) = 1$, 这等价于

$$\phi_{\beta_n}(\alpha) = \phi_{\gamma_{\beta_n}}(\alpha) = \overline{\phi_{\gamma_{\nu_n}}(\alpha)}\, \phi_{\gamma_{s_0}}(\alpha) \quad \phi_{\gamma_{\nu_n}}(\alpha) = \overline{\phi_{\nu_n}(\alpha)}\, c_i\, \phi_{\nu_n}(\alpha)$$

如所要求。 □

引理 5.B.4。令 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}$，则 $\bar{q}_i \phi_{\nu_n}(\alpha) q_{i(b)} \in N_C$。

证明： 由引理5.B.3 可得

$$\phi_{\beta_n}(\alpha) = \overline{\phi_{\nu_n}(\alpha)}\, c_i\, \phi_{\nu_n}(\alpha) = \overline{\phi_{\nu_n}(\alpha)}\, q_i\, r_C\, \bar{q}_i\, \phi_{\nu_n}(\alpha),$$

特别地，$\phi_{\beta_n}(\alpha) = \phi_{\beta_n}(b(\alpha)) \in C$，因此存在唯一的标签 $i(b) \in \{1, \cdots, |C|\}$ 使得 $\phi_{\beta_n}(\alpha) = q_{i(b)} r_C \bar{q}_{i(b)}$。利用这一点，我们得到

$$r_C = \bar{q}_{i(b)} \overline{\phi_{\nu_n}(\alpha)}\, q_i\, r_C\, \bar{q}_i\, \phi_{\nu_n}(\alpha)\, q_{i(b)}.$$

这表明 $\bar{q}_i \phi_{\nu_n}(\alpha)\ q_{i(b)} \in N_C$，如所要求。 □

5.B.3 规范群对弦网的作用

回忆一下规范变换群 $\mathcal{G}$，它由形如 $\mathcal{U}(\{g_v\}) = \prod_{v \in \Gamma_n^V} A_v^{g_v}$ 的酉算子组成，其中对每个 $v \in \Gamma_n^V$ 都有 $g_v \in G$。这些规范变换作用于 Γ_n^E 的体区，并且它们都支撑于 $\Gamma_n^E \setminus \partial\Gamma_n^E$。

我们以类似的方式定义作用于 $\mathcal{H}_n$ 的边界规范变换 .

定义 5.B.5。回忆一下 $\partial\Gamma_n^V = \Gamma_{n+1}^V \setminus \Gamma_n^V$，并设 $\partial\mathcal{G}$ 为形如$\mathcal{U}(\{g_v\}) = \prod_{v \in \mathcal{V}(\partial\Gamma_n^E)} \tilde{A}_v^{g_v}$ 的酉算子群，其中对每个 $v \in \partial\Gamma_n^V$ 都有 $g_v \in G$。这里，$\tilde{A}_v^g$ 是 A_v^g 在 $\mathcal{H}_n$ 上的限制。我们称 $\partial\mathcal{G}$ 为边界规范变换群。

N注意，边界规范变换支撑于 $\Gamma_n^E \setminus \Gamma_{n-1}^E$.

在证明规范群 $\mathcal{G}$ 的自由传递作用引理之前，我们先给出以下结果，它将有助于证明规范变换的唯一性陈述。

引理 5.B.6. 若 $\alpha \in \mathfrak{G}_n$ 是 Γ_n^E 上的任意规范构型，且 $U \in \mathcal{G}$ 满足$U |\alpha\rangle = |\alpha\rangle$，则 $U = \mathbb{1}$。

证明： 由于 $U \in \mathcal{G}$，它具有如下形式：对于群元素 $g_v \in G$，$U = \prod_{v \in \Gamma_n^V} A_v^{g_v}$。对任意边 $e = (v, v')$，若 $v \in \partial\Gamma_n^V$ 且 $v' \in \Gamma_n^V$，则有 $\alpha_e = \alpha_e \bar{g}_{v'}$，因此 $g'_v = 1$。这表明实际上 $U \in \mathcal{G}_{n-1}$。归纳地继续下去，我们得到 $U \in \mathcal{G}_0$，即 U 具有 $U = A_{v_0}^{g_{v_0}}$ 的形式。最后，考虑任意边 $e = (v_0, v)$，可得 $\alpha_e = g_{v_0} \alpha_e$，因此 $g_{v_0} = 1$ 且 $U = \mathbb{1}$。 □

回顾定义 $\partial\mathcal{G}$ 中的边界规范变换 5.B.5。

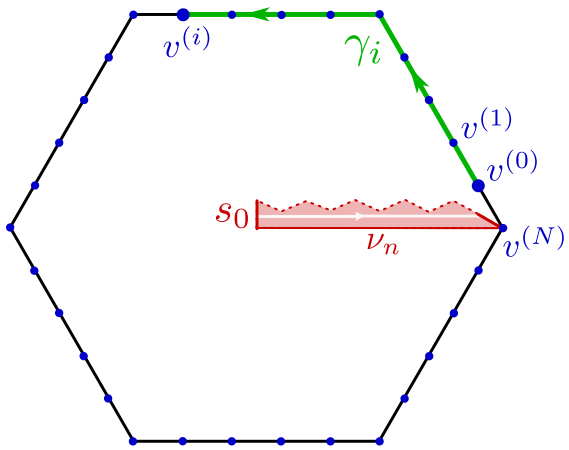


图 5.10：区域 Γ_n^E边界上的顶点 $v^{(i)}$ 和有向路径 σ_i ，相对于基准带 ν_n定义。黑色六边形表示区域 Γ_n^E 。图中未显示 Γ_n^E 的各条边。

引理 5.B.7。 对于任意一对与共轭类 C 相容的边界条件 $b, b' \in \mathfrak{B}_n^C$ ，存在一个边界规范变换 $U_{b'b} \in \partial\mathcal{G}$ ，使得对于任意$\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}$，我们都有 $U_{b'b}|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ ，其中 $\alpha' \in \mathcal{P}_n^{C;ib'}$ 满足对所有 $e \in \Gamma_{n-1}^E$均有 $\alpha_e = \alpha'_e$ 。

证明：固定一个共轭类 C 和一个通量 $c_i \in C$。我们将首先证明，对于 b_0 对应于图5.11a中的弦网的简单边界条件，结论成立。也就是说，令 b 为任意一个与 C相容的边界条件。我们将构造一个边界规范变换 $U_{b_0 b} \in \partial\mathcal{G}$ ，使得对任意 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}$，都有 $U|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ ，其中 $\alpha' \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}$满足 $\alpha_e = \alpha'_e$ 对所有 $e \in \Gamma_{n-1}^E$.

为此，令 $\partial\Gamma_n^V = \{v^{(0)}, v^{(1)}, \cdots, v^{(N)}\}$ 为 $\partial\Gamma_n^V$中顶点的一个标记，如图5.10所示。对于 $i = 1, \cdots, N$，令 σ_i 为一条沿$\partial\Gamma_n^E$ 逆时针方向从 $v^{(0)}$ 到 $v^{(i)}$ 的有向路径，如图所示。令 σ_{N+1} 为一条围绕 $\partial\Gamma_n^E$ 逆时针绕行、以 $v^{(0)}$为起点和终点的有向路径。

由于 $\phi_{\sigma_{N+1}}(b) \in C$ ，它可写为 $\phi_{\sigma_{N+1}}(b) = c_{i'} = qc_i\bar{q}$ ，其中某个 $q \in G$。令 $g_{v^{(i)}} := \bar{q}\,\phi_{\sigma_i}(b)$，并令 $U_{b_0 b} = \prod_{i=1}^N \tilde{A}_{v^{(i)}}^{g_{v^{(i)}}} \in \partial\mathcal{G}$。取 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}$，并令 α' 为满足 $U|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$的唯一弦网。那么对于任意 $i = 1, \cdots, N-1$，我们定义 $e = (v^{(i)}, v^{(i+1)}) \in \partial\Gamma_n^E$，并得到

$$b(\alpha')_e = \alpha'_e = g_{v^{(i)}}\,\alpha_e\,g_{v^{(i+1)}} = \bar{q}\phi_{\sigma_i}(b)b_e\bar{\phi}_{\sigma_{i+1}}(b)q = 1.$$

此外，对于最后一条边界边 $e = (v^{(N)}, v^{(0)})$，我们有

$$b(\alpha')_e = \alpha'_e = g_{v^{(N)}}\alpha_e\bar{g}_{v^{(0)}} = \bar{q}\phi_{\sigma_{N+1}}(b)q = c_i.$$

由此可得 $b(\alpha') = b$。此外，由于 $U_{b_0 b}$ 支撑于 $\Gamma_n^E \setminus \Gamma_{n-1}^E$ ，对于所有 $e \in \Gamma_{n-1}^E$，我们有 $\alpha_e = \alpha'_e$。这就证明了在此特殊情形下，该断言的存在性部分。

利用相同的论证可以证明，若 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}$，则对于弦网 $\alpha' \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}$，有 $U_{b_0 b}^*|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ ，使得对所有 $e \in \Gamma_{n-1}^E$， $\alpha_e = \alpha'_e$。

让我们不 我们证明适用于一般边界条件的这一论断 b， b' 其与 C兼容 .

我们设定$U_{b'b} = U^*_{b_0b'}U_{b_0b} \in \partial\mathcal{G}$，其中边界规范变换 U_{b_0b} 和 $U_{b_0b'}$ 如上所构造。于是，对于任意 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}$，我们有 $U_{b'b}|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$，对于某个弦网$\alpha' \in \mathcal{P}_n^{C;ib'}$ 满足：对所有 $e \in \Gamma^E_{n-1}$，$\alpha_e = \alpha'_e$。这就证明了一般情形。□

回顾弦网集合的定义 5.3.20 $\mathcal{P}_n^{C;ib}\, m(m)$:

固定一个共轭类 C、一个与 C 兼容的边界条件 b 以及一个标签 i =1, $\cdots, |C|$。对于任意 $m \in N_C$，我们有

$$\mathcal{P}_n^{C;ib}(m) := \{\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib} : \phi_{\nu_n}(\alpha) = q_i m \bar{q}_{i'}\}$$

其中 $i' = i(b)$。

引理 5.B.8。对于任意两个 $\alpha, \alpha' \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$，存在唯一的规范变换 $U \in \mathcal{G}_n$使得 $U|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$。此外，若 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$ 且$U \in \mathcal{G}_n$，则 $U|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$，其中$\alpha' \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(\overline{m})$。也就是说，$\mathcal{G}_n$ 在 $\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$上自由且传递地作用。

证明：固定一个共轭类 C 和一个通量 $c_i \in C$。我们先对简单边界条件 b_0 证明该结论，它对应于图5.11a中的弦网。记 $\alpha^{(0)} \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}(1)$ 为该图所示的弦网。除了红色边之外，它处处具有平凡规范构型。我们先证明，对任意 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}$，存在一个$U \in \mathcal{G}_n$ 使得 $U|\alpha\rangle = |\alpha^{(0)}\rangle$。

令 $v_* \in \partial\Gamma_n^V$ 为图 5.11a 中定义的顶点。对于任意格点 $v \in \Gamma_n^V \cup \partial\Gamma_n^V$，令 γ_v 为一条从 v_* 到 v 的直接路径，且不包含任何红色边（引理 5.B.2）。即，γ_v 被禁止穿过基准带。示例见图 5.11a。对所有 $v \in \Gamma_n^V \cup \partial\Gamma_n^V$，定义 $g_v := \phi_{\gamma_v}(\alpha)$。注意，由于除了 f_0 之外，α 对所有面都满足平坦规范条件，因此只要我们选择不包含红色边的路径，群元素 g_v 就与路径 γ_v 的选择无关。（该条带充当分支切割。）进一步注意，由于除了红色边界边之外，边界条件处处平凡，因此对于所有 $v \in \partial\Gamma_n^V$，我们有 $g_v = 1$。此外，$g_{v_0} = 1$，因为我们可以像图 5.11b 中那样让 γ_{v_0} 沿着基准带的直接部分延伸。由于 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}(1)$，我们有 $\phi_{\nu_n}(\alpha) = 1$，因此 $g_{v_0} = 1$。

Let

$$U = \prod_{v\in\Gamma_n^V} A_v^{g_v} \prod_{v\in\partial\Gamma_n^V} \tilde{A}_v^{g_v} = \prod_{v\in\overline{\Gamma}_n^V} A_v^{g_b}$$

wher因为对于所有 $v \in \partial\Gamma_n^V$ 以及 $v = v_0$，我们使用了 $g_v = 1$。也就是说，我们有 $U \in \mathcal{G}_n$ ¯ .

现在令 $\alpha' \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}$ 为满足 $U|\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$ 的唯一弦网。我们将证明 $\alpha' = \alpha^{(0)}$。

令 $e = (v, v')$ 为一条非红色边。则 $\alpha'_e = g_v\alpha_e\bar{g}_{v'} = 1$，因为 $g_v\alpha_e$ 是 α 穿过 $\gamma_v e$ 的通量，而 $\gamma_v e$ 是一条从 $v^{(N)}$ 到 v' 且不经过红色边的路径。如前所述，这意味着 $g_v\alpha_e = g_{v'}$。我们看到，对于除红色边外的所有边 e，都有 $\alpha'_e = 1$。

现在考虑一条红色边 $e = (v, v')$，我们将其取为朝上定向，使得$\alpha^{(0)}_e = c_i$，见图 5.11b。令 I 为从 v_0 到 v 的路径，II 为从 v_0 到 v' 的路径，如图 5.11b 所示。于是 $\gamma_{v_0}I$ 是从 v_* 到 v 的路径，并且由于 $g_{v_0} = 1$，我们有 $g_v = \phi_I(\alpha)$。类似地，我们有 $g_{v'} = \phi_{II}$。令 γ_{s_0} 为一条起点和终点都在 v_0、环绕

f_0 逆时针方向。闭环 $IeII$ 可以通过 γ_{s_0} 在面 $f \in \Gamma_n^F$ 上进行一系列面变换（定义 5.B.1）。由于 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}$ 我们有 $B_f |\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ 对所有 $f \in \Gamma_n^F$ 成立，因此由引理 5.B.2 可知 $c_i = \phi_{\gamma_{s_0}}(\alpha) = \phi_{IeII}(\alpha) = g_v \alpha_e \bar{g}_{v'} = \alpha'_e$。

现在令 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}(1)$ 为任意值。我们刚刚证明，存在规范变换 $U_1, U_2 \in \mathcal{G}_n$ 使得 $U_1 |\alpha_1\rangle = U_2 |\alpha_2\rangle = |\alpha^{(0)}\rangle$。因此，规范变换 $U = U_2^* U_1 \in \mathcal{G}_n$ 满足 $U |\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$。也就是说，我们已经证明了 $\mathcal{P}_n^{C;ib_0}(1)$ 这一特殊情形下的存在性结论。

现在让我们将结论推广到任意 $m \in N_C$ 下的 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}(m)$。也就是说，这些弦网满足 $\phi_{\nu_n}(\alpha_1) = \phi_{\nu_n}(\alpha_2) = q_i m \bar{q}_i$，其中我们注意到 $i(b_0) = i$。

施加规范变换 $U_{v_0} = A_{v_0}^{q_i \bar{m} \bar{q}_i}$ 后，得到 $U_{v_0} |\alpha_1\rangle = |\alpha'_1\rangle$ 和 $U_{v_0} |\alpha_2\rangle = |\alpha'_2\rangle$，其中弦网为 $\alpha'_1, \alpha'_2 \in \mathcal{P}_n^{C;i}(1)$。这里，$s_0$ 处的通量 c_i 得以保留，因为 $q_i \bar{m} \bar{q}_i$ 与 c_1 对易；而 $A_{v_0}^{q_i \bar{m} \bar{q}_i}$ 的作用会从左侧将穿过 ν_n 的通量乘以 $q_i \bar{m} \bar{q}_i$，从而使其变为平凡。

应用上述结果，我们得到一个规范变换 $U \in \mathcal{G}_n$，使得 $U |\alpha'_1\rangle = |\alpha'_2\rangle$。由于 U 与 $U_{v_0}^*$ 对易，因此我们得到

$$U |\alpha_1\rangle = U U_{v_0}^* |\alpha'_1\rangle = U_{v_0}^* |\alpha'_2\rangle = |\alpha_2\rangle .$$

Th这证明了对于任意 $m \in N$，情形 $\mathcal{P}_n^{C;ib_0}(m)$ 下存在性断言成立 C.

现在考虑一个与 C相容的一般边界条件 b。取α_1、$\alpha_2 \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m) \subset \mathcal{P}_n^{C;ib}$，其中 $m \in N_C$。引理 5.B.7 给出一个边界规范变换 $U_{b_0 b} \in \partial\mathcal{G}$，使得 $U_{b_0 b} |\alpha_1\rangle = |\alpha'_1\rangle$，且对于弦网$\alpha'_1$、$\alpha'_2 \in \mathcal{P}_n^{C;ib_0}(m')$，有 $U_{b_0 b} |\alpha_2\rangle = |\alpha'_2\rangle$，其中 $m' \in N_C$。这里我们注意到，由于 α_1和 α_2通过基准带 ν_n 的通量相同，且二者都受到同一个边界规范变换 $U_{b_0 b}$作用，因此得到的弦网 α'_1 和 α'_2 通过 ν_n的通量也相同（尽管可能不同于 α_1 和 α_2的通量）。

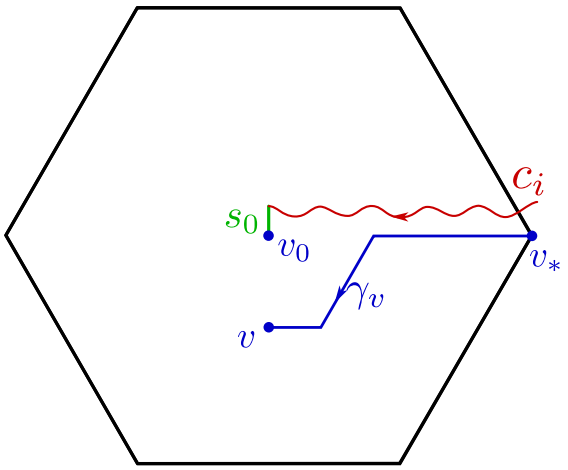
利用上面得到的结果，我们有一个规范变换 $U \in \mathcal{G}_n$ 使得$U |\alpha'_1\rangle = |\alpha'_2\rangle$。由于 U与 $U_{b_0 b}$ 对易，我们得到

$$U |\alpha_1\rangle = U U_{b_0 b}^* |\alpha'_1\rangle = U_{b_0 b}^* U |\alpha'_1\rangle = U_{b_0 b}^* |\alpha'_2\rangle = |\alpha_2\rangle .$$

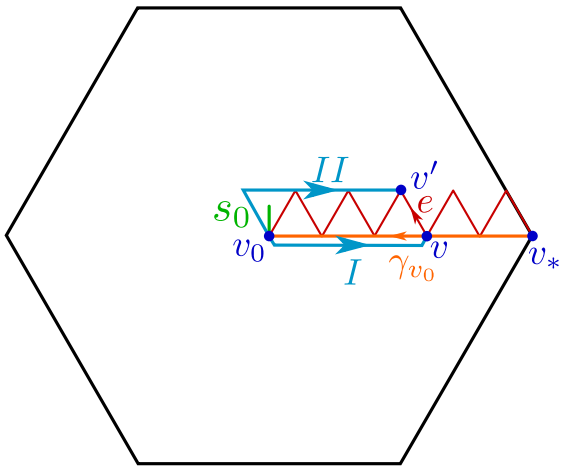
这证明了该结论在一般情形下的存在性部分。

至于唯一性，取 α_1，$\alpha_2 \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$，并假设 U，$U' \in \mathcal{G}_n$都满足 $U |\alpha_1\rangle = U' |\alpha_1\rangle = |\alpha_2\rangle$。那么 $U' U^* |\alpha_2\rangle = |\alpha_2\rangle$，由引理 5.B.6 可知$U' = U$。

剩下要证明的是，若 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$ 且 $U \in \mathcal{G}_n$，则对于某个 $\alpha' \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$，$U |\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$。为此，只需注意到 U 支撑于 $\Gamma_n^E \setminus \partial\Gamma_n^E$，因此它无法改变边界条件。此外，根据引理 5.A.12，任何不支撑于 v_0 的规范变换都与投影算子 $B_{s_0}^{c_i}$ 对易，所以 $U \in \mathcal{G}_n$ 无法改变标签i。最后，若 $v \in \Gamma_n^V$，则要么没有与 v 相接的边属于基准带的直接路径，此时 $\phi_{\nu_n}(\alpha') = \phi_{\nu_n}(\alpha)$ 显然成立；要么恰有两条与 v 相接的边属于基准带，记作 e_i 和 e_{i+1}，其中我们沿着 ν_n 的定向将基准带的直接边标记为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$。在这种情形下，若 $|\alpha'\rangle = A_v^h |\alpha\rangle$,



(a) 一个简单的弦网 $\alpha^{(0)} \in \mathcal{P}_n^{C;i}$，仅在基准带的对偶部分上非平凡$\nu_n$。相应的边界条件 b_0 除一条边外处处平凡。



(b) 引理5.B.8证明中使用的路径。

图 5.11

那么 $\alpha'_{e_i} = \alpha_{e_i}\bar{h}$ 和 $\alpha'_{e_{i+1}} = h\alpha_{e_{i+1}}$，且 α 和 α' 在所有其他边上相同。由此可得 t

$$\phi_{\nu_n}(\alpha') = \prod_{j=1}^{n} \alpha'_{e_j} = \prod_{j=1}^{i-1} \alpha_{e_j} \times \alpha_{e_i}\bar{h}\, h\, \alpha_{e_{i+1}} \times \prod_{j=i+2}^{n} \alpha_{e_j} = \phi_{\nu_n}(\alpha).$$

我们看到，没有任何 $\overline{A}_v^h \in \mathcal{G}_n$ 会改变穿过基准带的通量。由于 $\mathcal{G}_n$ 由这些位点规范变换生成，因此我们得到了所需结果。□

5.B.4 带状算子对弦网态的作用

引理 5.B.9。 设 ρ 是一个支撑于 $S \subset \Gamma^E$ 和 $\alpha \in \mathfrak{G}_S$ 内的有限带。则

$$T_\rho^g \,|\alpha\rangle = \delta_{\phi_\rho(\alpha),g} \,|\alpha\rangle$$

对任意 $g \in G$ 均成立。特别地，对于所有带 ρ、ρ' 以及任意 g、$g' \in G$，都有 $[T_\rho^g, T_{\rho'}^{g'}] = 0$。

证明： 我们通过归纳法证明该引理。如果 ϵ 是空带，那么 $T_\epsilon^g = \delta_{1,\ g}\mathbb{1}$，这说明穿过空带的通量总是平凡的。如果 $\rho = \{\tau\}$ 由单个对偶三角形组成，那么 $T_\rho^g = F^{1,\ g}_{\ \rho,\ \rho} = \delta_{1,\ g}\mathbb{1}$ 这说明穿过 $\rho^{dir} = \emptyset$ 的通量总是平凡的。如果 $\rho = \{\tau\}$ 由单个正向三角形组成，那么 $T_\rho^g = F^{1,\ g}_{\ \rho,\ \rho} = T_\tau^g$其在弦网上的作用为 $T_\tau^g \,|\alpha\rangle = \delta_{\alpha_{e_\tau},\ g} \,|\alpha\rangle = \delta_{\phi_\tau(\alpha)\ g} \,|\alpha\rangle$，如所要求。

现在假设 $\rho = \rho'\tau$ ρ' $T_\rho^g =$，并假设该结论对带成立。那么，利用上述结果可得 $\sum_k T_{\rho'}^k T_\tau^{\bar{k}g}$

$$T_\rho^g \,|\alpha\rangle = \sum_{k\in G} \delta_{\phi_{\rho'}(\alpha),k}\delta_{\phi_\tau(\alpha),\bar{k}g} \,|\alpha\rangle = \delta_{\phi_\rho(\alpha),g} \,|\alpha\rangle\,,$$

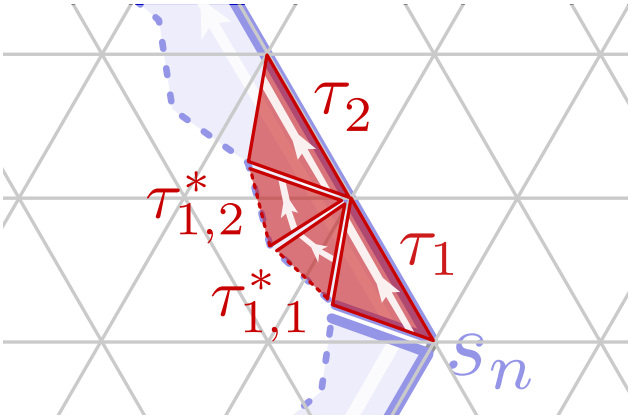


图 5.12：构成边界带 β_n的正向三角形 τ_i和对偶三角形 $\tau^*_{i,1}$，$\tau^*_{i,2}$示例。图中描绘了正向部分 $I_1 = \{\tau_1\}$ 和 $I_2 = \{\tau_2\}$，以及 β_n的第一个对偶部分$J_1 = \{\tau^*_{1,1}, \tau^*_{1,2}\}$。

如所需。

现在可以如下证明交换性。设 $S \subset \Gamma^E$是有限的，且 S包含 T^g_ρ和 $T^{g'}_{\rho'}$的支撑。那么，对于任意 $\alpha \in \mathfrak{G}_S$，我们有

$$T^g_\rho T^{g'}_{\rho'} |\alpha\rangle = \delta_{\phi_\rho(\alpha),g}\delta_{\phi_{\rho'}(\alpha),g'} |\alpha\rangle = T^{g'}_{\rho'} T^g_\rho |\alpha\rangle .$$

由于对于 $\alpha \in \mathfrak{G}_S$，$|\alpha\rangle$ 是 $\mathcal{H}_S$的标准正交基，因此结论成立。 □

现在考虑边界带 β_n。其交替分解（参见定义5.A.9） $\beta_n = I_1 J_1 \cdots I_N J_N$包含正向部分 $I_i = \{\tau_i\}$，每个部分由一个三角形构成，其$e_{\tau_i} \in \partial\Gamma^E_n$。对于 $i = 1$，对偶部分 J_i，$\cdots$，$N-1$ 各由一个或两个对偶三角形构成，分别对应于 $\Gamma^E_n \setminus \partial\Gamma^E_n$中连接到 $\partial\Gamma^V_n$每个边界顶点的边。参见图5.12。对于每个边界顶点 v，记 J_v 为相应的对偶带。此外，按照图5.13中的方式，按逆时针顺序排列边界顶点。

设 $\alpha \in \mathfrak{G}_n$ 是定义在 Γ^E_n上的规范构型。根据刚刚建立的记号，由引理5.A.10 可得

$$L^h_{\beta_n} |\alpha\rangle = \prod_{i=1}^{N} L^{\bar{K}_i h K_i}_{J_{v(i)}} |\alpha\rangle \tag{5.22}$$

其中

$$K_i = \prod_{j=1}^{i} \phi_{\tau_i}(\alpha)$$

是 α 穿过 $\tau_1 \cdots \tau_i$的通量。注意，$K_N = \phi_{\beta_n}(b)$。

现在我们可以证明

引理 5.B.10。设 $\alpha \in \mathcal{P}^{C;ib}_n$和 $h \in G$ 与 $\phi_{\beta_n}(b)$ 对易。则对于满足 $\phi_{\nu_n}(\alpha') = \phi_{\nu_n}(\alpha)$ h 的弦网 $\alpha' \in \mathcal{P}^{C;ib}_n$，有 $L^h_{\beta_n} |\alpha\rangle = |\alpha'\rangle$。

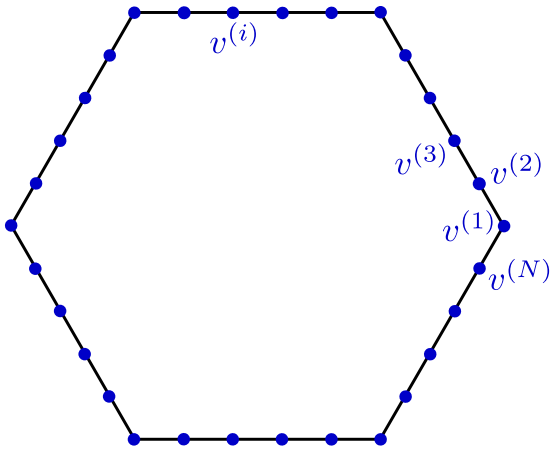


图 5.13：边界顶点的逆时针标记 $\partial\Gamma_n^V$。

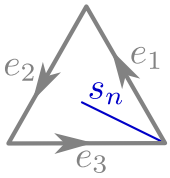


图 5.14：面 $f(s_n)$ 的边的标记。

证明：利用公式（5.22），容易验证，对于除可能包含格点 s_n（图 5.12）的最后一个面以外的每个面，$L^h_{\beta_n}$ 的作用保持平凡磁通约束。

对于最后这个面，按图 5.14中的方式标记其边。由公式 (5.22) 可知，算子 $L^h_{\beta_n}$ 在此三角形的边自由度上的作用为 $L_{e_2}^{\bar{K}_1\bar{h}K_1}R_{e_3}^{\bar{K}_N\bar{h}K_N}$。对于弦网态 α，这就变为

$$L_{e_2}^{\bar{K}_1\bar{h}K_1}R_{e_3}^{\bar{K}_N\bar{h}K_N}\ |\alpha_{e_1}\rangle\otimes|\alpha_{e_2}\rangle\otimes|\alpha_{e_3}\rangle=|\alpha_{e_1}\rangle\otimes\left|\bar{K}_1\bar{h}K_1\alpha_{e_2}\right\rangle\otimes\left|\alpha_{e_3}\bar{K}_NhK_N\right\rangle.$$

注意到 $K_N=\phi_{\beta_n}(b)$ 和 $K_1=\alpha_{e_1}$，我们看到在 s_n 处测得的结果通量为

$$\bar{h}\alpha_{e_1}\alpha_{e_2}\alpha_{e_3}\overline{\phi_{\beta_n}(b)}\,h\phi_{\beta_n}(b)=\bar{h}\overline{\phi_{\beta_n}(b)}\,h\phi_{\beta_n}(b)$$

其中我们用到了 α 满足平凡磁通约束 $\alpha_{e_1}\alpha_{e_2}\alpha_{e_3}=1$。现在利用 h 与边界磁通 $\phi_{\beta_n}(b)$ 对易这一点，可以看出平凡磁通条件在最后一个面中也得以保持。

如前所述，$L^h_{\beta_n}$ 在边 e_3 处的自由度上作用为 $R_{e_3}^{\bar{K}_N\bar{h}K_N}$；再次利用 $K_N=\phi_{\beta_n}(b)$ 与 h 和 $\phi_{\beta_n}(b)$ 对易，这与 $R^{\bar{h}}_{e_3}$ 相同。由于 e_2 是基准带 ν_n的最后一条直接边，这立即推出最后一个结论。□

回顾定义 5.3.25 单位向量

$$\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle=\frac{1}{\left|\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)\right|^{1/2}}\sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)}|\alpha\rangle\,.$$

引理 5.B.11。对于任意 $g \in G$、$C \in (G)_{cj}$、$i = 1$、$\cdots$、$|C|$、$b \in \mathfrak{B}_n^C$ 和 $m \in N_C$，我们有

$$T_{\beta_n}^g \left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle = \delta_{g,q_{i(b)} r_C \bar{q}_{i(b)}} \left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle .$$

证明：根据定义，$\left|\eta_n^{C;ib(m)}\right\rangle$ 是由态 $|\alpha\rangle$ 构成的线性组合，其中 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m)$，因此 $\phi_{\nu_n}(\alpha) = q_i m \bar{q}_{i(b)}$ （参见定义 5.3.20），且 $\phi_{f_0}(\alpha) = c_i$。由引理 5.B.3 和 5.B.4 可知，对于所有这些弦网，我们有 $\phi_{\beta_n}(\alpha) = \phi_{\nu_n}(\alpha) c_i \phi_{\nu_n}(\alpha) = q_{i(b)} r_C \bar{q}_{i(b)}$。结论立即由引理 5.B.9 得出。□

回顾定义 5.3.30 中的单位向量

$$\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle = \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{1/2} \sum_{m \in N_C} R^{jj'}(m) \left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle$$

其中 $u = (i, \ j) \in I_{RC}$ 且 $v = (b, \ j') \in I'_{RC}$。

引理 5.B.12。我们有

$$K_{\beta_n}^{R_1 C_1} \left|\eta_n^{R_2 C_2;uv}\right\rangle = \delta_{R_1 C_1, R_2 C_2} \left|\eta_n^{R_2 C_2;uv}\right\rangle .$$

证明：设 $u = (i, j) \in I_{R_2 C_2}$ 和 $v = (b, j') \in I'_{R_2 C_2}$，则

$$K_{\beta_n}^{R_1 C_1} \left|\eta_n^{R_2 C_2;uv}\right\rangle = \sum_{\substack{m_1 \in N_{C_1} \\ m_2 \in N_{C_2}}} \chi_{R_1}(m_1)^* R_2^{jj'}(m_2)^* \sum_{q \in Q_{C_1}} L_{\beta_n}^{q m_1 \bar{q}} T_{\beta_n}^{q r_{C_1} \bar{q}} \left|\eta_n^{C_2;ib}(m_2)\right\rangle$$

由引理 5.B.11 并注意到 $q r_{C_1} \bar{q} = q_{i(b)} r_{C_2} \bar{q}_{i(b)}$ 蕴含 $C_1 = C_2$ 和 $q = q_{i(b)}$ 可得

$$= \delta_{C_1, C_2} \sum_{m_1, m_2 \in N_{C_2}} \chi_{R_1}(m_1)^* R_2^{jj'}(m_2)^* L_{\beta_n}^{q_{b(i)} m_1 \bar{q}_{i(b)}} \left|\eta_n^{C_2;ib}(m_2)\right\rangle$$

注意到 $\left|\eta^{C_2}{}_{;n}{}^{ib}(m_2)\right\rangle$ 是 $|\alpha\rangle$ 的线性组合，其中 $\alpha \in \mathcal{P}_n^{C;ib}(m_2)$，且对于每个这样的 α，都有 $\phi_{\beta_n} = q_{i(b)} r_{C_2} \bar{q}_{i(b)}$，由引理 5.B.10 可知

$$= \delta_{C_1, C_2} \sum_{m_1, m_2 \in N_{C_2}} \chi_{R_1}(m_1)^* R_2^{jj'}(m_2)^* \left|\eta_n^{C_2;ib}(m_2 m_1)\right\rangle$$

将变量换为 $M = m_2 m_1$ 和 $m = m_1$，并将特征标写成迹的形式，得到

$$= \delta_{C_1, C_2} \sum_{M, m \in N_{C_2}} \sum_{l, l'} R_1^{ll}(m)^* R_2^{jl'}(M)^* R_2^{j'l'}(m) \left|\eta_n^{C_2;ib}(M)\right\rangle$$

最后，应用舒尔正交性可得

$$= \delta_{R_1 C_1, R_2 C_2} \left|\eta_n^{R_2 C_2;uv}\right\rangle ,$$

完成证明。□

5.B.5 维格纳投影算符和标签变换对弦网态的作用

回顾单位向量（定义 5.3.25）和 5.3.30）

$$\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle = \frac{1}{\left|\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)\right|^{1/2}} \sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n^{C;ib}(m)} |\alpha\rangle$$

and

$$\left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle = \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{1/2} \sum_{m\in N_C} R^{jj'}(m)^* \left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle$$

其中 $u=(i,\ \ j)\in I_{RC}$和 $v=(b,\ \ j')\in I'_{RC}$。

回顾定义 5.3.6 中的维格纳投影算符

$$D_s^{RC} := \frac{\dim R}{|N_C|} \sum_{m\in N_C} \chi_R(m)^* \sum_{q\in Q_C} A_s^{qm\bar{q}} B_s^{qrC\bar{q}}$$

并且对每个 $u=(i,\ \ j)\in I_{RC}$

$$D_s^{RC;u} := \frac{\dim R}{|N_C|} \sum_{m\in N_C} R^{jj}(m)^* A_s^{q_i m\bar{q}_i} B_s^{c_i}.$$

引理 5.B.13. 我们有

$$D_{s_0}^{R_1C_1} \left|\eta_n^{R_2C_2;uv}\right\rangle = \delta_{R_1C_1,R_2C_2} \left|\eta_n^{R_2C_2;uv}\right\rangle.$$

证明：令 $u=(i,\ \ j)\in I_{RC}$和 $v=(b,\ \ j')\in I'_{RC}$。那么

$$\begin{aligned} D_{s_0}^{R_1C_1} \left|\eta_n^{R_2C_2;uv}\right\rangle &= \left(\frac{\dim R_1}{|N_{C_1}|}\right)\left(\frac{\dim R_2}{|N_{C_2}|}\right)^{1/2} \sum_{\substack{m_1\in N_{C_1}\\ m_2\in N_{C_2}}} \chi_{R_1}(m_1)^* R_2^{jj'}(m_2)^* \\ &\quad \times \sum_{q\in Q_{C_1}} A_{s_0}^{qm_1\bar{q}} B_{s_0}^{qrC_1\bar{q}} \left|\eta_n^{C_2;ib}(m_2)\right\rangle \\ &= \delta_{C_1,C_2} \frac{\dim R_1 (\dim R_2)^{1/2}}{|N_{C_1}|^{3/2}} \sum_{m_1,m_2\in N_{C_1}} \chi_{R_1}(m_1)^* R_2^{jj'}(m_2)^* A_{s_0}^{q_i m_1\bar{q}_i} \left|\eta_n^{C_1;ib}(m_2)\right\rangle \end{aligned}$$

使用引理 5.3.27 这就变成

$$= \delta_{C_1,C_2} \frac{\dim R_1 (\dim R_2)^{1/2}}{|N_{C_1}|^{3/2}} \sum_{m_1,m_2\in N_{C_1}} \chi_{R_1}(m_1)^* R_2^{jj'}(m_2)^* \left|\eta_n^{C_1;ib}(m_1m_2)\right\rangle$$

将变量替换为 $m=m_1$ 和 $M=m_1m_2$，并利用舒尔正交关系(5.18) 可得

$$\begin{aligned} &= \delta_{R_1C_1,R_2C_2} \left(\frac{\dim R_1}{|N_{C_1}|}\right)^{1/2} \sum_{M\in N_{C_1}} R_2^{jj'}(M)^* \left|\eta_n^{C_1;ib}(M)\right\rangle \\ &= \delta_{R_1C_1,R_2C_2} \left|\eta_n^{R_1C_1;uv}\right\rangle. \end{aligned}$$

□

引理 5.B.14. 我们有

$$D_{s_0}^{RC;u_1}\left|\eta_n^{RC;u_2v}\right\rangle=\delta_{u_1,u_2}\left|\eta_n^{RC;u_1v}\right\rangle.$$

证明： 设 $u_1=(i_1,j_1)$、 $u_2=(i_2,j_2)$ 和 $v=(b,j')$。 则

$$D_{s_0}^{RC;u_1}\left|\eta_n^{RC;u_2v}\right\rangle=\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{3/2}\sum_{m_1,m_2\in N_C}R^{j_1j_1}(m_1)^*R^{j_2j'}(m_2)^*\,A_{s_0}^{q_{i_1}m_1\bar{q}_{i_1}}B_{s_0}^{c_{i_1}}\left|\eta_n^{C;i_2b}(m_2)\right\rangle$$

注意到 $B_{s_0}^{c_{i_1}}\left|\eta_n^{C;i_2b}(m_2)\right\rangle=\delta_{i_1,i_2}$ 并利用引理 5.3.27 可得

$$=\delta_{i_1,i_2}\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{3/2}\sum_{m_1,m_2\in N_C}R^{j_1j_1}(m_1)^*R^{j_2j'}(m_2)^*\left|\eta_n^{C;i_2b}(m_1m_2)\right\rangle$$

将变量替换为 $m=m_1$ 和 $M=m_1m_2$，并利用舒尔正交性（5.18），得到

$$=\delta_{u_1,u_2}\left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{1/2}\sum_{M\in N_C}R^{j_2j'}(M)^*\left|\eta_n^{C;i_2b}(M)\right\rangle=\delta_{u_1,u_2}\left|\eta_n^{RC;u_2v}\right\rangle.$$

□

回顾定义 5.3.34中的算子:

$$A_s^{RC;u_2u_1}:=\frac{\dim R}{|N_C|}\sum_{m\in N_C}R^{j_2j_1}(m)^*A_s^{q_{i_2}m\bar{q}_{i_1}}\qquad u_1=(i_1,j_1)\quad u_2=(i_2,j_2)$$

and

$$\tilde{A}_n^{RC;v_2v_1}:=\frac{\dim R}{|N_C|}\sum_{m\in N_C}R^{j_2'j_1'}(m)U_{b_2b_1}L_{\beta_n}^{q_{i(b_1)}\overline{m}\,\bar{q}_{i(b_1)}}\qquad v_1=(b_1,j_1')\quad u_2=(b_2,j_2')$$

其中 $U_{b_2b_1}$ 是引理 5.B.7给出的酉算子，我们选取它使得 $U_{b_2b_1}=(U_{b_1b_2})^*$。由引理 5.B.7 可知，酉算子 $U_{b_2b_1}$ 在 $\mathcal{P}_n^{C;ib_1}$与 $\mathcal{P}_n^{C;ib_2}$之间给出一个双射，只要 $b_1,b_2\in\mathfrak{B}_n^C$。

引理 5.3.27 已证明，规范变换 $A_{s_0}^{q_im\bar{q}_i}$对 $m\in N_C$ 构成了作用于向量 N_C 上的左群作用 $\left|\eta_n^{C;ib}(m)\right\rangle$。现在我们证明，算子 $L_{\beta_n}^{q_{i(b)}\bar{m}\bar{q}_{i(b)}}$ 对 $m\in N_C$ 这些向量上的作用构成了 N_C 右作用。

引理 5.B.15。 对于任意 $m_1,m_2\in N_C$， 我们有

$$L_{\beta_n}^{q_{i(b)}\bar{m}_1\bar{q}_{i(b)}}\left|\eta_n^{C;ib}(m_2)\right\rangle=\left|\eta_n^{C;ib}(m_2\bar{m}_1)\right\rangle.$$

证明： 由引理 5.B.10 以及 $L_{\beta_n}^{q_{i(b)}\bar{m}_1\bar{q}_{i(b)}}$是酉算子这一事实可知，该算子给出了从 $\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_2)$ 到 $\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_2\bar{m}_1)$ 的一个双射。因此

$$\begin{aligned}L_{\beta_n}^{q_{i(b)}\bar{m}_1\bar{q}_{i(b)}}\left|\eta_n^{C;ib}(m_2)\right\rangle&=\frac{1}{\left|\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_2)\right|^{1/2}}\sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_2)}L_{\beta_n}^{q_{i(b)}\bar{m}_1\bar{q}_{i(b)}}\left|\alpha\right\rangle\\&=\frac{1}{\left|\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_2\bar{m}_1)\right|^{1/2}}\sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n^{C;ib}(m_2\bar{m}_1)}\left|\alpha\right\rangle=\left|\eta_n^{C;ib}(m_2\bar{m}_1)\right\rangle.\end{aligned}$$

□

现在我们可以证明

引理 5.B.16。对于任意 u、u_1、$u_2 \in I_{RC}$ 以及任意 v、v_1、$v_2 \in I'_{RC}$，我们有

$$A_{s_0}^{RC;u_2u_1} \left|\eta_n^{RC;u_1v}\right\rangle = \left|\eta_n^{RC;u_2v}\right\rangle, \qquad \tilde{A}_n^{RC;v_2v_1} \left|\eta_n^{RC;uv_1}\right\rangle = \left|\eta_n^{RC;u,v_2}\right\rangle$$

以及

$$(A_{s_0}^{RC;u_1u_2})^* \left|\eta_n^{RC;u_1v}\right\rangle = \left|\eta_n^{RC;u_2v}\right\rangle, \qquad (\tilde{A}_n^{RC;v_1v_2})^* \left|\eta_n^{RC;uv_1}\right\rangle = \left|\eta_n^{RC;u,v_2}\right\rangle.$$

证明：我们证明关于 $\tilde{A}_n^{RC;v_2v_1}$ 的作用的断言。关于 $(\tilde{A}_n^{RC;v_1v_2})^*$ 的断言可用完全相同的方法证明，而关于 $A_{s_0}^{RC;u_2u_1}$ 及其厄米共轭的断言也有类似但更简单的证明。令 $u = (i、\ j)$、$v_1 = (b_1、\ j'_1)$ 和 $v_2 = (b_2、\ j'_2)$，则

$$\tilde{A}_n^{RC;v_2v_1} \left|\eta_n^{RC;uv_1}\right\rangle = \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{3/2} \sum_{m_1,m_2 \in N_C} R^{j'_2j'_1}(m_2)\, R^{jj'_1}(m_1)^*\, U_{b_2b_1}\, L_{\beta_n}^{q_{i(b_1)}\bar{m}_2\bar{q}_{i(b_1)}} \left|\eta_n^{C;ib_1}(m_1)\right\rangle$$

利用 5.B.15引理以及 $U_{b_2b_1}$ 的基本性质

$$= \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{3/2} \sum_{m_1,m_2 \in N_C} R^{j'_2j'_1}(m_2)\, R^{jj'_1}(m_1)^* \left|\eta_n^{C;ib_2}(m_1\bar{m}_2)\right\rangle$$

let对 $M = m_1\bar{m}_2$ 和 $m = m_2$，并利用舒尔正交性，这变为 s

$$= \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{1/2} \sum_{M \in N_C} R^{jj'_2}(M)^* \left|\eta_n^{C;ib_2}(M)\right\rangle = \left|\eta_n^{RC;uv_2}\right\rangle.$$

□

该引理告诉我们，u 是一个“体区”标签，因为将 u_1 改变为 u_2 的算子是 $A_{s_0}^{RC;u_2u_1} \in \mathcal{A}_{\Gamma_1^E}$。我们还看到，$v$ 是一个“边界”标签，因为将 v_1 改变为 v_2 的算子是 $\tilde{A}_n^{RC;v_2v_1} \in \mathcal{A}_{\Gamma_n^E \setminus \Gamma_{n-1}^E}$。

我们也可以通过支撑于 $\Gamma_n^E \setminus \Gamma_{n-1}^E$ 上的算子来检测边界数据。回顾定义 5.3.3 中的投影算子 P_b 支撑于 $\partial\Gamma_n^E$，它们投影到具有边界条件 $b \in \mathfrak{B}_n$ 的态上。

引理 5.B.17。对于任意满足 $v_1 = (b_0, j'_1)$ 的 $v_1, v_2, v \in I'_{RC}$，以及满足 $v_2 = (b_0, j'_2)$ 的（也就是说，它们具有相同的边界标签 b_0），我们有

$$(\tilde{A}_n^{RC;v_2v})^* \tilde{A}_n^{RC;v_1v} \left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle = \delta_{v_1v_2} \left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle$$

证明：

由引理5.B.16可得,

$$
\begin{aligned}
(\tilde{A}_n^{RC;vv_2})^* \tilde{A}_n^{RC;v_1 v} \left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle &= (\tilde{A}_n^{RC;v_2 v})^* \left|\eta_n^{RC;uv_1}\right\rangle \\
&= \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{3/2} \sum_{m,m' \in N_C} R^{j_2' j'}(m')^* R^{j j_1'}(m)^* \left|\eta_n^{C;ib}(mm')\right\rangle
\end{aligned}
$$

现在我们重新标记 $mm' = M$，并利用舒尔正交性得到

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\dim R}{|N_C|}\right)^{1/2} \sum_{M \in N_C} \sum_{j_3'} \delta_{j_3' j} \delta_{j_2' j_1'} R^{j_3' j'}(M)^* \left|\eta_n^{C;ib}(M)\right\rangle \\
&= \delta_{j_1', j_2'} \left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle = \delta_{v_1, v_2} \left|\eta_n^{RC;uv}\right\rangle
\end{aligned}
$$

□

参考文献

[AFH07] Robert Alicki、M Fannes 和 Micha-l Horodecki。关于量子存储器的 Kitaev 提案的统计力学视角。《物理学杂志 *A*：数学与理论》，40(24):6451，2007年。[BKM24] Alex Bols、Boris Kjaer 和 Alvin Moon。无限体积中的双半子态。《安娜勒·亨利·庞加莱 》，第1–45页，2024年。[BMD07] H. Bombin 和 M. A. Martin-Delgado。晶格上的一族非阿贝尔 Kitaev 模型：拓扑禁闭与凝聚。《物理评论*B*》，78(11):1–28，2007年12月。[BR87] O. Bratteli 和 D. W. Robinson。《算子代数与量子统计力学：第*1*卷：*C**-代数与*W**-代数、对称群、态的分解》。施普林格，1987年12月。[BV25] Alex Bols 和 Siddharth Vadnerkar。基泰耶夫量子双模型的任意子扇区分类：A. bols，s. vadnerkar。《数学物理通讯》，406(8):188，2025年。[CHK+24]Chian Yeong Chuah、Brett Hungar、Kyle Kawagoe、David Penneys、Mario Tomba、Daniel Wallick 和 Shuqi Wei。Kitaev 量子双模型的边界代数。《数学物理学杂志》，65(10)，2024年。[CNN18] M. Cha、P. Naaijkens 和 B. Nachtergaele。Kitaev 阿贝尔量子双模型的无限体积基态完备集。《数学物理通讯》，357(1):125–157，2018年。[CNN20] M. Cha、P. Naaijkens 和 B. Nachtergaele。无限量子自旋系统中荷的稳定性。《数学物理通讯》，373(1):219–264，2020年1月。

[CRFJ25] Liyuan Chen、Yuanjie Ren、Ruihua Fan 和 Arthur Jaffe。使用 s 3 量子双的通用电路集。npj 量子信息，11(1):112，2025年。[DHR71] S. Doplicher、R. Haag 和 J. E. Roberts。局域可观测量与粒子统计 I。《数学物理通讯》，23(3):199–230，1971年9月。[DHR74] S. Doplicher、R. Haag 和 J. E. Roberts。局域可观测量与粒子统计 II。《数学物理通讯》，35:49–85，1974年3月。[FG90] J. Fr¨ohlich 和 F. Gabbiani。局域量子理论中的编织统计。《数学物理评论》，2(03):251–353，1990年。[FGV94] J. Fuchs、A. Ganchev 和 P. Vecserny´es。有理场论的量子对称性。《理论与数学物理》，98(3):266–276，1994年。[Fid10] L. Fidkowski。拓扑绝缘体和超导体的纠缠谱。《物理评论快报》，104(13):130502，2010年4月。[FN15] L. Fiedler 和 P. Naaijkens。阿贝尔群 Kitaev 量子双模型的 Haag 对偶性。《数学物理评论》，27(09):1550021，2015年10月。[Fre98] M. Freedman。P/NP 与量子场计算机。《美国国家科学院院刊》，95(1):98–101，1998年1月。[FRS89] K. Fredenhagen、K.H. Rehren 和 B. Schroer。具有辫群统计和交换代数的超选择扇区：I. 一般理论。《数学物理通讯》，125:201–226，1989年。[FRS92] K. Fredenhagen、K.H. Rehren 和 B. Schroer。具有辫群统计的超选择扇区，II。《数学物理评论》SI1，第113–157页，1992年。[Gou93] M. D. Gould。有限群量子双代数及其表示。《澳大利亚数学学会通报》，48(2):275–301，1993年10月。[Ham24] Mahdie Hamdan。非阿贝尔量子双模型中的无限体积基态。博士论文，卡迪夫大学，2024年。[JNPW23] Corey Jones、Pieter Naaijkens、David Penneys 和 Daniel Wallick。局部拓扑序与边界代数。arXiv预印本 arXiv:2307.12552，2023年。[Kit03] A. Y. Kitaev。利用任意子的容错量子计算。《物理年鉴》，303(1):2–30，2003年1月。[Kit06] A. Y. Kitaev。精确可解模型及其之外的任意子。《物理年鉴》，321(1):2–111，2006年1月。[KL20] K. Kawagoe 和 M. Levin。任意子数据的微观定义。《物理评论B：凝聚态物质》，101(11)，2020年3月。

[LH08] H. Li 和 F. D. M. Haldane。纠缠谱作为纠缠熵的推广：非阿贝尔分数量子霍尔效应态中拓扑序的识别。《物理评论快报》，101(1):010504，2008年7月。[LW05] Michael A Levin 和 Xiao-Gang Wen。弦网凝聚：拓扑相的一种物理机制。《物理评论B—凝聚态物理与材料物理》，71(4):045110，2005年。[Naa11] P. Naaijkens。平面上 Kitaev 环面码中的局域化端同态。《数学物理评论》，23(04):347–373，2011年12月。[Naa12a] P. Naaijkens。环面码中锥的 Haag 对偶性与远端分裂性质。《数学物理快报》，101(3):341–354，2012年9月。[Naa12b] Pieter Naaijkens。无限量子系统中的任意子：d 维中的量子场论与环面码。博士论文，奈梅亨拉德堡德大学，2012年。[Naa13] Pieter Naaijkens。二维量子自旋模型中的 Kosaki-Longo 指数与荷的分类。《数学物理学杂志》，54(8)，2013年。[Naa15] P. Naaijkens。从局域量子物理的视角看 Kitaev 量子双模型。代数量子场论进展，365–395页，2015年8月。[NO22] Pieter Naaijkens 和 Yoshiko Ogata。二维系统中的分裂性质与近似分裂性质：稳定性及超选择扇区的缺失。《数学物理通讯》，392(3):921–950，2022年。[NS97] F. Nill 和 K. Szlach´anyi。具有量子双余对称性的 Hopf 代数量子链。《数学物理通讯》，187(1):159–200，1997年。[NSS+08] C. Nayak、S. H. Simon、A. Stern、M. Freedman 和 S. Das Sarma。非阿贝尔任意子与拓扑量子计算。《现代物理评论》，80(3):1083–1159，2008年9月。[Oga22] Y. Ogata。由满足近似 Haag 对偶性的有能隙基态导出编织 C*-张量范畴。《数学物理学杂志》，63(1):011902，2022年1月。[SKK19] B. Shi、K. Kato 和 I. H. Kim。由纠缠得出的融合规则。arXiv预印本，2019年6月。[SV93] K. Szlach´anyi 和 P. Vecserny´es。G-自旋模型中的量子对称性与辫群统计。《数学物理通讯》，156:127–168，1993年。[Vad23] S. Vadnerkar。三维环面码中的超选择扇区。arXiv预印本，2023年8月。[Vec94] P. Vecserny´es。论手征伊辛模型的量子对称性。《核物理B》，415(3):557–588，1994年。[Wei80] J. Weidmann。《希尔伯特空间中的线性算子》。施普林格，1980年。

第6章
非阿贝尔量子双模型的任意子扇区范畴

Alex Bols

苏黎世联邦理工学院理论物理研究所，瑞士

Mahdie Hamdan

卡迪夫大学数学学院，英国

Pieter Naaijkens

英国卡迪夫大学数学学院

Siddharth Vadnerkar

美国加利福尼亚州加州大学戴维斯分校物理系

本章节逐字摘录自 [BHNV26] ，并发表于《数学物理通讯》。经 Alex Bols、Mahdie Hamdan、Pieter Naaijkens、Siddharth Vadnerkar 许可转载。根据本文的版权条款（知识共享署名许可协议）允许再分发。本工作直接承接 [BV25]的研究成果。在第5章节的引言中，人们注意到，任意子扇区与 G的量子双的不可约表示之间的双射（记为 $D(G)$）可以进行范畴化。根据第4.7 节和第3.5.1节的讨论，我们已经在这种对应关系的两侧各自拥有一个范畴，而 [BV25] 所取得的成果，是建立了这两个范畴中不可约对象之间的双射。因此，考察这个问题便成为顺理成章的下一步。本文为建立范畴之间的编织 C*- 张量等价提供了其余所需的要素。

我们指出，将这种对应关系范畴化有若干实际优势。在 [Oga22] 中已证明，任意子扇区的范畴结构实际上是该相的不变。因此，如果我们能够证明存在一个编织 C*-张量等价，将量子双模型与

量子双模型，那么对于该相的其余部分也同样成立。换言之，这种对应关系在足够小的微扰下保持稳定。另一个原因是，范畴 Rep$D(G)$ 具有一种与任意子范畴的传统编织（第 3.5.1 节的定义）截然不同的编织结构（第 4.7.3 节）。因此，编织等价实际上能够确保这些定义是一致的。

此外，论文稍作迂回，探讨了一个有趣的问题："选择准则是否特殊？"答案是否定的。实际上，可以从任意子扇区范畴，或局域化可传输端同态（或放大态射）范畴的要求列表中删去单位律，仍然得到一个等价范畴。这表明，任意子范畴（定义4.7）也可以等价地用局域化可传输放大态射来定义。此外，论文还证明，端同态（以及放大态射）含单位元并非必要条件，而且每个不含单位元的端同态（分别为放大态射）都等价于一个含单位元的端同态。这使我们能够大幅简化子对象的定义。

论文采用的主要技术假设——量子双模型的 Haag 对偶性——在本文发表之前，已针对一大类模型（包括量子双模型）得到证明 [OPGRdA25], ，因此不再是必要假设。

摘要。 我们采用算子代数方法，在无限体积下研究任意有限规范群的Kitaev量子双模型。量子双模型中存在任意子激发，这些激发可对应于"局域化且可传输端同态"的等价类；它们能够从基态产生任意子激发。沿用代数量子场论中的Doplicher–Haag–Roberts（DHR）扇区理论，我们将这些端同态组织成一个编织幺半范畴，以刻画任意子的融合与编织性质。我们证明，该范畴等价于 Rep$_f\mathcal{D}(G)$，即 G的量子双的表示范畴。这首次为一类含有非阿贝尔任意子的二维量子晶格模型确立了完整的DHR结构。

目录

6.1 引言 .161 6.2 设置与主要结果 .164 6.2.1 量子双模型及其基态 .164 6.2.2 锥代数、Haag 对偶性与允许代数. . . . . 166 6.2.3 放大态射与端同态范畴 . . . . . 167 6.2.4 主要结果 .168 **6.3 Amp 与 DHR 的编织 C*-张量结构 .168** 6.3.1 C*-结构、直和与子对象 .169 6.3.2 Amp 与 DHR 的编织 C*-张量结构 **Amp与DHR .170 6.4 Amp 与 DHR 的等价 .172** 6.4.1 化归为含单位元的放大态射 .172

6.4.2 等价性证明.173 6.5 由带状算子构造放大态射.174 6.5.1 有限缀带多重态.175 6.5.2 由带多重态构造准局域代数的放大态射 176 6.5.3 由带多重态构造允许代数的放大态射 . . 179 6.5.4 固定带上的 Amp 编织幺半子范畴 . . . . . 181 6.6 Amp 的简单对象.181 6.6.1 不可约任意子扇区的分类.181 6.6.2 简单放大态射.182 6.7 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$、$\mathrm{Amp}^\rho$ 与 Amp^f 的等价.182 6.7.1 Amp^ρ 与 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 的等价.183 6.7.2 Amp^ρ 与 Amp^f 的等价.186 6.7.3 定理 6.2.6 的证明.187 6.8 结论.187 6.A 有限群的量子双及其表示范畴.188 6.B 带状算子.189 6.B.1 三角形与带.189 6.B.2 带状算子.190 6.C 输运子收敛性.192 参考文献.193

6.1 引言

Kitaev量子双模型 [Kit03] 是具有长程纠缠的拓扑有序量子自旋系统的典型例子（参见 [ZCZW19] 了解相关介绍）。这类模型具有称为任意子的准粒子激发，它们具有非平凡的编织统计。任意子的物理性质（例如交换或融合时的行为）可以用编织张量范畴（通常甚至是模张量范畴）以代数方式描述 [Kit06，Wan10]。本文表明，对于定义在平面上的有限规范群量子双模型G，在一些温和的技术假设下，可以从该模型唯一的无挫折基态中恢复出这一编织张量范畴；它由 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G$给出，即有限维酉表示的范畴，其表示对象是 G 的量子双代数。

我们的方法受到 Doplicher–Haag–Roberts（DHR）超选扇区理论的启发（概述请参见 [Haa96]）。从数学上讲，我们可以将任意子识别为（准局域）可观测代数 $\mathcal{A}$的某些不可约表示的等价类。

相关表示是指其向量态在远离某个固定点（我们可以将其取为原点）的可观测量上，与模型的基态近似一致，并且其支撑不围绕该点的表示。后一个条件旨在排除对应于将其他任意子编织绕过固定点的可观测量，因为这些可观测量能够区分非平凡任意子态与基态扇区中的态。

这种直观认识可由超选择准则方便地表达。也就是说，若表示 π 满足以下条件，则称其满足超选择准则：

$$\pi|\mathcal{A}_{\Lambda^c} \cong \pi_0|\mathcal{A}_{\Lambda^c}, \tag{6.1}$$

其中，Λ 是任意一个锥（这一概念稍后将作更精确的说明），Λ^c 是其补集，π_0 是量子双模型的（唯一）无挫折基态的 GNS 表示，而 $\mathcal{A}_{\Lambda^c}$ 是由局域化在 Λ^c中的所有局域可观测量生成的 C*-代数。也就是说，我们考虑这样的表示：在任意锥之外，它们与基态表示酉等价。超选择扇区（或简称任意子扇区）是这类表示的一个等价类。

Doplicher、Haag 和 Roberts 的关键洞见是，超选择扇区自然带有幺半群乘积（“融合”），以及描述玻色子／费米子扇区交换的对称性。后来，这一理论得到扩展，以描述编织统计 [FRS89，FRS92], 从而得到一个编织幺半范畴。这些范畴精确刻画了任意子扇区的物理性质，包括其编织和融合规则。关键的技术步骤是，利用一项称为 Haag 对偶性的技术性质，将表示转化为准局域代数的端同态；这些端同态是局域化的（即仅在局域化区域内发挥非平凡作用），且可传输（可通过酉算子移动局域化区域）。关于以 C [HM06] -张量范畴语言阐述这一构造的概述，参见。这一理论最初是在相对论性量子场论的背景下发展起来的。之后，这一构造被应用于量子自旋系统，参见例如 *Naa11、FN15、Oga22]。关于任意子扇区理论最新的完全公理化方法，参见 [BBC [。+25]

本文研究任意有限规范群的量子双模型中的任意子扇区理论，包括融合与编织规则 G [Kit03], ，并将此前针对阿贝尔 G [FN15] 得出的结果推广至此。特别地，我们的主要结果可概述如下：

定理 6.1.1 (非正式表述)。 设 π_0 为定义在平面上的有限群量子双模型的无挫折基态的 *GNS* 表示，并假设其满足 *Haag* 对偶性。那么，满足 (6.1) 的表示范畴与 $\mathsf{Rep}_f\mathcal{D}(G)$编织幺半等价；后者是量子双代数 $\mathcal{D}(G)$ 的有限维酉表示范畴。

稍后，在介绍必要术语后，我们会准确陈述主要结果（包括所作的假设）。不过请注意，锥的 Haag 对偶性是一项技术性性质，阿贝尔量子双模型满足这一性质 [FN15], ；即使不具备这一性质（或只满足其较弱版本），仍然可以构造任意子扇区范畴。最近有人宣布，已证明一大类模型满足 Haag 对偶性 [OPGRdA25]。更多详情请见下文注记6.2.2 。我们还指出，由于$\mathsf{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 是一个酉模张量范畴，任意子扇区范畴也同样如此。

如前所述，我们的假设意味着存在一个编织的 C*-超选择扇区范畴 [FN15，Oga22]。本文的主要贡献是为所有有限群的量子双模型显式构造这一范畴 G。核心思路如下。对于 $\mathcal{D}(G)$ 的每个不可约表示， π 满足超选择准则（6.1）的表示例子已在 [Naa15]中构造。随后， [BV25]证明了这些表示是不可约的，事实上，它们构成了满足（6.1）的不可约表示的一组完备代表。这些不可约任意子扇区对应于我们范畴中的简单对象（即任意子类型）。由于我们对范畴中的简单对象有具体描述，因此可以显式实现 [Oga22], 中抽象定义的编织和融合操作，并对其进行计算。接着，我们证明所构造的范畴确实等价于 [Oga22]中抽象定义的范畴。

本研究与 [Naa11、FN15] 中研究的阿贝尔情形之间的关键区别在于使用了 放大态射，即 $*$-同态 $\chi : \mathcal{A} \to M_n(\mathcal{A})$，而非端同态。[1] 这可以这样理解：回顾一下，在量子双模型中，我们可以定义“带状算子”，它们能够从基态中产生一对激发。为了得到单个任意子态，我们将其中一个激发送至无穷远。对于 $\mathcal{D}(G)$ 的每个不可约表示，都有一组相应的带状算子，它们按照该不可约表示变换，而这组算子中的算子总数由该不可约表示的维数给出。因此，对于非阿贝尔表示，不止有一个带状算子，它们可以自然地组合成一个放大态射。

虽然可以将放大态射转化为 [FN15, Oga22], 中使用的端同态，但正如我们稍后将看到的，这样做需要作出一些选择，而且会失去对映射的显式描述。因此，为了确定完整的超选择理论，我们主要采用放大态射图景。具体而言，我们证明，在 [Naa15] 中构造的放大态射可以赋予张量积和编织结构，类似于 DHR 理论中端同态的张量积和编织结构。更准确地说，我们构造了一个由局域且可传输的放大态射组成的编织 C*-张量范畴 Amp，其中包括在 [Naa15] 中构造的放大态射作为对象。接着，我们考察 Amp 的全子范畴 Amp^f，其对象 χ 具有有限维 Hom 空间（$\chi|\chi$）。可以证明，这个范畴是半单的，并且在 Amp 的幺半群乘积下封闭；我们还研究其融合规则（即张量积如何分解为不可约对象）以及编织结构。结果表明，由这类放大态射构成的范畴 Amp^f 与 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 作为编织张量范畴等价。利用两位作者 [BV25], 得到的该模型中任意子扇区分类结果，可以推出，所构造的任意子扇区构成了不可约任意子扇区代表元的完备列表。至此，分类工作便告完成。

SV93、 [SV93和NS97] 采用了类似的放大态射方法，来分析某些一维量子自旋系统中的拓扑缺陷。在他们的框架中，任意子扇区局域化于有限区间内，而相应区域中的可观测量代数也是有限维的。因此，他们必须使用放大态射而非端同态。在我们的情形中，局域化发生在无限锥形区域中，情况则有所不

[1]出于技术原因，实际上我们需要考虑某个稍大的代数 $\mathcal{B}$（包含 $\mathcal{A}$）的放大态射。

同。具体而言，用于移动局域化区域的酉算子不再属于准局域代数 $\mathcal{A}$。从技术角度看，这意味着我们不能仅采用纯粹的 C** 代数方法，只考虑准局域代数（或适当放大）中的算子，而必须同时考虑冯·诺伊曼代数，尤其是锥代数 $\pi_0(\mathcal{A}_\Lambda)''$。[2] 这些锥代数“足够大”，也就是说它们是适当无限的 [Naa12、FN15和TWH+24]。这使我们能够将局域化且可传输的放大态射，直接联系到某个适当定义的辅助代数上的局域化且可传输的端同态，从而以端同态的形式与通常的 DHR 理论建立联系。

本文结构如下。第 6.2 节定义量子双模型，以及与之相关的局域化且可输运的放大态射范畴 Amp 和端态射范畴 DHR，并定义它们的“有限”版本 Amp$_f$ 和 DHR$_f$。随后陈述主要定理：范畴 Amp$_f$ 和 DHR$_f$ 是编织 C*-张量范畴，且等价于 Rep$_f\mathcal{D}(G)$。第 6.3 节详细阐述 Amp 和 DHR 的编织 C*-张量结构。接着在第 6.4 节证明这两个范畴等价。第 6.5 节通过对“带多重态”取极限，构造与$\mathcal{D}(G)$的表示相对应的显式局域化且可输运的放大态射。这些显式放大态射按照固定的半无限带 ρ组织成 Amp 的满子范畴 Amp$_\rho$，随后证明它们等价于 Amp$_f$。本节还确立了这些带多重态的关键性质，它们构成 Amp$_f$的融合与编织结构的基础。第 6.6 节重新表述 [BV25], 的主要结果，即上一节构造的、与 $\mathcal{D}(G)$不可约表示相对应的放大态射涵盖了 Amp 的所有简单对象。结合 Amp$_f$的半单性，这意味着 Amp$_\rho$ 是 Amp$_f$的充满且忠实子范畴。最后，第 6.7 节证明主要定理。附录汇集了关于带状算子的众所周知的事实，以及一些与取其极限有关的技术结果。

致谢：我们感谢 Corey Jones、Boris Kjær 和 David Penneys 的有益讨论。MH 获得了英国工程与自然科学研究委员会博士培训计划资助（项目编号 EP/T517951/1）。SV 获得了美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS-2108390）。

版权声明：为实现开放获取，作者已对由此产生的任何作者接受稿版本采用知识共享署名许可。

数据可用性：我们未分析或生成任何数据集，因为我们的工作完全采用理论和数学方法。

利益冲突：作者声明不存在与本文内容相关的竞争性利益。

6.2 设置和主要结果

6.2.1 量子双模型及其基态

我们首先回顾量子双模型的定义 [Kit03]，并介绍本文使用的记号。全文中，我们固定一个有限群 G。令 Γ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的三角晶格，并用 Γ^E 表示 Γ 中朝向右侧的有向边的集合，

[2]这在阿贝尔情形中已经成立，并非非阿贝尔模型所特有。

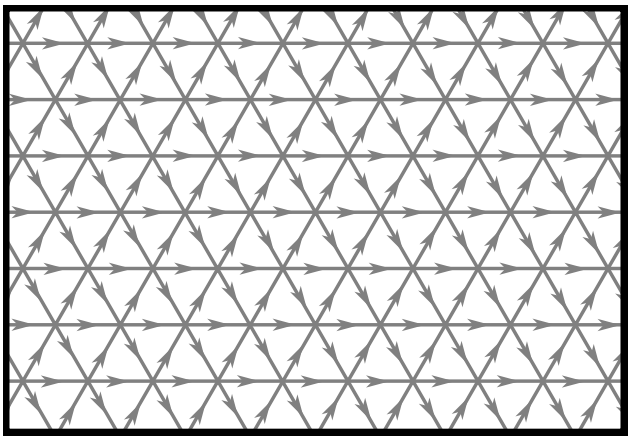


图6.1： Γ^E的快照。所有边均朝右定向 .

见图 6.1。[3] 分别用 Γ^V、Γ^F 表示 Γ 的顶点集和面集。对每条边 $e \in \Gamma^E$，我们关联一个自由度 $\mathcal{H}_e \simeq \mathbb{C}[G]$，其基为 $\{|g\rangle_e : \quad g \in G\}$，相应的代数为 $\mathcal{A}_e = \mathrm{End}(\mathcal{H}_e) \cong M_{|G|}(\mathbb{C})$。我们按通常方式定义支撑于任意 $\mathcal{A}_X^{\mathrm{loc}}$的局域可观测量代数及其范数闭包 $X \subset \underline{\Gamma^E}$： $\mathcal{A}_X$。记 $= \mathcal{A}_X^{\mathrm{loc}\,\|\cdot\|}$和 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\Gamma^E}$。 $\mathcal{A}^{\mathrm{loc}} = \mathcal{A}_{\Gamma^E}^{\mathrm{loc}}$

量子双哈密顿量是由以下形式和给出的对易投影哈密顿量

$$H = \sum_{v \in \Gamma^V} (\mathbb{1} - A_v) + \sum_{f \in \Gamma^F} (\mathbb{1} - B_f), \tag{6.2}$$

其中 A_v， $B_f \in \mathcal{A}$ 是广为人知的 星算子 和 晶格元 算子，它们是彼此对易的投影算子。精确定义见附录第 6.B.2.2 节。

我们称态 $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 是 H 的无挫折基态，若

$$\omega(A_v) = \omega(B_f) = 1 \tag{6.3}$$

对所有 $v \in \Gamma^V$ 以及所有 $f \in \Gamma^F$。不难验证，这样的态 ω 确实是由哈密顿量（6.2）生成的动力学的基态。

以下定理已在多个来源中得到证明 [FN15、CDH+20、TWH+24、BV25]。

定理6.2.1。 量子双哈密顿量 H 具有唯一的无挫折基态，我们将其记为 ω_0。唯一性特别意味着， ω_0 是纯态。

我们将 $(\pi_0, \mathcal{H}_0, \Omega)$ 记为唯一无挫折基态 ω_0 的 GNS 三元组。注意，由于 ω_0 是纯态，π_0 是不可约表示。

[3]为简便起见，我们使用三角晶格，并在与 [BV25], 相同的框架下开展工作，但我们相信这些结果同样适用于更一般的平面图。

6.2.2 锥代数、Haag 对偶性以及允许的代数

顶点位于 $a \in \mathbb{R}^2$、轴为 $\hat{v} \in \mathbb{R}^2$（其中 $\hat{v}$ 是单位向量）、张角为 $\theta \in (0,\ 2\pi)$ 的开锥是 $\mathbb{R}^2$ 的如下子集：

$$\Lambda_{a,\hat{v},\theta} := \{x \in \mathbb{R}^2 : (x-a)\cdot\hat{v} < \|x-a\|_2 \cos(\theta/2)\}.$$

我们类似地定义闭锥，并将 $\mathbb{R}^2$ 的任意开锥或闭锥子集称为 锥，因此任意锥 Λ 的补集 Λ^c 仍然是一个锥。注意，锥既不能为空，也不能等于整个 $\mathbb{R}^2$。

对于任意 $S \subset \mathbb{R}^2$，我们用 $\overline{S}$ 表示 Γ^E 中中点位于 S 的边的集合。除非另有说明，我们将稍微滥用记号，直接写作 S，表示边的集合 S。

对于任意锥 Λ，我们将其关联到它的 锥代数

$$\mathcal{R}(\Lambda) := \pi_0(\mathcal{A}_\Lambda)'' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0). \tag{6.4}$$

我们注记，这些锥代数都是适当无限因子 [Naa12，Oga22]。此外，我们将假设锥的 Haag 对偶性成立。

假设 1（锥的 Haag 对偶性）。 对于任意锥 Λ，我们有

$$\mathcal{R}(\Lambda^c)' = \mathcal{R}(\Lambda).$$

注 6.2.2。 锥的 Haag 对偶性已在 [FN15] 当 G 是阿贝尔群时得到证明。我们认为，证明方法可以推广到非阿贝尔情形，但分析会变得复杂得多，因为在非阿贝尔情形下，量子双 $\mathcal{D}(G)$ 的不可约表示不再全是一维的。此外，最近有人宣布证明了一大类二维量子自旋系统的 Haag 对偶性 [OPGRdA25], 其中尤其包括本文所讨论的非阿贝尔量子双模型。

最后，我们讨论 Haag 对偶性所起的作用。我们仍然可以构造超选择扇区的表示范畴，并证明不可约表示的（等价类）与 $\mathcal{D}(G)$ [BV25]的不可约表示一一对应。利用这种范畴等价，可以将来自$\mathsf{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 的编织幺半群结构传递到超选择扇区范畴。Haag 对偶性可用于证明，这样做实际上会得到例如 Doplicher–Haag–Roberts方法所导出的自然编织。也就是说，它具有正确的物理解释。若没有 Haag 对偶性，我们只能对每个扇区中某些明确构造出的代表元进行上述操作。[4] 因此，为避免使分析变得不必要地复杂，我们倾向于假设锥的（严格）Haag 对偶性。

[4]这是我们稍后将定义的范畴 $\mathbf{Amp}^\rho$。在这种情形下，还可以将该范畴中的态射显式构造为局域于某个锥中的可观测量的弱（或强）算子极限。这样便能充分控制这些交织算子的局域化，而一般而言，这需要 Haag 对偶性。利用范畴中对象的显式构造，可以直接验证该范畴在简单对象的幺半群乘积下封闭，并且可以取有限直和。然而，这种分析仅适用于显式构造的放大态射，并不能推广到任意放大态射（或自态射），即使它们属于同一个超选择扇区。

我们固定一个单位向量 $\hat{f} \in \mathbb{R}^2$，并称轴为 $\hat{v}$、张角为 θ 的锥为**禁用**，若 $f \cdot \hat{v} < \cos(\theta/2)$。若一个锥不是禁用的，则称其为允许的。允许代数

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\hat{f}} := \overline{\bigcup_{\Lambda \text{ allowed}} \mathcal{R}(\Lambda)}^{\|\cdot\|} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$$

是由允许锥的锥代数生成的 C*-代数。注意，允许锥的集合在包含关系下是一个有向集。由于我们假设严格 Haag 对偶性，我们的代数 $\mathcal{B}$ 与 $\mathfrak{B}_{(\theta,\phi)}$ 在 [Oga22，公式 (2.5)] 中所记的相同，其中（θ，ϕ）适合此处情形。如果只有近似 Haag 对偶性成立，则可以用其中的定义替代它。

注意，$\pi_0(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ 对于任意有限集 $S \subset \Gamma^E$，我们都可以找到一个包含 S 的允许锥 Λ。此外，后面将看到，允许代数包含我们将要考虑的放大态射之间的交织算子。这对于定义张量积和编织至关重要。

可以证明，我们稍后定义的任意子扇区范畴不依赖于 $\hat{f}$ 的选择。

6.2.3 放大态射与端同态范畴

我们基本沿用 [SV93]中的记号和术语。*同态 $\chi : \mathcal{B} \to M_{n\times n}(\mathcal{B})$ 称为一个次数为 n 的放大态射。[5] 我们不要求这类放大态射含单位元。给定两个放大态射 χ 和 χ'，它们的次数分别为 n 和 n'，令

$$(\chi|\chi') := \{T \in M_{n\times n'}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)) : T\chi'(O) = \chi(O)T,\ O \in \mathcal{B},\ \chi(\mathbb{1})T = T = T\chi'(\mathbb{1})\} \quad (6.5)$$

为从 χ' 到 χ 的交织算子空间。若存在部分等距算子 $U \in (\chi|\chi')$，使得 $U^*U = \chi'(\mathbb{1})$ 且 $UU^* = \chi(\mathbb{1})$，则放大态射 χ 和 χ' 称为**等价的**，此时记作 $\chi \sim \chi'$，并称 U 为一个**等价**。

若放大态射 χ 的次数为 n，并且对于所有 $O \in \pi_0(\mathcal{A}_{\Lambda^c})$，都有 $\chi(O) = \chi(\mathbb{1})(O \otimes \mathbb{1}_n)$，则称其**局域化在锥** Λ 中。如果对于任意锥 Λ'，都存在一个局域化于 Λ' 的放大态射 χ'，使得 $\chi \sim \chi'$，则称该放大态射是**可传输**的。

若端同态空间 $(\chi|\chi)$ 是有限维的，则称放大态射 χ 为**有限**。注意，$(\chi|\chi)$ 在取伴随运算下是闭的。因此，若 χ 有限，则 $(\chi|\chi)$ 同构于有限个全矩阵代数的直和。

定义 6.2.3。 我们将 **Amp** 定义为如下范畴：其对象是局域化于允许锥中且可传输的放大态射。对象 χ' 与 χ 之间的态射由 $(\chi|\chi')$ 给出。范畴 $\mathbf{Amp}_f$ 是 **Amp** 的全子范畴，其对象是 **Amp** 中有限的放大态射。

在第 6.3 节中，我们将说明 Haag 对偶性的假设如何使我们能够赋予**Amp** 一个带编织的 C*-张量范畴结构。稍后我们将看到，范畴$\mathbf{Amp}_f$ 在**Amp** 的幺半群乘积下封闭，因此继承了带编织的

[5] 可以考虑希尔伯特空间为无限维的放大，但就我们的目的而言，只需考虑 n 有限的情形。

C*-张量结构。将范围缩减到 $\mathbf{Amp}^f$ 对于确立其与量子双代数的有限维表示范畴 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 的等价性至关重要。事实上，**Amp** 包含无限直和，而根据定义，$\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 不包含无限直和。我们不知道$\mathbf{Amp}^f$ 中的对象的无限直和是否穷尽了**Amp**的所有非有限放大态射。

注记 6.2.4。 在任意子的代数描述中，通常假定所有任意子都有共轭对象（例如参见 [Wan10，第 6 节。3]），这意味着每种任意子类型都能与某种共轭类型融合成真空。

假定 C*-张量范畴中的对象有共轭对象，意味着它具有有限维端同态空间 [LR97，引理 3。2]。这也说明了，若要证明与 $\mathbf{Amp}^f$ 等价，就必须将注意力限制在 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G$上。确实，所有 $\mathcal{D}(G$ 的有限维表示都有共轭对象。

定义 6.2.5。 我们将 **DHR** 记作 **Amp** 的全子范畴，其对象为含单位元的 *-端同态 $\nu:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$，即次数为一的含单位元放大态射。类似地，$\mathbf{DHR}^f$ 是**DHR** 中以有限端同态为对象的全子范畴。

DHR 是一个编织 C*-张量子范畴，参见第**Amp**节6.3。我们在第6.7节证明，$\mathbf{DHR}^f$ 在**DHR** 的幺半群乘积下是闭集，因此继承了编织 C*-张量结构。范畴**DHR** 等价于范畴 $\mathcal{O}_{\Lambda_0}$，该范畴定义于 [Oga22，第 6]节。可以将$\mathcal{O}_{\Lambda_0}$ 视为**DHR** 中局域化于特定锥内的端同态所构成的子范畴 Λ_0；不过，根据可传输性要求可知，这与**DHR** 等价（对比本文第 6.7 节）。

6.2.4 主要结果

现在我们可以给出本文的主要结果：范畴$\mathbf{Amp}^f$ 和$\mathbf{DHR}^f$ 在上文中引入，它们作为编织 C*-张量范畴，与范畴$\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$等价；后者是群$\mathcal{D}(G)$的量子双 G的有限维酉表示所构成的范畴。关于6.A 以及其表示论的简要回顾，参见附录 $\mathcal{D}(G)$。

定理 6.2.6。 若锥的 *Haag* 对偶性（假设 *1*）成立，则范畴 $\mathbf{Amp}^f$和 $\boldsymbol{DHR}^f$ 是带有编织的 C*-张量范畴，其幺半结构和编织如第 *6.3* 节所述。此外，这两个范畴随后都与 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$作为带编织的 C*-张量范畴等价。

由于 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 是酉模张量范畴（UMTC），由该定理可知，$\mathbf{Amp}^f$ 和 $\mathbf{DHR}^f$ 也都是酉模张量范畴。特别地，任意子扇区被赋予了一个对偶性，该对偶性继承自$\mathcal{D}(G)$的有限维表示的对偶性。

6.3 带编织的 C*-张量结构：Amp 和 DHR

我们将在第*节详细说明**Amp**、$\mathbf{Amp}^f$、**DHR**以及$\mathbf{DHR}^f$的 C-范畴结构，以及它们的有限直和与子对象。6.3.1节

在第6.3.2节中，我们利用 Haag 对偶性的假设，为**Amp** 和**DHR** 赋予编织 C*-张量结构。本节中的大多数论证，都是对 DHR 超选择理论中著名构造的直接改编，例如参见 [SV93、NS97、HM06、Oga22]。目前我们尚不清楚范畴**Amp**^{f} 和**DHR**^{f} 对于我们为 **Amp** 和**DHR**定义的张量积是否封闭；这一事实要到第6.7.7节的命题和第6.7.9节的引理6.7中才会得到证明。

6.3.1 C*-结构、直和与子对象

首先注意到，范畴 **Amp**、**Amp**^{f}、**DHR** 和 **DHR**^{f} 都是 C*-范畴（参见 [GLR85] 或 [NT13，定义 2.1。1]）。本小节将证明，这些范畴都有有限直和与子对象。

6.3.1.1 放大态射的直和与子对象

$\chi\colon \mathcal{B}\to M_m(\mathcal{B})$ 与 $\psi\colon \mathcal{B}\to M_n(\mathcal{B})$ 的直和是放大态射 $\chi\oplus\psi\colon \mathcal{B}\to M_{m+n}(\mathcal{B})$，它将 $O\in\mathcal{B}$ 映射为分块对角矩阵，其分块为 $\chi(O)$ 和 $\psi(O)$，并配有显然的投影映射和包含映射。若 χ 和 ψ 有限，则 $\chi\oplus\psi$ 也有限，因此 **Amp**^{f} 对此直和运算封闭。

在证明 **Amp** 和 **Amp**^{f} 中子对象的存在性之前，我们先陈述并证明两个引理，稍后还将用它们为 **Amp** 和 **DHR** 赋予张量积。

引理 6.3.1。 设 Λ 是一个允许锥。若 χ 是次数为 n 的 Λ-局域化放大态射，则 $\chi(\mathcal{R}(\Lambda))\subset M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$。

证明：若 $O\in\mathcal{R}(\Lambda^c)$，则 χ 的 Λ-局域化意味着 $\chi(\mathbb{1})$ 的所有分量都与 O 对易，因此由 Haag 对偶性可得 $\chi(1)\in M_n(\mathcal{R}(\Lambda^c)')=M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$。现在设 $O\in\pi_0(\mathcal{A}_{\Lambda^c})$ 且 $A\in\mathcal{R}(\Lambda)$，则

$$\chi(OA)=\chi(O)\chi(A)=\chi(\mathbb{1})(O\otimes\mathbb{1}_n)\chi(A)=(O\otimes\mathbb{1}_n)\chi(\mathbb{1})\chi(A)=(O\otimes\mathbb{1}_n)\chi(A),\tag{6.6}$$

但 $\chi(OA)=\chi(AO)$，通过类似的计算可得 $(O\otimes\mathbb{1}_n)\chi(A)=\chi(A)(O\otimes\mathbb{1}_n)$。由此可知，根据 Haag 对偶性，$\chi(A)\in M_n(\pi_0(\mathcal{A}_{\Lambda^c})')=M_n(\pi_0(\mathcal{R}(\Lambda^c)')=M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$。□

引理 6.3.2. 若 χ_1,χ_2 是次数分别为 n_1 和 n_2 的局域化可传输放大态射，且分别局域化于锥 Λ_1,Λ_2，而 Λ 是包含 $\Lambda_1\cup\Lambda_2$ 的锥，则$(\chi_1|\chi_2)\subset M_{n_1\times n_2}(\mathcal{R}(\Lambda))$。

证明：若 $T\in(\chi_1|\chi_2)$，则对任意 $O\in\pi_0(\mathcal{A}_{\Lambda^c})$，有 $\chi_1(O)T=T\chi_2(O)$。由于 O 支撑于锥 Λ_1，Λ_2 之外，而 χ_1 和 χ_2 分别局域化于这些锥上，这意味着对任意 $O\in\mathcal{A}_{\Lambda^c}$，$\chi_1(\mathbb{1})(\pi_0(O)\otimes\mathbb{1}_{n_1})T=T\chi_2(\mathbb{1})(O\otimes\mathbb{1}_{n_2})$。利用 $\chi_1(\mathbb{1})\in M_{n_1\times n_2}(\mathcal{R}(\Lambda_1))$（引理 6.3.1）以及 $\chi_1(\mathbb{1})T=T=T\chi_2(\mathbb{1})$，可知 T 的每个分量都属于 $\pi_0(\mathcal{A}_{\Lambda^c})'=\mathcal{R}(\Lambda)$，此处用到了 Haag 对偶性。由此得证。□

现在我们证明子对象的存在性。由于目前允许非幺放大态射，因此该构造比 DHR 端态射的相应结果更为初等（参见 [Oga22，引理 5。8]）。

命题 6.3.3。 设 $\chi \in \mathbf{Amp}$ 且 $p \in (\chi|\chi)$ 为正交投影算子。那么存在局域且可传输的放大态射 $\chi_1, \chi_2 \in \mathbf{Amp}$ 以及偏等距算子 $v \in (\chi|\chi_1), w \in (\chi|\chi_2)$，使得 $vv^* = p, ww^* = \chi(\mathbb{1}) - p$ *and*s $vv^* + ww^* = \chi(\mathbb{1})$。特别地，$\chi$ 与 $\chi_1 \oplus \chi_2$ 同构。若 χ 有限，则 χ_1 和 χ_2 也有限。

证明：考虑由 $\chi_1(O) := p\chi(O)p$ 给出的放大态射 $\chi_1 : \mathcal{B} \to M_n(\mathcal{B})$。由引理 6.3.2 可得 $p \in M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$，其中 n 是 χ 的次数，因此 χ_1 局域化在 Λ 上。此外，$p\chi_1(O) = p\chi(O)p = \chi(O)p$ 且 $\chi(\mathbb{1})p = p = p\chi_1(\mathbb{1})$，这表明 $p \in (\chi|\chi_1)$。

放大态射 χ_1 也具有可输运性。事实上，设 Λ' 是另一个锥。由 χ 的可输运性，存在一个次数为 n'、局域化在 Λ' 上的放大态射 χ'，以及一个等价 $U \in (\chi|\chi')$。考虑投影 $q = U^*pU \in (\chi'|\chi') \subset M_{n'}(\mathcal{R}(\Lambda'))$ 及相应的放大态射 $\chi'_q(O) := q\chi'(O)q$，它局域化在 Λ' 上。于是

$$pU\chi'_q(O) = pUU^*pU\chi'(O)U^*pU = p\chi(\mathbb{1})p\chi(O)pU = p\chi(O)pU = \chi_1(O)pU$$

且 $pUU^*p = p\chi(\mathbb{1})p = \chi_1(\mathbb{1})$ 同时

$$U^*ppU = U^*p\chi(\mathbb{1})pU = q\chi'(\mathbb{1})q = \chi'_q(\mathbb{1}),$$

因此，pU 是 χ_1 与 χ'_q的等价。

同样的构造得到一个局域化的可输运放大态射 χ_2，它对应于正交投影算子 $q = \chi(\mathbb{1}) - p \in (\chi|\chi)$。容易验证，命题中的断言在取 $v = p$ 和 $w = q$ 时成立。

假设 χ_1 不是有限的，即（$\chi_1|\chi_1$）是无限维的。由于（$\chi_1|\chi_1$）同构于 $p(\chi|\chi)p$，这意味着 χ 也不是有限的。用类似的论证处理 χ_2，可知如果 χ 是有限的，那么 χ_1 和 χ_2也都是有限的。□

6.3.1.2 DHR中的直和与子对象

子范畴 **DHR** 对上述直和构造并不封闭，子对象的构造也不会始终留在**DHR** 子范畴中。然而，**DHR** 确实具有有限直和和子对象，参见 [Oga22]。子范畴 $\mathbf{DHR}_f$ 对这些直和封闭，而且有限端同态的任何子对象仍必定有限，因此$\mathbf{DHR}_f$ 也具有有限直和和子对象。

6.3.2 Amp 与 DHR 的编织 C*-张量结构

利用锥的 Haag 对偶性这一假设，我们为 **Amp** 和 **DHR** 赋予幺半群乘积和编织结构，使它们成为编织 C*-张量范畴（参见 [NT13]中的定义 2.1.1）。此时尚不清楚，按下文定义的两个有限放大态射的张量积是否仍然有限（事实上，可以构造这样的不可约任意子扇区：其幺半群乘积分解为无限多个不可约表示，参见例如 [Fre94]）。因此，我们目前还不能为 $\mathbf{Amp}_f$ 和$\mathbf{DHR}_f$ 赋予编织 C*-张量范畴的结构。命题 6.7.7 和引理 6.7.9 将证明，$\mathbf{Amp}_f$ 和 $\mathbf{DHR}_f$ 实际上对张量积封闭，因此分别是 **Amp**和**DHR**的满编织 C-张量子范畴。

6.3.2.1 幺半群结构

若 $\chi\colon \mathcal{B}\to M_n(\mathcal{B})$ 是次数为 n 的放大态射，我们将 $\chi(O)^{ij}$（其中 i、$j=1$、$\cdots$、n）记为 $\chi(O)$ 的 $\mathcal{B}$ 值矩阵分量。我们为**Amp**赋予如下定义的幺半群乘积 $\times$。若 χ_1 和 χ_2 分别是次数为 n_1 和 n_2 的放大态射，则定义它们的张量积 $\chi_1\times\chi_2\colon \mathcal{B}\to M_{n_1}\big(M_{n_2}(\mathcal{B})\big)\simeq M_{n_1n_2}(\mathcal{B})$ 为次数为 n_1n_2 、分量如下的放大态射

$$(\chi_1\times\chi_2)^{u_1u_2,v_1v_2}(O)=\chi_1^{u_1v_1}\big(\chi_2^{u_2v_2}(O)\big)\quad\text{for all } O\in\mathcal{B}. \tag{6.7}$$

注意，这只是 $(\chi_1\otimes\mathbb{1}_{n_2})\circ\chi_2$，其中已将 $\mathcal{B}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 认作 $M_n(\mathcal{B})$。对于交织算子$T\in(\chi|\chi')$ 和 $S\in(\psi|\psi')$，张量积 $T\times S\in(\chi\times\psi|\chi'\times\psi')$ 定义为

$$(T\times S)^{u_1u_2,v_1v_2}=\sum_{w_1,w_2}\chi^{u_1w_1}(S^{u_2w_2})T^{w_1v_1}\delta^{w_2,v_2} \tag{6.8}$$

也可以将其写成矩阵记号：$T\times S=\chi(S)(T\otimes I_{\psi'})=(T\otimes I_{\psi})\chi'(S)$。

幺半群单位元是恒等放大态射，它是不可约的，因为 $\mathcal{B}''=\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，而 π_0 是不可约的，且 $\pi_0(\mathcal{A})\subset\mathcal{B}$。由于幺半群乘积是严格的，它显然与 C*-结构相容。子范畴 **DHR** 在此幺半群乘积下闭合且包含单位元，因此是 **Amp** 的幺半子范畴。

对象的幺半群乘积由引理 6.3.1 保证良定义，而交织算子的幺半群乘积由引理6.3.2保证良定义。在**DHR** 上的幺半群乘积与 [Oga22] 中定义的乘积一致（另见其中公式 (1.28)–(1.29) 附近的注记）。

6.3.2.2 编织

众所周知，二维空间模型的局域化端同态范畴可以赋予编织结构 [FRS89，FG90，Fr¨o 88]。这里我们将这一结果推广到局域化放大态射。

Amp 上的编织由交织算子 $\epsilon(\chi,\psi)\in(\psi\times\chi|\chi\times\psi)$ 给出，定义如下。由于 χ 和 ψ 局域化于允许锥中，因此存在一个允许锥 Λ ，使得 χ和ψ 都局域化于 Λ中。设 Λ_L 和 Λ_R 为位于 Λ “左侧和右侧”的允许锥，参见图 6.2。设 χ_R 为一个局域化于 Λ_R 中的可输运放大态射，并固定一个$\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$等价 $U\in(\chi_R|\chi)$，使其满足 $U\in M_m(\mathcal{R}(\Lambda_R))$，其中 Λ_R 是一个包含Λ 和 Λ_R、但与 Λ_L不相交的允许锥。类似地，选取一个局域化于 Λ_L 中的可输运放大态射 ψ_L ，以及一个酉算子 $V\in(\psi_L|\psi)$，使其满足 $V\in M_n(\mathcal{R}(\Lambda_L))$。根据 χ 和 ψ的可输运性，这样的 χ_R、U、ψ_L、V均存在。现在令

$$\epsilon(\chi,\psi):=(V^*\times U^*)\cdot P_{12}\cdot(U\times V) \tag{6.9}$$

其中 $P_{12}\in(\chi_R\times\psi_L|\psi_L\times\chi_R)$ 由其分量 $P^{u_1u_2}{}_{,12}{}^{v_1v_2}=\psi_L^{u_2v_1}(\chi_R^{u_1v_2}(\mathbb{1}))$ 给出（注意，与 (6.7) 相比，指标的顺序互换了）。通过简短计算即可得出 P_{12} 确实是交织算子，计算中用到了以下事实：ψ_L 和 χ_R 局域化在不相交锥中，因此对于所有 $\psi_L^{u_1u_2}(\chi_R^{v_1v_2}(A))=\chi_R^{v_1v_2}(\psi_L^{u_1u_2}(A))$。$A\in\mathcal{A}$或者，

$$P_{12}=(\mathrm{id}_{\mathcal{B}}\otimes P)((\psi_L\times\chi_R)(\mathbb{1})), \tag{6.10}$$

其中 P： $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C}) \to M_m(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$ 翻转张量因子。利用标准论证，可以验证 $\epsilon(\chi,\psi) \in (\psi \times \chi | \chi \times \psi)$； $\epsilon(\chi,\psi)$ 与 χ_R、ψ_L、U、V 的选取无关；并且 ϵ 确实是 Amp 的编织。例如，对于放大态射的证明，见 [SV93, 命题 5.2]；对于端同态编织的类似结论的证明，见 [Naa11, 引理 4.8], [Oga22, 定义 4.10],或 [BKM24, 引理 2.9]。该编织限制在 C*-张量子范畴 DHR 上，因此 DHR 是 Amp 的一个编织 C*-张量子范畴。

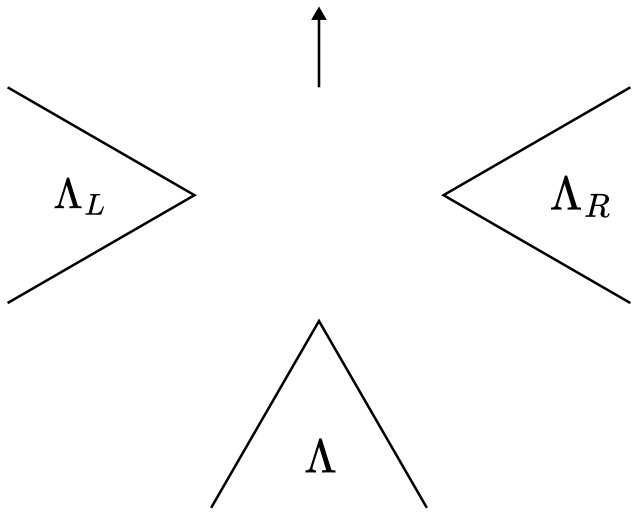


图 6.2：一个编织 设置的示例。箭头表示禁向 .

6.4 Amp 与 DHR 的等价

6.4.1 化归为含幺放大态射

我们的带编织幺半等价证明将依赖于这样一个事实：任意 Amp 的放大态射 都等价于一个含幺扩张同态；我们将在此证明这一事实。在第 6.6 节中，这一事实也将派上用场，届时我们将刻画 Amp 的简单对象。

我们称 $\widetilde{\Lambda}$ 略大于 Λ，记作 $\Lambda \Subset \widetilde{\Lambda}$，如果存在另一个锥 $\Lambda' \subset \widetilde{\Lambda}$ Λ'与 Λ不相交。也就是说，我们可以在 $\Lambda^c \cap \Lambda$中容纳一个锥。以下引理的证明与 [Oga22，引理 5.11], 完全相同，并注意到 [KR97b，推论 6.3.5]。为方便读者，我们在此列出该引理，因为后面会反复用到这一结果。

引理 6.4.1。 设 $\Lambda \Subset \Lambda$，并令 $p \in M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$ 为一个正交投影算子。则 p 作为 $M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$中的投影算子是无限的，且与 $\mathbb{1}_n$ *Murray-von Neumann* 等价。

证明： 根据假设，存在一个锥 $\Lambda' \subset \Lambda$ 与 Λ不相交。由于 $\mathcal{R}(\Lambda')$ 是一个无限因子（见第 6.2.2 节），因此 $M_n(\mathcal{R}(\Lambda'))$ 也是无限因子，我们可以应用二分引理 [KR97b,

[6]请注意，在近似 Haag 对偶性情形下（如 [Oga22]所述），需要额外进行一些极限过程来定义编织。这是因为在较弱的局域化性质下，我们未必有 $\rho \times \sigma = \sigma \times \rho$ 在 ρ和 σ 近似局域化于不相交锥中这一性质。

引理 6.3.3] 找到一个等距算子 $V \in M_n(\mathcal{R}(\Lambda'))$，使得 $VV^* < \mathbb{1}_n$。注意， V和 V^*因具有不相交支撑而与 p 对易。映射 $x \mapsto xp$ （其中 $x \in M_n(\mathcal{R}(\Lambda'))$）是一个 $*$-同构，将 $M_n(\mathcal{R}(\Lambda'))$映到 $M_n(\mathcal{R}(\Lambda')p$，由 [KR97a，命题 5.5.5]可知。特别是，~这意味着 $VV^*p \neq p$，因此是 p的一个真子投影。令 $\widetilde{V} = pV$，则

$$\widetilde{V}\widetilde{V}^* = pVV^* < p, \quad \widetilde{V}^*\widetilde{V} = pV^*Vp = p. \tag{6.11}$$

~这表明 p 作为 $M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$ 中的一个投影，与~其真子投影 pVV^* 等价，因而 p 在 $M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$ 中是无限的。根据 $\mathbb{1}_n$ KR97b 的推论 6.3.5，立刻可得与 [KR97b] Murray-von Neumann 等价。□

~**引理 6.4.2**。设 χ 是一个次数为 n 、局域化于锥 Λ中的放大态射，且 Λ 是~另一个满足 $\Lambda \Subset \Lambda$的锥。那么存在一个局域化于 Λ 上的含幺扩张同态，它与 χ等价。

证明：由引理 6.3.1 可知，投影算子 $\chi(\mathbb{1})$ 属于 $M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$。根据~引理 6.4.1， $\chi(\mathbb{1})$ 是 $M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$ 中的无限元素，并且与 $\mathbb{1}_n \in M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$ Murray-von Neumann 等价。因此，存在等距算子 $V \in M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$，使得 $VV^* = \chi(\mathbb{1})$ 且 $V^*V = \mathbb{1}_n$。

设 ψ 由 $\psi(O) = V^*\chi(O)V$对所有 $O \in \mathcal{B}$给出，则 $\psi(\mathbb{1}) = V^*\chi(\mathbb{1})V = V^*VV^*V = \mathbb{1}_n$ ，因此 ψ 确实是含单位元的。事实上，我们看到 $V \in (\chi|\psi)$ 是一个等价。若 $O \in \pi_0(\mathcal{A}_{\widetilde{\Lambda}^c})$，则

$$\psi(O) = V^*\chi(O)V = V^*\chi(\mathbb{1})(O \otimes \mathbb{1}_n)V = V^*(O \otimes \mathbb{1}_n)V = (O \otimes \mathbb{1}_n)V^*V = O \otimes \mathbb{1}_n, \tag{6.12}$$

~因此 ψ 确实局域化在 Λ上。 □

此外，若 χ 具有可输运性，我们可以先将其输运到局域化区域 Λ内一个更小的锥中，以便为证明所需的“附加锥”留出空间。上述构造不会影响可输运性，因此我们立即得到以下推论。

推论 6.4.3。任意局域化且可传输的放大态射 χ 都等价于一个含幺扩张同态可传输放大态射 χ'，后者局域化在同一个锥中。

证明：设 χ 局域化在 Λ中。由 χ 的可输运性可知，存在一个放大态射 ψ 局域化在锥 $\Lambda' \Subset \Lambda$ 中，使得 $\psi \sim \chi$。由引理 6.4.2可知，存在一个含幺扩张同态放大态射 χ' 局域化在 Λ 中，使得 $\chi' \sim \psi$，因此我们有$\chi' \sim \chi$。由 χ' 的可输运性可立即得到 χ的可输运性。□

6.4.2 等价性证明

现在我们证明，可以用内自同态来等价地讨论放大态射，而不必讨论放大态射。对于任意锥 Λ 和任意 $n \in \mathbb{N}$，固定一个行向量 $\mathbb{V}(\Lambda, n) := (V_1, \cdots, V_n)$，其分量是等距算子 $V_i \in \mathcal{R}(\Lambda)$，并满足 $V_i^*V_j = \delta_{ij}\mathbb{1}$ 和 $\sum_{i=1}^n V_iV_i^* = \mathbb{1}_n$。（由于$\mathcal{R}(\Lambda$是一个无限因子，我们可以反复应用二分引理 [KR97b，引理 6.3。3]

从而得到这样的等距算子）。对于任意 $\chi \in \mathbf{Amp}$，固定一个允许锥 Λ_χ，使得 χ 局域化在 Λ_χ 上，并记作 $\mathbb{V}_\chi = \mathbb{V}(\Lambda_\chi,\ n)$，其中 n 是 χ的次数。

现在设 $\chi \in$**Amp** 是次数为 n 的含单位元放大态射。我们定义 $\nu_\chi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 为由下式给出的端同态:

$$\nu_\chi(O) := \mathbb{V}_\chi\, \chi(O) \mathbb{V}_\chi^*. \tag{6.13}$$

这里我们将 $\mathbb{V}_\chi^*$ 视为分量为 V_i^* 的列向量。容易验证，这确实是一个端同态，且 ν_χ 局域化在 Λ_χ 中。

若 $\chi,\ \chi' \in$ **Amp** 是含单位元放大态射，且 $T \in (\chi|\chi')$，我们定义 $t_T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ 为 $t_T = \mathbb{V}_\chi T \mathbb{V}_{\chi'}^*$。于是

$$t_T \nu_{\chi'}(O) = \mathbb{V}_\chi\, T\, \mathbb{V}_{\chi'}^*\, \mathbb{V}_{\chi'}\, \chi'(O)\, \mathbb{V}_{\chi'}^* = \mathbb{V}_\chi\, T\, \chi'(O)\, \mathbb{V}_{\chi'}^* = \mathbb{V}_\chi\, \chi(O)\, T\, \mathbb{V}_{\chi'}^* = \nu_\chi(O)\, t_T \tag{6.14}$$

因此 $t_T \in (\nu_\chi|\nu_{\chi'})$。映射 $T \mapsto t_T$ 给出了交织算子空间 $(\chi|\chi')$ 与 $(\nu_\chi|\nu_{\chi'})$ 之间的 *-同构。

特别地，由此得到的 ν_χ 具有可传输性。确实，设Λ' 是某个锥。由 χ的可传输性以及推论6.4.3 可知，存在一个局域化在 $\chi' \in$ **Amp**上的含单位元放大态射 Λ' 以及一个酉算子 $U \in (\chi|\chi')$。那么 $t_U \in (\nu_\chi|\nu_{\chi'})$ 也是酉算子。

由于 $\mathbb{V}_\chi \in (\nu_\chi|\chi)$ 是放大态射的等价，我们特别得出，**Amp**中的每个含单位元的放大态射都等价于**DHR**中的一个端同态。结合推论6.4.3 ，我们得到以下引理。

引理 6.4.4。 每个 $\chi \in$**Amp** 都等价于子范畴***DHR***中的一个端同态 ρ_χ 。

尽管证明定理 6.2.6并不需要这一点，我们现在可以轻易得到以下命题：局域且可传输的放大态射等价于 [Oga22]中研究的端同态。

命题 6.4.5。 ***DHR*** 与 **Amp** 作为编织的 C*-张量范畴是等价的 *s.*

证明： 设 $F :$ **DHR** $\to$ **Amp**为嵌入函子。显然 F 是线性的、全忠实的、编织幺半的，并且保持 $*$-结构。剩下要检验的是 F 本质满，但这由引理 6.4.4立即可得。 □

6.5 带算子诱导的放大态射

在本节中，对于每一条半无限带 ρ，我们构造 $\mathbf{Amp}^\rho$ 的一个全子范畴 **Amp** ，其对象构造为某些“带状算子”的极限；这些算子以 $\mathcal{D}(G)$ 的酉表示作为输入。（关于带和带状算子的定义及基本性质，见附录 6.B。）由局域且可传输的放大态射与 DHR 端同态之间的等价性可知，这相当于显式构造满足超选择准则的表示实例。更重要的是，我们还可以将交织算子定义为准局域代数中元素的（弱算子）极限。按照 [Oga22]，的记号，这相当于寻找其中所定义的映射 T 的具体实例，以及它们如何作用于交织算子。

对 $\mathbf{Amp}^{\rho}$ 及其交织算子的具体描述，将使我们能够确定该范畴中的编织和融合。我们将利用这一点，在第 6.7.1 节证明，范畴 $\mathbf{Amp}^{\rho}$ 与 $\mathsf{Rep}_f\,\mathcal{D}(G)$ 作为带编织的 C-张量范畴是等价的；并在第 6.7.2 节证明，它们与整个 $\mathbf{Amp}^{f}$等价，从而确立 $\mathbf{Amp}^{f}$ 与 $\mathsf{Rep}_f\,\mathcal{D}(G)$ 作为带编织的 C*-张量范畴之间的等价性。

6.5.1 有限缎带多重态

在本手稿余下部分中，两个矩阵在 $\mathcal{A}$ 上的张量积 $\otimes$ 始终指通常的矩阵张量积，而 $\mathcal{A}$ 中的元素与 $\mathbb{C}$ 上的矩阵的张量积 $\otimes$ 则指放大张量积，所得为 $\mathcal{A}$ 上的矩阵。

定义6.5.1. 对于 $\mathcal{D}(G)$ 的任意 n 维酉表示 D 以及任意缎带 ρ，定义 $\mathbf{F}_{\rho}^{D}\in M_n(\mathcal{A})$ 如下：

$$\mathbf{F}_{\rho}^{D}=\sum_{g,h}F_{\rho}^{g,h}\otimes D\big(g,h\big). \tag{6.15}$$

命题 6.5.2. 设 ρ 是一条缎带，使得 $s_i=\partial_i\rho$、$i=1$、2 具有互不相同的顶点和面，并设 D 是 $\mathcal{D}(G)$ 的一个 n 维含幺酉表示。

(i) 我们有

$$\mathbf{F}_{\rho}^{D}\cdot(\mathbf{F}_{\rho}^{D})^{*}=(\mathbf{F}_{\rho}^{D})^{*}\cdot\mathbf{F}_{\rho}^{D}=\mathbb{1}_n. \tag{6.16}$$

换言之，$\mathbf{F}_{\rho}^{D}$ 是 $M_n(\mathcal{A})$ 中的一个酉元素。

（*ii*）我们有 $\mathbf{F}_{\bar{\rho}}^{D}=(\mathbf{F}_{\rho}^{D})^{*}$。

（*iii*）设 D_1、D_2 是 $\mathcal{D}(G)$ 的酉表示。带状算子$\mathbf{F}_{\rho}^{D_1}$ 和$\mathbf{F}_{\rho}^{D_2}$ 的直和与乘积满足

$$\mathbf{F}_{\rho}^{D_1}\oplus\mathbf{F}_{\rho}^{D_2}=\mathbf{F}_{\rho}^{D_1\oplus D_2},\quad \mathbf{F}_{\rho}^{D_1}\otimes\mathbf{F}_{\rho}^{D_2}=\mathbf{F}_{\rho}^{D_1\times D_2} \tag{6.17}$$

其中，左侧的直和与张量积是矩阵的通常直和与张量积（其分量取值于 $\mathcal{A}$），而 $D_1\times D_2$ 是两个表示的幺半群乘积（见附录 *6.A*）。

（*iv*）若 $\rho=\rho_1\rho_2$，则

$$\mathbf{F}_{\rho}^{D}=\mathbf{F}_{\rho_1}^{D}\cdot\mathbf{F}_{\rho_2}^{D}. \tag{6.18}$$

(v) 若 $t\in(D_1|D_2)$，则

$$\mathbf{F}_{\rho}^{D_1}(\mathbb{1}\otimes t)=(\mathbb{1}\otimes t)\mathbf{F}_{\rho}^{D_2},\quad (\mathbf{F}_{\rho}^{D_1})^{*}(\mathbb{1}\otimes t)=(\mathbb{1}\otimes t)(\mathbf{F}_{\rho}^{D_2})^{*}. \tag{6.19}$$

(vi) 若 ρ_1 和 ρ_2 是以公共初始点 s_0 为起点的正向带，如图6.3所示，则

$$\mathbf{F}_{\rho_2}^{D_2} \otimes \mathbf{F}_{\rho_1}^{D_1} = (\mathbb{1} \otimes B(D_1, D_2)) \cdot (\mathbf{F}_{\rho_1}^{D_1} \otimes \mathbf{F}_{\rho_2}^{D_2}) \cdot (\mathbb{1} \otimes P_{12}). \tag{6.20}$$

其中 $B(-,\ -)$ 是 $\mathsf{Rep}_f\mathcal{D}(G)$上的编织，且 P_{12} 交换了 D_1 和 D_2 的表示空间张量积中的因子（见附录6.A）。

证明：通过使用方程（6.42）、（6.43）、（6.44），并使用辫关系（6.45）进行直接计算，可得到条目（vi）。□

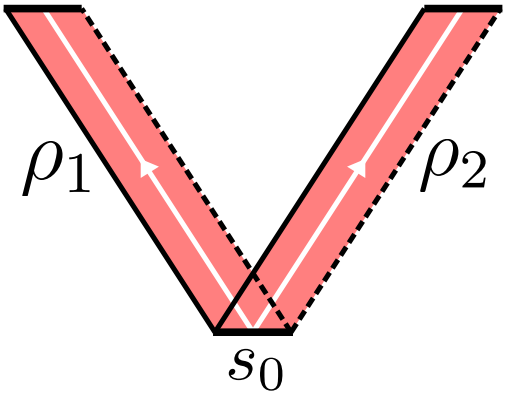


图 6.3：　对两个起点格点均为 s_0 的正向带状算子进行编织。

6.5.2 来自带状多重态的准局域代数的放大态射

6.5.2.1 构造

对于任意有限带 ρ 以及任意 n维酉表示 D of $\mathcal{D}(G)$，定义线性映射 μ_ρ^D: $\mathcal{A} \to M_n(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$如下：

$$\mu_\rho^D(O) := \mathbf{F}_\rho^D \cdot (O \otimes \mathbb{1}_n) \cdot (\mathbf{F}_\rho^D)^*. \tag{6.21}$$

Note 由命题 6.5.2 可直接推出 μ_ρ^D是一个 $*$-同态 .

半无限带 $\rho = \{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个由 $n \in \mathbb{N}$ 标记的三角形序列，满足$\partial_1\tau_n = \partial_0\tau_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，并且晶格中的任意一条边至多属于这些三角形中的一个。

对于任意半无限带 $\rho = \{\tau_n\}$，记 ρ_n 为由 ρ 的前 n个三角形组成的带，记 $\rho_{>n} = \rho \setminus \rho_n$ 为从 ρ 中省略前 n 个三角形后得到的半无限带。然后，利用命题 6.5.2(iv)进行标准论证，可知以下极限映射是良定义的。

定义 6.5.3。对于任意半无限带 ρ以及 $\mathcal{D}(G)$的任意 n维酉表示 D，定义线性映射 μ_ρ^D: $\mathcal{A} \to M_n(\mathcal{A})$，如下：

$$\mu_\rho^D(O) := \lim_{n\uparrow\infty} \mu_{\rho_n}^D(O). \tag{6.22}$$

我们有：

引理 *6.5.4*（[*Naa*15] 的引理 *5.2*）。映射 $\mu_\rho^D\colon \mathcal{A}\to M_n(\mathcal{A})$ 是含幺 *-同态。也就是说，它是 $\mathcal{A}$ 的一个次数为 n 的放大态射。此外，若 $O\in\mathcal{A}$ 的支撑与 ρ 的支撑不相交，则 $\mu_\rho^D(O)=O\otimes\mathbb{1}_n$。对于任意 $O\in\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$，只要 n 足够大，我们就有 $\mu_\rho^D(O)=\mu_{\rho_n}^D(O)$。

对于模型中的每个格点，都可以定义一个作用 $\gamma:\mathcal{D}(G)\to\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$，其作用于量子双霍普夫代数。此处构造的放大态射相对于这一作用协变地变换。这些变换性质（以及带多重态本身在这一作用下的变换性质）正是这些放大态射与 $\mathcal{D}(G$ 的表示相联系的关键所在。就我们的目的而言，无需详述细节；有兴趣的读者可参阅 [Ham24]。

6.5.2.2 直和与张量积

$\mathcal{A}$ 的放大态射的直和与张量积，定义方式与 $\mathcal{B}$ 的放大态射相同。对所有 $O\in\mathcal{A}$，有

$$(\mu_1\times\mu_2)^{u_1u_2,v_1v_2}(O)=\mu_1^{u_1v_1}\big(\mu_2^{u_2v_2}(O)\big),\tag{6.23}$$

$\mu_1:\ \mathcal{A}\to M_m(\mathcal{A})$ 与 $\mu_2:\ \mathcal{A}\to M_n(\mathcal{A})$ 的直和，是将 $O\in\mathcal{A}$ 映射为以 $\mu_1(O)$ 和 $\mu_2(O)$ 为分块的分块对角矩阵的放大态射 $\mu_1\oplus\mu_2:\ \mathcal{A}\to M_{m+n}(\mathcal{A})$。

引理 6.5.5。若 ρ 是有限带或半无限带，则

$$\mu_\rho^{D_1}\oplus\mu_\rho^{D_2}=\mu_\rho^{D_1\oplus D_2},\quad \mu_\rho^{D_1}\times\mu_\rho^{D_2}=\mu_\rho^{D_1\times D_2}.\tag{6.24}$$

证明：先考虑 ρ 是有限带的情形。为简化记号，以下省略下标 ρ。对于任意 $O\in\mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned}(\mu^{D_1}\oplus\mu^{D_2})(O)&=\mu^{D_1}(O)\oplus\mu^{D_2}(O)=\mathbf{F}^{D_1}(O\otimes\mathbb{1}_{n_1})(\mathbf{F}^{D_1})^*\oplus\mathbf{F}^{D_2}(O\otimes\mathbb{1}_{n_2})(\mathbf{F}^{D_2})^*\\&=\left(\mathbf{F}^{D_1}\oplus\mathbf{F}^{D_2}\right)(O\otimes\mathbb{1}_{n_1+n_2})\left(\mathbf{F}^{D_1}\oplus\mathbf{F}^{D_2}\right)^*=\mu^{D_1\oplus D_2}(O),\end{aligned}$$

其中最后一步使用了命题(iii)中的条目6.5.2。

对于乘积，我们逐分量计算

$$\begin{aligned}(\mu^{D_1}\times\mu^{D_2})(O)^{u_1u_2;v_1v_2}&=\mu^{D_1;u_1v_1}\big(\mu^{D_2;u_2v_2}(O)\big)=\sum_{w_2}\mu^{D_1;u_1v_1}\left(\mathbf{F}^{D_2;u_2w_2}\,O\,(\mathbf{F}^{D_2;v_2w_2})^*\right)\\&=\sum_{w_1,w_2}\mathbf{F}^{D_1;u_1w_1}\,\mathbf{F}^{D_2;u_2w_2}\,O\,(\mathbf{F}^{D_2;v_2w_2})^*\,(\mathbf{F}^{D_1;v_1w_1})^*\\&=\sum_{w_1,w_2}(\mathbf{F}^{D_1}\times\mathbf{F}^{D_2})^{u_1u_2;w_1w_2}\,O\,((\mathbf{F}^{D_1}\times\mathbf{F}^{D_2})^*)^{w_1w_2;v_1v_2}\\&=\left(\mathbf{F}^{D_1\times D_2}\,(O\otimes\mathbb{1}_{n_1n_2})\,(\mathbf{F}^{D_1\times D_2})^*\right)^{u_1u_2;v_1v_2}=\mu^{D_1\times D_2}(O)^{u_1u_2;v_1v_2}\end{aligned}$$

其中倒数第二步再次用到了命题的第(iii) 项6.5.2。

如果 ρ是半无限的，那么通过取 $\mu_{\rho_n}^D$的极限，该结论可由有限情形推出。

□

6.5.2.3 可输运性

我们希望将 μ_ρ^D 扩展为允许代数 $\mathcal{B}$的放大态射。为此，我们必须首先确立它们的可输运性。

我们先介绍一个基本引理。该引理特别表明，若 ρ与 ρ' 最终重合，则 μ_ρ^D与 $\mu_{\rho'}^D$ 酉等价。回顾一下，若 ρ 是半无限带，则 ρ_n 表示由 ρ最前面的 n 个三角形组成的有限带，而 $\rho_{>n}$ 表示从 ρ 中移除最前面的 n 个三角形后得到的半无限带。特别地， $\rho = \rho_n\rho_{>n}$。

引理 6.5.6。 设 ρ 为半无限正向带， D 为 $\mathcal{D}(G)$ 的 n维酉表示。则

$$\mu_\rho^D = \mathrm{Ad}[\mathbf{F}_{\rho_n}^D] \circ \mu_{\rho_{>n}}^D \tag{6.25}$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$。

证明： 这直接由定义、引理 6.5.4和命题6.5.2得出。 □

由于 $\mathbf{F}_{\rho_n}^D$ 是酉算子，这就证明了有限距离上的可输运性。要构造更一般的交织算子，我们需要使用极限过程。

定义 6.5.7。 设 ρ 和 ρ' 是两条半无限带。若有限带序列$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：对每个 n，拼接而成的 $\sigma_n = \rho_n\xi_n\bar{\rho}'_n$ 都是有限带，且桥 ξ_n 最终支撑在任意球之外，则称其为从 ρ 到 ρ' 的一座桥 。我们称 $\{\sigma_n\}$为桥 $\{\xi_n\}$.的交织序列

若半无限带 ρ 支撑于锥 Λ，且对于任何与 Λ不相交的其他锥 Λ'，都存在一条半无限带 ρ' 以及一座从 ρ 到 ρ'的桥，则称 ρ 为“良好”。注意，任意锥中都有许多良好的半无限带，包括正向和反向带。

引理 6.5.8。 设 ρ 为一条支撑于锥 Λ 中的半无限正向带， ρ' 为一条支撑于同一锥中的半无限反向带，其初始点分别为 s、 s' 。假设存在一座从 ρ 到 ρ' 的桥，其交织序列 $\{\sigma_m = \rho_m\xi_m\rho'_m\}$ 全部支撑于 Λ中。设 D 为 $\mathcal{D}(G)$的一个 n维酉表示。那么存在一个酉算子 $U \in M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$使得

$$(\pi_0 \otimes \mathrm{Id}_n) \circ \mu_{\rho'}^D = \mathrm{Ad}[U] \circ (\pi_0 \otimes \mathrm{Id}_n) \circ \mu_\rho^D. \tag{6.26}$$

证明： 考虑半无限带族 $\rho^{(m)} = \rho'_m\xi_m\rho_{>m}$，参见图 6.4。我们首先证明

$$\mu_{\rho^{(m)}}^D = \mathrm{Ad}[\mathbf{F}_{\bar{\sigma}_m}^D] \circ \mu_\rho^D. \tag{6.27}$$

事实上，根据命题 6.5.2 可得 $\mathbf{F}_{\bar{\sigma}_m}^D = \left(\mathbf{F}_{\rho_m}^D \cdot \mathbf{F}_{\xi_m}^D \cdot \mathbf{F}_{\rho'_m}^D\right)^* = \mathbf{F}_{\rho'_m}^D \cdot \mathbf{F}_{\xi_m}^D \cdot (\mathbf{F}_{\rho_m}^D)^*$ 所以对于任意 $O \in \mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$ 都有

$$\left(\mathrm{Ad}[\mathbf{F}_{\bar{\sigma}_m}^D] \circ \mu_\rho^D\right)(O) = \lim_{N\uparrow\infty} \mathrm{Ad}\left[\mathbf{F}_{\rho'_m}^D \cdot \mathbf{F}_{\bar{\xi}_m}^D \cdot (\mathbf{F}_{\rho_m}^D)^* \cdot \mathbf{F}_{\rho_m}^D \cdot \mathbf{F}_{(\rho_{>m})_N}^D\right](O \otimes \mathbb{1}_n).$$

现在我们利用酉性得到

$$= \lim_{N\uparrow\infty} \mathrm{Ad}\left[\mathbf{F}_{\rho'_m}^D \cdot \mathbf{F}_{\bar{\xi}_m}^D \cdot \mathbf{F}_{(\rho_{>m})_N}^D\right](O \otimes \mathbb{1}_n) = \mu_{\rho^{(m)}}(O)$$

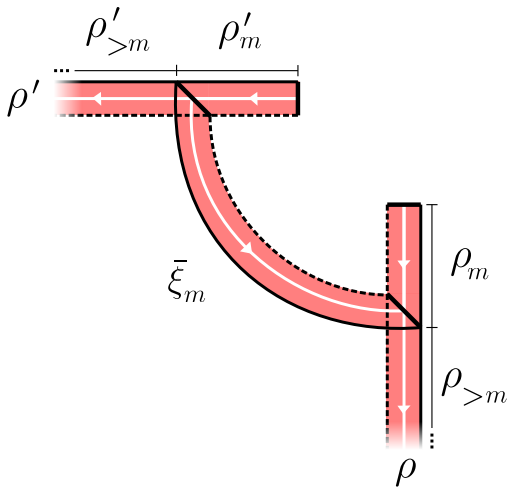


图 6.4：有限带 ξ_m 是从带 $\overline{\rho'_m}$ 到带 ρ_m 的桥。

正如所需。

根据引理 6.C.2，$\mathbf{F}^D_{\bar{\sigma}_n}$ 在 $\pi_0 \otimes \mathrm{Id}_n$ 下的像的各个分量在强-* 拓扑下收敛，因此 $\mathbf{F}^D_{\bar{\sigma}_n}$ 的满像也如此。将该极限记为 U。由于这些 $\mathbf{F}^D_{\bar{\sigma}_n}$ 都是酉算子（命题 6.5.2），由引理6.C.1可知 U 是酉算子。由于所有 $\mathbf{F}^D_{\bar{\sigma}_n}$ 都支撑于锥 Λ中，因此 $U \in M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$。

设 $O \in \mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$。则

$$\begin{aligned} U \cdot (\pi_0 \otimes \mathrm{Id}_n)\big(\mu^D_\rho(O)\big) &= \lim_{n\uparrow\infty} (\pi_0 \otimes \mathrm{Id}_n)\big(\mathbf{F}^D_{\bar{\sigma}_n} \cdot \mu^D_\rho(O)\big) \\ &= \lim_{n\uparrow\infty} (\pi_0 \otimes \mathrm{Id}_n)\big(\mu^D_{\rho^{(n)}}(O) \cdot \mathbf{F}^D_{\bar{\sigma}_n}\big) \\ &= (\pi_0 \otimes \mathrm{Id}_n)\big(\mu^D_{\rho'}(O)\big) \cdot U \end{aligned}$$

其中，第一次等式使用了乘法在强算子拓扑下按分量的连续性，使用公式（6.27）得到第二个等式，并利用了 $\mu^D_{\rho^{(n)}}(O) = \mu^D_{\rho'}(O)$ 对于 n 充分大时成立，再次利用乘法按分量的连续性得到最后一个等式。由于 $\mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$ 在 $\mathcal{A}$中稠密，我们得出公式（6.26）成立，从而完成证明。□

注 6.5.9。 这回答了 [Naa15], 中一个尚未解决的问题，6.5.8 即构造酉荷输运算子，使荷能够在两个锥之间传输，而不只是传输有限距离。注意，引理$\pi_0 \otimes \mathrm{Id}_n) \circ \mu^D_\rho$表明，表示（$\pi_0 \otimes \mathrm{Id}_n$）$\circ\, \mu^D_\rho \restriction \mathcal{A}_{\Lambda^c} \cong n \cdot \pi_0 \restriction \mathcal{A}_{\Lambda^c}$满足超选择准则的一个变体。在此情形下，式（6.1）中的酉等价被拟等价所取代。我们很快就会看到，在当前情形下，这两个概念可以证明是一致的。

6.5.3 带多重态的允许代数的放大态射

引理 μ^D_ρ6.5.8 中已确立的可输运性允许我们将这些放大态射扩展为允许代数的局域化且可输运的放大态射 $\mathcal{B}$。

命题 6.5.10。 设 ρ 是包含于允许锥 Λ中的良好的半无限正带，则存在唯一的放大态射 χ_ρ^D： $\mathcal{B} \to M_n(\mathcal{B})$，其限制到 $\mathcal{R}(\Lambda)$ 是弱连续的，并且满足

$$\chi_\rho^D \circ \pi_0(O) = (\pi_0 \otimes \mathrm{Id}_n) \circ \mu_\rho^D(O). \tag{6.28}$$

对所有 $O \in \mathcal{A}$。此外， χ_ρ^D局域化于 Λ，且可传输。因此，它是 **Amp** 的一个对象。

证明：回顾一下， $\mathcal{B}$ 是锥代数 $\mathcal{R}(\Lambda)$ 的归纳极限。注意， μ_ρ^D限制为一个放大态射 $\mathcal{A}_\Lambda \to M_n(\mathcal{A}_\Lambda)$。我们证明，可以将其（从两侧）扩展为$\mathcal{R}(\Lambda)$。此构造与允许锥集合上的直系结构相容，因此定义了 $\mathcal{B}$ 的一个放大态射。

要证明我们可以将 μ_ρ^D（限制到 $\mathcal{A}_\Lambda$）扩展为 χ_ρ^D: $\mathcal{R}(\Lambda) \to M_n(\mathcal{R}(\Lambda))$，首先注意到对于每个 Λ，都存在一个与 Λ 不相交的禁戒锥 Λ。由于 ρ 良好，且根据引理 6.5.8，我们有 $\mu_\rho^D \simeq \mu_{\hat{\rho}}^D$，其中 $\hat{}\rho$ 局域化于 $\widehat{\Lambda}$。令 U 为实现这一等价的酉算子。由局域性可知，对所有 $O \in \mathcal{A}_\Lambda$，均有 $\mu_{\hat{\rho}}^D(O) = O \otimes \mathbb{1}_n$。

对所有 $O \in \mathcal{R}(\Lambda)$，定义 $\chi_\rho^D(O) := \mathrm{Ad}[U](O \otimes \mathbb{1}_n)$。根据构造可知，对所有 $O \in \mathcal{A}_\Lambda$，$\chi_\rho^D(O) = \mu_\rho^D(O)$。令 $O \in \mathcal{R}(\Lambda)$。由于 $\mathcal{A}_\Lambda$ 在 $\mathcal{R}(\Lambda)$中弱算子稠密，因此存在 $\mathcal{A}_\Lambda \ni O_\lambda \to O$，且其为弱收敛的。于是我们有

$$\lim_\lambda \mu_\rho^D(O_\lambda) = \lim_\lambda \mathrm{Ad}[U](O_\lambda \otimes \mathbb{1}_n) = \mathrm{Ad}[U](O \otimes \mathbb{1}_n) = \chi_\rho^D(O),$$

其中所有极限均取弱算子拓扑，并且我们用到了 $\mathrm{Ad}[U]$ 是弱连续的。因此， χ_ρ^D由 μ_ρ^D唯一确定。在 $\mathcal{R}(\Lambda)$上的这个作用与禁戒锥 Λ的选择无关，因此，对于不同的锥，在 $\mathcal{R}(\Lambda)$上的延拓彼此一致。因此，这些作用在整个 $\mathcal{B}$上定义了一个 *-同态 χ_ρ^D。

现在考虑某个 $O \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}^{\mathrm{loc}}$。那么存在一个禁戒锥 $\widehat{\Lambda}$，它与 Λ 不相交，并且满足 $O \in \mathcal{A}_{\widehat{\Lambda}^c}$。令 $\mu_{\hat{\rho}}^D$和 U 如上所述。我们有

$$\chi_\rho^D(O) = U(O \otimes \mathbb{1}_n)U^* = U\mu_{\hat{\rho}}^D(O)U^* = \mu_\rho^D(O) = O \otimes \mathbb{1}_n. \tag{6.29}$$

由于这对任意 $O \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}^{\mathrm{loc}}$ 都成立，我们发现 χ_ρ^D 局域化于 Λ。

现在考虑一个允许锥 Λ。利用 μ_ρ^D 的可输运性（引理6.5.8），我们有存在某个 $\mu_{\tilde{\rho}}^D \simeq \mu_\rho^D$局域化于 Λ。像上文一样，将 $\mu_{\tilde{\rho}}^D$ 唯一延拓到 $\chi_{\tilde{\rho}}^D$。那么，从 $\mu_{\tilde{\rho}}^D$ 到 μ_ρ^D 的任意酉交织算子都是 χ_ρ^D 与 $\chi_{\tilde{\rho}}^D$ 之间的等价，表明χ_ρ^D确实是可传输的。□

该命题给出了如下定义。

定义 6.5.11. 设 ρ是良好的半无限带，且 D 是$\mathcal{D}(G$的酉表示。则记 χ_ρ^D为 $\mathcal{B}$ 满足命题 6.5.10 所述性质的唯一放大态射。

引理 6.5.12. 对于支撑于允许锥中的任意良好半无限带 ρ，有

$$\chi_\rho^{D_1} \oplus \chi_\rho^{D_2} = \chi_\rho^{D_1 \oplus D_2}, \quad \chi_\rho^{D_1} \times \chi_\rho^{D_2} = \chi_\rho^{D_1 \times D_2}. \tag{6.30}$$

证明：由引理6.5.5 以及 χ_ρ^D作为 μ_ρ^D的延拓时的唯一性，立即可得。□

6.5.4 固定带上的 Amp 编织幺半子范畴

若半无限带 ρ 支撑于某个允许锥中，则称其为允许的。设 ρ 为一个正的良好允许半无限带，并令$\mathbf{Amp}_\rho$ 为$\mathbf{Amp}$ 的全子范畴，其对象是局域化且可传输的放大态射 χ_ρ^D，对应于任意酉表示 D。引理6.5.12 表明，该子范畴在直和和张量积下闭合，因此$\mathbf{Amp}_\rho$ 是$\mathbf{Amp}$的全幺半子范畴。由于在张量积下闭合，子范畴$\mathbf{Amp}_\rho$ 继承了$\mathbf{Amp}$ 在第6.3.2.2节中定义的编织。最后，由下文的命题6.7.2 可知，$\mathbf{Amp}_\rho$ 具有子对象，因此它实际上是-张量子范畴的全编织 C*子范畴$\mathbf{Amp}$。

6.6 Amp 的简单对象

在上一节中，我们构造了 Amp 的满子范畴 $\mathbf{Amp}_\rho$，其对象由 $\mathcal{D}(G)$ 的酉表示构造而成。这些子范畴对于建立 $\mathbf{Amp}_f$ 与 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 之间的等价关系至关重要。

为此，我们必须首先证明放大态射 χ_ρ^D是有限的，从而属于 $\mathbf{Amp}_f$。然后，我们必须证明，当 D 是不可约表示时，χ_ρ^D是简单对象。反过来，我们必须证明，$\mathbf{Amp}$ 的任意简单对象都等价于某个不可约表示 D所对应的放大态射 χ_ρ^D。本节中，我们将借助 [BV25], 中对 Kitaev 量子双模型的不可约任意子扇区所作的分类来证明这些事实，并首先回顾该分类。

6.6.1 不可约任意子扇区的分类

定义 6.6.1。若一个 *-表示 $\pi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足相对于表示 π_0 的超选择准则，则称其满足以下条件：对于任意锥 Λ，存在一个酉算子 $U: \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$，使得

$$\pi(O) = U\pi_0(O)U^*$$

对所有 $O \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$。若 π 还是不可约的，则称 π 为一个任意子表示 n.

以下定理可直接由 [BV25]中的定理 2.4 和命题 5.19 推出。

定理 6.6.2 ([BV25])。设 ρ 为一条良好的半无限带。表示 $\chi_\rho^D \circ \pi_0$是任意子表示，当且仅当 D 不可约。这两个任意子表示$\chi_\rho^{D_1} \circ \pi_0$ 和 $\chi_\rho^{D_2} \circ \pi_0$ 酉等价（不相交），当且仅当相应的不可约表示 D_1 和 D_2 等价（不相交）。

此外，任意任意子表示 π 都与某个不可约表示 D酉等价 $\chi_\rho^D \circ \pi_0$ 。

6.6.2 简单放大态射

固定一个良好的允许半无限带 ρ。

命题 6.6.3. 设 D_1 和 D_2 是 $\mathcal{D}(G)$的不可约表示。那么，放大态射 $\chi_\rho^{D_1}$和 $\chi_\rho^{D_2}$是 **Amp**中的简单对象。若它们等价，则表示 D_1 和 D_2 必定等价。

第二部分的逆命题，即 $\chi_\rho^{D_1}$与 $\chi_\rho^{D_2}$等价，当且仅当 D_1 与 D_2等价，将在稍后的命题6.7.1中证明。

证明： 假设 $\chi_\rho^{D_1}$不是简单的。则存在一个非平凡的正交投影算子 $p \in (\chi_\rho^{D_1}|\chi_\rho^{D_1})$。由于 $\chi_\rho^{D_1}$含单位元，这意味着

$$p \cdot (\chi_\rho^{D_1} \circ \pi_0)(O) = (\chi_\rho^{D_1} \circ \pi_0)(O) \cdot p \quad \text{for all}\, O \in \mathcal{A}.$$

但这表明 p 属于表示 $\chi_\rho^{D_1} \circ \pi_0$的交换子。由于后一个表示根据定理6.6.2是不可约的， p 不可能是非平凡投影。由此可得 $\chi_\rho^{D_1}$是简单的。

同样，若 $U \in (\chi_\rho^{D_2}|\chi_\rho^{D_1})$ 是含单位元放大态射之间的酉等价，则 U 也是表示 $\chi_\rho^{D_1} \circ \pi_0$ 和 $\chi_\rho^{D_2} \circ \pi_0$之间的酉交织算子。根据定理 6.6.2 ，这样的 U 仅当 D_1 与 D_2 等价时才可能存在。□

命题 6.6.4。 **Amp** 中的任意简单对象都等价于 χ_ρ^D，其中 D 是某个不可约表示。

证明： 设 χ 是次数为 n的简单放大态射。根据引理 6.4.4 ，不失一般性，可设 χ 是一个端同态。

我们来证明 *-表示 $\chi \circ \pi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ 满足超选择准则，定义 6.6.1。设 Λ 是一个锥。根据可输运性，存在一个$\chi' \in$ **DHR** 端同态，局域化于 Λ^c ，使得 $\chi \sim \chi'$。设 $U \in (\chi'|\chi)$ 是一个（必然是酉的）等价。于是，对任意 $\chi \circ \pi_0(O)$，有 $= U^* \pi_0(O) U$。由于 $O \in \mathcal{A}_\Lambda$。既然 Λ 是任意的，这表明 $\chi \circ \pi_0$ 确实满足超选择准则。

现在我们利用 χ 是简单的这一假设，证明 $\chi \circ \pi_0$ 实际上是一个任意子表示。也就是说，我们要证明 $\chi \circ \pi_0$ 是不可约的。为导出矛盾，假设 $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个非平凡投影，它将表示 $\chi \circ \pi_0$ 与自身交织。由于交换关系在弱极限下得以保留，因此可得 $p \in (\chi|\chi)$，这与 χ 的简单性矛盾。因此， $\chi \circ \pi_0$ 确实是一个任意子表示。

根据定理 6.6.2 可知， $\chi \circ \pi_0$ 作为 $*$-表示与 $\mathcal{A}$酉等价于 $\chi_\rho^D \circ \pi_0$ ，其中 D 是某个不可约表示。令 U 为一个交织酉算子。由连续性可知，实际上 $U \in (\chi|\chi_\rho^D)$ 是放大态射的等价，正如所需。 □

6.7 $\mathbf{Rep}\mathrm{f}\mathbb{D}_f\mathcal{D}(G)$、$\mathbf{Amp}^\rho$ 与 $\mathbf{Amp}^f$ 的等价

在本节中，我们将证明建立主要结果——定理 6.2.6——所需的其余范畴等价。

6.7.1 $\mathbf{Amp}^{\rho}$ 与$\mathsf{Rep}_f\mathcal{D}(G)$的等价

固定一条良好的允许半无限带 ρ。在本节中，我们将证明第 $\mathbf{Amp}^{\rho}$节中引入的范畴 6.5.4 与 $\mathsf{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 等价，后者是 $\mathcal{D}(G)$ 的有限维酉表示范畴。

6.7.1.1 幺半群等价

我们首先证明，对于表示的每个交织算子 $t \in (D_1|D_2)$，都可以构造一个放大态射的交织算子 $T \in (\chi_\rho^{D_1}|\chi_\rho^{D_2})$。

命题 6.7.1。若 $t \in (D_1|D_2)$，则 $T := \mathbb{1} \otimes t \in (\chi_\rho^{D_1}|\chi_\rho^{D_2})$。

证明：对于任意 $O \in \mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$，对所有足够大的 n，我们有（从记号中省略 π_0）：

$$\begin{aligned} T\,\chi_\rho^{D_2}(O) &= T\,\mu_{\rho_n}^{D_2}(O) = (\mathbb{1}\otimes t)\,\mathbf{F}_{\rho_n}^{D_2}\,(O\otimes \mathbb{1}_n)\,(\mathbf{F}_{\rho_n}^{D_2})^* \\ &= \mathbf{F}_{\rho_n}^{D_1}\,(O\otimes \mathbb{1}_n)\,(\mathbf{F}_{\rho_n}^{D_1})^*\,(\mathbb{1}\otimes t) = \chi_\rho^{D_1}(O)\,T \end{aligned}$$

其中我们用到了命题 (v)中的第6.5.2项。令 Λ为包含 ρ的一个允许锥。由于$\mathcal{A}_\Lambda^{\mathrm{loc}}$在 $\mathcal{A}_\Lambda$ 中范数稠密，而后者又在 $\mathcal{R}(\Lambda$中弱稠密，利用$\chi_\rho^{D_i}$在锥代数上的弱连续性，该关系对所有 $O \in \mathcal{R}(\Lambda$都成立。由于 Λ是任意一个包含 ρ的允许锥，该关系对所有 $O \in \mathcal{B}$都成立。因此 $T \in (\chi_\rho^{D_1}|\chi_\rho^{D_2})$。□

反过来，我们要证明所有的 $T \in (\chi_\rho^{D_1}|\chi_\rho^{D_2})$ 都具有这种形式。

命题 6.7.2. 若 $T \in (\chi_\rho^{D_1}|\chi_\rho^{D_2})$，则 $T = \mathbb{1}\otimes t$ 对某个 $t \in (D_1|D_2)$ 成立。特别地，放大态射 χ_ρ^D 是有限的，因此 $\mathbf{Amp}^{\rho}$ 是 $\mathbf{Amp}^{f}$ 的一个满 C*-子范畴。

证明：将 D_1 和 D_2 分解为不可约表示的直和（参见附录 6.A）：

$$D_i \simeq \tilde{D}_i := \bigoplus_{r\in I} N_r^i \cdot D^{(r)}, \tag{6.31}$$

其中 I 是 $\mathcal{D}(G)$ 的不可约表示等价类有限集，且$D^{(r)}$ 是等价类 r中的一个表示。令 $u_i \in (D_i|\tilde{D}_i)$ 为实现这些等价的酉算子。由命题 6.7.1 可知 $U_i = (\mathbb{1}\otimes u_i) \in (\chi_\rho^{D_i}|\chi_\rho^{\tilde{D}_i})$，因此$\tilde{T} := U_1^* T U_2 \in (\chi_\rho^{\tilde{D}_1}|\chi_\rho^{\tilde{D}_2})$。

根据命题 6.6.3，$\{\chi_\rho^{D^{(r)}}\}_{r\in I}$ 是 $\mathbf{Amp}^{\rho}$ 中不相交的简单对象。由于 $\tilde{D}_i$ 是˜这些对象的直和，根据引理 6.5.12 可知，将 T 的一个$\chi_\rho^{D_r}$子空间映射到一个 $\chi_\rho^{D_{r'}}$的矩阵块实际上是这些放大态射的交织算子。因此，$\tilde{T}$ 中对应于同一$\chi_\rho^{D_r}$的副本之间映射的矩阵块是˜ ˜单位元的倍数，而其他矩阵块均为零，即 $T = \mathbb{1}\otimes t$ 其中

$$\tilde{t} = \bigoplus_r \tilde{t}_r \otimes \mathbb{1}_{n_r} \tag{6.32}$$

其中 $\tilde{t}_r \in \mathsf{Mat}^{N_r^1\times N_r^2}(\mathbb{C})$。任意这样的矩阵 $\tilde{t}$ 属于 $(\tilde{D}_1|\tilde{D}_2)$。由于 $u_i \in (D_i|\tilde{D}_i)$，可得 $t = u_1\tilde{t}u_2^* \in (D_1|D_2)$。现在，

$$T = U_1\tilde{T}U_2^* = (\mathbb{1}\otimes u_1)(\mathbb{1}\otimes\tilde{t})(\mathbb{1}\otimes u_2^*) = \mathbb{1}\otimes t, \tag{6.33}$$

这就证明了该论断。 □

前面的两个命题表明，对于所有酉表示 D_1， D_2，$(D_1|D_2)$ 与 $(\chi_\rho^{D_1}|\chi_\rho^{D_2})$ 之间都存在一个同构。我们可以利用这些同构，在 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 与 $\mathbf{Amp}^\rho$ 之间构造一个幺半等价。

考虑函子 F： $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)\to\mathbf{Amp}^\rho$ 它将任意酉表示 D 映射为放大态射 χ_ρ^D，并将任意 $t\in(D_1|D_2)$ 映射为 $\mathbb{1}\otimes t$。由命题6.7.1 可知， F 确实是一个函子。事实上， F 是线性的，并且保持 $*$-结构。此外:

命题 6.7.3。 函子 F： $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)\to\mathbf{Amp}^\rho$ 是幺半等价。特别地，$\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 与 $\mathbf{Amp}^\rho$ 作为 C*-张量范畴彼此等价。

证明： 利用引理6.5.12可得

$$F(D_1)\times F(D_2)=\chi_\rho^{D_1}\times\chi_\rho^{D_2}=\chi_\rho^{D_1\times D_2}=F(D_1\times D_2). \tag{6.34}$$

令 Id_{D_1,D_2}： $F(D_1)\otimes F(D_2)\to F(D_1\times D_2)$ 为恒等映射。 F的严格幺半性意味着 Id_{D_1,D_2} 构成函子 $\times\circ(F,F):\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)\times\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)\to\mathbf{Amp}^\rho$ 与 $F\circ\times:\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)\times\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)\to\mathbf{Amp}^\rho$之间的自然变换。由于 $\mathbf{Amp}^\rho$ 是严格的，这归结为对任意 $t\in(D_1|D_2)$ 和任意$t'\in(D_1'|D_2')$，均有 $F(t)\times F(t')=F(t\times t')$；但这可直接由定义得出（特别要回顾式（6.8）中放大态射的交织算子张量积的定义）。

为了证明 F 是一个范畴等价，我们注意到 F 实际上是一个同构，即 F可逆，其逆元为 F^{-1}在对象上的定义为 $F^{-1}(\chi_\rho^D)=D$，在态射上的定义为 $T\in(\chi_\rho^{D_1}|\chi_\rho^{D_2})$，其形式为 $F^{-1}(T)$，其中 $=t$ 是唯一的交织算子 $t\in(D_1|D_2)$，满足 $T=\mathbb{1}\otimes t$，参见命题 6.7.2。 □

6.7.1.2 编织幺半等价

如第6.5.4节所述，子范畴 $\mathbf{Amp}^\rho$ 继承了$\mathbf{Amp}$ 在第 6.3.2.2节中定义的编织。现在，我们来明确计算 $\mathbf{Amp}^\rho$ 中对象之间的编织。

为了计算 $\epsilon(\chi_\rho^{D_1},\chi_\rho^{D_2})$，我们固定图 6.5 中所示的良好的反向半无限带 ρ_L和 ρ_R。根据引理 6.5.8 的证明，存在酉算子 $U\in(\chi_{\rho_R}^{D_1}|\chi_\rho^{D_1})$ 和 $V\in(\chi_{\rho_L}^{D_2}|\chi_\rho^{D_2})$，它们分别是酉算子序列 $U_n=\mathrm{F}_{\sigma_R,n}^{D_1}$和 $V_n=\mathrm{F}_{\sigma_L,n}^{D_2}$ 在强-*算子拓扑下的极限；这些序列对应的带分别为图 6.5 中的 $\sigma_{L,n}=\rho_{\bar{L},n}\xi_{L,n}\rho_n$ 和 $\sigma_{R,n}=\rho_{R,n}\xi_{R,n}\rho_n$，因此带 $\{\xi_{L/R,n}\}$ 是从 ρ 到$\rho_{L,R}$的桥。

设 $\rho'_{L/R,n}=(\rho_{L/R})_{>n}\,\xi_{L/R,n}\,\rho_n$，并将酉算子 U_n 和 V_n 分别视为 $(\chi_{\rho_R}^{D_1}|\chi_{\rho'_R,n}^{D_1})$ 和 $(\chi_{\rho_L}^{D_2}|\chi_{\rho'_L,n}^{D_2})$ 中的交织算子，固定 $l>0$，并记作 $m=n+l$。设 $\zeta_{L/R,n}=\xi_{L/R,n}\rho_{L/R,n}$ 满足 $\sigma_{L,n}=\zeta_{L,n}\rho_n$ 和 $\sigma_{R,n}=\zeta_{\bar{R},n}\rho_n$。回顾方程 (6.9) 中定义的编织。注意到由于所有放大态射都是含单位元的，用于定义编织的下方算子 P_{12} 不依赖于

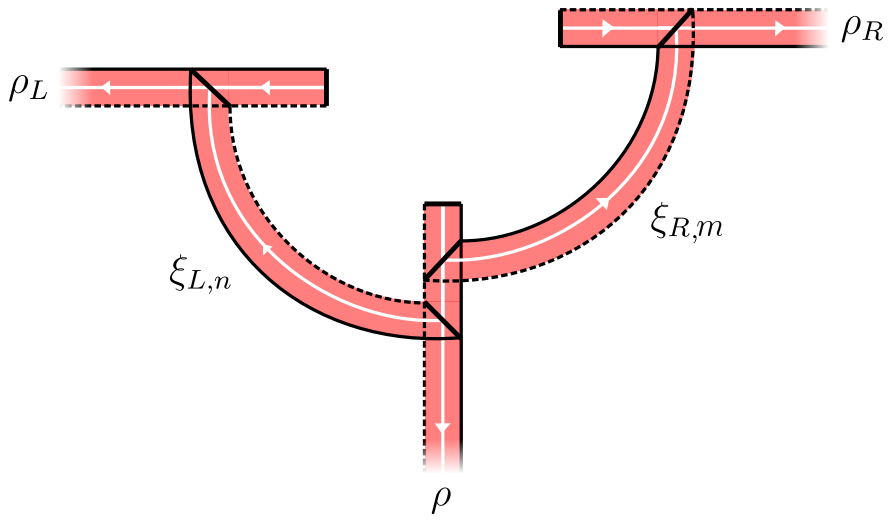


图 6.5：有限带 $\xi_{L,n}$ 是从 ρ 到 ρ_L的桥，而$\xi_{R,m}$ 是从 ρ 到 ρ_R的桥。

n 或 m，因此我们有

$$\begin{aligned}
&(V_{n+l}^* \times U_n^*) \cdot P_{12} \cdot (U_n \times V_{n+l}) \\
&\quad = (V_m^* \otimes \mathbb{1})\, \chi_{\rho_L}^{D_2}(U_n^*) \cdot P_{12} \cdot \chi_{\rho_R}^{D_1}(V_m)\, (U_n \otimes \mathbb{1}) \\
&\quad = (V_m^* \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes U_n^*) \cdot P_{12} \cdot (\mathbb{1} \otimes V_m)(U_n \otimes \mathbb{1}) \\
&\quad = (\mathbf{F}_{\rho_m}^{D_2} \otimes \mathbb{1})(\mathbf{F}_{\zeta_{L,m}}^{D_2} \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes \mathbf{F}_{\rho_n}^{D_1})(\mathbb{1} \otimes \mathbf{F}_{\zeta_{R,n}}^{D_1}) \cdot P_{12} \\
&\qquad \cdot (\mathbb{1} \otimes \mathbf{F}_{\zeta_{L,m}}^{D_2})^*(\mathbb{1} \otimes \mathbf{F}_{\rho_m}^{D_2})^*(\mathbf{F}_{\zeta_{R,n}}^{D_1} \otimes \mathbb{1})^*(\mathbf{F}_{\rho_n}^{D_1} \otimes \mathbb{1})^*
\end{aligned}$$

由于 ρ_n 与带$\zeta_{L,n}$ 和$\zeta_{R,n}$不相交，且利用命题(ii) 中的 6.5.2，可得

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{F}_{\rho_m}^{D_2} \otimes \mathbf{F}_{\rho_n}^{D_1})(\mathbf{F}_{\bar{\rho}_m}^{D_2} \otimes \mathbf{F}_{\bar{\rho}_n}^{D_1}) \\
&\qquad \cdot (\mathbf{F}_{\zeta_{L,m}}^{D_2} \otimes \mathbf{F}_{\zeta_{R,n}}^{D_1}) \cdot P_{12} \cdot (\mathbf{F}_{\zeta_{R,n}}^{D_1} \otimes \mathbf{F}_{\zeta_{L,m}}^{D_2})^*
\end{aligned}$$

利用命题(ii) 和(iii) 中的6.5.2以及酉性，我们可以消去 ρ_n, ρ_m上的带多重态。带 $\zeta_{R,n}$ 和 $\zeta_{L,m}$ 的构型与图 ρ_1 和 ρ_2 中的带相同，因此可以应用命题 6.3的 (vi) 项 6.5.2 得到

$$= B(D_1, D_2).$$

由于算子的乘法在有界集上的强算子拓扑下联合连续，我们有

$$\epsilon(\chi_\rho^{D_1}, \chi_\rho^{D_2}) = (V^* \times U^*) \cdot P_{12} \cdot (U \times V) = \lim_{n \uparrow \infty} (V_{n+l}^* \times U_n^*) \cdot P_{12} \cdot (U_n \times V_{n+l}).$$

因此我们已经证明

引理 6.7.4. 对于 $\mathcal{D}(G)$ 的任意酉表示 D_1 和 D_2，以及任意良性正半无限缀带 ρ，我们有

$$\epsilon(\chi_\rho^{D_1}, \chi_\rho^{D_2}) = B(D_1, D_2). \tag{6.35}$$

下述命题现在可立即得出:

命题 6.7.5. 函子 $F:\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)\to\mathbf{Amp}^\rho$ 是编织 C*-张量范畴之间的等价。

证明: 由命题6.7.3 只需验证

$$F(B(D_1,D_2))=\mathbb{1}\otimes B(D_1,D_2)=\epsilon(\chi_\rho^{D_1},\chi_\rho^{D_2})=\epsilon(F(D_1),F(D_2)). \tag{6.36}$$

对于任意两个单位元 表示 D_1, D_2, 其中第二步用到了引理6.7.4 .
□

6.7.2 $\mathbf{Amp}^\rho$ 与$\mathbf{Amp}^f$的等价

首先注意到 $\mathbf{Amp}^f$ 是半单的:

命题 6.7.6. 任意放大态射 $\chi\in\mathbf{Amp}^f$ 都等价于有限个不可约放大态射的直和。

证明: 这可由命题 6.3.3 以及以下假设直接得到: 所有$\mathbf{Amp}^f$ 中的对象都是有限的放大态射。□

命题 6.7.7. 范畴 $\mathbf{Amp}^\rho$ 和 $\mathbf{Amp}^f$ 作为C*-范畴等价。特别地, $\mathbf{Amp}^f$ 在$\mathbf{Amp}$的张量积下闭合, 因此$\mathbf{Amp}^f$ 是$\mathbf{Amp}$的满编织C*-张量子范畴。

证明: 回顾命题 6.7.2 , 该命题表明 $\mathbf{Amp}^\rho$ 是一个满 C*-子范畴, 且包含于$\mathbf{Amp}^f$。考虑函子 $F:\mathbf{Amp}^\rho\to\mathbf{Amp}^f$, 它将 $\mathbf{Amp}^\rho$嵌入$\mathbf{Amp}^f$中。我们要证明 F 是 C*-范畴之间的等价。显然, F 是线性的、全忠实的, 并且保持 $*$-结构。剩下唯一需要证明的是 F 本质满, 但这可由命题 6.7.6 和6.6.4直接得到。

由此可知, 对于任意两个放大态射 χ_1 和 χ_2, 属于 $\mathbf{Amp}^f$, 都存在表示 D_1 和 D_2, 使得 χ_1 等价于 $\chi_\rho^{D_1}$, 且 χ_2 等价于 $\chi_\rho^{D_2}$, 因此 $\chi_1\times\chi_2$ 等价于 $\chi_\rho^{D_1}\times\chi_\rho^{D_2}=\chi_\rho^{D_1\times D_2}$ (见引理 6.5.12) 。特别地, $\chi_1\times\chi_2$ 是有限的 (命题 6.7.2) , 因此 $\mathbf{Amp}^f$ 在张量积下封闭。因此, 它是 $\mathbf{Amp}$ 的一个 C*-张量子范畴, 并继承了 $\mathbf{Amp}$ 的编织结构。□

命题 6.7.8。 范畴 $\mathbf{Amp}^\rho$ 和 $\mathbf{Amp}^f$ 作为编织的 C*-张量范畴彼此等价。

证明: 由命题 6.7.7 嵌入函子 $F:\mathbf{Amp}^\rho\to\mathbf{Amp}^f$ 是 C*-范畴之间的等价, 且 $\mathbf{Amp}^\rho$ 与$\mathbf{Amp}^f$ 是 $^*\mathbf{Amp}$ 的编织 $\mathbf{CAmp}$。显然 F 是幺半且编织的, 故得证。□

6.7.3 定理 6.2.6 的证明

在证明主定理之前，我们必须先证明 $\mathbf{DHR}_f$ 在张量积下是闭集，因此继承了 $\mathbf{DHR}$ 的编织 C*-张量结构。

引理 6.7.9。 *$\boldsymbol{DHR}_f$ 的满子范畴$\boldsymbol{DHR}$ 在张量积下是闭的。因此，它是$\boldsymbol{DHR}$ 的一个带编织的 C*-张量子范畴，其编织继承自$\boldsymbol{DHR}$。*

证明：设 ν_1 和 ν_2 是属于 DHR_f的端同态。根据引理 6.4.4，存在属于 Amp 的放大态射 χ_1 和 χ_2，使得 ν_1 与 χ_1 等价，且 ν_2 与 χ_2等价。此外，由于 ν_1 和 ν_2 有限，χ_1 和 χ_2也有限。也就是说，χ_1 和 χ_2 属于 Amp_f。由此可得 $\nu_1 \times \nu_2$ 与 $\chi_1 \times \chi_2$等价，而根据命题 6.7.7，它是有限的。这表明 $\nu_1 \times \nu_2$ 是有限的，因此 DHR_f 在张量积下是闭的。 □

现在我们着手证明主要结果，即定理 6.2.6。为方便起见，我们在此重述该定理。

定理 6.7.10。 *范畴 $\mathbf{Amp}_f$、$\boldsymbol{DHR}_f$ 和 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 作为编织 C*-张量范畴彼此等价。*

证明： 命题 6.7.5 和 6.7.8 已经确立了 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 与$\mathbf{Amp}_f$之间的等价关系，因此剩下要证明的只有 $\mathbf{DHR}_f$ 与 $\mathbf{Amp}_f$ 作为编织 C*-张量范畴彼此等价。

为此，设 $F : \mathbf{DHR}_f \to \mathbf{Amp}_f$ 是嵌入函子。显然， F 是线性的、全忠实的、编织幺半的，并且尊重 $*$-结构。还需验证 F 本质满射，而这由引理6.4.4立即可得。 □

注 6.7.11。 如前所述，我们将范围限制在范畴 $\mathbf{DHR}_f$中。根据 [LR97], ，可对偶的 DHR 端同态（按我们的术语定义）自动是有限的；又由于范畴 $\mathbf{Amp}_f$ 中的所有对象都是可对偶的，我们的结果意味着，将范畴 $\mathcal{O}_{\Lambda_0}$ (由 Ogata 定义 [Oga22]) 限制到可对偶扇区（即存在共轭的扇区）后，恰好就是 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$。我们不认为 $\mathcal{O}_{\Lambda_0}$ 中存在任何对象不能等价于 $\mathbf{Amp}_f$中对象的（可能无限）直和。例如，任何此类对象的简单直和项都将等价于 $\mathbf{Amp}_f$中的一个简单对象。

6.8 结论

我们明确刻画了有限群 G 上 Kitaev量子双模型的任意子扇区范畴。正如所猜想的，其答案是该范畴与 $\mathrm{Rep}_f\,\mathcal{D}(G)$ 编织幺半等价。这是首个明确构造出具有非阿贝尔任意子的模型之任意子扇区范畴的例子。

量子双模型之所以在很大程度上易于处理，主要是因为其哈密顿量属于对易投影算符类型。一般而言，我们关注的是整个量子相。量子双模型的哈密顿量在热力学极限下具有谱隙，粗略地说，若另一个态也能作为受挫

无自由基态 ω_0 的量子双模型的基态，并且它们可以实现为一条有能隙哈密顿量连续路径上的基态，则称该态与其处于同一相中。[7] 利用标准技术（我们将在下文概述这些技术），我们的结果可以推广到处于同一有能隙相中的其他态；这些态可能不再是对易投影哈密顿量的基态。量子双模型的一个特征是，其物理性质应当对小扰动保持稳定。事实上，该基态具有所谓的局域拓扑量子序（LTQO）[FN15、CDH+20]。这意味着，足够小的局域扰动（即使施加于整个系统）也不会闭合谱隙 [MZ13、BHM10]。

上述结果意味着，未扰动和受扰动的量子双模型的基态可以通过 $\mathcal{A}$ 的一个足够局域的自同构（即满足 Lieb–Robinson 型界）[BMNS12]联系起来。因此，可以将基态的相视为所有能够通过这种足够局域的自同构相互联系的态的集合。事实证明，任意子扇区的编织范畴是这种相的不变量（也就是说，该相中的每个态都支撑同一类型的任意子）。这一结论源自 Ogata 的工作 [Oga22]（综述另见 [Oga23]），其应用对象是**DHR**（或 **DHR**$_f$）范畴。另一种方法是直接将其中发展的近似技术应用于此处构造的放大态射（由于不得不以较弱的近似版本取代 Haag 对偶性，因此这些技术是必要的）。

6.A 有限群的量子双及其表示范畴

固定一个有限群 G。对于任意 $g \in G$，我们将其逆元记为 $\bar{g} := g^{-1}$。我们用 $1 \in G$ 表示 G 的单位元。有限群 G 的量子双代数 $\mathcal{D}(G)$ 由群元素对 $(g,\ h)$ 的形式 $\mathbb{C}$-线性组合构成，$\in G \times G$ 配备乘积 μ、单位元 η、余乘积 Δ、余单位 ϵ 和反极 S，它们由以下线性延拓定义：

$$\mu\big((g_1,h_1),(g_2,h_2)\big) = \delta_{g_1,h_1g_2\bar{h}_1}(g_1,h_1h_2), \quad \Delta(g,h) = \sum_{k\in G}(k,h)\otimes(\bar{k}g,h)$$
$$\eta(1) = \sum_{k\in G}(k,1), \quad \epsilon(g,h) = \delta_{g,1} \quad S(g,h) = (\bar{h}\bar{g}h,\bar{h}),$$

从而赋予 $\mathcal{D}(G)$ Hopf代数的结构。事实上，它是一个 Hopf $*$-代数，其中 $(g,\ h)^* = \bar{\ }\quad\bar{\ }(hgh,\ h)$，并且是拟三角的，其万有 R-矩阵为

$$R = \sum_{g,k\in G}(k,g)\otimes(g,1). \tag{6.37}$$

我们回顾一下 $\mathcal{D}(G)$ 的表示论中的一些基本事实（例如参见 [Gou93]），并建立记号。记 $\mathsf{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 为 * 上有限维酉表示构成的 C $\mathcal{D}(G)$ 范畴，即满足 D 如下条件的表示：$D(a^*) = D(a)^*$ 对所有 $a \in \mathcal{D}(G)$ 均成立。令 $(D_2|D_1)$ 表示从一个表示到另一个表示 D_1 的交织算子空间

[7] 或者，也可以不借助哈密顿量来定义一个相，例如使用有限深度量子电路或适当的保持局部性的自同构。

D_2。我们用 I 表示不可约表示的等价类构成的有限集，并为每个 $i \in I$ 固定一个代表元 $D^{(i)}$，取自 i。代数 $\mathcal{D}(G)$ 是半单的，由此可知，$\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 中的任意表示都等价于由有限多个代表元 $\{D^{(i)}\}_{i\in I}$ 的副本构成的直和。

$\mathcal{D}(G)$ 的余乘积通过以下方式给出表示的幺半群乘积 $\times$

$$(D_1 \times D_2)(a) := (D_1 \otimes D_2)(\Delta(a)),$$

从而将 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 变成一个 C*-张量范畴。对于 $i,\ j \in I$ 我们有一个酉等价

$$D^{(i)} \times D^{(j)} \simeq \bigoplus_{k\in I} N_{ij}^k \cdot D^{(k)}$$

其中非负整数 N_{ij}^k 表示直和中 $D^{(k)}$ 的重数。

公式（R-矩阵（6.37）提供了一个编织 B： $\times \to \times^{\mathrm{op}}$ 对于 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}$（$G$），其分量映射为

$$B(D_1, D_2) := P_{12} \cdot (D_1 \times D_2)(R), \tag{6.38}$$

其中 P_{12} 交换了 D_1 和 D_2 的表示空间的张量积中的因子。这使 $\mathrm{Rep}_f\mathcal{D}(G)$ 成为一个带编织的 C*-张量范畴。

6.B 带状算子

为方便读者，我们回顾一下带状算子的定义及其一些性质，并针对本文所用的三角晶格进行说明。本附录中的内容广为人知，详见例如 [Kit03，BMD08、YCC22] 。

6.B.1 三角形和带

分别用 Γ^V、Γ^F 表示顶点和面在 Γ 中的集合。有向边 $e \in \vec{\Gamma}^E$可视为顶点对 $e = (v_0,\ v_1)$，其中 v_0 是 e的原点，v_1 是其目标。记作 $\partial_0 e = v_0$ 和 $\partial_1 e = v_1$，并且有 $\bar{e} = (v_1,\ v_0)$。

若顶点 v位于面 f的边界上，我们就称其属于该面。格点 $s = (v,\ f)$是由顶点 v 和面 f 组成的一对，且 v 属于 f。记作 $v(s) = v$ 和 $f(s) = f$。

Let Γ^*为 Γ 的对偶晶格。对于每条边 $e \in \Gamma^E$，我们关联一条有向对偶边e^*，它按如下方式从右向左穿过 e：



正向三角形 $\tau = (s_0, s_1, e)$ 由一对位于同一面的格点 s_0, s_1 以及一条连接 s_0 和 s_1 的顶点的边 $e \in \Gamma^E$ 构成。我们用 $\partial_0\tau = s_0$ 和 $\partial_1\tau = s_1$ 分别表示正向三角形 τ 的初始格点和末端点，并用 $e_\tau = (v(s_0)\ v(s_1))$ 表示与 τ 关联的有向边。与 τ 相反的三角形是正向三角形 $\bar{\tau} = (s_1, s_0, e)$。类似地，对偶三角形 $\tau = (s_0, s_1, e)$ 由一对位于同一顶点的格点 s_0, s_1，以及一条边 e 构成；该边所关联的对偶边 e^* 连接 s_0 和 s_1 的面。我们仍用$\partial_0\tau = s_0$ 和 $\partial_1\tau = s_1$, $e_\tau^* = (f(s_0)\ f(s_1))$ 表示与 τ 关联的有向对偶边，并定义反向对偶三角形 $\bar{\tau} = (s_1, s_0, e)$。

带 $\rho = \{\tau_i\}_{i=1}^{l}$ 是由三角形构成的有限元组，满足 $\partial_1\tau_i = \partial_0\tau_{i+1}$ 对所有 $i = 1, \cdots, l-1$；并且对于每条边 $e \in \Gamma^E$，至多存在一个三角形 τ_i 使得$\tau_i = (\partial_0\tau_i, \partial_1\tau_i, e)$。我们定义 $\partial_0\rho = \partial_0\tau_1$ 和 $\partial_1\rho = \partial_1\tau_l$。如果 ρ 仅由正向三角形构成，我们称 ρ 为直接带；如果 ρ 仅由对偶三角形构成，我们称 ρ 为对偶带。空带记作 $\epsilon = \emptyset$。

若一条带的所有正向三角形格点都位于其边沿着 ρ定向的右侧，则称该带为正向（简称正）；对偶三角形则反之。否则，该带为反向（简称反），参见图 6.6。

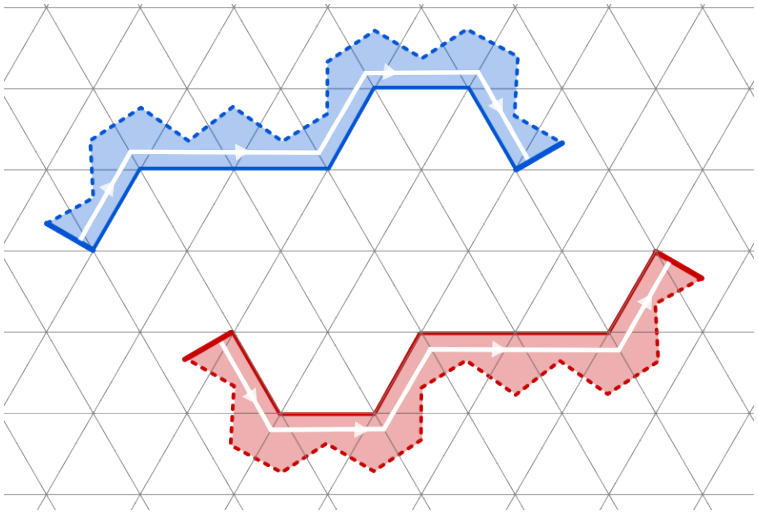


图 6.6：正向带（红色）与反向带（蓝色）的示例。

若有两条带 $\rho_1 = \{\tau_i\}_{i=1}^{l_1}$ 和 $\rho_2 = \{\tau_i\}_{i=l_1+1}^{l_1+l_2}$ 满足 $\partial_1\rho_1 = \partial_0\rho_2$，则可将它们串接，得到一条带 $\rho_1\rho_2 = \{\tau_i\}_{i=1}^{l_1+l_2}$。若 ρ_1 和 ρ_2 非空，则$\partial_0\rho = \partial_0\rho_1$ 且 $\partial_1\rho = \partial_1\rho_2$。$\rho = \{\tau_i\}_{i=1}^{l}$ 的反向带是带 $\bar{\rho} = \bar{\tau}_l \cdots \bar{\tau}_1$。若$\rho$ 为正向定向，则 $\bar{\rho}$ 为反向定向，反之亦然。带 $\rho = \{\tau_i = (s_0^{(i)}, s_1^{(i)}, e_i)\}_{i=1}^{l}$ 的支撑为 $\mathrm{supp}(\rho) := \{e_i\}_{i=1}^{l}$.

6.B.2 带状算子

6.B.2.1 定义和基本性质

对于每条边 $e \in \Gamma^E$，我们定义作用于 $\mathcal{H}_e$ 上的以下算子：

$$L_e^h := \sum_{g\in G} |hg\rangle\langle g|, \quad R_e^h := \sum_{g\in G} |g\bar{h}\rangle\langle g|, \quad T_e^g := |g\rangle\langle g|. \tag{6.39}$$

L_e^h 和 R_e^h 是酉算子，分别实现 $\mathcal{H}_e$ 上的左群作用和右群作用。T_e^g 是投影算子。

对于每个对偶三角形 $\tau = (s_0, s_1, e)$，我们将酉算子 L_τ^h 关联到支撑于边 e的算子，定义如下。若 $e^* = (f(s_0)\ f(s_1))$ 且 $v(s_0) = \partial_0 e$，则 $L_\tau^h := L_e^h$。若 $e^* = (f(s_0)\ f(s_1))$ 且 $v(s_0) = \partial_1 e$，则 $L_\tau^h := R_e^{\bar{h}}$。若 $e^* = (f(s_1)\ f(s_0))$ 且 $v(s_0) = \partial_0 e$，则 $L_\tau^h := L_e^{\bar{h}}$。最后，若 $e^* = (f(s_1)\ f(s_0))$ 且 $v(s_0) = \partial_1 e$，则 $L_\tau^h := R_e^h$。类似地，对于每个正向

三角形 $\tau = (s_0,\ s_1,\ e)$，我们关联投影算子 $T^g_\tau := T^g_e$，若 $e = (v(s_0)\ v(s_1))$；以及 $T^g_\tau := T^{\bar g}_e$，若 $e = (v(s_1)\ v(s_0))$。

对每个有限带 ρ，我们按如下方式定义带状算子 $F^{h,\ g}_{\ \rho}$。若 ϵ 是平凡带，则 $F^{h,\ g}_{\ \epsilon} := \delta_{g,\ 1}\mathbb{1}$。对于由单个正向三角形 τ 构成的带，令 $F^{h,\ g}_{\ \tau} = T^g_\tau$；对于由单个对偶三角形 τ 构成的带，令 $F^{h,\ g}_{\ \tau} = \delta_{g,\ 1}L^h_\tau$。一般带的带状算子通过以下公式归纳地定义：

$$F^{h,g}_{\rho_1\rho_2} = \sum_{k\in G} F^{h,k}_{\rho_1} F^{\bar k h k,\bar k g}_{\rho_2}. \tag{6.40}$$

带状算子 $F^{h,\ g}_{\ \rho}$ 支撑于 $\mathrm{supp}(\rho)$。定义

$$T^g_\rho := F^{e,g}_\rho, \quad L^h_\rho := \sum_{g\in G} F^{h,g}_\rho. \tag{6.41}$$

于是 $F^{h,\ g}_{\ \rho} = L^h_\rho T^g_\rho = T^g_\rho L^h_\rho$。带状算子的乘法和伴随由下式给出：

$$F^{h_1,g_1}_\rho \cdot F^{h_2,g_2}_\rho = \delta_{g_1,g_2} F^{h_1h_2,g_1}_\rho, \quad \left(F^{h,g}_\rho\right)^* = F^{\bar h,g}_\rho, \tag{6.42}$$

而反转带的定向可得

$$F^{h,g}_\rho = F^{\bar g\bar h g,\bar g}_{\bar\rho}. \tag{6.43}$$

注意到 $\mathcal{D}(G)$ 的反极自然地出现了。

我们还有以下性质：

$$\sum_k F^{e,k}_\rho = \mathbb{1}. \tag{6.44}$$

如果我们有两条正向带 ρ_1 和 ρ_2，它们具有如图6.3 所示的公共初始点（参见 [Kit03]中的公式（38））：

$$F^{g_2,h_2}_{\rho_2} F^{g_1,h_1}_{\rho_1} = F^{g_1,h_1}_{\rho_1} F^{\bar g_1 g_2 g_1,\bar g_1 h_2}_{\rho_2}. \tag{6.45}$$

6.B.2.2 规范变换和磁通投影算符

对于任意格点 s，存在唯一一条终点格点等于 s 的逆时针闭合直接带，我们将其记为 $\rho_\triangle(s)$。类似地，存在唯一一条终点格点等于 s 的逆时针闭合对偶带，我们将其记为 $\rho_\star(s)$。对于任意格点 s，我们定义规范变换A^h_s 和磁通投影算符B^g_s 如下：

$$A^h_s := L^{h,e}_{\rho_\star(s)}, \quad B^g_s := T^{e,g}_{\rho_\triangle(s)}. \tag{6.46}$$

我们定义 $U_s : \mathcal{D}(G) \to \mathcal{A}$ 如下：

$$U_s(g,h) := B^g_s A^h_s, \tag{6.47}$$

线性延拓至 $\mathcal{D}(G)$。容易验证，U_s 是 *-代数的单射同态，即 $B^g_s A^h_s$ 张成量子双代数 $\mathcal{D}(G)$ 的一个表示。

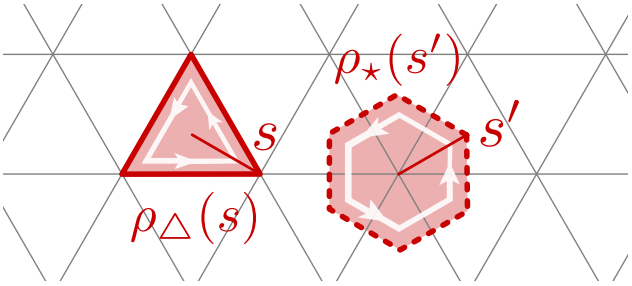


图 6.7： $\rho_\triangle(s)$ 和 $\rho_\star(s')$ 的示例。

注意到规范变换 A_s^h 仅取决于顶点 $v = v(s)$，因此对于任意满足 $v = v(s)$ 的格点 s，我们可以写作 $A_v^h := A_s^h$。此外，平凡通量投影算子 B_s^e仅取决于面 $f = f(s)$，因此对于任意满足 $f = f(s)$ 的格点 s，我们写作 $B_f := B_s^e$。

最后，我们定 义顶点 v 处规范不变态上的投影算子为

$$A_v := \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} A_v^h. \tag{6.48}$$

直接计算可得，这确实是一个投影。

6.C 传输子的收敛

在本附录中，我们证明构造电荷输运子所需的一些技术引理。下面的引理在此证明以便查阅，它是众所周知的（参见 [Tak02，命题 II.4。9]）。

引理 6.C.1. 设 $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 是作用于某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的 $*$-代数。假设 $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ 是一个由向量组成的稠密子集。设 $U_\lambda \in \mathcal{A}$ 是一致有界网，且对每个 $\xi \in \mathcal{H}_0$， $U_\lambda\xi$和 $U_\lambda^*\xi$都在 $\mathcal{H}$的范数拓扑下收敛。那么 U_λ在强-$*$ 算子拓扑下收敛到某个 $U \in \mathcal{A}''$。此外，如果每个 U_λ 都是酉算子，那么极限 U 也是酉算子。

证明： 取 $\epsilon > 0$ 和 $\xi \in \mathcal{H}$。那么存在 $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ 使得 $\|\xi - \xi_0\| < \epsilon$。根据假设，存在 $M > 0$ 使得对所有 λ都有 $\|U_\lambda\| < M$。由此可得

$$\|(U_\lambda - U_\mu)\xi\| = \|(U_\lambda - U_\mu)(\xi - \xi_0) + (U_\lambda - U_\mu)\xi_0\| \le 2M\epsilon + \|(U_\lambda - U_\mu)\xi_0\|.$$

根据假设， $U_\lambda\xi_0$ 收敛，因此 $U_\lambda\xi$ 是柯西网。于是我们可以定义$U\xi := \lim_\lambda U_\lambda\xi$。从构造可知， U是线性的；又因为 $\|U_\lambda\|$ 一致有界，所以 U 是有界算子。类似地，我们可以得到一个˜ ˜算子 U^*，其定义为 $U^*\xi = \lim_\lambda U_\lambda^*\xi$。

对所有 ξ， $\eta \in \mathcal{H}_0$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\langle\eta, (U^* - \tilde{U}^*)\xi\rangle\right| &= \left|\langle\eta, (U^* - U_\lambda^*)\xi\rangle + \langle\eta, (U_\lambda^* - \tilde{U}^*)\xi\rangle\right| \\ &\le \|(U - U_\lambda)\eta\|\|\xi\| + \|\eta\|\|(U_\lambda^* - \tilde{U}^*)\xi\|.\end{aligned}$$

˜由于右端趋于零，因此可得 $U^* = U^*$；于是 $U_\lambda \to U$和 $U_\lambda^* \to U^*$的强收敛表明， $U_\lambda \to U$在强-$*$算子拓扑下成立。由于 $\mathcal{A}''$ 中半径为 M 的球在强-$*$ 算子拓扑下是闭集，因此可得 $u \in \mathcal{A}''$。

最后，假 设 U_λ 是酉算子。由强-$*$ 算子收敛可得

$$\|U\xi\| = \lim_\lambda \|U_\lambda \xi\| = \|\xi\|, \qquad \|U^*\xi\| = \lim_\lambda \|U_\lambda^* \xi\| = \|\xi\|$$

对所有 $\xi \in \mathcal{H}$。因此， U 和 U^* 都是等距算子，从而 U 是酉算子 . □

注意，我们需要假设两者 $U_\lambda \xi$和 $U_\lambda^* \xi$都收敛。由于伴随关于强算子拓扑并不连续，因此其中一个收敛并不能推出另一个也收敛。

引理 6.C.2. 设 ρ_1 是一个起点为格点 s_0 的 ρ_2 半无限正向带，且 s_1是一个起点位于 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的桥，连接 ρ_1 和 ρ_2，其含义见定义*6.5.7*，并按该定义记$\sigma_n = \rho_{1,\, n}\xi_n\rho_{2,\, n}$ 。最后，取 $g, h \in G$。则 $\pi_0(F^{h,}{}_{\sigma_n}{}^{g})$ 在强-*算子拓扑下收敛到算子$F \in \pi_0(\mathcal{A})''$。

证明：回忆一下，$(\pi_0, \mathcal{H}, \Omega)$ 是量子双模型的无挫折基态 ω_0 对应的 GNS 表示。为简化记号，我们省略算子上的 π_0 。

设 $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{loc}}$。那么存在某个 $k \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq k$，$\mathrm{supp}(A)^{+1} \cap \sigma_n$ 都是常数，其中 $+1$ 上标表示将集合 $\mathrm{supp}(A)$ 向外扩展一个格点。对于所有 $n \geq k$，记 $\rho_{i,n\setminus k}$ 为移除前 k 个三角形后的（有限）带$\rho_{i,n}$ ，并^ ^定义 $\xi_n = \rho_{1,\, n\setminus k}\xi_n\rho_{2,n\setminus k}$。也就是说，$\sigma_n = \rho_{1,k}\xi_n\rho_{2,k}$。根据 k 的选取可知，对于所有 $n \geq k$，$\mathrm{supp}(A)^{+1} \cap \widehat{\xi}_n = \emptyset$ 。于是，利用带状算子的分解规则，即公式 (6.40)，对于所有 $n \geq k$ ，我们有

$$\begin{aligned} F^{h,g}_{\sigma_n} A\Omega &= \sum_{m_1,m_2\in G} F^{h,m_1}_{\rho_{1,k}} F^{\bar{m}_1 h m_1, m_2}_{\widehat{\xi}_n} F^{\overline{m_1 m_2} h (m_1 m_2), \overline{m_1 m_2} g}_{\rho_{2,k}} A\Omega \\ &= \sum_{m_1,m_2\in G} F^{h,m_1}_{\rho_{1,k}} F^{\overline{m_1 m_2} h (m_1 m_2), \overline{m_1 m_2} g}_{\rho_{2,k}} A F^{\bar{m}_1 h m_1, m_2}_{\widehat{\xi}_n} \Omega. \end{aligned}$$

^在最后一步中，我们用到了算子的局域性。注意，对于 $n, m \geq k$，根据构造，带 ξ_n 和 $\sim\!\xi_m$ 具有相同的起点和终点。由于带状算子在基态上的作用仅取决于带的端点（例如参见 [BMD08, Ham24]），因此有 $F^{\bar{m}_1 h m_1,}{}_{\widehat{\xi_n}}{}^{m_2}\,\Omega = F^{\bar{m}_1 h m_1,}{}_{\widehat{\xi_m}}{}^{m_2}\,\Omega$。由此可知，序列 $F^{h,}{}_{\sigma_n}{}^{g} A\Omega$ 在范数意义下收敛。由于带状算子的伴随仍是带状算子（位于同一条带上，参见 (6.42)），上述论证表明，$(F^{h,}{}_{\sigma_n}{}^{g})^* A\Omega$ 也在范数意义下收敛，其中 $n \to \infty$。注意，对于带状算子，无论 σ_n 如何，均有 $\|F^{h,}{}_{\sigma_n}{}^{g}\| \leq 1$。因此，由引理 6.C.1 可得结论。□

参考文献

[BBC+25] Anupama Bhardwaj、Tristen Brisky、Chian Yeong Chuah、Kyle Kawagoe、Joseph Keslin、David Penneys 和 Daniel Wallick。《冯·诺伊曼代数偏序集的超选择扇区》。《数学物理通讯》，406:185，2025年。

[BHM10] Sergey Bravyi、Matthew Hastings 和 Spyridon Michalakis。拓扑量子序：局域扰动下的稳定性。《数学物理学杂志》，51:093512，2010。[BHNV26] Alex Bols、Mahdie Hamdan、Pieter Naaijkens 和 Siddharth Vadnerkar。非阿贝尔量子双模型的任意子扇区范畴。《数学物理通讯》407，2，407，2026年。[BKM24] Alex Bols、Boris Kjær 和 Alvin Moon。无限体积下的双半子态。Ann. Henri Poincar ´e，26:1009–1053，2024年。[BMD08] H. Bombin 和 M. A. Martin-Delgado。晶格上的非阿贝尔 Kitaev 模型族：拓扑凝聚与禁闭。《物理评论B》，78(11):115421，2008年。[BMNS12] Sven Bachmann、Spyridon Michalakis、Bruno Nachtergaele 和 Robert Sims。量子晶格系统有隙相内的自同构等价。《数学物理通讯》，309(3):835–871，2012年。[BV25] Alex Bols 和 Siddharth Vadnerkar。基泰耶夫量子双模型的任意子扇区分类。《数学物理通讯》，406:188，2025年。[CDH+20] Shawn X. Cui、Dawei Ding、Xizhi Han、Geoffrey Penington、Daniel Ranard、Brandon C. Rayhaun 和 Zhou Shangnan。Kitaev量子双模型作为纠错码。Quantum，4:331，2020。[FG90] J¨urg Fr¨ohlich 和 Fabrizio Gabbiani。局域量子理论中的编织统计。《数学物理评论》，2(03):251–253，1990年。[FN15] Leander Fiedler 和 Pieter Naaijkens。阿贝尔群的Kitaev量子双模型的Haag 对偶性。《数学物理评论》，27:1550021，2015。[Fre94] Klaus Fredenhagen。具有无限统计维数的超选择扇区。载于 H. Kosaki、H. Araki、Y. Kawahigashi（编），《子因子》，第242–258页。World Sci. Publ.，1994年。[Fr¨o88] J¨urg Fr¨ohlich。场的统计、Yang-Baxter 方程以及纽结与链环理论。《非微扰量子场论》，第71–100页，1988年。[FRS89] K. Fredenhagen、K.-H. Rehren 和 B. Schroer。具有辫群统计和交换代数的超选择扇区。I. 一般理论。《数学物理通讯》，125(2):201–206，1989年。[FRS92] K. Fredenhagen、K.-H. Rehren 和 B. Schroer。具有辫群统计和交换代数的超选择扇区。II. 几何方面与共形协变性。《数学物理评论》，4:113–157，1992年。[GLR85] P. Ghez、R. Lima 和 J. E. Roberts。W^*-范畴。《太平洋数学杂志》，120(1):79–109，1985年。

[Gou93] M. D. Gould. 有限群量子双代数及其表示。《澳大利亚数学会公报》，48:275–301, 1993.[Haa96] Rudolf Haag. 局域量子物理：场、粒子与代数。物理学丛书与专著。施普林格出版社，1996年.[Ham24] Mahdie Hamdan. 非阿贝尔量子双模型中的无限体积基态。博士论文，卡迪夫大学，2024年.[HM06] Hans Halvorson and Michael M¨uger. 代数量子场论。载于 J. Butterfield 和 J. Earman 编，《物理学哲学》，第 731–864 页。爱思唯尔，2006.[Kit03] A Yu Kitaev. 任意子实现的容错量子计算。《物理年鉴》，303(1):2–30, 2003.[Kit06] Alexei Kitaev. 精确可解模型中的任意子及其拓展。《物理年鉴》，321(1):2–111, 2006.[KR97a] Richard V. Kadison 和 John R. Ringrose. 算子代数理论基础。第一卷，第 15 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年.[KR97b] Richard V. Kadison 和 John R. Ringrose. 算子代数理论基础。第二卷，第 16 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年.[LR97] R. Longo 和 J. E. Roberts. 维数理论。K-Theory，11(2):103–159, 1997.[MZ13] Spyridon Michalakis 和 Justyna P. Zwolak. 无挫折哈密顿量的稳定性。《数学物理通讯》，322(2):277–302, 2013.[Naa11] Pieter Naaijkens. 平面上 Kitaev 环面码中的局域化端同态。《数学物理评论》，23(4):347–373, 2011.[Naa12] Pieter Naaijkens. 环面码中锥区域的 Haag 对偶性与远端分裂性质。《数学物理快报》，101(3):341–354, 2012.[Naa15] Pieter Naaijkens. 从局域量子物理角度看 Kitaev 量子双模型。载于 R. Brunetti、C. Dappiaggi、K. Fredenhagen 和 J. Yngvason 编，《代数量子场论进展》，第 365–395 页。施普林格，2015.[NS97] Florian Nill 和 Korn´el Szlach´anyi. 具有量子双余对称性的 Hopf 代数量子链。《数学物理通讯》，187(1):159–200, 1997.[NT13] Sergey Neshveyev 和 Lars Tuset. 紧量子群及其表示范畴。法国数学会，2013。

[Oga22] Yoshiko Ogata. 从满足近似 Haag 对偶性的有能隙基态导出编织 C*-张量范畴。《数学物理学杂志》，63(1):011902, 2022年.[Oga23] Yoshiko Ogata. 量子自旋系统中有能隙基态相的分类。载于《国际数学家大会。第 *5* 卷。第 *9–11* 节》，第 4142–4161 页。EMS 出版社，柏林，2023年.[OPGRdA25] Yoshiko Ogata、David P´erez-Garc´ıa 和 Alberto Ru´ız de Alarc´on. 二维量子自旋系统的 Haag 对偶性。预印本，2025年.[SV93] K. Szlach´anyi 和 P. Vecserny´es. G-自旋模型中的量子对称性与辫群统计。《数学物理通讯》，156(1):127–168, 1993.[Tak02] M. Takesaki. 算子代数理论。第一卷，数学科学百科全书第 124 卷。施普林格出版社，2002.[TWH+24] Mario Tomba、Shuqi Wei、Brett Hungar、Daniel Wallick、Kyle Kawagoe、Chian Yeong Chuah 和 David Penneys. Kitaev 量子双模型的边界代数。《数学物理学杂志》，65(10):102201, 2024年.[Wan10] Zhenghan Wang. 拓扑量子计算，第 112 卷。数学科学会议委员会，2010.[YCC22] Bowen Yan、Penghua Chen 和 Shawn X Cui. 基于 Hopf 代数的广义 Kitaev 量子双模型中的带状算子。《物理学杂志 *A*：数学与理论》，55(18):185201, 2022年.[ZCZW19] Bei Zeng、Xie Chen、Duan-Lu Zhou 和 Xiao-Gang Wen. 量子信息与量子物质的交汇。《量子科学与技术》。施普林格，纽约，2019。

第 7 章
对称缺陷与分数化的算子代数方法

Kyle Kawagoe

量子信息科学与工程中心，俄亥俄州立大学，哥伦布，OH 43210

Siddharth Vadnerkar

部门　　加州大学戴维斯分校物理系，戴维斯，加利福尼亚州 95616

Daniel Wallick

数学系　　俄亥俄州立大学数学系，哥伦布，俄亥俄州 43210

本章节逐字摘自 [KVW24], 预印本可在 arXiv 上获取，目前正在《数学物理通讯》接受审稿。经 Kyle Kawagoe、Siddharth Vadnerkar、Daniel Wallick 许可转载。根据本文的版权条款（知识共享署名许可协议），允许再分发。首先，我们简要介绍本工作的范围。

到目前为止，我们只考虑了不具有全局对称性的系统 G。在存在格点上的对称性 G 时，许多晶格系统中已证明，可以沿一条路径“破缺”对称性，从而留下一个对称性畴壁。畴壁虽然很有趣，但其行为在很大程度上仍类似于拓扑相，因为它们具有相同的任意子范畴。然而，进一步“破缺”对称性畴壁后，可以得到一些颇为深奥的对象，称为对称性缺陷。这些对象在晶格系统中相当常见，有时也称为晶格向错。对称性缺陷充当畴壁的“汇”或“源”，也就是说，可以将畴壁终止于对称性缺陷上。

在存在对称性缺陷（或简称缺陷）时，任意子激发可能表现出丰富得多的行为。对称性畴壁可以“置换”任意子标签，还可以发挥

“汇”或“源”的作用，使单个任意子得以产生或湮灭，而通常任意子只能成对产生或湮灭。此外，畴壁是有限可传输的，因而具有自身的融合和编织结构。自然会问，缺陷的行为背后是否存在某种范畴结构。描述对称性缺陷的正确代数语言是 G-交叉酉模张量范畴。该范畴的中性分量恢复了 $\mathcal{C}$，而 g-分次分量描述了对称性缺陷及其与任意子的交叉编织。同时，任意子上的对称性分数化表现为由群上同调分类的射影作用。这一图景已在范畴论文献中系统化[BBCW19、DGNO10、EGNO15]。

然而，要将这一优雅的描述 G-交叉 BTC 引入无限体积情形，绝非易事。回想一下，在这一情形下，要恢复任意子扇区范畴，必须提出一个选择准则。事实上，必须谨慎选择恰当的准则，既不纳入虚假的非物理任意子扇区，也不遗漏合法的扇区。这一准则的优点之一（与任意子选择准则的情形相同）是对微扰具有稳定性。因此，探究无限体积情形下缺陷筛选准则的存在性，是一个值得思考的问题。

在本文发表时，学界尚缺乏一种能够把握对称性缺陷全貌的合适准则。由于不含任何对称性缺陷的对称性富集拓扑相会归结为通常的任意子扇区范畴，因此，任何拟议的缺陷筛选准则都必须涵盖任意子选择准则。

我们的论文有三项主要贡献。首先，我们提出了一种缺陷筛选准则。我们研究满足缺陷筛选准则的缺陷扇区（即表示），并证明它们构成一个 G-交叉编织 C*-张量范畴。这一方法很大程度上沿袭了 Ogata 在最初推导任意子扇区的编织 C*-张量范畴时开辟的路径 [Oga22]，同时也深受 M¨uger 推导 G-交叉编织 C*-张量范畴的工作的启发，该范畴出现在 $1+1D$ G-富集有理共形场论[M¨ug05]中。

其次，我们给出许多具体的晶格实例，以证明我们的缺陷选择准则能够得到正确的范畴。特别是，我们研究了一般G-SPT的情形，并发现它们构成 Vec(G)；我们还研究了一个 $\mathbb{Z}_2$富化的环面码。为得到这些结果，我们还开发了一种实用算法，用于求出对称性缺陷；该算法本身也具有实际应用价值。

第三，通过本文所发展的方法，我们提供了一条完全通过体相操作计算对称性分数化数据的途径；在本文发表时，这是一个重要的开放问题。物理学家通常依靠对系统的对称性进行规范化，或利用边界来计算这些数据。因此，这项工作为从事相关研究的物理学家提供了一套实用工具。

摘要。 我们为无限体积情形下的 2+1D 对称性富化拓扑（SET）序中的对称性缺陷建立了一套超选择理论。对于具有酉算子格点作用的有限对称群 G，我们的形式体系给出了一个 G-交叉编织张量范畴 GSec。这套超选择理论是通常的任意子超选择理论的直接推广，因此与平凡分级分量 $G\mathrm{Sec}_1$中的标准分析一致。该框架还使我们能够以完全严谨的方式理解对称性分数化。为了展示

我们形式体系的实用性，我们明确计算了具有对称性的短程和长程纠缠自旋系统中的 G Sec，并得到了相关的骨架数据。

目录

7.1 引言 .200 7.2 设定与主要结果 .202 7.2.1 一般假设.204 7.2.2 主要结果.206 7.2.3 构造缺陷自同构 .209

7.3 对称性缺陷 .212

7.3.1 范畴： G缺陷扇区.212 7.3.2 G-交叉幺半范畴与编织结构： GSec . . . . . 216 7.3.3 与任意子扇区的联系 .225 7.3.4 相干性数据 .226

7.4 一般 SPT.230

7.4.1 有限深度量子电路哈密顿量.232 7.4.2 利用自同构构造缺陷.232 7.4.3 缺陷哈密顿量.236 7.4.4 缺陷扇区表示.237

7.5 $\mathbb{Z}_2$ 对称保护拓扑相：平凡 $\mathbb{Z}_2$ 顺磁体.24 **1**

7.5.1 哈密顿量与基态.241 7.5.2 缺陷扇区范畴 .242

7.6 $\mathbb{Z}_2$ 对称保护拓扑相：Levin-Gu 对称保护拓扑相 .243

7.6.1 哈密顿量与基态.243 7.6.2 缺陷哈密顿量.245 7.6.3 缺陷扇区范畴 .246

7.7 A $\mathbb{Z}_2$-对称性富集拓扑环面码 .24 **7**

7.7.1 环面码概述 .248 7.7.2 SET 环面码模型 .251 7.7.3 对称性缺陷 .258 7.7.4 缺陷扇区 .261 7.7.5 缺陷张量范畴 .263 7.7.6 对称性分数化 .265 7.7.7 G-交叉编织 .266

7.8 讨论.271 7.A 算子代数与范畴论简介 272

7.A.1 一般设定、锥与无穷远边界 . . . . . 2727.A.2 算子代数 .2737.A.3 范畴论 .2797.B Levin-Gu SPT 的有用结果 .2817.C 带辅助顶点自旋的环面码.2847.D 描述 Levin-Gu SPT 缺陷扇区的自同构 . 2877.E 将 SET 环面码缺陷扇区与哈密顿量项联系起来 . 292参考文献.294

7.1 引言

在 2+1D 中，长程纠缠拓扑序由幺正模张量范畴（UMTC）刻画，这些范畴源自其涌现任意子的超选择理论。在许多情形下，这一物理命题已通过在无限晶格模型上运用代数量子场论中的 DHR 理论得到严格验证 [Naa11、 FN15、 BKM23、BV23]。值得注意的是，当存在有限格点对称群时，情况便有所不同 G。里程碑式的工作 [BBCW19] 为这一分类为何由 G-交叉辫融合范畴刻画 G-对称性丰富拓扑（SET）序，提供了物理依据。SET 模型和对称性分数化已在物理学文献中得到广泛研究[Che17、 Wen02、 WV06、 HBFL16]。尽管这项工作影响深远，目前仍缺乏严谨的理论来说明这些范畴如何通过微观体相分析得出。尤其是，这些 SET 模型此前尚未在无限体积情形下得到研究。在本文中，我们给出一套完备的形式体系，详细说明 G-交叉辫融合范畴如何从对 SET 序的对称性缺陷进行 DHR 风格分析中涌现。我们还通过具体实例展示了这一形式体系。

最初的 DHR 形式体系源自 [DHR71, DHR74], ，其建立在 [HK64]的基础之上。它旨在描述连续量子场论，并将有限时空区域作为局域区域。后来， [BF82] 在这项工作的基础上发展出一种方法，用来描述局域化于类空锥而非有限区域中的态。随后，人们采用这一方法研究拓扑序量子自旋系统，始于环面码 [Naa11, Naa12, Naa13]。研究表明，这些方法在微扰 [CNN20, NO22, Oga22]下保持稳定，因此是在不依赖具体模型的情况下理解拓扑序的重要一步。最近，DHR 方法被用于研究存在 $U(1)$ 对称性时的任意子 [BCFO24]。我们的论文与他们的分析在某些方面相同，尤其是在缺陷的构造方面。然而，他们的许多技术和结果都特定于 $U(1)$，因此不适用于我们的情形，因为我们关注的是有限群。正如 [BBC+24]所示，DHR 方法还可以按照 [GF93], 的方式加以推广。另一种受 DHR 启发的拓扑序研究方法见于 [Jon23, JNPW23, CHK+24]。

沿用这些分析的思路，我们考虑一个 SET 的真空态 ω_0 ，并为准局部代数 $\mathfrak{A}$ 构造其 GNS 表示 $\pi_0\colon\ \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H})$。对于每个 $g \in G$，我们都有一个支撑保持自同构 $\beta_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$，它表示对称作用。我们将基态视为对称的，具体来说， $\omega_0 \circ \beta_g = \omega_0$。

有了这样的基态，我们受到以下工作的启发： [M¨ug05] ，以定义对称性缺陷扇区。从物理角度看，[M¨ug05] 中的分析应对应于包围我们所研究的体相对称性富集拓扑序、位于无穷远处的边界共形场论。现在我们陈述主要结果。主要理论结果在定理 7.2.10 和推论 7.3.23中作了精确陈述。

定理

关于 π_0 的缺陷扇区范畴是一个 G-交叉编织 C*-张量范畴，其平凡分级分量是任意子扇区的编织张量范畴。

这与 [BBCW19] 在算子代数框架中的预测相呼应。正如该定理所示，由于我们考虑的是 2+1 维中的严格格点对称性，因此不会出现他们提出的高阶上同调障碍。

随后，我们通过计算一系列同时呈现短程有序和长程有序的实例中的这一范畴，展示了我们形式体系的实用性。

这适用于一大类对称保护拓扑相。我们证明，在某些物理上合理的假设（假设 7、8）下， G-SPT（定义 7.2.12）的缺陷扇区在 G-分次意义下幺半群等价于 $\mathsf{Vec}(G, \nu)$，其中 ν 是一个 3-余循环（详见定理7.2.15）。我们指出， [Oga21] 所做的分析与我们的缺陷构造技术思路相似，但他们的分析所依赖的假设弱得多，因此更具一般性。不过，正如我们稍后将展示的，我们的构造可以很好地推广到具有长程有序的模型。

接下来我们专门讨论 Levin-Gu SPT 的情形，它是一个非平凡$\mathbb{Z}_2$-SPT 的例子。我们计算了该模型的缺陷扇区范畴及其在体区中的骨架数据，并得到以下结果（定理7.2.16）。由于人们猜想 2+1D 中的 SPT 相完全由一个 3-余循环决定，因此我们不计算辫编数据。不过，使用我们的形式体系，当然可以计算这些模型中的辫编数据。

定理

Levin-Gu SPT 的缺陷扇区范畴是 $\mathbb{Z}_2$-分次幺半群等价于 $\mathsf{Vec}(\mathbb{Z}_2, \nu)$，其中 3-余循环 $\nu\colon \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to U(1)$ 表示非平凡元素 $[\nu] \in H^3(\mathbb{Z}_2, U(1))$。

除了 [Naa11、Naa12、Naa13], 之外，还有其他一些工作对无限晶格模型进行了完备的超选择分析，例如 [FN15]，其研究对象是阿贝尔量子双模型。最近，这些方法已被应用于双半子模型 [BKM23] 以及非阿贝尔量子双模型 [BV23]。关于这种拓扑序处理方法的一般论述（所使用的假设远弱于本文中的假设），可参见 [Oga22]。

我们这项工作的主要贡献之一，是对环面码的一个对称性丰富模型进行完备的缺陷超选择理论分析。该模型定义于第7.7节。我们计算了该模型的缺陷扇区范畴，并分析了由此得到的骨架数据。以下结果是我们分析的结论，并在

定理 7.2.17。

定理

第 7.7 节中的对称性富化环面码模型的缺陷扇区构成一个 G-交叉编织融合范畴，其结合子平凡，但分数化数据非平凡。

在发布本手稿的预印本后，我们得知另一个研究团队即将完成一项涵盖许多相同主题的工作。我们鼓励感兴趣的读者也去看看 [GRO24]。

本手稿的组织结构如下。我们首先提出一种选择准则，用于筛选具有对称性缺陷的相关表示，并将其称为缺陷扇区（定义 7.2.7）。接着，在第 7.3 节中，我们构造这些缺陷扇区构成的范畴，并证明它是一个 G-交叉编织张量范畴。随后，我们在第 7.3.4 节中证明，该范畴的相干数据与文献中已讨论的对称性缺陷代数理论相一致。我们还在第 7.3.3 节中证明，当对称性平凡时，这一选择准则便化为任意子扇区的选择准则，因此是其严格推广。

在第 7.4 节中，我们讨论由有限深度量子电路（FDQC）构造的一般 SPT 情形，并证明总存在一个对易投影哈密顿量，其基态中包含一个对称性缺陷。作为本部分的总结，我们验证，对于任何此类 SPT，其缺陷扇区范畴都等价于 $\mathsf{Vec}(G,\nu)$，其中 G 是该 SPT 态的底层对称群，而 ν 是一个 3-余循环。

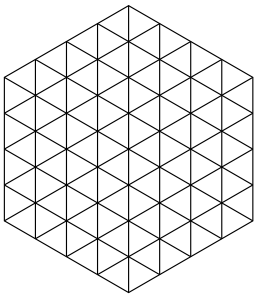
我们将第7.4节的讨论专门用于 $\mathbb{Z}_2$-SPT，并在第7.5 节和第7.6节中进行研究。在第7.5节中，我们分析平凡的 $\mathbb{Z}_2$-顺磁体，并证明其缺陷扇区范畴等价于 $\mathsf{Vec}(\mathbb{Z}_2)$。类似地，在第 7.6 节中，我们验证 Levin-Gu SPT 所得到的缺陷扇区范畴等价于 $\mathsf{Vec}(\mathbb{Z}_2,\nu)$，其中余循环 ν非平凡。特别是，我们利用能够产生对称性缺陷的自同构，显式计算了体区中的 ν 。

在第 7.7节中，我们探讨一种通过有限深度量子电路从通常的环面码得到的对称性富化拓扑序对易投影模型。该模型具有非平凡的对称性分数化数据，因此是检验我们缺陷选择准则的绝佳对象。我们得到了该模型缺陷扇区的完备性结果，并显式计算了体区中的 F, R-符号以及对称性分数化数据。

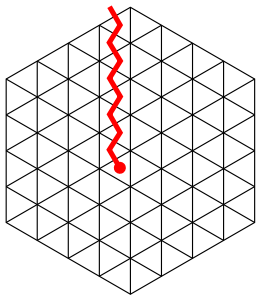
我们简要说明本文的背景设定和假设，以概述主要结果。如果读者尚不熟悉算子代数形式，附录7.A中提供了简要介绍。

7.2 设定与主要结果

设 Γ 是一个由顶点、边和面组成的二维胞腔复形，并为 Γ中的顶点赋予图距离。对于我们所考虑的例子，通常令 Γ 为正则晶格，例如三角晶格或方格晶格。图 7.1a展示了一个例子。



(a) 无限三角晶格的一部分。图中的每个顶点都是一个格点。



(b) 在三角晶格上选取的半无限对偶路径 $\bar{\gamma}_R$。

给定一个子集 $\Sigma \subset \Gamma$，我们将 $\Sigma^c \subset \Gamma$ 记为 Σ的补集，它由 $\Sigma \cap \Sigma^c = \emptyset$和 $\Sigma \cup \Sigma^c = \Gamma$给出。

一个锥 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ 是形如

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R}^2 : (x-a) \cdot \hat{v}/2 > \|x-a\| \cos(\theta/2)\}.$$

这里，$a \in \mathbb{R}^2$ 是锥的顶点，$\hat{v} \in \mathbb{R}^2$ 是指定锥的轴的单位向量，$\theta \in (0, 2\pi)$是锥的张角。我们将中的锥定义为形如 $\Lambda = \Gamma \cap \Delta$的子集 $\Lambda \subseteq \Gamma$，其中 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个锥。

我们使用“格点”这一统称来指顶点、边或面。为每个格点 $s \in \Gamma$关联一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^{d_s}$，其中 $d_s \in \mathbb{N}$。令 Γ_f 为 Γ的有限子集集。于是，我们可以将有限格点集 $S \in \Gamma_f$ 上的张量积定义为 $\mathcal{H}_S := \bigotimes_{s \in S} \mathcal{H}_s$。那么 $\mathcal{A}_S := B(\mathcal{H}_S)$是一个 C^*-代数。

现在令 S，$S' \in \Gamma_f$ 满足 $S \subset S'$。然后，我们可以通过在所有 $s \in S' \setminus S$ 上张量乘以单位元，来定义典范包含关系$\mathcal{A}_S \hookrightarrow \mathcal{A}_{S'}$。由此，我们可以将局域可观测量代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ 定义为

$$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} := \bigcup_{S \in \Gamma_f} \mathcal{A}_S$$

及其范数完备化，

$$\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}}^{\|\cdot\|}$$

这个代数称为准局域可观测量代数，或简称为准局域代数。

我们假设群 G 在 $\mathcal{A}$ 上有一个对称作用，即存在一个忠实同态 β: $G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$，由 $g \mapsto \beta_g$ 给出，对所有 $g \in G$ 均成立。我们称 β_g 为对称自同构。在我们考虑的情形中，对称作用是格点上的，也就是说，对于每个 $s \in \Gamma$，我们假设 G 在每个 $\mathcal{H}_s$ 上都有一个作用，该作用由作用于格点 s 的酉算子 U_s^g 实现。

定义 7.2.1. 对于每个满足 $S \in \Gamma_f$ 的 $A \in \mathcal{A}_S$，我们令 β_g: $\mathcal{A}_S \to \mathcal{A}_S$ 为由下式定义的映射

$$\beta_g(A) := \left(\bigotimes_{s \in S} U_s^g\right) A \left(\bigotimes_{s \in S} U_s^g\right)^* .$$

我们注意到，该映射可以唯一地以范数连续的方式扩展为一个自同构 β_g，作用于整个 $\mathcal{A}$。

我们有时也会考虑对称性仅作用于晶格某个子集上的情形。

定义 7.2.2。 对于任意 $S \subseteq \Gamma$，我们令 $\beta_g^S\colon\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 为如下定义的映射：

$$\beta_g^S(A) := \left(\bigotimes_{s\in S} U_s^g\right) A \left(\bigotimes_{s\in S} U_s^g\right)^*,$$

更确切地说，构造 $\beta_g^S\colon\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 时，采用构造 β_g所用的方法。图 7.2 展示了一个对称作用的例子。

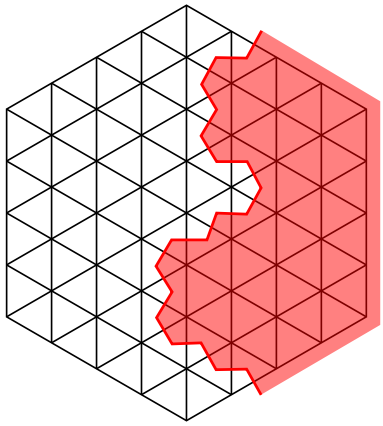


图 7.2：三角晶格上的一个对称作用示例 β_g^S，其中 S 为红色区域。在红色区域内的所有格点 s 上，对称性以 U_s^g 的方式作用；在其他格点上则以 $\mathbb{1}_s$ 的方式作用。

7.2.1 一般假设

固定一个参考态 ω_0，并将其 GNS 表示记为 $\pi_0 : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_0)$。现在我们详细说明对群 G 的作用及态 ω_0 所施加的假设，以确保得到一个 G-交叉编织幺半范畴。

假设 2。 存在固定的 $n > 0$，使得对于所有半径为 n的球 $B \subseteq \Gamma$，由$g \mapsto \bigotimes_{s\in B} U_s^g$给出的 G 的表示都是忠实的。

请注意，忠实性假设意味着，若 $\beta_g|_{\mathcal{A}_B} = \beta_h|_{\mathcal{A}_B}$ 对于任意足够大的有限区域 $B \subseteq \Gamma$，则 $g = h$。此处 $\beta_g\colon\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 是定义 7.2.1 中的对称自同构。

现在，我们详细说明关于所选态 ω_0的假设：$\mathfrak{A} \to \mathbb{C}$。

假设 3. 态 ω_0 是 G-不变的，也就是说，对所有 $g \in G$，$\omega_0 \circ \beta_g = \omega_0$。

我们注意到， ω_0 的 G-不变性意味着映射 β_g: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 由 $B(\mathcal{H}_0)$中的一个酉算子实现，其中 $\mathcal{H}_0$ 是 ω_0通常的 GNS 希尔伯特空间。因此， β_g 可扩张为 $B(\mathcal{H}_0)$的弱算子拓扑连续自同构。

我们还假设 GNS 表示 π_0 对应于 ω_0 满足一种称为有界扩展范围 *Haag* 对偶性 [BBC+24，定义 5。2]该定义类似于 [Jon23] 中的弱代数 Haag 对偶性的定义，并且强于 [Oga22]中使用的近似 Haag 对偶性概念。

记号 7.2.3。设 $\Lambda \subset \Gamma$。我们用 Λ^{+r} 表示所有与 Λ的距离至多为 r 的点的集合。

定义 7.2.4 ([BBC+24，定义 5。2])。设 π: $\mathfrak{A} \to B(\mathcal{H})$ 是一个表示。我们称π 满足有界扩展范围 *Haag* 对偶性，如果存在一个全局常数 $r \geq 0$ ，使得对每个锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$,

$$\pi(\mathcal{A}_{\Lambda^c})' \subseteq \pi(\mathcal{A}_{\Lambda^{+r}})''.$$

假设 4。 GNS 表示 π_0 对应于 ω_0 满足有界扩展范围 Haag 对偶性。

假设 5。态 ω_0 是一个纯态。

注意， ω_0 是纯态这一点确保锥代数 $\mathcal{R}(\Lambda) := \pi_0(\mathcal{A}_\Lambda)''$ 全都是因子。实际上，我们使用了一个更强的假设。

假设 6。 对于每个锥 Λ，代数 $\mathcal{R}(\Lambda)$都是无限因子。

对于 ω_0 ，存在各种合理的假设，可以确保在 ω_0 为纯态时锥代数是无限的。例如，当 ω_0 平移不变时，利用标准论证即可得到这一结论 [KMSW06、Naa11]。此外，当 ω_0 是具有一致有界有限程相互作用的哈密顿量的有能隙基态时，这一结论也成立 [Oga22，引理 5。3]。

（自避）有限路径 $\gamma \subset \Gamma$ 定义为一组互不相同的边 $\{e_i \in \Gamma\}_{i=1}^N$ ，使得对于所有 $i > 1$, $e_i \cap e_{i-1}$ 都包含一个顶点。我们称 $\partial_0\gamma := \partial_0 e_1$ 为 γ 的起点，称$\partial_1\gamma := \partial_1 e_N$ 为 γ的终点。半无限 路径是由有限路径组成的序列 $\{\gamma_i\}$ ，其中$\gamma_i \subset \gamma_{i+1}$ 和 γ_i 都有一个共同的起点或终点。

¯对偶路径是 Γ 上的一条路径，后者是 Γ 的对偶格（参见第 7.A.1 节）。对于某条边 $e \in \bar{\gamma}$，若存在某条边 $e \in \Gamma$ 使得 $\bar{e} \in \bar{\gamma}$，其中 $\bar{e}$ 是 e的对偶边。

¯记 $P(\Gamma)$（分别记 $P(\Gamma)$）为足够良好的路径（分别为对偶路径）的集合，其含义大致是：当路径趋于无限远时，它收敛于一条射线（参见第 7.A.1 节中的讨论）。

¯固定一条半无限对偶路径 $\bar{\gamma}_R \in P(\Gamma)$，如三角晶格的图 7.1b 所示，该路径笔直向上延伸。对于方格子，也可以绘制一条类似的射线。我们可以选择更一般的路径作为参考路径；关于允许路径的一般定义，以及这将如何修改允许锥的定义，请参见第 7.A.1 节中的讨论。

定义 7.2.5. 我们称锥 $\Lambda \subseteq \Gamma$为允许的，如果对于 Λ 的每个平移 Δ ，$\bar{\gamma}_R \cap \Delta$ 都是有限的。我们将 $\mathcal{L}$ 取为允许锥的集合。

定义 7.2.6. 对于锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$，我们将 $r(\Lambda) \subseteq \Lambda^c$ 定义为由 $\bar{\gamma}_R$ 和 Λ 的边界射线围成的路径右侧的无限区域。如果这两条路径不相交，我们就用连接 $\bar{\gamma}_R$ 的端点和 Λ 的顶点的线段将它们连接起来。这里所说的路径“右侧”，是指 $r(\Lambda)$ 是 $\bar{\gamma}_R$ 顺时针方向紧邻的一个连通区域。我们将 $\ell(\Lambda) \subseteq \Lambda^c$ 定义为 $\Lambda^c \setminus r(\Lambda)$。

三种情形下 $r(\Lambda)$ 和 $\ell(\Lambda)$ 的示意图见图 7.3。在每幅图中，$r(\Lambda)$ 是 Λ^c 中的阴影区域，而 $\ell(\Lambda)$ 是未着色区域。

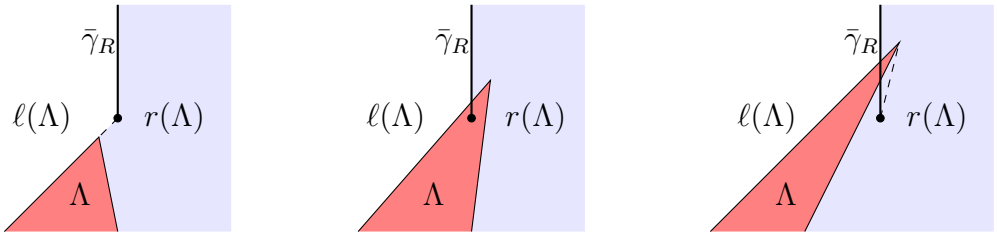


图 7.3：为不同的锥定义对称作用 $\beta_g^{r(\Lambda)}$。

定义 7.2.7。 设 $\pi\colon \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H}_0)$ 是一个表示。若 π 是 g-局域化于锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$，则称

$$\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \pi_0 \circ \mu \circ \beta_g^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}},$$

其中，对于某个 $S \in \Gamma_f$，$\mu = \mathrm{Ad}(\bigotimes_{s\in S} U_s^{g_s})$。若 $\mu = \mathrm{Id}$（恒等自同构），则称 π 为规范地 g-局域化。若一个 g-局域化表示 π 是可传输的，则对任意锥 $\Delta \in \mathcal{L}$，都存在 π': $\mathfrak{A} \to B(\mathcal{H}_0)$，使得 $\pi' \simeq \pi$，且 π 是局域化于 Δ 的 g。

注记 7.2.8。注意，如果 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ 和 π 在 Λ_1中是 g-局域化的，那么 π 在Λ_2中也是 g-局域化的。然而，如果 $g \neq e$，那么将 g-局域化替换为典范g-局域化后，这一结论便不成立。如果 $g = e$，那么典范 g-局域化的定义就还原为 [DHR71、BF82、Naa11], 中使用的局域化端同态定义；在该定义下，若 $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$ 和π 在 Λ_1中局域化，则 π 在 Λ_2中局域化。

定义 7.2.9。 设 $\pi\colon \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H}_0)$ 是一个表示。我们称 π 为一个 g-缺陷扇区，如果它是 g-局域化且可传输的。

7.2.2 主要结果

现在我们可以陈述本文的主要理论结果了。回顾7.A.9和7.A.10 关于 G-交叉编织张量范畴[1]。

定理 7.2.10. 关于 π_0 的缺陷扇区范畴是一个 G-交叉编织C*-张量范畴。

[1]我们所说的张量范畴，是指一种允许取直和和子对象的线性幺半范畴。

我们采用*-张量范畴的定义，参见 [NT13，定义 2.1。1]，沿用 [Oga22]。态射上的 dagger 运算就是 $B(\mathcal{H}_0$中的通常伴随。利用命题 G7.3.11和7.3.20 的结果以及第7.3.1.2节的讨论，可以分几步证明该范畴是一个-交叉编织张量范畴。由此，利用标准论证可得该范畴是一个 C*-张量范畴；例如，参见 [Oga22，定理 5 的证明。1]现在，我们将在多种模型中应用缺陷选择准则。

如引言所述，我们不计算 SPT 的辫编数据，因为在群上同调分类中， 2+1D 内的 SPT 相完全由 3-余循环确定。我们给出一种在体区计算余循环的方法：使用专门构造的自同构来生成对称性缺陷，并具体将其应用于 Levin-Gu SPT [LG12]。

7.2.2.1 一般 SPT

我们将展示，我们的技巧可用于为许多通过有限深度量子电路构造的 SPT 相生成缺陷。令 G 为对称群，令 β_g 为定义 7.2.1中的对称自同构。

定义 7.2.11。 令 $\{\mathcal{U}^d\}_{d=1}^D$ 为一族酉算子集合 U，其位于 $\mathcal{A}$ 中，且 $\mathrm{supp}(U)$ 包含于直径为 N 的球内，并具有互不相交的支撑。若对所有 $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ 均有，则自同构 α 是该族 $\{\mathcal{U}^d\}_{d=1}^D$ 的有限深度（幺正）量子线路（有限深度量子电路）[2]

$$\alpha(A) = \alpha_D \circ \cdots \circ \alpha_1(A), \qquad \alpha_d(A) := \mathrm{Ad}\left(\prod_{U \in \mathcal{U}^d} U\right)(A).$$

我们注意到， α 可以以范数连续的方式延拓到 $\mathcal{A}$的所有元素。我们称 $\mathcal{U}^d$为电路中第层的纠缠幺正算子集合 d。一个具有$N = 2$、 $D = 3$ 的一维电路示例见图 7.4。

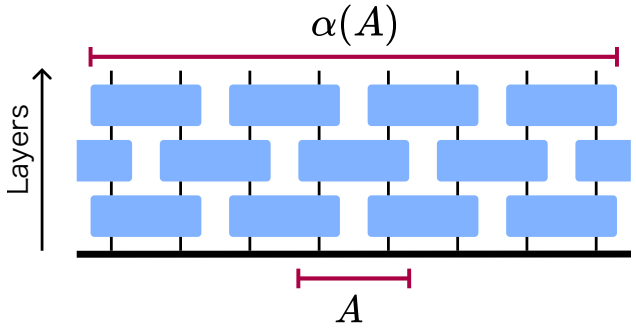


图 7.4：一个一维有限深度量子电路的示例。每个区块都是一个支撑在 2 个格点上的纠缠酉算子 U，因此 $N = 2$。该电路的深度为 $D = 3$。我们有 $|\mathrm{supp}(A)| = 2$，经过该电路后， $|\mathrm{supp}(\alpha(A))| = 8$。

[2]我们沿用 [HFH23]的思路使用有限深度量子电路（FDQC）。一些作者也考虑非酉的电路元素，即等距算子和投影。参见 [KR24]，其中讨论了这两种定义。

定义 7.2.12。我们称态 ω 为 G-SPT 态，若存在一个乘积态ω_0 满足 $\omega = \omega_0 \circ \alpha$， ω_0和ω 对于所有 $g \in G$均在 β_g 的作用下保持不变，并且α 是一个有限深度量子电路。

注记 7.2.13. 我们指出，这一定义的 SPT 比文献中出现的其他定义更为严格 [Oga21]。具体而言，它不包括并非有限深度量子电路的局域生成自同构，以及晶体对称保护拓扑态。

现在固定 ω_{SPT} 为一个 G-SPT，并令 α 为实现该有限深度量子电路的自同构。

假设 7. 对于每个 $g \in G$， $\alpha \circ \beta_g = \beta_g \circ \alpha$。

注记 7.2.14. 我们指出，假设 7 对一类非常广泛的模型成立[CGLW13、LSM+23]。

我们还需要一个技术性假设；这一假设在物理上是合理的，并且所有已知的有限深度量子电路模型都满足它。我们将在第 7.4 节详细说明这一假设的必要性。由于 β_g是格点上的，因此可以将其限制到任意区域（定义7.2.2）。我们用 $r(L)$ 表示无限对偶路径 L右侧的区域。

假设 8。 我们假设，对于任意无限对偶路径 L，自同构 $\alpha \circ \beta_g^{r(L)} \circ \alpha^{-1} \circ (\beta_g^{r(L)})^{-1}$ 是由有限支撑酉算符构成、且局域化于 L^{+s}的有限深度量子电路。我们重申，这一条件等价于上述自同构的 GNVW指标 [GNVW12] 为平凡。

我们提及构造的物理解释，如第 7.4.3 节所示。给定一个 G-SPT（定义 7.2.12），满足假设 7、8，对于任意选定的对偶路径 $\gamma \in P(\Gamma)$，存在一个对易投影哈密顿量 H_γ，其基态是一个对称缺陷态，对称性缺陷位于 γ 的端点处，而对称性畴壁沿着 γ。

现在我们将 π_{SPT} 固定为 ω_{SPT} 的 GNS 表示。

定理 7.2.15。 考虑一个 G-*SPT* 态 ω_{SPT}，由满足假设 7、8的有限深度量子电路构造而成。那么， G-*SPT* 的缺陷扇区范畴（即相对于表示 π_{SPT}而言）与 $\mathsf{Vec}(G, \nu)$ 幺半群等价，其中 ν： $G \times G \times G \to U(1)$ 是一个3-余循环。

7.2.2.2 Levin-Gu SPT

Levin-Gu SPT 首次由 [LG12] 提出，并作为我们对该理论的首个非平凡检验。在第 7.6 节中，我们给出主要结果：

定理 7.2.16。 *Levin-Gu SPT* 的缺陷扇区范畴是 G-分次幺半群等价于 $\mathsf{Vec}(\mathbb{Z}_2, \nu)$，其中 *3*-余循环 ν： $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to U(1)$ 表示非平凡元素 $[\nu] \in H^3(\mathbb{Z}_2, U(1))$。

7.2.2.3 AnSETToric Code

最后，我们检验与环面码相关的 SET 的判据；在这种情况下，对称性具有非平凡的任意子数据，但不会置换任意子类型。

取 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$，并在每条边和每个顶点上放置一个量子比特。按照惯例，我们将所得的准局域代数记为 $\mathcal{A}$。令 $\{\mathbb{1}_v, \tau_v^x, \tau_v^y, \tau_v^z\}$ 为 $\mathcal{A}_v$ 的基，其中 τ^x，τ^y，τ^z 是泡利矩阵。令 $\{\mathbb{1}_e, \sigma_e^x, \sigma_e^y, \sigma_e^z\}$ 为 $\mathcal{A}_e$ 的基，其中 σ^x，σ^y，σ^z 也为泡利矩阵。

将通常环面码的星算符和面片算符定义为

$$A_v \coloneqq \prod_{e \ni v} \sigma_e^x, \qquad B_f \coloneqq \prod_{e \in f} \sigma_e^z.$$

我们还定义以下算子：

$$\tilde{B}_f \coloneqq i^{-\sum_{e\in f} \sigma_e^x (\tau^z_{\partial_1 e} - \tau^z_{\partial_0 e})/2} B_f, \qquad Q_v \coloneqq \tau_v^x i^{-\tau_v^z \sum_{e \ni v} f(e,v)\sigma_e^x/2}, \qquad \tilde{Q}_v \coloneqq \frac{\mathbb{1} + A_v}{2} Q_v,$$

其中，当 $v = \partial_0 e$ 时，$f(e, v) = 1$；当 $v = \partial_1 e$ 时，$f(e, v) = -1$。

该模型的哈密顿量随后定义为形式和

$$H \coloneqq \sum_{v\in\Gamma} (\mathbb{1} - A_v)/2 + (\mathbb{1} - \tilde{Q}_v)/2 + \sum_{f\in\Gamma} (\mathbb{1} - \tilde{B}_f)/2.$$

我们指出，H 是一个对易投影哈密顿量，并且在 β_g 的作用下保持对称（回忆定义 7.2.1），其中酉算子为 $U_e^g = \mathbb{1}$，作用于每条边上；而 e和 $U_v^g = \tau_v^x$，作用于每个顶点上 v。此哈密顿量具有唯一无挫折基态ω。

此模型可通过有限深度量子电路由通常的环面码得到，因此具有相同的超选择理论 [Oga22, 定理 6。1]。

我们得到了此模型缺陷扇区的完备性结果，并据此构造了 G-交叉编织幺半范畴。本文的最终结果如下。

定理 7.2.17。 关于 $\tilde{\pi}$ 的缺陷扇区范畴 $G\mathsf{Sec}^{ETC}$（即 $\tilde{\omega}$ 的 *GNS* 表示）是一个 G-交叉编织张量范畴，其结合子平凡，但分数化数据非平凡。

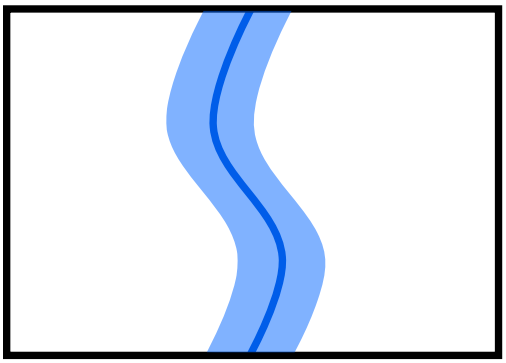
7.2.3 构造缺陷自同构

陈述主要结果后，本节将简要介绍我们用于构造对称性缺陷的算法。后续各节讨论的所有示例都运用了这一技术来构造缺陷自同态并获得缺陷表示。

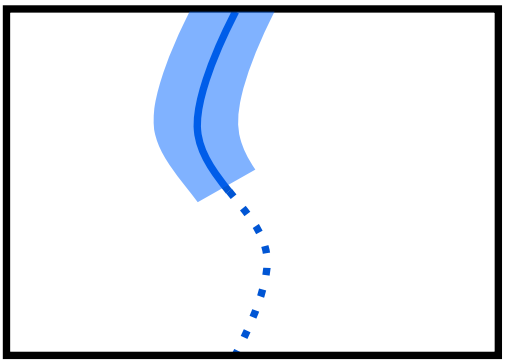
回顾我们之前的记号，我们用 β_g 表示格点对称作用，用 ω_0 表示纯基态。我们还假设相互作用一致有界，且在对称作用 β_g 下保持不变。由于 β_g 是格点上的，对于任意将 Γ 分成两半的对偶路径 $L \in P(\Gamma)$，我们有

$$\beta_g = \beta_g^{\ell(L)} \circ \beta_g^{r(L)}$$

让我们考察受限对称性对哈密顿量中相互作用项的作用（这些相互作用项在 β_g 下保持不变）。如果哈密顿量中的某一项的支撑与 L 不相交，该项在受限对称性的作用下仍保持不变。我们将所有在 $\beta_g^{r(L)}$ 下不保持不变的相互作用的支撑之并定义为条带 S（见图7.5a）。



(a) 蓝色所示的无限对偶路径 L将晶格分为两半。浅蓝色所示的条带 S 以 L 为中心。



(b) 浅蓝色所示的半条带 U。通过使用一个支撑于半条带 $D = S \setminus U$上的自同构 α^D，我们消去 $\beta_g^{r(L)}$的作用，使得支撑在 U 之外的哈密顿量项在 $\alpha^D \circ \beta_g^{r(L)}$作用下保持不变。

图 7.5

因此，目标是找到一个自同构 α，它局域于条带 S，能够“校正”这一受限对称作用对所有哈密顿量项的作用。为此，我们试图将 α 分解为两个不相交的两半，并在它们相接处通过某个由局域酉算符实现的内自同构复合。我们预计，对于更复杂的模型，尤其是呈现任意子置换的模型，这一步算法会失效。假设这一步可行，接下来我们将 α 分解为 $\Xi \circ (\alpha^U \otimes \alpha^D)$，其中 Ξ 是由局域酉算符实现的内自同构，而 α^U，α^D 是支撑互不相交且均支撑于 S 上的自同构，并沿其支撑“消去”受限对称作用对哈密顿量项的作用，亦即 $\alpha^D \circ \beta_g^{r(L)}$ 使支撑在 U 之外的哈密顿量项保持不变（见图7.5b）。

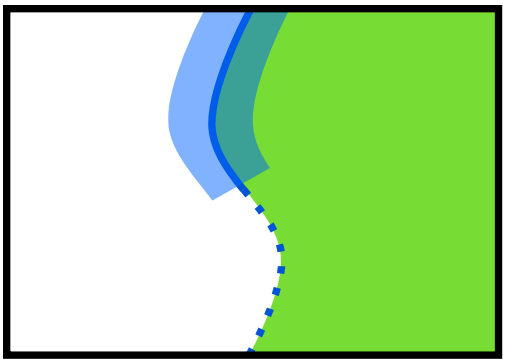
对称性缺陷随后定义为（见图7.6a）

$$\kappa^U = \alpha^D \circ \beta_g^{r(L)}.$$

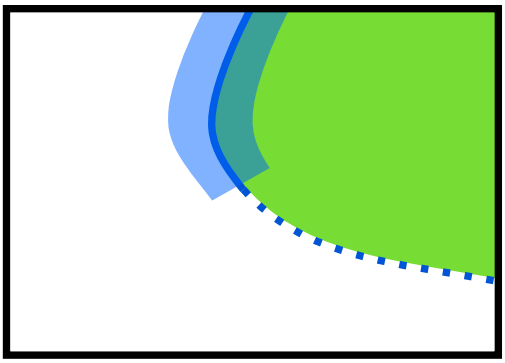
我们注意到，κ 取决于完整的路径 L，而不仅仅是射线 U，但为避免记号过于繁杂，我们始终省略记号中的这一依赖关系。

对称性缺陷可以解释为：添加一个自同构，以部分“擦除”受限对称性的作用。我们将其与通过截断受限对称作用来获得对称性缺陷的传统范式进行对比。

我们强调“部分地”一词，因为尽管支撑于切口之外的相互作用项不会感受到受限对称性的作用，但在 $\mathcal{A}$ 中仍可能存在可观测量，它们在沿着被擦除的对称作用的 κ 下会发生非平凡变换。



(a) 现在，对称性缺陷由 $\kappa^U = \alpha^D \circ \beta_g^{r(L)}$ 给出，并且对 U 之外以浅蓝色标示的哈密顿量项作用平凡。



(b) 蓝色虚线可以自由移动，同时保持端点固定，就像弦算符一样。

图 7.6：对称性缺陷的直观示意，以及将其解释为由弦算符实现的方式。

这样表述时，可以将对称性缺陷理解为由某种类似于弦算符的对象实现。更具体地说，对于包含 U 的某个锥之外的区域，基态在 κ^U 的作用下保持不变。因此，可以将对称性缺陷被擦除的部分自由地移至该锥之外（见图 7.6b）。对称性缺陷与弦算符生成的任意子之间的一个关键区别在于，这条弦右侧存在 g-作用，因此可以用支撑于直线之外的局部算子精确探测缺陷线的位置，但不能通过在基态中对这些局部算子求值来实现。

这也启发我们将缺陷扇区定义为任意子扇区的一种推广：对称性缺陷中被“抹去”的部分总能移入任意一个允许锥，这与任意子扇区分析中的通常做法相同。关键仍在于考虑这条弦右侧的 g-作用。

为结束本次讨论，我们总结了一种创建对称性缺陷的简单算法，并相信它适用于各种各样的晶格模型。

创建对称性缺陷

1. 观察受限对称性沿半平面对哈密顿量各项的作用。2. 构造一个自同构，将所有此类项上的作用“抹去”，且其支撑位于沿限制边界局部化的某个条带上。3. 如果可能，将此自同构分解为不相交的两半，并且可以与某个由局域酉算符实现的内自同构复合。4. 然后，将受限对称作用与分解后的自同构复合，即得到对称性缺陷。

7.3 对称性缺陷

设 $\omega_0\colon\ \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 是一个态。在我们的例子中，ω_0 通常是某个哈密顿量的唯一无挫折基态（见第 7.A.2.2 节），但本节不作此假设。令 $\pi_0\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H}_0)$ 为 ω_0的 GNS 表示。注意，π_0 是忠实的，因为 $\mathfrak{A}$ 是 UHF 代数，因而是简单的。

7.3.1 G缺陷扇区范畴

我们回顾一下关于群 G 的作用以及态 ω_0 所需满足的假设，以确保我们得到一个 G-交叉编织幺半范畴（第 7.2.1节）。本节中，我们构造 G-缺陷扇区范畴。

回顾允许锥的定义（定义 7.2.5）。和之前一样，我们用 $\mathcal{L}$ 表示相对于固定路径 $\bar{\gamma}_R$的允许锥集合。

定义 7.3.1。设 $\pi\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H})$ 是一个不可约表示。若对每个锥 $\Lambda\in\mathcal{L}$，π 均为相对于 π_0 的g-可扇区化的，

$$\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}\simeq\pi_0\circ\beta_g^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}.$$

可能出现这种情况：$\pi\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H})$ 既是 g-可扇区化的，又是 h-可扇区化的，$g\neq h$。事实上，第 7.5节讨论的平庸顺磁体模型便是如此。对于我们构造的范畴，我们采用一种 g-缺陷扇区的定义，它是通常的局域且可传输扇区概念的推广。具体而言，我们对局域且可传输的定义作如下修改，与 [M¨ug05的定义 2 类似。6]。

现在回顾缺陷扇区的定义（定义 7.2.7）。除非另有说明，我们令 π_0 作为参考表示。

引理 7.3.2。设 $\pi\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H})$ 是一个 g-可扇区化的不可约表示。则对于某个 g-缺陷扇区 $\sigma\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H}_0)$，有 $\pi\simeq\sigma$。此外，如果 $\pi\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H}_0)$ 是一个不可约的g-缺陷扇区，则 π 是 g-可扇区化的。

证明：这是对用于任意子扇区的标准论证的改编（例如参见 [Naa13]）。设 $\Lambda\in\mathcal{L}$。根据定义，我们有 $\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}\simeq\pi_0\circ\beta_g^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}$。令$U\colon\ \mathcal{H}\to\mathcal{H}_0$ 是实现这一等价的酉算子，于是对于任意 $A\in\mathcal{A}_{\Lambda^c}$，

$$\pi_0\circ\beta_g^{r(\Lambda)}(A)=U\pi(A)U^*.$$

接下来，我们通过 $\sigma:=\mathrm{Ad}(U)\circ\pi$ 定义 $\sigma\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H}_0)$。由上式可知，$\sigma$ 在 Λ 中是规范地 g-局域化的。此外，由于 Λ 是任意的，同样的过程表明 σ 是可传输的。因此，$\sigma\simeq\pi$ 是一个 g-缺陷扇区。这就证明了第一个结论。

现在假设 $\pi\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H}_0)$ 是一个不可约的 g-缺陷扇区，并令 $\Lambda\in\mathcal{L}$。那么，利用可输运性，存在 $\pi'\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H}_0)$，使得 $\pi'\simeq\pi$ 且 π' 在 Λ 中是 g-局域化的。由于 π' 在 Λ 中是 g-局域化的，我们有

$$\pi'|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}=\pi_0\circ\mu\circ\beta_g^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}},$$

其中 μ 是作用于有限多个格点的对称作用。因此， μ 是一个内自同构，并且我们有：

$$\pi_0 \circ \mu \circ \beta_g^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} \simeq \pi_0 \circ \beta_g^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}.$$

因此我们有

$$\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} \simeq \pi'|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \pi_0 \circ \mu \circ \beta_g^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} \simeq \pi_0 \circ \beta_g^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}.$$

□

注记 7.3.3. 在任意子扇区的定义中，通常假设任意子扇区 π 是不可约表示。这是因为在一些例子中，任意子扇区范畴是半单的，也就是说，每个扇区都可以写成不可约扇区的直和。因此，为了对任意子扇区进行分类，假设其不可约是有用的，正如 [BV23] 对Kitaev量子双模型所做的那样。然而，在我们的情形中，我们希望在一般设定下构造一个缺陷扇区范畴，而不可约性这一假设会造成阻碍，因为我们希望对缺陷扇区取直和。此外，我们的许多结果无需假设半单性即可陈述，因此我们不会作此假设，除非确有必要。

现在我们证明，可以将每个 g-局域化表示扩展为辅助代数（通常称为允许代数）的一个端同态，该辅助代数按 [BF82、 Naa11]中的定义构造。回顾一下， $\mathcal{R}(\Lambda) = \pi_0(\mathcal{A}_\Lambda)'' \subseteq B(\mathcal{H}_0)$ 对于 $\Lambda \subseteq \Gamma$。辅助代数 定义为

$$\mathfrak{A}^a := \overline{\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{L}} \mathcal{R}(\Lambda)}^{\|\cdot\|}.$$

引理 7.3.4。 设 $\pi\colon \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H}_0)$ 是一个 g-缺陷扇区。则存在唯一的延拓 π^a，将 π 延拓到 $\mathfrak{A}^a$，使得对所有 $\Lambda \in \mathcal{L}$， $\pi^a|_{\mathcal{R}(\Lambda)}$ 均为弱算子拓扑连续。此外， $\pi^a(\mathfrak{A}^a) \subseteq \mathfrak{A}^a$，也就是说， $\pi^a\colon \mathfrak{A}^a \to \mathfrak{A}^a$ 是一个端同态。

证明： 我们采用与以下证明相同的方法： [BF82，引理 4。1] 以及 [Naa11，命题 4。2]。设 $\Lambda \in \mathcal{L}$。那么存在另一个 $\Delta \in \mathcal{L}$ 使得 $\Delta \subseteq r(\Lambda)$。由于 π 是 g-可传输的，因此存在某个 $U \in B(\mathcal{H}_0)$，使得对所有 $A \in \mathcal{A}_{\Delta^c}$，

$$U\pi(A)U^* = \pi_0 \circ \beta_g^{r(\Delta)}(A).$$

由于 $\Delta \subseteq r(\Lambda)$， $\Lambda \subseteq \Delta^c$ 与 Λ 至多在有限多个格点上与 $r(\Delta)$相交。因此，存在一个酉算子 $V \in B(\mathcal{H}_0)$，使得对于 $A \in \mathcal{A}_\Lambda$， $V\pi_0(A)V^* = \pi_0 \circ \beta_g^{r(\Delta)}(A)$，所以对所有$A \in \mathcal{A}_\Lambda$，我们有

$$VU\pi(A)U^*V^* = \pi_0(A).$$

注意，我们得到一个关于 $\pi|_{\mathcal{A}_\Lambda}$ 的弱算子拓扑连续公式，即 $\pi|_{\mathcal{A}_\Lambda} = \mathrm{Ad}(U^*V^*) \circ \pi_0|_{\mathcal{A}_\Lambda}$，因此 $\pi|_{\mathcal{A}_\Lambda}$ 有一个到 $\mathcal{R}(\Lambda)$ 的唯一弱算子拓扑连续延拓。（注意，我们在此隐式地将 $\mathfrak{A}$ 与 $\pi_0(\mathfrak{A})$ 视为相同，这样做是可行的，因为 $\pi_0\colon \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H}_0)$ 是忠实的。）由于 $\Lambda \in \mathcal{L}$是任意的，我们得到 π 到 $\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{L}} \mathcal{R}(\Lambda)$ 的唯一延拓，并且该延拓在每个 $\mathcal{R}(\Lambda)$上都是弱算子拓扑连续的。根据连续性，此延拓定义良好。它也是范数连续的，因此我们得到 π 到 $\mathfrak{A}^a$ 的唯一延拓 π^a，且具有所需性质。

剩下要证明的是 $\pi^a(\mathfrak{A}^a) = \mathfrak{A}^a$。为此，只需证明对所有 $\Lambda \in \mathcal{L}$，$\nsucc \pi^a(\pi_0(\mathcal{A}_\Lambda)) \subseteq \mathfrak{A}^a$。设 $\Lambda \in \mathcal{L}$。由于 π 是一个 g-缺陷扇区，π 在某个 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 中是 g-局域化的。于是存在 $\Delta \in \mathcal{L}$，使得 Λ，$\Lambda \subseteq \Delta$。特别地，我们有 π 在 Δ 和 $\mathcal{A}_\Lambda \subseteq \mathcal{A}_\Delta$中是 g-局域化的。根据有界扩展 Haag 对偶性，我们有 $\pi^a(\pi_0(\mathcal{A}_\Delta)) \subseteq \mathcal{R}(\Delta^{+r})$（参见 [M¨ug05，引理 2.12]）。结论得证。□

在本文余下部分，为简化记号，我们将 π 到 $\mathfrak{A}^a$ 的延拓视同为 π。上下文应能消除任何歧义。

注 7.3.5。如果 $\pi\colon \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H})$ 是 g-可扇区化的，那么仍然存在从 π 到 $\mathfrak{A}^a$ 的唯一延拓，使得 $\pi|_{\mathcal{R}(\Lambda)}$ 对所有 $\Lambda \in \mathcal{L}$都是弱算子拓扑连续的。事实上，引理7.3.4 中使用的证明在 π 是 g-可扇区化的情况下仍然成立。然而，如果 π 仅仅是 g-可扇区化的，那么 π 一般而言将不会是辅助代数的端同态。

7.3.1.1 齐次 G-缺陷扇区范畴

我们如下构造齐次 G-缺陷扇区的范畴 $G\mathrm{Sec}_{\mathrm{hom}}$。该范畴的对象是 $g \in G$ 的 g-缺陷扇区；如果 π，σ 是 g-缺陷扇区，则态射 $T\colon \pi \to \sigma$ 是一个交织算子，即 $B(\mathcal{H}_0)$ 中满足以下条件的算子

$$T\pi(-) = \sigma(-)T.$$

对于固定的 $g \in G$，我们令 $G\mathrm{Sec}_g$ 为 g-缺陷扇区的全子范畴。注意，若 π 和 σ 都在 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 中规范地局域化于 g，那么交织算子 $T\colon \pi \to \sigma$ 满足 $T \in \mathcal{R}(\Lambda^{+r})$，这是由有界扩展 Haag 对偶性得出的（参见 [M¨ug05，引理 2.13]）。若 π 和 σ 只是在 Λ 中局域化于 g，那么 T 可能不属于 $\mathcal{R}(\Lambda^{+r})$，其中 r 特指有界扩展 Haag 对偶性的扩展范围。不过，对于某个 $R \geq r$，我们有 $T \in \mathcal{R}(\Lambda^{+R}) \subset \mathcal{A}^a$，因为任何局域化于 g 的映射都酉等价于一个规范地局域化于 g 的映射，且实现这一等价的酉算子属于 $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}$。现在，我们可以运用 [M¨ug05] 的技巧，研究局域化于某个 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 的 g-缺陷扇区端同态。[3]

注意，若 π 在 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 中是 g-局域化的，且在 Λ 中是 h-局域化的，则 $g = h$。事实上，由于 π 在 Λ 中是 g-局域化的，我们有 $\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \pi_0 \circ \mu_1 \circ \beta_g^{r(\Lambda)}$，其中 μ_1 是作用于有限多个格点上的对称作用。同理，$\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \pi_0 \circ \mu_2 \circ \beta_h^{r(\Lambda)}$，其中 μ_2 是作用于有限多个格点上的对称作用。但 $\beta_g^{r(\Lambda)}$ 与 $\beta_h^{r(\Lambda)}$ 在半径任意大的球 $B \subseteq \Gamma$ 上都不同。因此，由于格点对称性在足够大的球上是忠实的，$g = h$。然而，如果 π 在$\Lambda \in \mathcal{L}$ 中是 g-局域化的，且 σ 在 Λ中是 h-局域化的，那么即使 $g \neq h$，也可能存在非零交织算子$T\colon \pi \to \sigma$。但是，根据下面的引理，这个交织算子不可能是任何允许的锥的锥代数。因此，我们定义范畴 $G\mathrm{Sec}_{\mathrm{hom}} := \bigsqcup_{g\in G} G\mathrm{Sec}_g$，其中 $\bigsqcup$ 表示不交并。

引理 7.3.6. 假设 π 在 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 中是 g-局域化的，且 σ 在 Λ中是 h-局域化的，并假设$T\colon \pi \to \sigma$ 满足：对于某个 $\Delta \in \mathcal{L}$ 和 $T \neq 0$，有 $T \in \mathcal{R}(\Delta)$。那么 $g = h$。

[3]我们感谢 David Penneys 提出非常有帮助的建议，即将 [M¨ug05] 的方法应用于这个问题。

证明：注意，只需考虑这样的情形：π 在 Λ中是规范 g-局域化的，且 σ 在 Λ中是规范 h-局域化的，因为利用 $\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}$中的一个酉算子， g-局域化扇区与一个规范 g-局域化扇区酉等价。（这一假设并不会实质性地影响论证，但能使记号更简洁。）由于 Λ， $\Delta \in \mathcal{L}$，存在一个锥 $\sim$ $\Lambda \in \mathcal{L}$，使得 Λ， $\Delta \subseteq \Lambda$。现在，由于 $T \in \mathcal{R}(\Delta)$，对于所有 $A \in \mathcal{A}_{\Delta^c}$，我们有：

$$T\pi_0(\beta_g^{r(\Lambda)}(A)) = \pi_0(\beta_g^{r(\Lambda)}(A))T$$

类似地，由于 π 在 Λ 中是 g-局域化的， σ 在 Λ 中是 h-局域化的，并且 T： $\pi \to \sigma$，我们得到对所有 $A \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$，

$$T\pi_0(\beta_g^{r(\Lambda)}(A)) = T\pi(A) = \sigma(A)T = \pi_0(\beta_h^{r(\Lambda)}(A))T.$$

利用 $\mathcal{A}_{\Delta^c}$， $\mathcal{A}_{\Lambda^c} \subseteq \mathcal{A}_{\widetilde{\Lambda}^c}$ 并结合这些等式，我们得到对所有 $A \in \mathcal{A}_{\widetilde{\Lambda}^c}$，

$$\pi_0\big(\beta_g^{r(\Lambda)}(A) - \beta_h^{r(\Lambda)}(A)\big)T = 0.$$

~现在我们有 $T \in \mathcal{R}(\Lambda)$，并且对于 $A \in \mathcal{A}_{\widetilde{\Lambda}^c}$ 也有，

$$\pi_0\big(\beta_g^{r(\Lambda)}(A) - \beta_h^{r(\Lambda)}(A)\big) \in \pi_0(\mathcal{A}_{\widetilde{\Lambda}^c}) \subseteq \mathcal{R}(\widetilde{\Lambda})',$$

~因此，由于 $\mathcal{R}(\Lambda)$ 是一个因子[4] 且 $T \neq 0$，我们得到对所有 $A \in \mathcal{A}_{\widetilde{\Lambda}^c}$，

$$\pi_0\big(\beta_g^{r(\Lambda)}(A) - \beta_h^{r(\Lambda)}(A)\big) = 0.$$

现在存在一个半径任意大的球 $B \subseteq \widetilde{\Lambda}^c$，使得 $\beta_g^{r(\Lambda)}|_B = \beta_g|_B$ 且 $\beta_h^{r(\Lambda)}|_B = \beta_h|_B$。由于 π_0 是忠实的，对于所有 $A \in \mathcal{A}_B$，我们有 $\beta_g(A) = \beta_h(A)$，因此 $g = h$。□

7.3.1.2 G-缺陷扇区的直和与子对象

回顾一下，我们已假设锥代数是无限因子。因此，对于所有 V_1、……、$V_n \in \mathcal{R}(\Lambda)$，存在等距算子 $\Lambda \in \mathcal{L}$，使得 $\sum_{i=1}^n V_i V_i^* = \mathbb{1}$ [KR97，二分引理 6.3。3]。我们注意到，上述条件蕴含 $V_i^* V_j = \delta_{ij}\mathbb{1}$。对于 π_1、……、$\pi_n \in G\mathsf{Sec}_{\mathrm{hom}}$，由下式定义的映射 $\bigoplus_{i=1}^n \pi_i$： $\mathfrak{A}^a \to \mathfrak{A}^a$ 定义为

$$\bigoplus_{i=1}^n \pi_i(-) := \sum_{i=1}^n V_i \pi_i(-) V_i^*$$

满足直和的泛性质。

定义 7.3.7。我们定义范畴 $G\mathsf{Sec} := \bigoplus_{g\in G} G\mathsf{Sec}_g$，其中直和采用上述构造。

[4]我们感谢 David Penneys 指出这一点蕴含了所需的结果。

注意，若 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 和 $\pi_1, \dots, \pi_n \in G\mathsf{Sec}$ 在 Λ 中是 g-局域化的，并且我们选择 $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{R}(\Lambda)$，那么 $\bigoplus_{i=1}^n \pi_i$ 也在 Λ 中是 g-局域化的，且可传输。（通过调整标准论证即可看出这一点；例如参见 [Naa11，引理 6.1]。）沿用 [Müg05，定义 2.8]，，我们称 $\pi \in G\mathsf{Sec}$ 在 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 中是 G-局域化的，若

$$\pi(-) = \sum_{i=1}^{n} V_i \pi_i(-) V_i^*,$$

其中，每个 $\pi_i \in G\mathsf{Sec}$ 都在 Λ 中关于某个 $g_i \in G$ 和 $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{R}(\Lambda)$ g_i局域化。此外，如果每个 π_i 都是规范地 g_i 局域化的，我们就称 π 是规范地 G 局域化的。

现在，我们通过改编 [Oga22, 引理 58]，证明我们的范畴存在子对象。

引理 7.3.8。设 $\pi \in G\mathsf{Sec}_g$ g在 Λ 中关于某个 $g \in G$局域化，并设 $p\colon \pi \to \pi$ 是一个投影。则存在一个等距算子 $v \in \mathcal{R}(\Lambda^{+r})$ 使得 $vv^* = p$。由此可得，由 $\widehat{\pi}(-) = v^*\pi(-)v$ 给出的映射$\widehat{\pi}\colon \mathfrak{A}^a \to \mathfrak{A}^a$是一个在 Λ 中局域化的 g-缺陷扇区，且 $v\colon \widehat{\pi} \to \pi$。

~证明：该证明是 [Oga22, Lem. 5.8] 中证明的简化版本。设 $\Lambda, \Delta \in \mathcal{L}$~为不相交锥，且 $\Lambda, \Delta \subseteq \Lambda$。设 $\widetilde{\pi} \in G\mathsf{Sec}_g$ 与 π 酉等价，并且 g-~局域化于 Λ，且 $U\colon \pi \to \widetilde{\pi}$是实现该等价的酉算子。那么 $UpU^*\colon \widetilde{\pi} \to \widetilde{\pi}$ 是一个交织算子。由于 $\widetilde{\pi}$ 在 Λ中是 g-局域化的，而 Λ与 Δ 不相交，因此有$UpU^* \in \mathcal{R}(\Lambda^c)' \subseteq \mathcal{R}(\Delta)'$。此外，根据有界扩展 Haag 对偶性，有$UpU^* \in \mathcal{R}(\Lambda^c)' \subseteq \mathcal{R}(\Lambda^{+r})$，并且还有 $\mathcal{R}(\Delta) \subseteq \mathcal{R}(\Lambda^{+r})$。因此，根据 [Oga22, Lem. 5.10]，UpU^*在 $\mathcal{R}(\Lambda^{+r})$ 中与 1 Murray-von Neumann 等价，因为 $\mathcal{R}(\Delta)$ $\mathcal{R}(\Lambda^{+r})$是作用于可分希尔伯特空间上的无限因子。由于 $U\colon \pi \to \widetilde{\pi}$，有 $U \in \mathcal{R}(\Lambda^{+r})$，所以 p在 $\mathcal{R}(\Lambda^{+r})$中与 1 等价。因此，存在一个等距算子 $v \in \mathcal{R}(\Lambda^{+r})$，使得 $vv^* = p$。容易验证，映射 $\widehat{\pi}\colon \mathfrak{A}^a \to \mathfrak{A}^a$ 由 $\widehat{\pi}(-) := v^*\pi(-)v$ 给出，它在 Λ 中是 g-局域化且可传输的，并且 $v\colon \widehat{\pi} \to \pi$。□

7.3.2 G交叉幺半结构与 GSe上的编织结构 c

本节中，我们证明 $G\mathsf{Sec}$ 具有 G交叉编织幺半范畴的结构。为此，我们先构造 G交叉幺半结构，再构造编织。

7.3.2.1 G交叉幺半结构在 $G\mathsf{Sec}$上

因此，我们从此将 $\mathcal{A}$ 与 $\pi_0(\mathcal{A})$ 等同，因为 π_0 是忠实表示。我们证明$G\mathsf{Sec}$ 具有严格的 G交叉幺半群范畴结构。对于 π，$\sigma \in G\mathsf{Sec}$，我们定义$\pi \otimes \sigma := \pi \circ \sigma$；对于 $T\colon \pi \to \pi'$和 $S\colon \sigma \to \sigma'$，我们定义 $T \otimes S := T\pi(S) = \pi'(S)T$。注意，对于 π，$\sigma \in G\mathsf{Sec}$，由以下引理可知 $\pi \otimes \sigma \in G\mathsf{Sec}$。因此， $G\mathsf{Sec}$ 是一个严格幺半范畴。事实上，这是将 $G\mathsf{Sec}$ 视为 $\mathsf{End}(B\mathfrak{A}^a)$ 的子范畴时继承的幺半结构，其中 $B\mathfrak{A}^a$ 是单对象范畴，其态射为 $\mathfrak{A}^a$的元素。

Le命题 7.3.9。对于 $\pi \in G$第$_g$ 和 $\sigma \in G$第$_h$，有 $\pi \otimes \sigma \in G$第$_{gh}$.

证明：设 $\pi \in G\mathsf{Sec}_g$ 和 $\sigma \in G\mathsf{Sec}_h$。由于 $\pi \in G\mathsf{Sec}_g$，存在 $\Lambda_1 \in \mathcal{L}$ 使得 π在 Λ_1中是 g-局域化的。同样，由于 $\sigma \in G\mathsf{Sec}_h$，存在 $\Lambda_2 \in \mathcal{L}$使得 σ 在 Λ_2中是 h-局域化的。现在，存在 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 使得 $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \subseteq \Lambda$，因此 π 在 Λ 中是 g-局域化的，而 σ 在 Λ中是 h-局域化的。有 $\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \mu_1 \circ \beta_g^{r(\Lambda)}$和 $\sigma|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \mu_2 \circ \beta_h^{r(\Lambda)}$，其中 μ_1 和 μ_2是作用于有限多个格点上的对称作用。于是，$\mu_1 \circ \beta_g^{r(\Lambda)} \circ \mu_2 \circ \beta_h^{r(\Lambda)}$ 分别与 $\beta_g^{r(\Lambda)} \circ \beta_h^{r(\Lambda)} = \beta_{gh}^{r(\Lambda)}$ 仅在有限多个格点上不同，并

$$(\pi \otimes \sigma)|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = (\pi \circ \sigma)|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \mu_1 \circ \beta_g^{r(\Lambda)} \circ \mu_2 \circ \beta_h^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \mu \circ \beta_{gh}^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}$$

因此，$\pi \otimes \sigma$ 在 Λ处是 gh-局域化的。现在我们证明 $\pi \otimes \sigma$ 是可传输的。取 $\Delta \in \mathcal{L}$。事实上，由于 π，σ是可传输的，因此我们有 $\widehat{\pi} \simeq \pi$和 $\widehat{\sigma} \simeq \sigma$，其中 $\widehat{\pi}$，$\widehat{\sigma}$分别在 Δ 中是 g，h-局域化的。令 U: $\pi \to \widehat{\pi}$ 和 V: $\sigma \to \widehat{\sigma}$ 为实现该等价的酉算子。于是，$U \otimes V$: $\pi \otimes \sigma \to \widehat{\pi} \otimes \widehat{\sigma}$ 是一个酉算子，并且 $\widehat{\pi} \otimes \widehat{\sigma}$ 在 Δ中是 gh-局域化的。□

剩下要证明的是，$G\mathsf{Sec}$ 是 G-交叉幺半的。我们定义 ∂: $G\mathsf{Sec}_{\mathrm{hom}} \to G$，其方式为 $\partial\pi := g$，其中 $\pi \in G\mathsf{Sec}_g$。此外，对于 $g \in G$，我们如下定义 γ_g: $G\mathsf{Sec} \to G\mathsf{Sec}$。对于 $\pi \in G\mathsf{Sec}$，我们定义 $\gamma_g(\pi) := \beta_g \circ \pi \circ \beta_g^{-1}$；而对于 T: $\pi \to \sigma$，我们定义 $\gamma_g(T) = \beta_g(T)$。注意，$\gamma_g(\pi)$ 和 $\gamma_g(T)$ 是良定义的，因为 π 和 β_g 是 $\mathfrak{A}^a$的端同态。此外，根据上述定义，$\gamma_g(T)$: $\gamma_g(\pi) \to \gamma_g(\sigma)$，因此 γ_g是一个函子。

注记 7.3.10。根据物理学文献 [BBCW19]，，如果存在一个承载 ω_h 型对称性缺陷的态 h，那么在群对称性 β_g的作用下，我们有$\omega_h \circ \beta_g = \omega_{ghg^{-1}}$。因此，函子 γ_g 的物理意义就是对称性 g 在对称性缺陷上的作用。

命题 7.3.11。映射 ∂: $G\mathsf{Sec}_{\mathrm{hom}} \to G$ 和 $\gamma_g(\pi) = \beta_g \circ \pi \circ \beta_g^{-1}$定义如上，它们赋予 $G\mathsf{Sec}$ 以严格的 G-交叉幺半群范畴结构。

证明：证明与 [M¨ug05，命题 2 的证明类似。10]注意，根据构造，$G\mathsf{Sec}$ 中的每个对象都是 $G\mathsf{Sec}_{\mathrm{hom}}$中对象的直和。因此，为了证明 $G\mathsf{Sec}$ 是严格的 G-交叉幺半范畴，我们必须验证 ∂ 和 γ的以下性质：

1. ∂ 在同构类上为常数，
2. γ_g: $G\mathsf{Sec} \to G\mathsf{Sec}$ 是严格幺半同构，
3. 映射 $g \mapsto \gamma_g$ 是群同态，
4. $\partial(\pi \otimes \sigma) = \partial\pi\partial\sigma$ 对所有 π，$\sigma \in G\mathsf{Sec}_{\mathrm{hom}}$
5. $\gamma_g(G\mathsf{Sec}_h) \subseteq G\mathsf{Sec}_{ghg^{-1}}$

（1）：这是因为，如果对于 $g \neq h$ 有 $\pi \in G\mathsf{Sec}_g$ 和 $\sigma \in G\mathsf{Sec}_h$，那么在 $G\mathsf{Sec}$ 中，π 与 σ 之间不存在非零态射。

（2）：注意，$\gamma_g \circ \gamma_{g^{-1}} = \mathrm{Id}_{G\mathsf{Sec}} = \gamma_{g^{-1}} \circ \gamma_g$，因此 $\gamma_g\colon\ G\mathsf{Sec} \to G\mathsf{Sec}$ 是一个同构。接下来需要证明严格幺半性。令 π，$\sigma \in G\mathsf{Sec}$。于是我们有

$$\gamma_g(\pi \otimes \sigma) = \beta_g \circ \pi \circ \sigma \circ \beta_g^{-1} = \beta_g \circ \pi \circ \beta_g^{-1} \circ \beta_g \circ \sigma \circ \beta_g^{-1} = \gamma_g(\pi) \otimes \gamma_g(\sigma).$$

类似地，对于 $T\colon\ \pi \to \pi'$ 和 $S\colon\ \sigma \to \sigma'$，我们有

$$\begin{aligned}\gamma_g(T \otimes S) &= \gamma_g(T\pi(S)) = \beta_g(T)\beta_g(\pi(S)) = \beta_g(T)\beta_g \circ \pi \circ \beta_g^{-1}(\beta_g(S)) \\ &= \gamma_g(T)\gamma_g(\pi)(\gamma_g(S)) = \gamma_g(T) \otimes \gamma_g(S).\end{aligned}$$

(3)：令 $\pi \in G\mathsf{Sec}$。我们有，

$$\gamma_g \circ \gamma_h(\pi) = \beta_g \circ (\beta_h \circ \pi \circ \beta_h^{-1}) \circ \beta_g^{-1} = \beta_{gh} \circ \pi \circ \beta_{gh}^{-1} = \gamma_{gh}(\pi),$$

并且对于 $T\colon\ \pi \to \sigma$ 中的 $G\mathsf{Sec}$，我们有

$$\gamma_g \circ \gamma_h(T) = \beta_g \circ \beta_h(T) = \beta_{gh}(T) = \gamma_{gh}(T).$$

(4)：这由引理7.3.9得出。

(5)：令 $\pi \in G\mathsf{Sec}_h$。那么存在 $\Lambda \in \mathcal{L}$，使得 $\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \mu \circ \beta_h^{r(\Lambda)}$，其中 是作用于有限多个格点上的对称作用。（同样，由于 π_0 是忠实表示，我们将 $\mathcal{A}$ 与 $\pi_0(\mathcal{A})$视为相同。）于是对于 $A \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$，我们有

$$\gamma_g(\pi)(A) = \beta_g \circ \pi \circ \beta_g^{-1}(A) = \beta_g \circ (\mu \circ \beta_h^{r(\Lambda)}) \circ \beta_g^{-1}(A),$$

并且 $\beta_g \circ \mu \circ \beta_h^{r(\Lambda)} \circ \beta_g^{-1}$与 $\beta_{ghg^{-1}}^{r(\Lambda)}$ 仅在有限多个格点上不同。因此，$\gamma_g(\pi)$在 Λ处是ghg^{-1}-局域化的。现在选取 $\Delta \in \mathcal{L}$ 和 $\widehat{\pi} \simeq \pi$，其中 $\widehat{\pi}$ 在 Δ中是 g-局域化的，并且 $U\colon\ \pi \to \widehat{\pi}$是酉算子。于是 $\gamma_g(U)\colon\ \gamma_g(\pi) \to \gamma_g(\widehat{\pi})$是酉算子，而 $\gamma_g(\widehat{\pi})$在 Δ中是ghg^{-1}-局域化的。这表明 $\gamma_g(\pi)$是可传输的。

□

注 7.3.12。注意，如果 $\pi \in G\mathsf{Sec}_h$ 在锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 中是典范地 h-局域化的，那么由上述论证可知，$\gamma_g(\pi)$ 在 Λ 中也是典范地 ghg^{-1}-局域化的。因此，如果 $\pi \in G\mathsf{Sec}$ 在 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 中是典范地 G-局域化的，那么 $\gamma_g(\pi)$ 也是如此。

注 7.3.13。由于 $\gamma_g \circ \gamma_h = \gamma_{gh}$，看起来我们似乎没有任何对称性分数化数据 [BBCW19]。然而，在我们的范畴为有限半单的情形下，可以通过我们的构造，以类似于 [BKM23] 中用于恢复 F-和 R-符号的方法，恢复这些数据。我们将在第 7.3.4.1节中说明具体做法。

7.3.2.2 G交叉编织结构于 GSec

为简化构造，我们现在固定一个锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$，使得 $\Lambda^{+r} \cap \bar{\gamma}_R = \emptyset$，其中 $\bar{\gamma}_R$ 是之前固定的半无限对偶路径。令 $G\mathrm{Sec}(\Lambda)$ 为 GSec 的全子范畴，该子范畴由在 Λ 中规范地 G-局域化的扇区组成。这里使用规范的 G-局域化是为了简化计算。类似地，对于每个$g \in G$，我们定义 $G\mathrm{Sec}(\Lambda)_{\mathrm{hom}}$ 以及 $G\mathrm{Sec}(\Lambda)_g$。注意，如果 $T\colon \pi \to \sigma$ 是 $G\mathrm{Sec}(\Lambda)$中的一个交织算子，那么 $T \in \mathcal{R}(\Lambda^{+r})$。事实上，如果$\pi \in G\mathrm{Sec}(\Lambda)$，那么 π 具有以下形式

$$\pi(-) = \sum_{i=1}^{n} V_i \pi_i(-) V_i^*,$$

其中每个 $\pi_i \in G$Sec 都规范地局域化于 Λ 中的 g_i，对某个 $g_i \in G$ 和 V_1，……，$V_n \in \mathcal{R}(\Lambda)$。现在，对于每个 $g \in G$，每个交织算子 $T\colon \pi \to \sigma$ 在 $G\mathrm{Sec}(\Lambda)_g$ 中，根据标准论证（例如参见 [M¨ug05，引理 2.13]）都属于 $\mathcal{R}(\Lambda^{+r})$。此外，若 $\pi \in G\mathrm{Sec}(\Lambda)_g$、$\sigma \in G\mathrm{Sec}(\Lambda)_h$，且 $g \neq h$，则不存在非零态射 $T : \pi \to \sigma$。所需结果由此得出。

现在我们在 $G\mathrm{Sec}(\Lambda)$上构造一个 G交叉编织。

定义 7.3.14。设 $\Delta \in \mathcal{L}$。若 Δ 位于 充分靠左 于 Λ，则称 $\Lambda^{+r} \cup r(\Lambda) \subseteq r(\Delta)$ 且 $\Delta^{+r} \subseteq \ell(\Lambda$。所需的锥的几何构形如图 7.7所示。

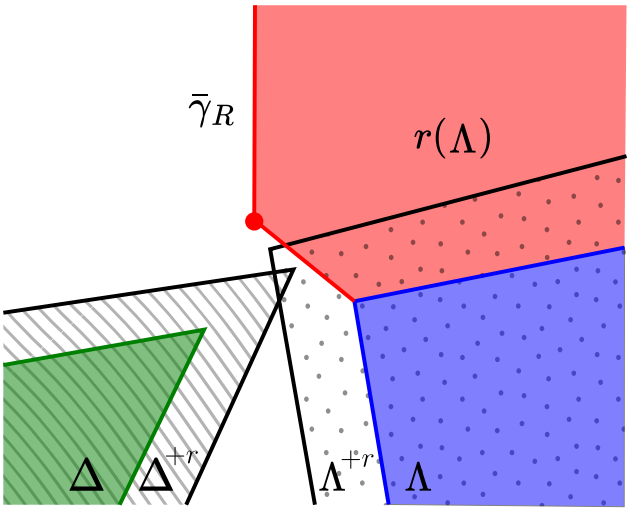


图 7.7：所需的锥的几何构形示例 Λ，Δ 要求 Δ 充分靠左于 Λ（参见定义 7.3.14）。锥 Λ 以蓝色显示，Δ 以绿色显示，r（Λ）以红色显示，Λ^{+r} 以点状图案显示，Δ^{+r} 以条纹图案显示。特别地，Δ^{+r} 和 Λ^{+r} 可以重叠，但前提是 Δ 不与 Λ^{+r} 重叠，并且 Λ 不与 Δ^{+r}重叠。

定义 7.3.15. 设 $\Delta \in \mathcal{L}$ 充分靠左于 Λ。我们称 $\pi \in G\mathrm{Sec}_g$ 在 Δ 中是向左 g-局域化的，若 π 在 Δ 中是 g-局域化的，且 $\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^{+r} \cup r(\Lambda)}} = \beta_g|_{\mathcal{A}_{\Lambda^{+r} \cup r(\Lambda)}}$。

设 $\Delta \in \mathcal{L}$ 充分靠左于 Λ 和 π，且 $\sigma \in G\mathsf{Sec}_g$ 在Δ中是向左 g-局域化的。若 $T\colon \pi \to \sigma$，则 $T \in \mathcal{R}(\ell(\Lambda))$。事实上，若 π 和 $\sigma \in G\mathsf{Sec}_g$ 在 Δ中是向左 g-局域化的，它们与在 Δ 中规范地 g-局域化的情形相差一些属于 $\pi_0(\mathcal{A}_{\ell(\Lambda)})$ 的酉算子，因此 $T \in \mathcal{R}(\ell(\Lambda))$。类似地，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$设 Δ、$\Delta \in \mathcal{L}$ 均充分靠左于 Λ 和 $\Delta \subseteq \Delta$。若 π 在 Δ中是向左 g-局域化的$\widehat{\ }$，则 π 在 Δ中是向左 g-局域化的。事实上，由于 π 在 Δ 中是向左 g-局域化的，且 $\frown$ $\frown\Delta \subseteq \Delta$，$\pi$ 在 Δ中是 g-局域化的，并且 $\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda+r\cup r(\Lambda)}} = \beta_g|_{\mathcal{A}_{\Lambda+r\cup r(\Lambda)}}$。

下面的引理应与 [M¨ug05，引理 2。14]。

引理 7.3.16。设 $\sigma \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)$ 和 $\pi \in G\mathsf{Sec}_g$ 在 Δ 中相对于某个 Δ（充分靠左于 Λ）均为向左 g-局域化。则 $\pi \otimes \sigma = \gamma_g(\sigma) \otimes \pi$。

证明：我们改写 [M¨ug05，引理 2.14] 的证明。注意，$\sigma(-) = \sum_{i=1}^{n} V_i\sigma_i(-)V_i^*$，其中每个 σ_i 都在 Λ 中被规范地 h_i-局域化，其中 $h_i \in G$ 和 V_1，.....，$V_n \in \mathcal{R}(\Lambda)$。这由 $G\mathsf{Sec}$ 的定义以及 $G\mathsf{Sec}(\Lambda)$ 的定义得出。由于 Δ 充分靠左于 Λ，且 π 在 Δ中是向左 g-局域化的，$\pi(V_i) = \beta_g(V_i)$。因此，只需证明，对于在 Λ 中规范地 h-局域化的 σ，有 $\pi \otimes \sigma = \gamma_g(\sigma) \otimes \pi$。我们通过考察以下情形，证明 $\pi \otimes \sigma(A) = \gamma_g(\sigma) \otimes \pi(A)$：

1. $A \in \mathcal{A}_{r(\Lambda)}$、
2. $A \in \mathcal{A}_{\Lambda}$、
3. $A \in \mathcal{A}_{\Delta}$和
4. $A \in \mathcal{A}_{\ell(\Lambda)\cap\Delta^c}$。

(1)：在此情形下，$\sigma(A) = \beta_h(A)$。由于 π 在 Δ中是向左 g-局域化的，因此 $\pi(A) = \beta_g(A)$。因此，我们有

$$\pi \otimes \sigma(A) = \beta_g(\beta_h(A)) = (\beta_g \circ \beta_h \circ \beta_g^{-1} \circ \beta_g(A)) = (\beta_g \circ \sigma \circ \beta_g^{-1})(\beta_g(A)) = \gamma_g(\sigma) \otimes \pi(A).$$

(2)：在此情形下，$\sigma(A) \in \mathcal{R}(\Lambda^{+r})$。由于 $\Lambda^{+r} \subseteq r(\Delta)$，且 π 在 Δ中是向左 g-局域化的，我们有

$$\pi \otimes \sigma(A) = \beta_g(\sigma(A)) = (\beta_g \circ \sigma \circ \beta_g^{-1} \circ \beta_g(A)) = \gamma_g(\sigma) \otimes \pi(A).$$

(3)：由于 $\Delta \subseteq \Delta^{+r} \subseteq \ell(\Lambda)$，我们有 $\sigma(A) = A$。此外，由于 π 在Δ中是 g-局域化的，$\pi(A) \in \mathcal{R}(\Delta^{+r})$，因此 $\gamma_g(\sigma)(\pi(A)) = \pi(A)$。因此，我们有

$$\pi \otimes \sigma(A) = \pi(A) = \gamma_g(\sigma) \otimes \pi(A).$$

(4)：由于 $A \in \mathcal{A}_{\ell(\Lambda)}$, $\sigma(A) = A$。此外，由于 $A \in \mathcal{A}_{\Delta^c}$ 和 π 在 Δ中是 g-局域化的，$\pi(A)$与 A具有相同的支撑。特别地，$\pi(A) \in \mathcal{A}_{\ell(\Lambda)}$。因此，我们有

$$\pi \otimes \sigma(A) = \pi(A) = \gamma_g(\sigma) \otimes \pi(A).$$

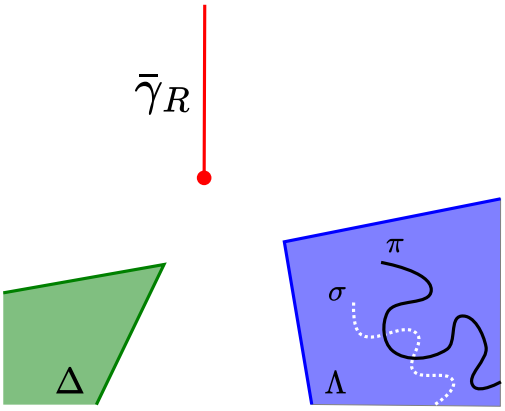
□

现在我们构造$c_{\pi,\sigma}$： $\pi\otimes\sigma\to\gamma_g(\sigma)\otimes\pi$，用于 $\pi\in G$节$(\Lambda)_g$和 $\sigma\in G$节(Λ)，采用 [M¨ug05，命题 217]。

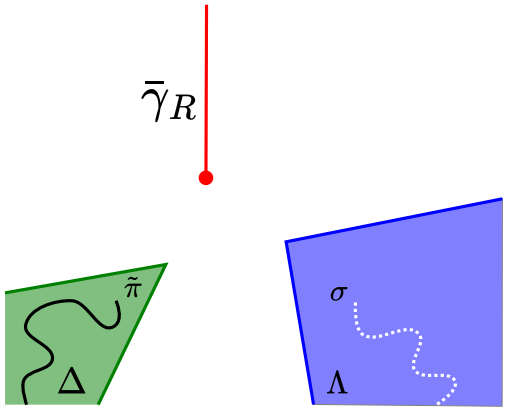
定义 7.3.17。令 $\pi\in G\mathrm{Sec}(\Lambda)_g$ 和 $\sigma\in G\mathrm{Sec}(\Lambda)$，并选取 Δ，使其充分靠左于 Λ，且 $\tilde{\pi}\simeq\pi$ 向左局域化于 Δ 中。令 $U\colon\pi\to\tilde{\pi}$ 为一个酉交织算子。于是我们将编织同构定义为

$$c_{\pi,\sigma}:=(\mathrm{Id}_{\gamma_g(\sigma)}\otimes U^*)(U\otimes\mathrm{Id}_\sigma)=\gamma_g(\sigma)(U^*)U.$$

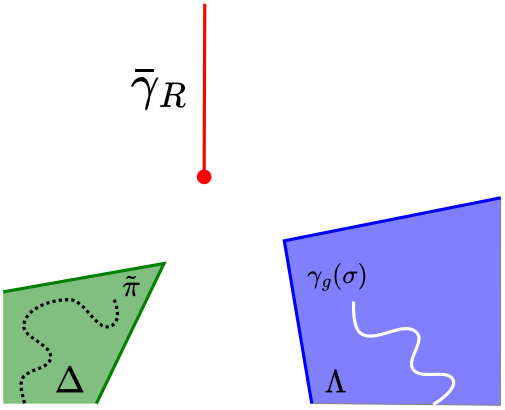
请注意，在定义 $c_{\pi\text{时},\sigma}$ 我们用到了 $\tilde{\pi}\otimes\sigma=\gamma_g(\sigma)\otimes\tilde{\pi}$，这是由引理 7.3.16 得出的。



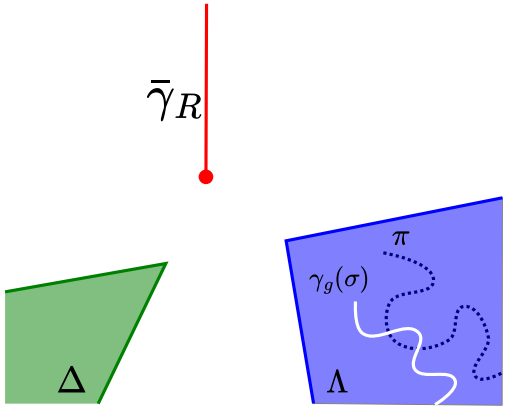
(a) $\pi\otimes\sigma$ 的示意图，其中张量的右侧分量用虚线表示。



(b) 我们用酉算子 $U\colon\pi\to\tilde{\pi}$ 作共轭，得到 $\tilde{\pi}\otimes\sigma=\mathrm{Ad}(U\otimes\mathrm{Id}_\sigma)(\pi\otimes\sigma)$，其中 $\tilde{\pi}$ 向左局域化于 Δ 中。



(c) $\gamma_g(\sigma)\otimes\tilde{\pi}=\tilde{\pi}\otimes\sigma$ 使用引理7.3.16作为 $\tilde{\pi}$ 是向左 g-局部化于 Δ。



(d) 我们再次可以使用 U^* 来得到 $\gamma_g(\sigma)\otimes\pi=\mathrm{Ad}(\mathrm{Id}_{\gamma_g(\sigma)}\otimes U^*)(\gamma_g(\sigma)\otimes\tilde{\pi})$。

图 7.8：由编织同构$c_{\pi,\sigma}$执行的过程。注意，我们要求 Δ，Λ 满足以下条件： Δ 充分靠左于 Λ （定义7.3.14）。我们用虚线表示张量的右分量。

注记 7.3.18。图 7.8 展示了缺陷扇区 $\pi \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_g, \sigma \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)$ 中编织同构$c_{\pi,\sigma}$ 所执行的过程（图 7.8a 给出了示意图）。为了应用引理 7.3.16，我们必须先将 π 局域化到 Δ，使得 Δ充分靠左于Λ。为此，我们用酉算子 $U \otimes \mathrm{Id}_\sigma$ 进行共轭，得到 $\tilde{\pi} \otimes \sigma$（图 7.8b）。然后，我们使用引理 7.3.16 交换张量分量，得到 $\gamma_g(\sigma) \otimes \tilde{\pi}$（图 7.8c）。最后，我们用酉算子 $(\mathrm{Id}_{\gamma(g(\sigma)} \otimes U^*)$进行共轭，得到 $\gamma_g(\sigma) \otimes \pi$。将这一系列操作合在一起，我们得到 $c_{\pi,\sigma}(\pi \otimes \sigma)(-) = (\gamma_g(\sigma) \otimes \pi)(-)c_{\pi,\sigma}$。

引理 7.3.19。设 $\pi \in G$扇区$(\Lambda)_g$ 和 $\sigma \in G$扇区(Λ)。映射 $c_{\pi,\sigma}$（定义 *7.3.17*中给出）不依赖于 $U, \tilde{\pi}$ 和 Δ 的选取。

证明：我们改编 [M¨ug05，命题 2 中的证明。17]。我们先证明其不依赖于 $\tilde{\pi}$ 和U。设 $\hat{\pi} \simeq \pi$ 是另一个 g-缺陷扇区，其终点充分靠左，且在 g 中局域化；并设 Δ，且 $V\colon \pi \to \hat{\pi}$ 是一个酉算子。我们希望证明

$$\gamma_g(\sigma)(U^*)U = \gamma_g(\sigma)(V^*)V.$$

这等价于证明

$$\gamma_g(\sigma)(VU^*) = VU^*.$$

现在，$VU^*\colon \tilde{\pi} \to \hat{\pi}$。因此，由于 Δ 充分靠左于 Λ，且 $\tilde{\pi}, \hat{\pi}$ 均在 Δ 中向左局域化，$VU^* \in \mathcal{R}(\ell(\Lambda))$。由于 σ 被规范地局域化于 Λ，所需结果由此成立。

仍需证明$c_{\pi,\sigma}$不依赖于 Δ。假设 $\Delta, \hat{\Delta}$位于 Λ的左侧。未必存在一个同时满足 $\Delta \subset \Delta$、Δ 以及$\Delta \subset \ell(\Lambda)$ 的单一锥 Δ。然而，我们能够在两个锥之间“之字形”移动，而不离开 $\ell(\Lambda)$。[5] 更准确地说，从 Δ 到 $\hat{\Delta}$ 的之字形是一列锥 $(\Delta_1, \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta_n, \Delta_{n+1})$，满足 $\Delta_1 = \Delta$、$\Delta_{n+1} = \hat{\Delta}$，并且对每个 $i = 1, \ldots, n$，都有 $\Delta_i, \Delta_{i+1} \subseteq \Delta_i$ [BBC，第 1.1] 节。图 7.9 展示了一个包含 $n = 2$ 的之字形示例。

现在，注意到给定Δ，存在一条从 Δ 到 $\hat{\Delta}$ 的之字形，其中之字形中的每个锥都充分靠左于 Λ。因此，只需证明给定 Δ_i，$\Delta_{i+1} \subseteq \Delta_i$，$g$在 Δ_i 中的局域化给出相同的 $c_{\pi,\sigma}$。但这是因为 g-缺陷扇区若在 Δ_i/Δ_{i+1} 中向左局域化，则也会在 Δ_i，中向左局域化；而且我们已经证明了在 Δ_i中向左局域化的 $\tilde{\pi}$ 的无关性。□

命题 7.3.20。范畴 $G\mathsf{Sec}(\Lambda)$具有 G-交叉编织结构，其编织同构来自定义 *7.3.17*。

证明：我们按照 [M¨ug05，命题 2 中的证明进行。17]。为了说明定义7.3.17 给出了一个 G-交叉编织，定义在 $G\mathsf{Sec}(\Lambda)$ 上，我们必须证明满足以下交叉编织条件：G-

1. 自然性

[5]论文 [BBC+24]使用之字形证明编织定义良好。在此处应用之字形的想法源自对那篇论文的研究，具体来说，来自与 David Penneys 的讨论。

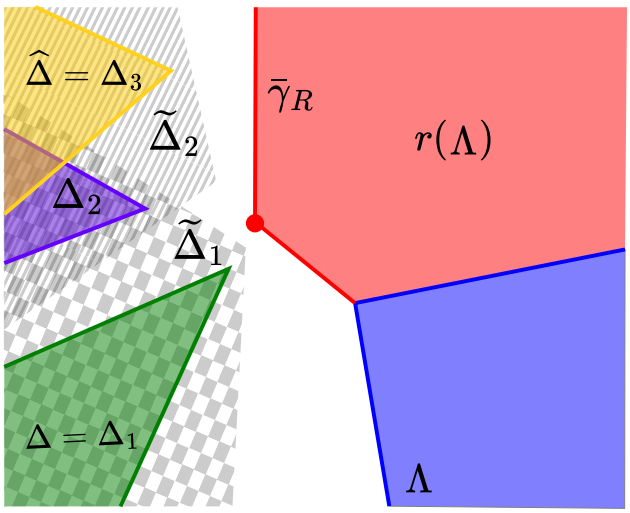


图 7.9：锥之间的之字形，其中 $n = 2$ Δ, Δ。请注意，根据 $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$锥 Δ, Δ的几何结构，不可能找到一个同时包含 Δ, Δ的单个锥 $\Delta \subset \ell(\Lambda)$。不过$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$，我们可以通过选择之字形序列（$\Delta_1 = \Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_2, \Delta_3 = \Delta$），在它们之间构造之字形，使该序列中的所有锥都位于 $\ell(\Lambda)$中。

2. 幺半性

3. 编织在 γ_g下保持不变

(1)：有两个必须验证的自然性方程；我们依次验证它们。首先，设 $\pi \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_g$，且 $T\colon \sigma_1 \to \sigma_2$ 是 $G\mathsf{Sec}(\Lambda)$中的一个态射。我们必须证明

$$(\gamma_g(T) \otimes \mathrm{Id}_\pi) c_{\pi,\sigma_1} = c_{\pi,\sigma_2} (\mathrm{Id}_\pi \otimes T).$$

令 Δ 充分位于 Λ左侧，$\widetilde{\pi} \simeq \pi$ 在 Δ 中是向左 g-局域化的，且 $U\colon \pi \to \widetilde{\pi}$是酉算子。于是需要验证的等式变为

$$\gamma_g(T)\gamma_g(\sigma_1)(U^*)U = \gamma_g(\sigma_2)(U^*)U\pi(T).$$

我们从右侧开始推导。首先注意到

$$\gamma_g(\sigma_2)(U^*)U\pi(T) = \gamma_g(\sigma_2)(U^*)\widetilde{\pi}(T)U = \gamma_g(\sigma_2)(U^*)\beta_g(T)U.$$

最后一个等式成立，因为 $\widetilde{\pi}$ 在 Δ 中是向左 g-局域化的，且 $T \in \mathcal{R}(\Lambda^{+r})$。现在，

$$\gamma_g(\sigma_2)(U^*)\beta_g(T)U = \beta_g(\sigma_2(\beta_g^{-1}(U^*))T)U = \beta_g(T\sigma_1(\beta_g^{-1}(U^*)))U = \gamma_g(T)\gamma_g(\sigma_1(U^*))U.$$

现在，假设 $\sigma \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)$，且 $T\colon \pi_1 \to \pi_2$ 是 $G\mathsf{Sec}(\Lambda)_g$ 中的一个态射。我们必须证明

$$(\mathrm{Id}_{\gamma_g(\sigma)} \otimes T) c_{\pi_1,\sigma} = c_{\pi_2,\sigma} (T \otimes \mathrm{Id}_\sigma).$$

令 Δ 充分靠左于 Λ。对于 $i = 1, 2$，令 $\widetilde{\pi}_i \simeq \pi_i$ 在 Δ 中是向左 g-局域化的，并令 $U_i\colon \pi_i \to \widetilde{\pi}_i$ 为一个酉算子。于是待验证的等式变为

$$\gamma_g(\sigma)(T)\gamma_g(\sigma)(U_1^*)U_1 = \gamma_g(\sigma)(U_2^*)U_2 T.$$

注意，上述等式等价于

$$\gamma_g(\sigma)(U_2TU_1^*) = U_2TU_1^*.$$

但是由于 $U_2TU_1^*$: $\widetilde{\pi}_1 \to \widetilde{\pi}_2$和 $\widetilde{\pi}_1$, $\widetilde{\pi}_2$都在 Δ 中向左 g局域化， $U_2TU_1^* \in \mathcal{R}(\Delta^{+r})$ $\subseteq \mathcal{R}(\ell(\Lambda))$。因此，由于 σ （从而 $\gamma_g(\sigma)$）在 Λ 中按规范 G局域化，所需等式成立。

（2）：同样，我们必须验证两个等式。首先，设 $\pi \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_g$ 和σ， $\tau \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)$。我们必须证明

$$c_{\pi,\sigma\otimes\tau} = (\mathrm{Id}_{\gamma(\sigma)} \otimes c_{\pi,\tau})(c_{\pi,\sigma} \otimes \mathrm{Id}_\tau).$$

设 Δ 充分靠左于 Λ， $\widetilde{\pi} \simeq \pi$ 在 Δ 中向左 g局域化，并且 U: $\pi \to \widetilde{\pi}$为一个酉算子。于是需要验证的等式变为

$$\gamma_g(\sigma \otimes \tau)(U^*)U = \gamma_g(\sigma)(\gamma_g(\tau)(U^*)U)\gamma_g(\sigma)(U^*)U.$$

但这很容易看出成立。事实上，从右侧开始，我们有

$$\gamma_g(\sigma)(\gamma_g(\tau)(U^*)U)\gamma_g(\sigma)(U^*)U = (\gamma_g(\sigma)\circ\gamma_g(\tau))(U^*)\gamma_g(\sigma)(U)\gamma_g(\sigma)(U^*)U = \gamma_g(\sigma\otimes\tau)(U^*)U.$$

现在，设 $\pi \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_g$、 $\sigma \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_h$，以及 $\tau \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)$。我们必须证明

$$c_{\pi\otimes\sigma,\tau} = (c_{\pi,\gamma_h(\tau)} \otimes \mathrm{Id}_\sigma)(\mathrm{Id}_\pi \otimes c_{\sigma,\tau}).$$

设 Δ 充分靠左于 Λ， $\widetilde{\pi} \simeq \pi$ 在 Δ 中是左向 g-局域化的， $\widetilde{\sigma} \simeq \sigma$ 在 Δ 中是左向 h-局域化的，并且 U: $\pi \to \widetilde{\pi}$ 和 V: $\sigma \to \widetilde{\sigma}$ 是酉算子。注意， $\widetilde{\pi} \otimes \widetilde{\sigma}$在 Δ 中是左向 gh-局域化的，且 $U \otimes V = U\pi(V) = \widetilde{\pi}(V)U$: $\pi \otimes \sigma \to \widetilde{\pi} \otimes \widetilde{\sigma}$ 是酉算子。因此，所需等式可写为

$$\gamma_{gh}(\tau)(U^*\widetilde{\pi}(V^*))U\pi(V) = \gamma_g(\gamma_h(\tau))(U^*)U\pi(\gamma_h(\tau)(V^*)V) = \gamma_{gh}(\tau)(U^*)U\pi(\gamma_h(\tau)(V^*))\pi(V).$$

注意，上述等式等价于

$$\gamma_{gh}(\tau)(\widetilde{\pi}(V^*))U = U\pi(\gamma_h(\tau)(V^*)) = \widetilde{\pi}(\gamma_h(\tau)(V^*))U,$$

因此，只需证明 $\gamma_{gh}(\tau)(\widetilde{\pi}(V^*)) = \widetilde{\pi}(\gamma_h(\tau)(V^*))$。但由引理7.3.16 可知，这成立，因为 $\gamma_h(\tau) \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)$，且 $\widetilde{\pi}$ 在 g-局域化于 Δ。

(3)：我们必须证明，对于 $\pi \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_h$ 和 $\sigma \in G\mathsf{Sec}(\Lambda$,

$$\gamma_g(c_{\pi,\sigma}) = c_{\gamma_g(\pi),\gamma_g(\sigma)}.$$

令 Δ 充分靠左于 Δ，令 $\widetilde{\pi} \simeq \pi$ 在 h 中相对于 Δ 向左局域化，并且 U: $\pi \to \widetilde{\pi}$ 是一个酉算子。注意， $\gamma_g(\widetilde{\pi})$ 在 Δ 中相对于 ghg^{-1} 向左局域化，而 $\gamma_g(U)$: $\gamma_g(\pi) \to \gamma_g(\widetilde{\pi})$ 是一个酉算子。因此我们有

$$c_{\gamma_g(\pi),\gamma_g(\sigma)} = \gamma_{ghg^{-1}}(\gamma_g(\sigma))(\gamma_g(U^*))\gamma_g(U) = \beta_g(\gamma_h(\sigma)(U^*))\beta_g(U) = \gamma_g(c_{\pi,\sigma}).$$

□

7.3.3 与任意子扇区的联系

现在我们证明 G扇区$(\Lambda)_e$ 恰好是相对于 *Oga 的超选择扇区的编织 C π_0 [Oga22]张量范畴。这是意料之中的，因为 G扇区$(\Lambda)_e$ 应当对应于任意子激发，而任意子激发是由超选择扇区描述的。

以下对任意子扇区的定义与定义7.A.1 中常见的定义相同，唯一的区别是此处我们不要求不可约性（参见备注 7.3.3）。

定义 7.3.21。设 $\pi_1\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H}_1)$ 和 $\pi_2\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H}_2)$ 是 $\mathfrak{A}$ 的表示。若对每个锥 Λ（包括 $\Lambda\notin\mathcal{L}$），π_1 满足相对于 π_2 的超选择准则，we say that π_1 satisfies the criterion.

$$\pi_1|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}\simeq\pi_2|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}.$$

如果 $\pi_2=\pi_0$，我们称 π_1 是一个 任意子扇区。

引理 7.3.22。以下陈述成立：

1. 设 $\pi,\sigma\in G$节$_g$。则 π 满足关于 σ 的超选择准则。

2. 设 $\sigma\in G$Sec$_g$，并设 $\pi\colon\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H})$ 满足相对于 σ 的超选择准则。那么存在 $\widehat{\pi}\in G$Sec$_g$，使得 $\pi\simeq\widehat{\pi}$

证明：

(1)：我们必须证明，对于每个锥 Λ（包括 $\Lambda\notin\mathcal{L}$），

$$\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}\simeq\sigma|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}.$$

现在注意到，对于每个锥 Λ（包括 $\Lambda\notin\mathcal{L}$），都存在某个锥 $\Delta\subset\Lambda$，使得 $\Delta\in\mathcal{L}$。现在，由于 π，$\sigma\in G$Sec$_g$，我们有

$$\pi|_{\mathcal{A}_{\Delta^c}}\simeq\pi_0\circ\beta_g^{r(\Delta)}|_{\mathcal{A}_{\Delta^c}}\simeq\sigma|_{\mathcal{A}_{\Delta^c}},$$

注意到 $\mathcal{A}_{\Lambda^c}\subset\mathcal{A}_{\Delta^c}$，我们得到 $\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}\simeq\sigma|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}$，如所需。

(2)：由于 $\sigma\in G$Sec$_g$，对于某个 $\Lambda\in\mathcal{L}$，有 $\sigma|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}=\pi_0\circ\mu\circ\beta_g^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}$。注意到$\pi$ 满足相对于 σ 的超选择准则，我们有

$$\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}\simeq\sigma|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}=\pi_0\circ\mu\circ\beta_g^{r(\Lambda)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}.$$

定义 $\widehat{\pi}:=\mathrm{Ad}(U)\circ\pi$，其中 U 是实现等价 $\pi|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}\simeq\sigma|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}$ 的酉算子。注意，根据定义，$\widehat{\pi}$ 在 Λ 中是 g-局域化的。此外，对于所有 $\Delta\in\mathcal{L}$，都存在在 Δ中局域化的 $\widetilde{\sigma}\simeq\sigma$ g。由于 π 满足相对于 σ 的超选择准则，π 也满足相对于 $\widetilde{\sigma}$ 的超选择准则。因此，按照我们求得 $\widehat{\pi}$ 时所用的同样论证，我们可以找到在 Δ中局域化的 $\widetilde{\pi}\simeq\pi\simeq\widehat{\pi}$ g，故$\widehat{\pi}\in G$Sec$_g$。

□

推论 7.3.23。 编织张量范畴 G扇区$(\Lambda)_e$ 与局域化于 Λ 的超选择扇区所构成的编织张量范畴编织等价。

证明： 范畴 GSec$(\Lambda)_e$ 根据引理 Λ 7.3.22 以及 这一事实，等价于局域化于 $\pi_0 \in G$Sec$(\Lambda)_e$的超选择扇区范畴。此外，当 $g = e$时，张量积和编织恰好化简为 [Naa11]中定义的形式。结论得证。 □

7.3.4 相干性数据

本节讨论如何获得 [BBCW19]中所述的对称性分数化及其他相干数据。我们采用的方法与 [BKM23] 在任意子（超选择）扇区情形下推导 F- 和 R-符号的方法类似。为进行这项分析，我们再引入一条假设。

假设 9。 范畴 GSec 是有限半单的。

令 $\mathcal{K}_0(G\text{Sec})$为 GSec的融合环，并令 I 表示 $\mathcal{K}_0(G\text{Sec})$的基。对于每个 $i \in I$，我们用 π_i标记范畴中相应的对象。注意， π_0 是不可约的，因为 ω_0 是一个纯态。假设 GSec有限半单，意味着 GSec中的每个对象都同构于有限个 π_i'的直和。

7.3.4.1 对称性分数化

对于每个 $g \in G$ 和 $i \in I$，都有 $\gamma_g(\pi_i)$ 不可约，因此存在唯一的 $i' \in I$，使得 $\gamma_g(\pi_i) \simeq \pi_{i'}$。为便于记号，我们定义 $g(i) := i'$。令 $V_g^i \colon \gamma_g(\pi_i) \to \pi_{g(i)}$ 为一个酉算子。现在，对于 g、$h \in G$和 $i \in I$，有 $V^h(i)_g \quad \gamma_g(V_h^i) \colon \gamma_g(\gamma_h(\pi_i)) \to \pi_{g(h(i))}$，因为 $\gamma_g(V_h^i) \colon \gamma_g(\gamma_h(\pi_i)) \to \gamma_g(\pi_{h(i)})$。现在，由于 $\gamma_g(\gamma_h(\pi_i)) = \gamma_{gh}(\pi_i)$，我们也有 $V_{gh}^i \colon \gamma_g(\gamma_h(\pi_i)) \to \pi_{gh(i)}$。这意味着 $\pi_{gh(i)} \simeq \pi_{g(h(i))}$，因此 $gh(i) = g(h(i))$。此外，我们有

$$V_g^{h(i)}\gamma_g(V_h^i)(V_{gh}^i)^* \colon \pi_{gh(i)} \to \pi_{gh(i)}.$$

因此，由于 $\pi_{gh(i)}$ 不可约，根据舒尔引理，我们有

$$V_g^{h(i)}\gamma_g(V_h^i) = \eta(g,h)_i V_{gh}^i$$

对于某个 $\eta(g,h)_i \in U(1)$。这个标量就是[BBCW19]中所描述的对称性分数化数据。

下面的引理给出了所需的对称性分数化相干性条件，这与 [BBCW19，公式 279]中的条件类似。请注意，由于我们采用了不同的约定，这些条件并不完全相同。

引理 7.3.24。 设 $i \in I$ 和 g、h、$k \in G$。我们有

$$\eta(g,h)_{k(i)}\eta(gh,k)_i = \eta(h,k)_i\eta(g,hk)_i.$$

证明： 我们首先观察到

$$V_g^{hk(i)}\gamma_g(V_h^{k(i)})\gamma_{gh}(V_k^i)\colon \gamma_{ghk}(\pi_i)\to\pi_{ghk(i)}.$$

我们用两种不同的方式将 $V^{hk}{}_{(i)g}\quad\gamma_g(V^{k}{}_{(i)\,h})\gamma_{gh}(V_k^i)$ 与 V_{ghk}^i 联系起来。事实上，注意到

$$V_g^{hk(i)}\gamma_g(V_h^{k(i)})\gamma_{gh}(V_k^i)=\eta(g,h)_{k(i)}V_{gh}^{k(i)}\gamma_{gh}(V_k^i)=\eta(g,h)_{k(i)}\eta(gh,k)_iV_{ghk}^i,$$

我们也可以按如下方式进行，

$$V_g^{hk(i)}\gamma_g(V_h^{k(i)})\gamma_{gh}(V_k^i)=V_g^{hk(i)}\gamma_g((V_h^{k(i)})\gamma_h(V_k^i))=V_g^{hk(i)}\gamma_g(\eta(h,k)_iV_{hk}^i)=\eta(h,k)_i\eta(g,hk)_iV_{ghk}^i.$$

因此，由于 V_{ghk}^i 是酉算子，我们有

$$\eta(g,h)_{k(i)}\eta(gh,k)_i=\eta(h,k)_i\eta(g,hk)_i.$$

□

我们注记，不同的 V_g^i选择都必然会给出等价的 $\eta(g,h)_i$，因为我们用来得到它们的构造是一个形式化的范畴论论证，而且范畴 GSec已被证明是 G-交叉幺半（命题 7.3.11）。

7.3.4.2 其他相干数据

现在我们将说明如何得到 [BBCW19] 中讨论的其余相干数据。为简化计算，在接下来的讨论中，我们假设范畴是尖的，也就是说，对于每个 $i,\ j\in I,\ \pi_i\otimes\pi_j$ 都是不可约的。分析可以在更一般的情形下进行，但那样就需要更加谨慎。请注意，我们并未在一般性分析中施加这一假设，而只是将其用于演示。

我们首先计算 F-符号。具体做法与 [BKM23 第 2.3 节完全相同。1],不过，为方便起见，我们仍重复说明。对于每个 $i,j\in I,\ \pi_i\otimes\pi_j$ 都是不可约的，因此 $\pi_i\otimes\pi_j\simeq\pi_{ij}$ 对某个 $ij\in I$ 成立。按照 [BKM23], 的做法，我们令张量结构同构 $\Omega_{i,j}$: $\pi_i\otimes\pi_j\to\pi_{ij}$ 为一个酉算子。现在，对于 $i,j,k\in I$，我们有

$$\Omega_{i,jk}(\mathrm{Id}_{\pi_i}\otimes\Omega_{j,k})=\Omega_{i,jk}\pi_i(\Omega_{j,k})\colon\pi_i\otimes\pi_j\otimes\pi_k\to\pi_{i(jk)},$$
$$\Omega_{ij,k}(\Omega_{i,j}\otimes\mathrm{Id}_{\pi_k})=\Omega_{ij,k}\Omega_{i,j}\colon\pi_i\otimes\pi_j\otimes\pi_k\to\pi_{(ij)k}.$$

因此，我们有 $i(jk)=(ij)k=:ijk$，由舒尔引理可得

$$\Omega_{ij,k}\Omega_{i,j}=F(i,j,k)\Omega_{i,jk}\pi_i(\Omega_{j,k})$$

对某个 $F(i,j,k)\in U(1)$。这就是 F-符号，其定义见 [BKM23]。我们指出， F-符号的相干性条件成立；证明从略，相关证明见 [BKM23]。

引理 7.3.25 ([BKM23，命题 2。11])。 对于所有 $i,\ j,\ k,\ \ell\in\{0,1,\dots,n\}$,

$$F(i,j,k)F(i,jk,\ell)F(j,k,\ell)=F(ij,k,\ell)F(i,j,k\ell).$$

现在，我们计算与 γ_g 的张量结构同构相关的相干数据，这些数据来自我们当前所研究范畴的骨架化；这对应于 [BBCW19，公式 269]中定义的数据。令 i，$j \in I$ 和 $g \in G$。我们首先注意到，以下映射是一个酉交织算子：

$$V_g^{ij}\gamma_g(\Omega_{i,j})\colon \gamma_g(\pi_i \otimes \pi_j) \to \pi_{g(ij)}.$$

此外，由于 $\gamma_g(\pi_i \otimes \pi_j) = \gamma_g(\pi_i) \otimes \gamma_g(\pi_j)$，我们还可知，下述映射是一个酉交织算子：

$$\Omega_{g(i),g(j)}(V_g^i \otimes V_g^j) = \Omega_{g(i),g(j)}V_g^i\gamma_g(\pi_i)(V_g^j)\colon \gamma_g(\pi_i \otimes \pi_j) \to \pi_{g(i)g(j)}.$$

We t因此有 $g(ij) = g(i)g(j)$，根据舒尔引理，我们得到

$$V_g^{ij}\gamma_g(\Omega_{i,j}) = \mu_g(i,j)\Omega_{g(i),g(j)}V_g^i\gamma_g(\pi_i)(V_g^j)$$

对于某个 $\mu_g(i,\ j) \in U(1)$。下述引理可由直接计算得到 .

引理 7.3.26。 设 i、j、$k \in I$ 和 $g \in G$。我们有

$$F(i,j,k)\mu_g(i,jk)\mu_g(j,k) = \mu_g(ij,k)\mu_g(i,j)F(g(i),g(j),g(k)).$$

最后，我们按照 [BKM23 第 2.3.2] 节的方法，计算 R-符号。首先假设对于所有 $i \in I$，$\pi_i \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)$，其中 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 是满足 $\Lambda^{+r} \cap R = \emptyset$ 的固定锥。（这样做是因为第 7.3.2.2 节中定义的编织 $G\mathsf{Sec}(\Lambda)$ 是针对这样的 $\Lambda \in \mathcal{L}$定义的。）现在我们按照 [BKM23 第 2.3.2] 节的方法继续。令 $i,\ j \in I$。此外，由于 $\pi_i \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)$ 是不可约的，$\pi_i \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_g$ 对某个 $g \in G$ 成立。于是我们有 $c_{i,\ j}$：$\pi_i \otimes \pi_j \to \gamma_g(\pi_j) \otimes \pi_i$ 是一个酉交织算子，因此我们有

$$\Omega_{g(j),i}(V_g^j \otimes \mathrm{Id}_{\pi_i})c_{\pi_i,\pi_j} = \Omega_{g(j),i}V_g^j c_{\pi_i,\pi_j}\colon \pi_i \otimes \pi_j \to \pi_{g(j)i}.$$

另一方面，我们有 $\Omega_{i,\ j}$：$\pi_i \otimes \pi_j \to \pi_{ij}$ 也是一个酉交织算子。因此，$ij = g(j)i$，根据舒尔引理，

$$\Omega_{g(j),i}V_g^j c_{\pi_i,\pi_j} = R(i,j)\Omega_{i,j}$$

对于某个 $R(i,\ j) \in U(1)$。这定义了我们范畴的 R-符号。 R-符号满足若干相干关系。我们特别指出七边形方程 [BBCW19，公式 286 &287]。

引理 7.3.27。 设 $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$。假设 $\pi_i \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_g$ 和 $\pi_j \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_h$。那么我们有

$$\begin{aligned} R(i,k)F(g(j),i,k)^*R(i,j) &= F(g(j),g(k),i)^*\mu_g(j,k)^*R(i,jk)F(i,j,k)^*, \\ R(i,h(k))F(i,h(k),j)R(j,k) &= F(gh(k),i,j)\eta(g,h)_k R(ij,k)F(i,j,k). \end{aligned}$$

证明： 我们验证第二个方程，它对应于 [BBCW19，公式 287]。计算可按图 7.10 所示用图形表示。另一个方程也可用类似方法验证。我们考虑酉算子

$$\Omega_{gh(k)i,j}\Omega_{gh(k),i}V_g^{h(k)}c_{\pi_i,\pi_{h(k)}}\pi_i(V_h^k c_{\pi_j,\pi_k})\colon \pi_i \otimes \pi_j \otimes \pi_k \to \pi_{gh(k)ij}. \tag{7.1}$$

我们用两种不同的方法化简这个酉算子。为便于理解化简过程，我们将每一步中发生变化的项标为红色或蓝色。具体来说，蓝色项是在上一步中发生变化的项，红色项则是在下一步中将发生变化的项。如果某项标为紫色，则表示它涉及连续步骤中的变化。对于第一种化简，我们有

$$\begin{aligned}
\Omega_{gh(k)i,j}\Omega_{gh(k),i}V_g^{h(k)}c_{\pi_i,\pi_{h(k)}}\pi_i(V_h^k c_{\pi_j,\pi_k}) &= R(i,hk)\Omega_{gh(k)i,j}\Omega_{i,h(k)}\pi_i(V_h^k c_{\pi_j,\pi_k}) \\
&= R(i,hk)\Omega_{ih(k),j}\Omega_{i,h(k)}\pi_i(V_h^k c_{\pi_j,\pi_k}) \\
&= R(i,hk)F(i,h(k),j)\Omega_{i,h(k)j}\pi_i(\Omega_{h(k),j})\pi_i(V_h^k c_{\pi_j,\pi_k}) \\
&= R(i,hk)F(i,h(k),j)\Omega_{i,h(k)j}\pi_i(\Omega_{h(k),j}\pi_i(V_h^k c_{\pi_j,\pi_k})) \\
&= R(i,hk)F(i,h(k),j)R(j,k)\Omega_{i,h(k)j}\pi_i(\Omega_{j,k}) \\
&= R(i,hk)F(i,h(k),j)R(j,k)\Omega_{i,jk}\pi_i(\Omega_{j,k}).
\end{aligned}$$

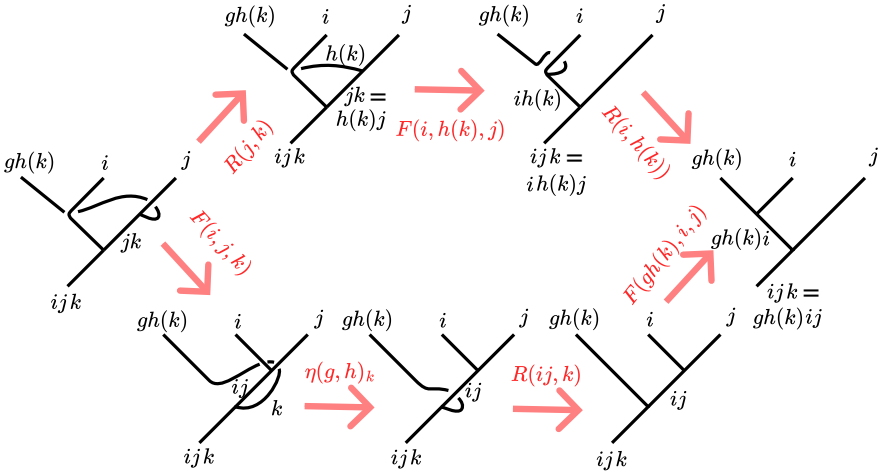


图 7.10：BBCW19 中第二个七边形方程的图形表示 [BBCW19，公式287]。我们注意到，我们对 R 的定义对应于 R^{-1} 他们文中的定义。为便于展示，部分直线向下延伸，但应将所有直线都理解为向上延伸（即我们没有使用任何求值映射/余求值映射）。

对于另一种化简，我们回顾编织的以下自然性方程和幺半性方程（已在命题 7.3.20中证明）。

事实 7.3.28。

- 若 $\pi \in G\text{Sec}(\Lambda)_g$，且 $T\colon \sigma_1 \to \sigma_2$ 是 $G\text{Sec}(\Lambda)$ 中的一个态射，则

$$\gamma_g(T)c_{\pi,\sigma_1} = c_{\pi,\sigma_2}\pi(T).$$

- 若 $\sigma \in G\text{Sec}(\Lambda)$ 且 $T\colon \pi_1 \to \pi_2$ 是 $G\text{Sec}(\Lambda)_g$ 中的态射，则

$$\gamma_g(\sigma)(T)c_{\pi_1,\sigma} = c_{\pi_2,\sigma}T.$$

- 若 $\pi \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_g$、 $\sigma \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)_h$ 且 $\tau \in G\mathsf{Sec}(\Lambda)$，则

$$c_{\pi\otimes\sigma,\tau} = c_{\pi,\gamma_h(\tau)}\pi(c_{\sigma,\tau}).$$

我们现在利用这些事实以及 $\pi_i\otimes\pi_j$这一事实，化简（7.1）中的酉算子， π_{ij} $\in G$第（Λ）^{gh}。特别地，我们有

$$\begin{aligned}
\Omega_{gh(k)i,j}\Omega_{gh(k),i}V_g^{h(k)}c_{\pi_i,\pi_{h(k)}}\pi_i(V_h^k c_{\pi_j,\pi_k}) &= \Omega_{gh(k)i,j}\Omega_{gh(k),i}V_g^{h(k)}c_{\pi_i,\pi_{h(k)}}\pi_i(V_h^k)\pi_i(c_{\pi_j,\pi_k})\\
&= \Omega_{gh(k)i,j}\Omega_{gh(k),i}V_g^{h(k)}\gamma_g(V_h^k)c_{\pi_i,\gamma_h(\pi_k)}\pi_i(c_{\pi_j,\pi_k})\\
&= \Omega_{gh(k)i,j}\Omega_{gh(k),i}V_g^{h(k)}\gamma_g(V_h^k)c_{\pi_i\otimes\pi_j,\pi_k}\\
&= F(gh(k),i,j)\Omega_{gh(k),ij}\pi_{gh(k)}(\Omega_{i,j})V_g^{h(k)}\gamma_g(V_h^k)c_{\pi_i\otimes\pi_j,\pi_k}\\
&= F(gh(k),i,j)\mu(g,h)_k\Omega_{gh(k),ij}\pi_{gh(k)}(\Omega_{i,j})V_{gh}^k c_{\pi_i\otimes\pi_j,\pi_k}\\
&= F(gh(k),i,j)\mu(g,h)_k\Omega_{gh(k),ij}V_{gh}^k\gamma_{gh}(\pi_k)(\Omega_{i,j})c_{\pi_i\otimes\pi_j,\pi_k}\\
&= F(gh(k),i,j)\mu(g,h)_k\Omega_{gh(k),ij}V_{gh}^k c_{\pi_{ij},\pi_k}\Omega(i,j)\\
&= F(gh(k),i,j)\mu(g,h)_k R(ij,k)\Omega(ij,k)\Omega(i,j)\\
&= F(gh(k),i,j)\mu(g,h)_k R(ij,k)F(i,j,k)\Omega_{i,jk}\pi_i(\Omega_{j,k}).
\end{aligned}$$

比较（7.1）的两种化简方式，我们得到

$$R(i,h(k))F(i,h(k),j)R(j,k) = F(gh(k),i,j)\eta(g,h)_k R(ij,k)F(i,j,k).$$

□

7.4 一般 SPT

在本节中，给定一个 SPT，我们将利用缺陷自同构得到承载缺陷的态。随后，我们将对该 SPT 的所有可能的 g-扇区进行分类。

设 $\mathcal{H}_v \simeq \mathbb{C}^{d_v}$ 满足 $d_v \geq 2$ 对每个 $v \in \Gamma$。为简单起见，我们取晶格为正则三角晶格。现在我们定义 $\mathcal{A}$上的对称作用。设 G 为对称群，对于每个 $g \in G$，令 $g \mapsto U_v^g$ 为其到顶点 v上的酉表示。我们假设该表示是忠实的（假设2）。对于每个 $A \in \mathcal{A}_V$满足 $V \in \Gamma_f$，令 β_g 为定义7.2.1中的映射。

回顾 G-SPT 的定义（定义7.2.12）。对于一个 G-SPT 态 $\tilde{\omega}$，存在一个有限深度量子电路（FDQC） α 使得 $\omega_0 \circ \alpha = \tilde{\omega}$，其中 ω_0 是某个乘积态。本节中，我们令 s 表示 α 的扩展范围。我们再施加一个假设，以便应用第7.2.3节讨论的缺陷自同构构造启发式方法。

假设。（假设 7）对于每个 $g \in G$， $\alpha \circ \beta_g = \beta_g \circ \alpha$。

注 7.4.1。我们注意到，假设7适用于非常广泛的一类模型，例如 [CGLW13、LSM+23、LG12], 中构造的模型，包括第 7.6 节讨论的 Levin-Gu SPT。

注 7.4.2。 在 G-SPT 的定义（定义 7.2.12）中，我们假设乘积态 ω_0 和态 $\tilde{\omega} = \omega_0 \circ \alpha$ 都在 β_g 下保持不变。然而，如果有限深度量子电路α 满足假设7，那么 ω_0 是 β_g-不变的，当且仅当 $\tilde{\omega}$ 是。事实上，假设 ω_0 是β_g-不变的。那么我们有：

$$\tilde{\omega} \circ \beta_g = \omega_0 \circ \alpha \circ \beta_g = \omega_0 \circ \beta_g \circ \alpha = \omega_0 \circ \alpha = \tilde{\omega}.$$

反方向可由相同的论证得出。

我们先回顾以下众所周知的引理。

引理 7.4.3。 *[AFH07，第 2.1 节。1]* 若 $\omega(A) = 1$ 对某个 $A \in \mathcal{A}$ 满足 $A \leq \mathbb{1}$，则对任意 $O \in \mathcal{A}$，

$$\omega(O) = \omega(AO) = \omega(OA) = \omega(AOA)$$

引理 7.4.4。 令 ω 为乘积态。那么，对所有 $v \in \Gamma$，存在唯一的秩一投影集合$\{P_v^\omega\}_{v\in\Gamma}$ $P_v^\omega \in \mathcal{A}_v$，使得 ω是满足 $\omega(P_v^\omega) = 1$的唯一态，对所有 $v \in \Gamma$均如此。此外，对于导子为 δ^ω 的 $V \in \Gamma_f$，由 $H_V^\omega := \sum_{v\in V} \mathbb{1} - P_v^\omega$给出的哈密顿量具有 ω 作为其唯一基态。

证明： 由于 ω 是乘积态， $\omega^v := \omega|_{\mathcal{A}_v}$ 是纯态。因此，它由向量$|\psi_v\rangle \in \mathcal{H}_v$表示。令 $P_v^\omega \in \mathcal{H}_v$ 为到 $|\psi_v\rangle$的秩一投影。那么，哈密顿量 $H_v^\omega := \mathbb{1} - P_v^\omega$具有 ω^v作为其唯一基态。注意， P_v^ω是具有此性质的唯一态，因为 ω^v 由向量 $|\psi_v\rangle$表示。

我们可以重复这一分析，得到正交秩一投影族 $\{P_v^\omega\}_{v\in\Gamma}$。那么，对于所有 $v \in \Gamma$， ω满足 $\omega(P_v^\omega) = 1$；因此，对于所有 $V \in \Gamma_f$， $\omega(H_V^\omega) = 0$。由于对于所有 $V \in \Gamma_f$， $\omega|_{\mathcal{A}_V} = \bigotimes_{v\in V} \omega^v$，与 H_V^ω 对应的导子 δ^ω 以 ω 为其唯一基态。

现在令 ω' 为另一个满足 $\omega'(P_v^\omega) = 1$ 对所有 $v \in \Gamma$都成立的态。于是我们有$\omega'(H_V^\omega) = 0$ 对所有 $v \in V$。根据 [CNN18，引理 3.8]， ω' 是 δ^ω的无挫折基态。但 δ^ω 的基态是唯一的，因此 $\omega' = \omega$。 □

定义 7.4.5。 对于满足 ω_0 的乘积态 $\omega_0 \circ \alpha = \tilde{\omega}$，对于 G–SPT $\tilde{\omega}$，我们定义相应的唯一秩一投影 $P_v := P_v^{\omega_0}$、哈密顿量 $H_V^0 := H_V^{\omega_0}$以及相应的导子 $\delta_0 := \delta^{\omega_0}$，它们来自引理 7.4.4。

引理 7.4.6. 设 ω 是一个乘积态，且对所有 $g \in G$， $\omega \circ \beta_g = \omega$。那么$\beta_g(P_v^\omega) = P_v^\omega$对所有 $g \in G$ 和 $v \in \Gamma$，其中 P_v^ω是引理 7.4.4中定义的投影。特别地， $\beta_g(H_V^\omega) = H_V^\omega$对所有 $V \in \Gamma_f$ 和 $g \in G$。

证明： 由于 ω 在对称性作用下不变， $\omega(\beta_g(P_v^\omega)) = 1$ 对所有 $v \in \Gamma$都成立。由于 ω 是一个乘积态，应用引理 7.4.3，可得

$$1 = \omega(P_v^\omega) = \omega(\beta_g(P_v^\omega) P_v^\omega \beta_g(P_v^\omega)).$$

但是，条件 $\omega(\beta_g(P_v^\omega) P_v^\omega \beta_g(P_v^\omega)) = 1$仅在 $\beta_g(P_v^\omega) = P_v^\omega$时成立，因为 P_v^ω， $\beta_g(P_v^\omega) \in \mathcal{A}_v$都是秩一投影。□

7.4.1 有限深度量子电路哈密顿量

我们对所有 $V \in \Gamma_f$ 定义如下哈密顿量 H_V：

$$H_V := \sum_{v \in V} \mathbb{1} - Q_v \qquad\qquad Q_v := \alpha^{-1}(P_v)$$

并将 δ 定义为相应的导子。

引理 7.4.7。 态 $\tilde{\omega}$ 是导子 δ的唯一基态。此外，$\tilde{\omega}$ 是满足 $\tilde{\omega}(Q_v) = 1$的唯一态。特别地，$\tilde{\omega}$ 是纯的。

证明：根据 $\tilde{\omega}$ 的定义以及引理 7.4.4，对于所有 $v \in \Gamma$,

$$\tilde{\omega}(Q_v) = \omega_0 \circ \alpha(\alpha^{-1}(P_v)) = \omega_0(P_v) = 1.$$

因此，对于所有 $\tilde{\omega}(H_V) = 0$，$V \in \Gamma_f$。于是，根据 [CNN18，引理 3。8]，$\tilde{\omega}$ 是 δ的无挫折基态。

现在证明 $\tilde{\omega}$的唯一性。首先，假设 ω' 是 δ的另一个基态。根据引理 7.A.3，$\omega' \circ \alpha^{-1}$ 是 δ_0的一个基态。根据引理 7.4.4，$\omega' \circ \alpha^{-1} = \omega_0$。因此$\omega' = \omega_0 \circ \alpha = \tilde{\omega}$。

现在，假设 ω' 是另一个满足 $\omega'(Q_v) = 1$ 的态，对所有 $v \in \Gamma$均成立。那么我们有$\omega'(H_V) = 0$ 对所有 $V \in \Gamma_f$均成立，因此 ω' 是一个无挫折基态（[CNN18，引理 3。8]）。但根据上述论证，δ有唯一基态。因此 $\omega' = \tilde{\omega}$ 即可得到所需结果。□

注意，集合 $\{Q_v\}_{v \in \Gamma}$ 是一个对易投影集合，因为它们是投影 P_v 在 α^{-1}下的像。因此，对于所有$V \in \Gamma_f$，H_V 都是一个对易投影哈密顿量。

引理 7.4.8。 对于所有 $g \in G$ 和 $v \in \Gamma$，我们有 $\beta_g(Q_v) = Q_v$。特别地，这意味着对于所有 $V \in \Gamma_f$，$\beta_g(H_V) = H_V$。

证明：应用引理 7.4.6 于 ω_0，可得 $\beta_g(P_v) = P_v$ 对所有 $v \in \Gamma$ 和 $g \in G$均成立。由假设 7，我们有 $\alpha^{-1} \circ \beta_g = \beta_g \circ \alpha^{-1}$，因此对于 $v \in \Gamma$,

$$\beta_g(Q_v) = \beta_g(\alpha^{-1}(P_v)) = \alpha^{-1}(\beta_g(P_v)) = \alpha^{-1}(P_v) = Q_v.$$

□

7.4.2 利用自同构构造缺陷

7.4.2.1 路径和对偶路径

我们回顾并进一步阐述路径的定义。回顾一下，（自避）有限路径$\gamma \subset \Gamma$定义为由互不相同的边组成的集合 $\{e_i \in \Gamma\}_{i=1}^N$，使得对于所有 $i > 1$，$e_i \cap e_{i-1}$都包含一个顶点。我们称 $\partial_0\gamma := \partial_0 e_1$ 为 γ 的起点，称 $\partial_N\gamma := \partial_1 e_N$ 为 γ的终点。当$\partial_0\gamma \neq \partial_1\gamma$ 时，我们称其为开路径。

如果两条路径 γ_1，γ_2 中，γ_1 的起点是γ_2 的终点，或反之，则可以将它们相加，记作 $\gamma_1+\gamma_2$：$=\gamma_1\cup\gamma_2$。如果存在一条路径 γ' 使得 $\gamma_1=\gamma'+\gamma_2$，我们可以从 γ_1 中移除 γ_2；在这种情形下，我们记作 $\gamma'=\gamma_1-\gamma_2$。当然，我们可以随意添加或移除空路径。

一条正半无限路径定义为一个有序集合 γ，使得每个有限区间$\gamma'\subset\gamma$ 都是一条有限路径，并且对每条路径 $\gamma'\subset\gamma$，都存在另一条路径 $\gamma''\subset\gamma$，使得 $\gamma''+\gamma'\subset\gamma$ 是一条路径。对于一条正半无限路径 γ，我们设 $\partial_0\gamma=\gamma_{\emptyset}$。类似地，当 $\gamma'+\gamma''\subset\gamma$ 是一条路径时，称其为负半无限路径。对于一条负半无限路径γ，我们设 $\partial_1\gamma=\gamma_{\emptyset}$。

一条无限路径 $\gamma\subset\Gamma$ 定义为一个子集 γ，它既是一条正半无限路径，也是一条负半无限路径。对于一条无限路径 γ，我们设 $\partial_0\gamma=\partial_1\gamma=\gamma_{\emptyset}$。

当无需区分时，我们用路径来指代上述任意一种路径。若一条路径在无穷远边界圆上有定义良好的点（参见第7.A.1节的讨论），则称该路径足够良好。在 Γ 上的足够良好的路径集合记为 $P(\Gamma$。对于每条足够良好的正半无限或负半无限路径 γ，都存在一条无限路径，记作 L_γ，使得 $\gamma\subset L_\gamma$。我们称其为对的 γ补全。

回忆的下条路径是其中该晶格是 Γ 的对偶格（参见第 7.A.1 节）。我们记 $e\in\bar{\gamma}$，其中边 $e\in\Gamma$ 满足 $\bar{e}\in\bar{\gamma}$，其中 $\bar{e}$ 是边 e 的对偶边。我们称$\partial_i\bar{\gamma}=\triangle_{\partial_i\bar{\gamma}}$，其中 $\triangle_{\partial_i\bar{\gamma}}$ 是与对偶顶点 $\partial_i\bar{\gamma}$ 对应的面。以上所有概念都可以引入，用于定义对偶路径。

7.4.2.2 缺陷自同构的构造

由于在本分析中我们只考虑对偶路径，因此省略 $(\bar{\cdot})$。如果区域 $\Sigma\subset\Gamma$ 是 Γ的单连通子复形，则称其为单连通区域。注意，根据定义，对于所有 $r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$（除非 Σ^{+r} 是空集），Σ^{+r} 此时都是单连通的。

我们定义纠缠对称性 $\tilde{\beta}_g^{\Sigma}$对于单连通区域 $\Sigma\in\Gamma$，定义为

$$\tilde{\beta}_g^{\Sigma}:=\alpha^{-1}\circ\beta_g^{\Sigma}\circ\alpha$$

引理 7.4.9。设 $\Sigma\subset\Gamma$ 为单连通区域，并令 s 表示如前所述的 α 的扩展范围。则对于所有 $A\in\mathcal{A}_{\Sigma}$ 和 $A\in\mathcal{A}_{(\Sigma^{+2s})^c}$，

$$\tilde{\beta}_g^{\Sigma^{+s}}(A)=\beta_g^{\Sigma}(A)=\beta_g^{\Sigma^{+s}}(A).$$

证明：首先假设 $A\in\mathcal{A}_{\Sigma}$。则 $\alpha(A)\in\mathcal{A}_{\Sigma^{+s}}$，因此根据假设 7，我们有

$$\tilde{\beta}_g^{\Sigma^{+s}}(A)=\alpha^{-1}\circ\beta_g^{\Sigma^{+s}}\circ\alpha(A)=\alpha^{-1}\circ\beta_g\circ\alpha(A)=\alpha^{-1}\circ\alpha\circ\beta_g(A)=\beta_g^{\Sigma}(A).$$

现在假设 $A\in\mathcal{A}_{(\Sigma^{+2s})^c}$。则 $\alpha(A)\in\mathcal{A}_{(\Sigma^{+s})^c}$，所以 $\beta_g^{\Sigma^{+s}}(\alpha(A))=\alpha(A)$。因此，我们有

$$\tilde{\beta}_g^{\Sigma^{+s}}(A)=\alpha^{-1}\circ\beta_g^{\Sigma^{+s}}\circ\alpha(A)=\alpha^{-1}\circ\alpha(A)=A=\beta_g^{\Sigma}(A).$$

结合这两个结果，我们得到了完整的结论。□

注 7.4.10。请注意，引理 7.4.9 在物理上意味着，对于 Σ^{+s} 或 $(\Sigma^{+s})^c$体区中的所有可观测量，有限深度量子电路都与对称性对易。

为便于记法，我们定义 $\epsilon_g^S := \tilde{\beta}_g^{\Sigma^{+s}} \circ (\beta_g^{\Sigma^{+s}})^{-1}$。这里，$S := \Sigma^{+2s} \setminus \Sigma$ 是位于 Σ^{+s} 边界上的宽度为 $2s$ 的条带。为了说明使用 S 的动机，我们给出以下引理。

引理 7.4.11。对于任意单连通区域 $\Sigma \subset \Gamma$，都有 ϵ_g^S 是局域化在 S 中的有限深度量子电路。

证明：注意到 ϵ_g^S 根据构造是有限深度量子电路。现在，考虑 $A \in \mathcal{A}_{S^c}$。由于 β_g 是格点对称性，我们仍有 $\beta_g^{\Sigma^{+s}}(A) \in \mathcal{A}_{S^c}$。根据引理 7.4.9，可得：

$$\epsilon_g^{\Sigma}(A) = \tilde{\beta}_g^{\Sigma^{+s}} \circ (\beta_g^{\Sigma^{+s}})^{-1}(A) = \beta_g^{\Sigma^{+s}} \circ (\beta_g^{\Sigma^{+s}})^{-1}(A) = A.$$

现在我们证明 $\epsilon_g^S(\mathcal{A}_S) \subseteq \mathcal{A}_S$。令 $A \in \mathcal{A}_S$。那么对于所有 $B \in \mathcal{A}_{S^c}$，都有

$$[\epsilon_g^S(A), B] = [\epsilon_g^S(A), \epsilon_g^S(B)] = \epsilon_g^S([A, B]) = 0.$$

因此 $\epsilon_g^S(A) \in \mathcal{A}'_{S^c} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}_S$。故 ϵ_g^S 局域化在 S 中。 □

现在我们假设一个技术条件，以帮助证明这些自同构可以被截断。

假设。（假设 8）我们假设，对于任意无限对偶路径 $L \in P(\Gamma)$，自同构 $\tilde{\beta}_g^{r(L)} \circ (\beta_g^{r(L)})^{-1}$ 都是由有限支撑酉算符构成、且局域化于 L^{+s} 中的有限深度量子电路。

注释 7.4.12。这一假设主要用于确保自同构 $\tilde{\beta}_g^{r(L)} \circ (\beta_g^{r(L)})^{-1}$ 可以拆分为自同构 α_γ、α_η，分别局域化于 γ^{+s} 和 η^{+s}，其中 $L = \gamma \cup \eta \in P(\Gamma)$ 是一条对偶路径。

对于有限深度量子电路，作出这一假设是合理的，因为对于文献中所有已知的、具有格点对称性的 SPT 构造，这一性质似乎都成立（例如 [LSM+23]）。这一假设还确保了 GNVW 所定义的量子元胞自动机指标是平凡的，因为不存在沿切口的传输。[GNVW12]

引理 7.4.13. 设 $\gamma \in P(\Gamma)$ 为一条半无限对偶路径，且设 $L_\gamma \in P(\Gamma)$ 为 γ 的一个补全。令 $\xi := L_\gamma - \gamma$。沿着 γ, ξ 将 L_γ^{+s} 分为不相交的两半 S^γ, S^ξ，使得 $S^\gamma \cup S^\xi = L_\gamma^{+s}$。我们有

$$\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)} \circ (\beta_g^{r(L_\gamma)})^{-1} = \Xi \circ (\alpha_\gamma \otimes \alpha_\xi),$$

其中，$\alpha_\gamma, \alpha_\xi$ 分别是局域化于 S^γ 和 S^ξ 的有限深度量子电路，Ξ 是由一个局域酉算符实现的内自同构。

证明：根据引理7.4。11 $\tilde{\beta}^{r(L_\gamma)_g} \circ (\beta_g^{r(L_\gamma)})^{-1}$ 是一个局域化在L_γ^{+s}的有限深度量子电路。设该电路的酉算子为 $\{\mathcal{B}^d\}_{d=1}^D$。根据假设8，我们可以假设每个 $U \in \bigcup_{d=1}^D \mathcal{B}^d$ 都局域化在L_γ^{+s}。我们可以利用这一结构，定义另一个实现局域化在 γ附近的有限深度量子电路的自同构，如下所示。对于 $d = 1, \ldots, D$，我们定义

$$\alpha_d^\gamma(A) := \left(\prod_{U \in \mathcal{B}^d, \mathrm{supp}(U) \subset S^\gamma} U \right) A \left(\prod_{U \in \mathcal{B}^d, \mathrm{supp}(U) \subset S^\gamma} U \right)^*.$$

类似地，我们定义

$$\alpha_d^{\xi}(A) \coloneqq \left(\prod_{U\in\mathcal{B}^d,\mathrm{supp}(U)\subset S^{\xi}} U\right) A \left(\prod_{U\in\mathcal{B}^d,\mathrm{supp}(U)\subset S^{\xi}} U\right)^{*}.$$

现在我们定义

$$\Xi_d(A) \coloneqq \left(\prod_{U\in\mathcal{B}^d,\mathrm{supp}(U)\cap S^{\gamma},S^{\xi}\neq\emptyset} U\right) A \left(\prod_{U\in\mathcal{B}^d,\mathrm{supp}(U)\cap S^{\gamma},S^{\xi}\neq\emptyset} U\right)^{*}.$$

由于每个深度上的酉算子支撑互不相交，因此我们有

$$\Xi_d \circ (\alpha_d^{\gamma}\otimes\alpha_d^{\xi})(A) = \left(\prod_{U\in\mathcal{B}^d} U\right) A \left(\prod_{U\in\mathcal{B}^d} U\right)^{*}.$$

此外， Ξ_d 是由局域酉算符实现的内自同构。

现在我们定义 $\alpha^{\gamma}\coloneqq\alpha_1^{\gamma}\circ\cdots\circ\alpha_D^{\gamma}$和 $\alpha^{\xi}\coloneqq\alpha_1^{\xi}\circ\cdots\circ\alpha_D^{\xi}$。于是得到

$$\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}\circ(\beta_g^{r(L_\gamma)})^{-1} = \Xi_1\circ(\alpha_1^{\gamma}\otimes\alpha_1^{\xi})\circ\cdots\circ\Xi_D\circ(\alpha_D^{\gamma}\otimes\alpha_D^{\xi}) = \Xi\circ(\alpha^{\gamma}\otimes\alpha^{\xi}).$$

这里我们用到了这样一个事实：对于由局域酉算符实现的任意内自同构 Ξ 和有限深度量子电路 η，存在另一个同样由局域酉算符实现的内自同构 Ξ'，使得 $\Xi'\circ\eta=\eta\circ\Xi$。显然， α^{γ}， α^{ξ} 是有限深度量子电路，且分别局域化于 S^{γ} 和 S^{ξ}。结论得证。□

定义 7.4.14. 设 $\gamma\in P(\Gamma)$ 为一条半无限对偶路径。设 $L_\gamma\in P(\Gamma)$ 为 γ 的一个补全，并设 $\xi\coloneqq L_\gamma-\gamma$。那么由引理 7.4.13，我们有 $\tilde{\beta}^{r(L_\gamma)}_g\circ(\beta^{r(L_\gamma)}_g)^{+s})^{-1}=\Xi\circ(\eta_g^{\gamma}\otimes\eta_g^{\xi})$，其中 S^{γ},S^{ξ}分别是沿 γ,ξ的条带 L_γ^{+s}的两半， Ξ是由局域酉算符实现的内自同构，且 $\eta_g^{\gamma}\in\mathrm{Aut}[\mathcal{A}_{S^{\gamma}}],\eta_g^{\xi}\in\mathrm{Aut}[\mathcal{A}_{S^{\xi}}]$。我们将 g-缺陷自同构定义为

$$\alpha_\gamma^g(A)\coloneqq\eta_g^{\xi}\circ\beta_g^{r(L_\gamma)}.$$

请注意，α_γ^g 取决于 γ的补全 L_γ，但为便于记号，我们省略了这种依赖关系。

在7.4.4 节中，我们将证明这些缺陷自同构可用于根据定义7.2.9定义缺陷扇区。

引理 7.4.15。 设 $\gamma\in P(\Gamma)$ 是一条半无限对偶路径，且 $L_\gamma\in P(\Gamma)$ 是 γ 的一个补全。那么存在一个球 V，包含 $\partial\gamma$，使得 α_γ^g 满足以下关系：

$$\alpha_\gamma^g(Q_v)=\begin{cases}Q_v & v\in\Gamma\setminus(\gamma^{+2s}\cup V)\\ \beta_g^{r(L_\gamma)}(Q_v) & v\in\gamma^{+2s}\setminus V.\end{cases}$$

证明： 我们选择 $V \subset \Gamma$，使得实现自同构 Ξ的局域酉算符（见引理 7.4.13）支撑于 V。和之前一样，我们令 $\xi := L_\gamma - \gamma$。

首先令 $v \in (L_\gamma^{+2s})^c \setminus V$。我们使用引理 7.4.8 得到 $\beta_g(Q_v) = Q_{v}$。现在，

$$\alpha_\gamma^g(Q_v) = \eta_g^\xi \circ \beta_g^{r(L_\gamma)}(Q_v) = \beta_g^{r(L_\gamma)}(Q_v) = Q_v,$$

这里我们用到了 η_g^ξ局域化在 γ^{+2s}附近。现在令 $v \in \xi^{+2s} \setminus V$。于是我们有

$$\begin{aligned}\alpha_\gamma^g(Q_v) &= \eta_g^\xi \circ \beta_g^{r(L_\gamma)}(Q_v) = \tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)} \circ (\beta_g^{r(L_\gamma)})^{-1} \circ \beta_g^{r(L_\gamma)}(Q_v) \\ &= \alpha^{-1} \circ \beta_g^{r(L_\gamma)} \circ \alpha(Q_v) = \alpha^{-1} \circ \beta_g^{r(L_\gamma)}(P_v) = \alpha^{-1}(P_v) = Q_v.\end{aligned}$$

最后，令 $v \in \gamma^{+2s} \setminus V$。那么由于 $Q_v \in \mathcal{A}_{(\xi^{+2s})^c}$，我们有

$$\alpha_\gamma^g(Q_v) = \eta_g^\xi \circ \beta_g^{r(L_\gamma)}(Q_v) = \beta_g^{r(L_\gamma)}(Q_v).$$

这就涵盖了所有情形，并完成了证明。 □

7.4.3 缺陷哈密顿量

拓扑序中的对称性缺陷已在文献中得到广泛研究（例如参见 [Bom10], [BBCW19]）。这里我们进一步发展 [BBCW19 第 5]节中的方法，以显式构造一个缺陷哈密顿量，其基态含有一个对称性缺陷。具体而言，我们给出从 H_V 构造对易投影哈密顿量的一般步骤，使其在 γ的端点处含有对称性缺陷，并沿着 $\bar{}$设置畴 γ壁。选取一条对偶路径 $\gamma \in P(\Gamma)$。在以下定义中，我们将使用引理 7.4.15 的结果。

定义 7.4.16。我们定义缺陷哈密顿量为

$$H_V^{(g,\gamma)} := \sum_{v \in V} \mathbb{1} - \widehat{Q}_v^g \qquad\qquad \widehat{Q}_v^g := (\alpha_\gamma^g)^{-1}(Q_v)$$

并令 $\delta^{(g,\gamma)}$ 为其对应的导子。

$\bar{}$对于任意选定的 $g \in G$ 和 $\gamma \in P(\Gamma)$，总存在一个对易投影哈密顿量 $H_V^{(g,\gamma)}$，适用于所有 $V \in \Gamma_f$，其对应的导子为 $\delta^{(g,\gamma)}$，且其唯一基态在 γ 的端点处具有一个 g-缺陷，并由 $\tilde{\omega}_\gamma^g := \tilde{\omega} \circ \alpha_\gamma^g$ 给出。事实上，$H_V^{(g,\gamma)}$ 是一个对易投影哈密顿量，因为它是对易投影哈密顿量 H_V 在自同构 $(\alpha_\gamma^g)^{-1}$ 作用下的像。此外，对于所有 $v \in \Gamma$，

$$\tilde{\omega}_\gamma^g(\widehat{Q}_v) = \tilde{\omega} \circ \alpha_\gamma^g(\widehat{Q}_v) = \tilde{\omega}(Q_v) = 1,$$

因此，$\tilde{\omega}_\gamma^g$ 是 $\delta^{(g,\gamma)}$ 的无挫折基态，这是由 [CNN18，引理 3。8]。由引理 7.A.3，7.4.7 可知 $\tilde{\omega}_\gamma^g$ 是 $\delta^{(g,\gamma)}$的唯一基态。

注记 7.4.17。 我们指出，构造缺陷哈密顿量的一般思路 $H_V^{(g,\gamma)}$ 是对原哈密顿量的投影进行“对称性扭曲” H_V，这已在 [BBCW19] 中讨论过，也是这一构造的灵感来源。原始构造没有说明当缺陷位于投影的支撑中时该如何处理。在这里，我们能够设计出一种对易投影哈密顿量，同时避开这一问题。

7.4.4 缺陷扇区表示

回顾 g-缺陷扇区的定义（定义7.2.9）。除非另有说明，我们现在将 $\tilde{\pi}$（即 $\tilde{\omega}$ 的 GNS 表示）作为参考表示。根据引理7.4.7，我们有 $\tilde{\pi}$ 是不可约的。另需注意，根据 GNS 表示的唯一性， $\pi_0 \circ \alpha \simeq \tilde{\pi}$。

引理 7.4.18。 设 ω 为一个乘积态， π 为其 *GNS* 表示。表示π 满足严格 *Haag* 对偶性，即对于所有锥 Λ ， 我们有

$$\pi(\mathcal{A}_{\Lambda^c})' = \pi(\mathcal{A}_\Lambda)''.$$

证明： 由于 ω 是一个乘积态，我们可以应用 [NO22，引理 43] ，得出对于任意锥 Λ, π 满足严格 Haag 对偶性。 □

现在我们证明第 7.2.1 节中的假设均成立。假设 2 和 3由假设成立。根据引理7.4.18 ，我们有 π_0 满足严格 Haag 对偶性。利用 $\tilde{\pi} = \pi_0 \circ \alpha$这一事实以及引理 7.A.7，我们得出 $\tilde{\pi}$满足有界扩展 Haag 对偶性（假设 4）。根据引理 7.4.7， $\tilde{\omega}$ 是纯态，因此假设5 成立。假设 6 由 [Oga22，引理 53] 满足， $\tilde{\omega}$ 因为它是一个有能隙基态，其哈密顿量具有一致有界的有限程相互作用。

下面的引理表明，由于 ω_0 是乘积态，因此 π_0 的超选择理论是平凡的。

引理 7.4.19。 设 ω 是乘积态。相应的 *GNS* 表示 π： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$具有平凡的超选择理论。

证明： 由于 ω 是乘积态，对于任意选定的锥 Λ ，我们有 $\omega = \omega^\Lambda \otimes \omega^{\Lambda^c}$。现在令 π^Λ 为 ω^Λ 的 GNS 表示，并令 π^{Λ^c} 为 ω^{Λ^c}的 GNS 表示。利用 GNS 表示的唯一性，我们得到 $\pi \simeq \pi^\Lambda \otimes \pi^{\Lambda^c}$。现在应用 [NO22，定理 4，5] 即可得到所需结果。 □

现在回顾自同构 β_g^S： $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ，其中 $g \in G$ 且 $S \subset \Gamma$ （定义 7.2.2）。

引理 7.4.20。 设 ω 是乘积态，满足 $\omega \circ \beta_g = \omega$ ，并令 π 为其 *GNS* 表示。对于所有 $V \subseteq \Gamma$ 和 $h \in G$， $\pi \circ \beta_h^V$ 是一个关于 π 的 g-可扇区化表示，对所有 $g \in G$均成立。

证明： 根据引理 7.4.6我们有 $\beta_g(P_v^\omega) = P_v^\omega$对所有 $v \in \Gamma$均成立。现在，给定 $V \in \Gamma_f$和 $v \in \Gamma$，我们有

$$\omega \circ \beta_h^V(P_v^\omega) = \omega(P_v^\omega) = 1.$$

根据引理 7.4.4 ，因此我们有 $\omega \circ \beta_h^V = \omega$ 对所有 h均成立。因此，由 GNS 表示的唯一性，我们得到 $\pi \simeq \pi \circ \beta_h^V$。所以，只需证明 π 对所有 $g \in G$是一个 g-可扇区化表示。为此，只需注意到对所有 $g \in G$，我们有 $\omega \circ \beta_g^{r(\Lambda)} = \omega$，这意味着 $\pi \simeq \pi \circ \beta_g^{r(\Lambda)}$。因此， π，从而 $\pi \circ \beta_h^V$相对于 π是 g- 可扇区化的。 □

前述引理特别蕴含，对于所有 $g \in G$， π_0 相对于 π_0 是一个 g 可扇区化表示。

命题 7.4.21。 设 ω 是一个满足 $\omega\circ\beta_g=\omega$ 的乘积态，且令 π 为其 *GNS* 表示。那么 π 具有平凡的缺陷理论。

证明：设 $\widehat{\pi}$ 是关于 π 的 g-可扇区化表示。根据引理 7.3.2， $\widehat{\pi}\simeq\pi'$ ，其中 π' 是一个 g-缺陷扇区。现在，根据引理 7.4.20， π 是一个 g-可扇区化表示，因此 $\pi\simeq\sigma$，其中 σ 是另一个 g-缺陷扇区。最后，根据引理 7.3.22， π' 是关于 σ 的任意子扇区。利用上述结果， $\widehat{\pi}\simeq\pi'$ 且 $\pi\simeq\sigma$，因此 $\widehat{\pi}$ 必须是关于 π 的任意子扇区。根据引理 7.4.19， π 具有平凡的超选择理论，因此 $\widehat{\pi}\simeq\pi$。□

下面的引理表明， $\tilde{\pi}$ 具有平凡的超选择理论。

引理 7.4.22。 设 π 是乘积态 ω 的 *GNS* 表示，且 α 是一个准可因子化自同构。那么表示 $\widehat{\pi}:=\pi\circ\alpha$ 具有平凡的超选择理论。

证明： 设 π' 是相对于 $\widehat{\pi}$的一个任意子扇区。我们应用 [NO22，定理 4。7] 得到 $\pi'\circ\alpha^{-1}$ 必须是相对于 $\widehat{\pi}\circ\alpha^{-1}=\pi$的一个任意子扇区。但根据引理7.4.19 ，我们知道 π 具有平凡的超选择理论，这意味着 $\pi'\circ\alpha^{-1}\simeq\pi$。因此我们有

$$\pi'\simeq\pi\circ\alpha\simeq\widehat{\pi},$$

从而得到所需结果。 □

现在我们证明，对称缺陷态 $\tilde{\omega}^g_\gamma$ 是有限可传输的。首先准备一个重要引理。

注 7.4.23。 如果 V是一个球或一个锥，且 $V\Subset_r V'$，那么 $V'^c\Subset_r V^c$。事实上，我们有 $((V^{+r})^c)^{+r}=V^c$，因此

$$(V'^c)^{+r}\subseteq((V^{+r})^c)^{+r}=V^c.$$

引理 7.4.24。 设 $\gamma\in\bar{P}(\Gamma)$ 是一条半无限对偶路径，使得 $\widehat{Q^g_v}=(\alpha^g_\gamma)^{-1}(Q_v)$。设 V,V' 是满足 $V\Subset_{s^\gamma}V'$的球，其中 s^γ 是$(\alpha^g_\gamma)^{-1}\circ\alpha^{-1}$的扩展范围。设 $\omega_1,\omega_2\in\mathcal{S}(\mathcal{A})\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$是两个态，使得对于所有 $v\in V^c$， $\omega_1(Q^g_v)=\omega_2(Q^g_v)=1$ 。那么我们有

$$\omega_1|_{\mathcal{A}_{V'^c}}=\omega_2|_{\mathcal{A}_{V'^c}}.$$

证明： 定义乘积态 $\omega_0^{V^c}:=\omega_0|_{\mathcal{A}_{V^c}}\in\mathcal{S}(\mathcal{A}_{V^c})$。设 $\omega\in\mathcal{S}(\mathcal{A})$ 满足：对于每个 $v\in V^c$， $\omega(P_v)=1$。我们断言 $\omega=\omega_0^{V^c}$。事实上，令 $A\in\mathcal{A}_{V^c;\text{局部}}$ 为一个简单张量。也就是说，对于某个 $W\in(V^c)_f$，有 $A=\bigotimes_{v\in W}A_v$，其中 $A_v\in\mathcal{A}_v$。于是我们有

$$\omega(A)=\omega\left(\bigotimes_{v\in V}A_v\right)=\omega\left(\bigotimes_{v\in V}P_vA_vP_v\right).$$

现在，对于所有 $P_vA_vP_v\in\mathbb{C}P_v$ $v\in V$，所以对于某个 $\bigotimes_{v\in V}P_vA_vP_v=\lambda\bigotimes_{v\in V}P_v$ $\lambda\in\mathbb{C}$。因此，我们有

$$\omega(A)=\omega\left(\bigotimes_{v\in V}P_vA_vP_v\right)=\lambda\omega\left(\bigotimes_{v\in V}P_v\right)=\lambda.$$

用同样的论证可得，$\omega_0^{V^c}(A) = \lambda$。由于简单张量张成了 $\mathcal{A}_{V^c}$ 的一个稠密子集，我们得到 $\omega = \widehat{\omega_0^{V^c}}$。

现在，假设 $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ 满足：对所有 $v \in V^c$，$\omega_1(Q_v^g) = \omega_2(Q_v^g) = 1$。在这种情形下，对于 $i = 1,2$，我们有：$\tilde{\omega}_i := \omega_i \circ (\alpha_\gamma^g)^{-1} \circ \alpha^{-1}$ 满足对所有 $v \in V^c$，

$$\tilde{\omega}_i(P_v) = \omega_i \circ (\alpha_\gamma^g)^{-1}(Q_v) = \omega_i(\widehat{Q}_v) = 1.$$

因此，根据上一段，对于每个 $A \in \mathcal{A}_{V^c}$, $\tilde{\omega}_1(A) = \tilde{\omega}_2(A)$。现在，由于 $V \Subset_{s^\gamma} V'$，我们有 $V'^c \Subset_{s^\gamma} V^c$ 根据注记 7.4.23。因此，若 $A \in \mathcal{A}_{V'^c}$，则有$\alpha \circ \alpha_\gamma^g(A) \in \mathcal{A}_{V^c}$，所以我们有

$$\omega_1(A) = \tilde{\omega}_1(\alpha(\alpha_\gamma^g(A))) = \tilde{\omega}_2(\alpha(\alpha_\gamma^g(A))) = \omega_2(A).$$

□

引理 7.4.25。 设 $\gamma_1, \gamma_2 \in P(\Gamma)$ 满足 $\gamma_1 \cap \gamma_2 \in P(\Gamma)$（见图 7.11）。则$\tilde{\omega}_{\gamma_1}^g \simeq \tilde{\omega}_{\gamma_2}^g$。

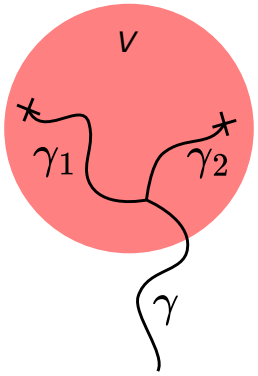


图 7.11：两条半无限对偶路径 γ_1，$\gamma_2 \in P(\Gamma)$ 的一个示例，其中 $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \gamma \in P(\Gamma)$ 是另一条半无限对偶路径；也就是说，γ_1，γ_2 它们仅在一个有限区域 V内不同。区域 V经过设计，使得 $V^c \cap \gamma_1 \subset \gamma$ 和 $V^c \cap \gamma_2 \subset \gamma$

证明：由于 $\tilde{\omega}_{\gamma_1}^g$ 和 $\tilde{\omega}_{\gamma_2}^g$ 是纯态，$\tilde{\omega}_{\gamma_1}^g$ 和 $\tilde{\omega}_{\gamma_2}^g$ 等价当且仅当它们拟等价 [KR97，命题 10.3.7]。因此，我们可以应用 [BR87，推论 2.6.11]。由于$\gamma_1 \cap \gamma_2 \in P(\Gamma)$，根据引理 7.4.15，存在一个球 $V \in \Gamma_f$，使得对每个 $v \in V^c$,$\alpha_{\gamma_1}^g(Q_v) = \alpha_{\gamma_2}^g(Q_v)$。因此，根据引理 7.4.24，$\tilde{\omega}_{\gamma_1}^g|_{\mathcal{A}_{(V+r)^c}} = \omega_{\gamma_2}^g|_{\mathcal{A}_{(V+r)^c}}$对某个 $r \geq 0$成立，故由 [BR87，推论 2.6.11]，$\tilde{\omega}_{\gamma_1}^g \simeq \tilde{\omega}_{\gamma_2}^g$。□

定义 7.4.26。 我们将固定对偶路径 $\bar{\gamma}_R$（图 7.1b）定义为集合 $P_R(\Gamma)$，具体如下。

$$\bar{P}_R(\Gamma) := \{\gamma \in \bar{P}(\Gamma) : \gamma \text{ differs from } \bar{\gamma}_R \text{ on finitely many sites}\}$$

现在我们将证明，对于 $\gamma \in P_R(\Gamma)$ 和 $g \in G$, $\tilde{\pi}_\gamma^g := \tilde{\pi} \circ \alpha_\gamma^g$ 是关于 $\tilde{\pi}$ 的一个 g-缺陷扇区。注意，$\tilde{\pi}_\gamma^g$ 是 $\tilde{\omega}_\gamma^g = \tilde{\omega} \circ \alpha_\gamma^g$ 的 GNS 表示。

Lemm **命题 7.4.27.** 对于所有 $\gamma \in P_R(\Gamma)$ 以及 $g \in G$，$\tilde{\pi}_\gamma^g$ 是一个不可约的 g-缺陷扇 r.

证明：和之前一样，我们定义 L_γ 为将 γ 补全为一条无限对偶路径，并令$\xi := L_\gamma - \gamma$。令 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 为一个满足 $\xi^{+2s} \subset \Lambda$ 的锥。我们证明 $\tilde{\pi}^g_\gamma$ 在Λ 中是 g-局域化的。回想一下 $\alpha^\gamma = \eta^\xi_g \circ \beta_g^{r(L_\gamma)}$，其中 η^ξ_g 仅在 η^{+2s} 上非平凡地作用。因此，我们有 $\eta^\xi_g|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \mathrm{Id}$，所以我们有

$$\tilde{\pi}^g_\gamma|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \tilde{\pi} \circ \alpha^g_\gamma|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \tilde{\pi} \circ \eta^\xi_g \circ \beta_g^{r(L_\gamma)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \tilde{\pi} \circ \beta_g^{r(L_\gamma)}|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}}.$$

由于 $\gamma \in P_R(\Gamma)$ 与 $r(L_\gamma) \cap \Lambda^c$ 仅相差有限个顶点。因此，$\tilde{\pi}^g_\gamma$ 在 Λ 中是g-局域化的。

还需要证明 $\tilde{\pi}_\gamma$ 是可传输的。令 $\Lambda' \in \mathcal{L}$ 为另一个锥。我们选择一条对偶路径 $\widehat{\gamma} \in \bar{P}_R(\Gamma)$ 以及 $L_{\widehat{\gamma}}$ 的一个延拓 $\widehat{\gamma}$，使得 $(L_{\widehat{\gamma}} - \widehat{\gamma})^{+2s} \subset \Lambda'$。由前面的论证，$\tilde{\pi}^g_{\widehat{\gamma}}$ 在 g 中是 Λ'- 局域化的。此外，由引理 7.4.25，$\tilde{\pi}^g_\gamma \simeq \tilde{\pi}^g_{\widehat{\gamma}}$。因此$\tilde{\pi}^g_\gamma$ 是可传输的，所以 $\tilde{\pi}_\gamma$ 是一个 g-缺陷扇区。□

引理 7.4.28。设 $g \in G$。每个 g-可扇区化表示都酉等价于某个 $\gamma \in P_R(\Gamma)$的表示 $\tilde{\pi}^g_\gamma$。

证明：设 π 是一个 g-可扇区化表示。由引理 7.3.2 可知，$\pi \simeq \sigma$其中 σ 是一个 g-缺陷扇区。由引理 7.4.27 可知，$\tilde{\pi}^g_\gamma$ 是一个 g-缺陷扇区。由引理 7.3.22 可知，σ 是相对于 $\tilde{\pi}^g_\gamma$ 的一个任意子扇区。现在，$\tilde{\pi}^g_\gamma = \tilde{\pi} \circ \alpha^g_\gamma$，且 α^g_γ 是一个有限深度量子电路，因此由引理 7.A.6可知它是准可因子化的。此外，由引理7.4.22可知，$\tilde{\pi}$ 的超选择理论是平凡的。因此，根据引理 $\tilde{\pi}^g_\gamma$ 7.4.22的证明，$\tilde{\pi}^g_\gamma$ 的超选择理论是平凡的。综合这些结果，可得

$$\tilde{\pi}^g_\gamma \simeq \sigma \simeq \pi,$$

从而得到所需结果。□

我们得到了如下分类结果：

命题 7.4.29。设 $\tilde{\omega}$ 是一个 *G-SPT*（定义 *7.2.12*），满足假设 *7*、*8*。设 $\tilde{\pi}$ 是 $\tilde{\omega}$ 的 *GNS* 表示，并定义 $\tilde{\pi}^g_{\tilde{\gamma}_R} := \tilde{\pi} \circ \alpha^g_{\tilde{\gamma}_R}$，其中 $\alpha^g_{\tilde{\gamma}_R}$ 是定义*7.4.14*中的缺陷自同构。

表示 $\{\tilde{\pi}^g_{\tilde{\gamma}_R}\}_{g\in G}$ 构成一族不相交且不可约的缺陷扇区，并且任意可缺陷扇区化表示 π 都与某个 $\pi^g_{\tilde{\gamma}_R}$酉等价。

推论 7.4.30。关于 $\tilde{\pi}$ 的 G-缺陷扇区范畴等价于 $\mathsf{Vec}(G, \nu)$，其中某个 *3*-余循环 ν：$G \times G \times G \to U(1)$。

证明：令 $G\mathsf{Sec}$ 表示关于 $\tilde{\pi}$ 的 G-缺陷扇区范畴。我们证明 $G\mathsf{Sec}$ 是一个融合范畴，且具有与 $\mathsf{Vec}(G)$ 相同的融合规则。结论由此得出。根据命题 7.4.29 以及第 7.3.1.2 节中的讨论，$G\mathsf{Sec}$ 是一个半单范畴，其简单对象由 $\{\tilde{\pi}^g_{\tilde{\gamma}_R}\}_{g\in G}$ 给出。对于 g，$h \in G$，$\tilde{\pi}^g_{\tilde{\gamma}_R} \otimes \tilde{\pi}^h_{\tilde{\gamma}_R}$ 根据引理 7.3.9 是一个 gh-缺陷扇区。根据引理 7.4.28，$\tilde{\pi}^g_{\tilde{\gamma}_R} \otimes \tilde{\pi}^h_{\tilde{\gamma}_R} \simeq \tilde{\pi}^{gh}_{\tilde{\gamma}_R}$。因此，$G\mathsf{Sec}$ 是一个融合范畴，且具有与 $\mathsf{Vec}(G)$ 相同的融合规则，正如所期望的那样。□

7.5 $\mathbb{Z}_2$ SPT：平凡 $\mathbb{Z}_2$ 顺磁体

为每个顶点 $v \in \Gamma$ 分配一个量子比特。为简单起见，我们令 Γ 为正则三角晶格。令 σ_v^x, σ_v^y, σ_v^z 表示 $\mathcal{A}_v$ 中的泡利矩阵。那么，对于每个 v， $\{\mathbb{1}, \sigma_v^x, \sigma_v^y, \sigma_v^z\}$ 是 $\mathcal{A}_v$ 的一组基。

现在，我们在 $\mathcal{A}$ 上定义一个对称作用。令 $G = \mathbb{Z}_2$，并令 $g \mapsto U_v^g$ 为作用于顶点 v 的酉表示，其中 $U_v^g = \sigma_v^x$ 对应非平凡群元素 $g \in \mathbb{Z}_2$，而$U_v^1 = \mathbb{1}$ 对应平凡群元素 $1 \in \mathbb{Z}_2$。然后，我们可以按照定义 7.2.1 来定义 β_g。

7.5.1 哈密顿量与基态

我们为任意 $V \in \Gamma_f$ 定义哈密顿量

$$H_V^0 := \sum_{v \in V} (\mathbb{1} - \sigma_v^x)/2.$$

容易验证， H_V^0 是一个对易投影哈密顿量，其中投影 $(\mathbb{1} - \sigma_v^x)/2$ 显然彼此对易，因为对于不同的 v， v'，它们的支撑不相交。令 δ_0 为动力学生成元。

我们先介绍一些记号，供接下来的几个子节使用。固定一个顶点v_0 作为原点。令 $\Gamma^n \subset \Gamma_f$ 为距 v_0 的图距离至多为 distance $n \in \mathbb{N}$ 的顶点集合。定义 $\mathcal{H}^n := \mathcal{H}_{\Gamma^n}$。

引理 7.5.1. 存在唯一的态 ω_0 满足： $\omega_0(\sigma_v^x) = 1$ 对所有 $v \in \Gamma$均成立。此外，ω_0 是纯乘积态。

证明：设 $|\Omega_0^v\rangle \in \mathcal{H}_v$ 是满足 $|\Omega_0^v\rangle = \sigma_v^x |\Omega_0^v\rangle$的单位向量。定义一个态 ω_0^v 于$\mathcal{A}_v$上，使得 $\omega_0^v(A) := \langle \Omega_0^v, A\Omega_0^v \rangle$ 对所有 $A \in \mathcal{A}_v$均成立。于是，我们可以定义一个乘积态 ω_0^V于$\mathcal{A}_V$ 上，对所有 $V \in \Gamma_f$ 均有 $\omega_0^V := \bigotimes_{v \in V} \omega_0^v$。由连续性，我们可以将 ω_0^V 延拓为 $\mathcal{A}$ 上的一个态ω_0，满足 $\omega_0(\sigma_v^x) = 1$ 对所有 $v \in \Gamma$均成立。这证明了 ω_0的存在性。注意， ω_0 根据构造是一个乘积态。

唯一性 ω_0 （因此也包括纯性，参见本节末尾的讨论 7.A.2.2）可通过算子轻松证明 $S_v := (\mathbb{1} + \sigma_v^x)/2$，引理 7.4.3 与 $A = S_v$， 以及标准的连续性论证。□

注意，哈密顿量H_V^0的相互作用是平移不变的。此外，注意到 $\omega_0(H_V^0) = 0$ 对所有 $V \in \Gamma_f$，而且 ω_0 是平移不变的，因为对于任意平移 τ， $\omega_0 \circ \tau(\sigma_v^x) = 1$对所有 $v \in \Gamma$。因此，根据 [BR97，定理 6.2。58]， ω_0是一个基态，因而也是无挫折基态。

引理 7.5.2。 态 ω_0 是 δ_0 的唯一基态。

证明：设 ω 是 δ_0的一个基态。那么我们有 $-i\omega(A^*\delta_0(A)) \geq 0$。将其限制到可观测量 $A \in \mathcal{A}_{v_0}$。于是 $\delta_0(A) \in \mathcal{A}_v$，因此 $A^*\delta_0(A) \in \mathcal{A}_{v_0}$。现在令 ω^v 为 ω 在 $\mathcal{A}_v$上的限制。在有限体积中，无限体积基态条件简化为有限体积基态条件 [Naa17，引理 3.4.2]。由于 H_v 是正的，单位向量 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_v$ 是基态向量当且仅当 $H_v|\psi\rangle = 0$。这唯一确定了

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$在 σ_v^z的本征基中（相差一个相位）。因此，对所有$A \in \mathcal{A}_v$， $\omega^v(A) = \langle\psi,\ A\psi\rangle$，从而 $\omega^v(\sigma_v^x) = 1$。

于是我们有 $\omega(\sigma_v^x) = \omega^v(\sigma_v^x) = 1$，这表明 $\omega(\sigma_v^x) = 1$对所有 $v \in \Gamma$ 均成立。根据引理7.5.1，ω_0 是满足 $\omega_0(\sigma_v^x) = 1$ 的唯一态，对所有 $v \in \Gamma$ 均成立。因此得证。 □

我们不必从 H_V^0出发并得到 ω_0 作为其唯一基态，也可以反过来先构造一个乘积态 ω_0，再求出一个以 ω_0为基态的对易投影哈密顿量。这样就能与第 7.4 节联系起来。

令 ω_0 为引理 7.5.1 中定义的乘积态。根据引理 7.4.4 ，存在唯一的投影 $P_v := P_v^{\omega_0}$、哈密顿量 $H_V^0 := H_V^{\omega_0}$以及相应的导子 $\delta_0 := \delta^{\omega_0}$。 P_v 的唯一性意味着 $P_v = S_v = (\mathbb{1} + \sigma_v^x)/2$。

对于 $g \in G$ 和 $V \subseteq \Gamma$，回顾对称自同构 β_g^V： $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 见定义7.2.2。我们注意到，对于每个 $\beta_g(\sigma_v^x)$， $= \sigma_v^x$，因此根据引理， $\omega_0 \circ \beta_g = \omega_0$ 见引理 7.5.1。由此，引理 7.4.6 的假设成立。

7.5.2 缺陷扇区范畴

定义 π_0 为基态 ω_0的 GNS 表示。注意，根据引理7.5.1 ，我们有 ω_0 是纯态。因此， π_0 是一个不可约表示。注意，在此设置中，第 7.2.1 节中的假设均得到满足，因为这是第 7.4 节讨论的一个特例。

由于 ω_0 是乘积态，根据命题7.4.21 可知，每个可缺陷扇区化表示都与 π_0酉等价。现在，我们相对于 π_0计算缺陷扇区。特别地，我们将证明，此类扇区的范畴 $G\mathsf{Sec}$ 等价于 $\mathsf{Vec}(\mathbb{Z}_2)$。

回顾一下， $\bar{\gamma}_R$ 是图7.1b所示的固定对偶路径。令 $L_{\bar{\gamma}_R}$ 是 $\bar{\gamma}_R$ 的适当延拓，以形成一条无限对偶路径，并令 $r(L_{\bar{\gamma}_R}) \subseteq \Gamma$ 为$L_{\bar{\gamma}_R}$右侧的区域。图 $L_{\bar{\gamma}_R}$ 中给出了7.12的一个示例。我们假设 $L_{\bar{\gamma}_R}$ 对 $\bar{\gamma}_R$ 的延拓具有良好的性质，即存在一个锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 使得 $L_{\bar{\gamma}_R} - \bar{\gamma}_R \subseteq \Lambda$。于是我们有

$$\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}\big|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}} = \pi_0 \circ \beta_g^{r(\Lambda)}\big|_{\mathcal{A}_{\Lambda^c}},$$

因此 $\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}$在 Λ 中是 g-局域化的。此外，根据引理7.4.20， $\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}$是 g-可扇区化的，因此根据引理 7.3.2 ， $\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}$ 与一个 g-缺陷扇区酉等价，因而是可传输的。由此可知， $\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}$ 实际上是一个 g-缺陷扇区。根据命题 7.4.21，π_0 是唯一的 1-缺陷扇区，而 $\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}$ 是唯一的 g-缺陷扇区（在酉等价意义下）。

我们现在计算这一 F范畴的符号，方法与第7.3.4.2节中相同。我们观察到

$$\pi_0 \otimes \left(\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}\right) = \left(\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}\right) \otimes \pi_0 = \pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}.$$

此外，如果 $g \neq 1$，那么

$$\left(\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}\right) \otimes \left(\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}\right) = \pi_0.$$

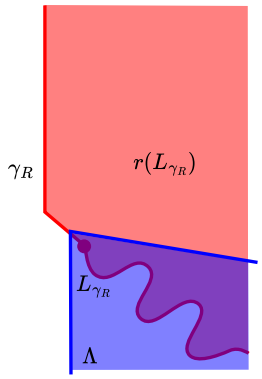


图 7.12： $L_{\bar{\gamma}_R}$的一个例子。我们要求无限对偶路径 $L_{\bar{\gamma}_R} \in P(\Gamma)$ 是 $\bar{\gamma}_R$的补全，使得对于所选的锥 Λ， $L_{\bar{\gamma}_R} - \bar{\gamma}_R \subset \Lambda$ 如蓝色所示。区域$r(L_{\bar{\gamma}_R})$ 以红色显示。

因此，$\Omega_{1,\,1} = \Omega_{g,\,1} = \Omega_{1,\,g} = \Omega_{g,\,g} = \mathbb{1}$。于是 π_0和 $\pi_0 \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}$ 在 GSec 中生成了一个具有平凡余循环的 Vec($\mathbb{Z}_2$) 的副本。由于对于每个 $g \in \mathbb{Z}_2$、 GSec $\simeq$Vec($\mathbb{Z}_2$)，至多存在一个在酉等价意义下的不可约 g-缺陷扇区。

7.6 $\mathbb{Z}_2$ 对称保护拓扑相：Levin-Gu SPT

为了定义非平凡的 $\mathbb{Z}_2$-顺磁体，我们遵循 [LG12]。我们沿用第7.5节中的设置。给定相邻顶点 v、 q、$q' \in \Gamma$，令 $< vqq' >$表示它们构成的（基本）面。令 $\triangle_v$ 表示顶点 v 所属的所有三角形的集合。

7.6.1 哈密顿量与基态

对于任意 $V \in \Gamma_f$，我们定义哈密顿量$H_V \in \mathcal{A}_{V^{+1}}$ 如下

$$H_V := \sum_{v \in V} (\mathbb{1} - B_v)/2 \qquad B_v := -\sigma_v^x \prod_{<vqq'> \in \triangle_v} i^{\frac{1-\sigma_q^z \sigma_{q'}^z}{2}}$$

注意， B_v， $B_{v'}$对所有 v， $v' \in \Gamma$均满足以下性质：

$$B_v^2 = 1, \qquad B_v^* = B_v, \qquad [B_v, B_{v'}] = 1.$$

根据上述性质，很容易验证 $(\mathbb{1} - B_v)/2$ 是一个投影算符，因此对于所有 $V \in \Gamma_f$，哈密顿量 H_V 都是一个对易投影哈密顿量。令 δ 为相应的动力学生成元。

我们回顾并严格定义一个实用的“纠缠”酉算子，该算子见 [LG12，附录 A]。对于 $\triangle \in \Gamma$ 中的每个面，我们定义一个酉算子 $U_\triangle \in \mathcal{A}_\triangle$ 如下：

$$U_\triangle := e^{i\frac{\pi}{24}\left(3\prod_{v \in \triangle} \sigma_v^z - \sum_{v \in \triangle} \sigma_v^z\right)}.$$

注意，对于所有面 $\triangle$， $\triangle' \in \Gamma$，我们都有 $[U_\triangle, U_{\triangle'}] = 0$。

定义 7.6.1。对于每个满足 $V' \in \Gamma_f$ 的 $A \in \mathcal{A}_{V'}$，令 $V \in \Gamma_f$ 为 V' 的一个足够大的超集，即，对于每个格点 $v' \in V'$，对于所有 $\triangle \in \triangle_{v'}$，都有 $\triangle \subseteq V$。我们定义映射 $\alpha\colon \mathcal{A}_{V'} \to \mathcal{A}_V$，其定义为

$$\alpha(A) \coloneqq \left(\prod_{\triangle \subseteq V} U_{\triangle}\right) A \left(\prod_{\triangle' \subseteq V} U_{\triangle'}\right)^*,$$

它可以以范数连续的方式唯一延拓为 α $\mathcal{A}$的自同构。

我们注记，α 是一个深度为 3、扩展范围为 $s = 1$的有限深度量子电路，详见引理7.B.1。特别地，α 是一个准可因子化量子元胞自动机。

令 ω_0 为引理7.5.1中定义的平凡 $\mathbb{Z}_2$ 顺磁体的唯一基态。我们定义 $\tilde{\omega} : = \omega_0 \circ \alpha^{-1}$.

引理 7.6.2。态 $\tilde{\omega}$ 是一个满足假设 $\mathbb{Z}_2$-*SPT*7的态。

证明：回忆一下，ω_0 是 β_g-不变的，并且由引理7.B.1可知，α 是一个有限深度量子电路。因此，根据注记7.4.2，$\tilde{\omega}$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$，前提是 α 满足假设7。现在我们证明假设7 成立。由引理 7.B.2，对于每个 $v \in \Gamma$，我们有：

$$\alpha^{-1}(\beta_g(\sigma_v^x)) = \alpha^{-1}(\sigma_v^x) = B_v = \beta_g(B_v) = \beta_g(\alpha^{-1}(\sigma_v^x)),$$
$$\alpha^{-1}(\beta_g(\sigma_v^z)) = \alpha^{-1}(-\sigma_v^z) = -\sigma_v^z = \beta_g(\sigma_v^z) = \beta_g(\alpha^{-1}(\sigma_v^z)).$$

由于 $\{\sigma_v^x, \sigma_v^z\colon\ v \in \Gamma\}$ 生成 $\mathcal{A}$，$\alpha^{-1} \circ \beta_g = \beta_g \circ \alpha^{-1}$，正如所需。 □

引理 7.6.3。关于 $\tilde{\omega}$，我们有以下事实：

1. $\tilde{\omega}$ 是满足条件 $\tilde{\omega}(B_v) = 1$ 的唯一态，对所有 $v \in \Gamma$ 均成立。2. $\tilde{\omega} \circ \beta_g = \tilde{\omega}$ 对所有 $g \in G$均成立

3. $\tilde{\omega}$ 是 δ的唯一（因此是纯）基态

4. $\tilde{\omega}$ 是平移不变的

证明：由于 ω_0 是一个乘积态，根据引理 7.4.4 我们有相应的投影$P_v : = P_v^{\omega_0}$以及哈密顿量 $H_V^0 : = H_V^{\omega_0}$。根据引理 7.4.4、7.5.1 我们得到 $P_v = (\mathbb{1} + \sigma_v^x)/2$ 对所有 $v \in \Gamma$均成立。

现在，根据引理 7.4.7 可知 $\tilde{\omega}$ 是由下式给出的哈密顿量的唯一基态

$$H_V' = \sum_{v \in V} \mathbb{1} - Q_v \qquad\qquad Q_v \coloneqq \alpha(P_v)$$

并且，$\tilde{\omega}$ 是满足以下条件的唯一态：对于所有 $v \in \Gamma$，$\tilde{\omega}(Q_v) = 1$。由引理7.B.2，$Q_v = \alpha(P_v) = (\mathbb{1} + B_v)/2$，因此 $H_V' = H_V$。所以，$\tilde{\omega}$ 是 δ 的唯一基态，也是满足以下条件的唯一态：对于所有 $v \in \Gamma$，$\tilde{\omega}(B_v) = 1$。这就证明了上文的 (1) 和 (3)。(2) 中的陈述是引理 7.6.2 的直接推论。最后，(4) 由 (1) 得出，因为对于任意平移 τ，对于任意 $v \in \Gamma$，$\omega_0 \circ \tau(B_v) = 1$。□

7.6.2 缺陷哈密顿量

我们首先构造一个缺陷自同构，由此得到一个缺陷扇区，进而构造缺陷哈密顿量。回顾第 7.4.2.1 节关于路径和对偶路径的讨论，特别是 $P(\Gamma)$ 的定义，以及对偶路径补全 L_γ 的定义_$\gamma \in P(\Gamma)$。

我们考虑缺陷自同构 α_γ^g，它来自定义7.4.14，其中 $g \in \mathbb{Z}_2$ 是非平凡元素。对于 Levin-Gu SPT，可以显式计算 α_γ^g。我们在附录7.D中进行这项计算。特别是，这项计算表明，Levin-Gu SPT 满足假设8。

定义 7.6.4. 设 $\gamma \in P(\Gamma)$ 是一条对偶路径。设 $\alpha^\gamma := \alpha_\gamma^g$ 是 Levin-Gu SPT 的缺陷自同构（定义7.4.14），其构造见附录7.D。我们将算子 B_v^γ 定义为

$$\widehat{B}_v^\gamma := (\alpha^\gamma)^{-1}(B_v).$$

在以下情形中，$\widehat{\ }$对偶路径 γ 的含义可由上下文清楚看出时，我们可以简单地用 B_v 代替 B_v^γ。

特化 ng 引理 7.4.15 对于 Levin-Gu SPT 情形，我们有以下

引理 7.6.5。设 $\gamma \in P(\Gamma)$。如果 $v \notin \gamma$，则 $B_v^\gamma = B_v$。如果 $v \in \gamma - \partial_0\gamma - \partial_1\gamma$，则 $\widehat{B}_v^\gamma = \beta_g^{r(L_\gamma)}(B_v)$，其中 $g \in \mathbb{Z}_2$ 是非单位元。

注 7.6.6。设 $\gamma \in \bar{P}(\Gamma)$。如果 $v \in \gamma - \partial_0\gamma - \partial_1\gamma$，则 $\widehat{B}_v^\gamma = \beta_g^{r(L_\gamma)}(B_v)$ 不依赖于 L_γ 的选择。事实上，如果 L'_γ 是 γ 的另一个可能的延拓，则 $\beta_g^{r(L_\gamma)}(B_v) = \beta_g^{r(L'_\gamma)}(B_v)$，因为 $r(L_\gamma)$ 和 $r(L'_\gamma)$ 仅在 B_v 的支撑之外有所不同。

定义 7.6。7. 对于 $\gamma \in P(\Gamma)$，我们将<style id='6'>缺陷哈密顿量 定义如下：对于 $V \in \Gamma_f$，

$$H_V^\gamma := \sum_{v \in V} (\mathbb{1} - \widehat{B}_v^\gamma)/2 \in \mathcal{A}_{V^{+1}}.$$

我们将相应的导子记为 δ^γ。

注意，对于所有 $\gamma \in P(\Gamma)$ 和 $V \in \Gamma_f$，H_V^γ 都是一个对易投影哈密顿量，因为它是对易投影哈密顿量 H_V 在 $(\alpha^\gamma)^{-1}$ 下的像。

下面的引理可由将第 7.4.3 节的讨论专门应用于 Levin- Gu 对称保护拓扑相而得。

引理 7.6.8。设 $\gamma \in P(\Gamma)$。态 $\tilde{\omega}^\gamma := \tilde{\omega} \circ \alpha^\gamma$ 是满足以下条件的唯一态

$\widehat{\ }$ $\tilde{\omega}^\gamma(B_v^\gamma) = 1$ 对所有 $v \in \Gamma$均成立。除此之外，$\tilde{\omega}^\gamma$ 还是定义 7.6.7 中缺陷哈密顿量对应导子 的唯一基态。

我们注意到，对于所有 $V \in \Gamma_f$，H_V^γ 在 β_g 的作用下并非不变。不过，我们观察到以下事实。设 Λ 为一个锥，使得 $\gamma \subset \Lambda$；由于 $\gamma \in \bar{P}(\Gamma)$，这总是能够保证。于是，对于所有满足 $V^{+1} \cap \Lambda = \emptyset$的 $V \in \Gamma_f$，有 $H_V^\gamma = H_V$和 ˜，因此 $\beta_g(H_V^\gamma) = H_V^\gamma$。所以，尽管 $\tilde{\omega}_\gamma$并非 δ的基态，$\tilde{\omega}_\gamma$仍对上述所有 V满足$\tilde{\omega}_\gamma(H_V) = \tilde{\omega}(H_V) = 0$。换言之，在 Λ之外，$\tilde{\omega}_\gamma$“看起来像” $\tilde{\omega}$。

7.6.3 缺陷扇区范畴

回顾 g-缺陷扇区（定义7.2.9）。现在我们将 $\tilde{\pi}$，即基态 $\tilde{\omega}$ 的 GNS 表示，设为 δ 的参考表示。注意，由于 $\tilde{\omega}$的唯一性， $\tilde{\pi}$ 是一个不可约表示。此外，Levin-Gu SPT 是满足假设 7、8的 SPT，因此满足第 7.2.1 节中的假设。

注意到 α^{-1} 是一个准可因子化自同构（引理7.A.6），应用引理7.4.22 可得 $\tilde{\pi}$ 具有平凡的超选择理论。根据定义， $\tilde{\pi}$ 是一个 1-缺陷扇区。将引理 7.4.27、7.4.28 专门应用于 Levin-Gu SPT 情形，可得以下命题。

命题 7.6.9。 表示 $\tilde{\pi}_\gamma := \pi_0 \circ \alpha^\gamma$ 对于所有 $\gamma \in P_R(\Gamma)$ 都是不可约的 g-缺陷扇区，并且对于 $g \in \mathbb{Z}_2$、 $g \neq 1$ 的每个 g-缺陷扇区都与 $\tilde{\pi}_\gamma$ 酉等价。

现在我们使用第7.3.4.2 节所介绍的理论来计算 3-余循环，并证明缺陷扇区范畴等价于 Vec（$\mathbb{Z}_2$， ν）。为此，我们选取代表性缺陷扇区 $\tilde{\pi}$ 和 $\tilde{\pi}_{\bar{\gamma}_R}$ （回顾一下， $\bar{\gamma}_R$ 是图7.1b中给出的固定对偶路径），并使用第 F节中的步骤计算 7.3.4.2-符号。由此计算可知，我们有一个从 Vec（$\mathbb{Z}_2$， ν）到缺陷扇区范畴的张量函子，并且该函子是张量等价。

注意， $\tilde{\pi}$是该范畴的严格张量单位，因此除 $F(g,g,g)$ 外，所有 F-符号都必定为 1。现在我们计算 $F(g,g,g)$。为此，我们必须计算 $\Omega_{g,g}$，而这可以通过计算 $\alpha^{\bar{\gamma}_R} \circ \alpha^{\bar{\gamma}_R}$来完成。我们定义 $\xi := L_{\bar{\gamma}_R} - \bar{\gamma}_R$ 以及 $\partial r(\xi) := r(L_{\bar{\gamma}_R}) \cap \xi$。此外，我们将 $N(\xi)$ 定义为 Γ 的子图，它由 ξ 中的所有顶点及它们之间的边组成（图 7.13）。我们在附录 7.D 中计算得出， $\alpha^{\bar{\gamma}_R}$ 具有如下形式

$$\alpha^{\bar{\gamma}_R}(A) = \mathrm{Ad}\left(\prod_{v \in \partial r(\xi)} \sigma_v^z \prod_{qq' \in N(\xi)} i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}} \sigma_q^z \sigma_{q'}^z}{2}} \right) \circ \beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}(A)$$

对于 $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$。这里 $\varepsilon_{qq'} \in \{0,1\}$ 对于每条边 qq'，也就是连接顶点 q 和q'的边。关于边 qq' 的 $\varepsilon_{qq'}$ 精确公式较为复杂，对我们的目的而言并非必需，但其已在附录 7.D中计算得出。

注意， $N(\xi)$中的顶点在晶格上形成两条半无限路径（不是对偶晶格！）。我们令 ξ_{in} 表示 $N(\xi)$中属于 $r(L_{\bar{\gamma}_R})$的顶点路径，并令 ξ_{out} 表示 $N(\xi)$中不属于 $r(L_{\bar{\gamma}_R})$的顶点路径。我们还令 $\partial\xi_{\mathrm{in}}$和 $\partial\xi_{\mathrm{out}}$ 分别表示ξ_{in} 和 ξ_{out} 的端点。

引理7.D.1 中证明了

$$\alpha^{\bar{\gamma}_R} \circ \alpha^{\bar{\gamma}_R} = \mathrm{Ad}(\sigma^z_{\partial\xi_{\mathrm{in}}} \sigma^z_{\partial\xi_{\mathrm{out}}}).$$

使用第7.3.4.2节的记号，我们有 $\Omega_{g,g} = \sigma^z_{\partial\xi_{\mathrm{in}}} \sigma^z_{\partial\xi_{\mathrm{out}}}$。现在我们必须求出$F(g,g,g)$，它由以下方程确定

$$\Omega_{1,g}\Omega_{g,g} = F(g,g,g)\Omega_{g,1}\alpha^{\bar{\gamma}_R}(\Omega_{g,g}).$$

由于 $\tilde{\pi}$ 是一个 严格张量单位元，$\Omega_{1,g} = \Omega_{g,1} = 1$。因此， $F(g,g,g)$ 由以下内容确定

$$\Omega_{g,g} = F(g,g,g)\alpha^{\bar{\gamma}_R}(\Omega_{g,g}).$$

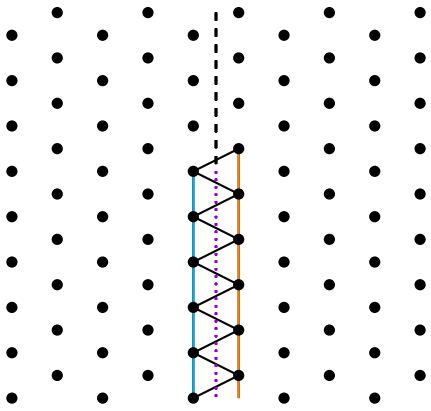


图 7.13：定义 $\alpha^{\bar{\gamma}_R}$ 时所用符号的示意图。黑色虚线对偶路径是 $\bar{\gamma}_R$，紫色点线对偶路径是 ξ。实线边属于 $N(\xi)$，橙色边上的顶点属于 $\partial r(\xi)$。橙色边是对偶路径 ξ_{in} 上的边，蓝色边是对偶路径 ξ_{out} 上的边。

因此，我们计算 $\alpha^{\bar{\gamma}_R}(\Omega_{g,\,g})$。关键观察是 $\partial\xi_{\text{in}} \in r(L_{\bar{\gamma}_R})$，但 $\partial\xi_{\text{out}} \notin r(L_{\bar{\gamma}_R})$，因此 $\beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}(\sigma^z_{\partial\xi_{\text{in}}}\sigma^z_{\partial\xi_{\text{out}}}) = -\sigma^z_{\partial\xi_{\text{in}}}\sigma^z_{\partial\xi_{\text{out}}}$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\alpha^{\bar{\gamma}_R}(\Omega_{g,g}) &= \mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial r(\xi)}\sigma_v^z \prod_{qq'\in N(\xi)} i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)\circ\beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}(\sigma^z_{\partial\xi_{\text{in}}}\sigma^z_{\partial\xi_{\text{out}}}) \\ &= \mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial r(\xi)}\sigma_v^z \prod_{qq'\in N(\xi)} i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)(-\sigma^z_{\partial\xi_{\text{in}}}\sigma^z_{\partial\xi_{\text{out}}}) = -\sigma^z_{\partial\xi_{\text{in}}}\sigma^z_{\partial\xi_{\text{out}}} = -\Omega_{g,g}\end{aligned}$$

因此 $F(g,\ g,\ g) = -1$。由此我们证明了 F 是 $\mathbb{Z}_2$ 上的非平凡余循环。下面的结果随之成立。

定理 7.6.10。若参考表示是 *Levin-Gu SPT* 基态的 *GNS* 表示，则 G第 $\simeq \mathsf{Vec}(\mathbb{Z}_2, \nu)$，其中 ν 是 $\mathbb{Z}_2$ 上的非平凡余循环。

证明：构造一个函子，将 $\mathbb{C}_g \in \mathsf{Vec}(\mathbb{Z}_2,\ \nu)$ 映至 $\tilde{\pi}\circ\alpha^{\bar{\gamma}_R}$。容易验证，该函子是一个 G-交叉幺半等价。□

命题 7.6 .11. *Levin-Gu* 模型的对称性分数化数据是平凡的 .

证明：注意到 $\beta_g\circ\alpha^{\gamma}\circ\beta_g^{-1} = \alpha^{\gamma}$。这意味着我们可以选择 $V_g^{\pi} = 1$，其中 π 是非平凡缺陷。我们也可以自由选择 $V_g^1 = V_1^1 = V_1^{\pi} = 1$。此外，$g(\pi) = \pi$。这立即意味着 η 和 μ 是平凡的。□

7.7 一个 $\mathbb{Z}_2$-对称性富集环面码

在本节中，我们将运用一般形式体系，对具有 $\mathbb{Z}_2$ 格点对称性且其底层拓扑序为环面码拓扑序的无限晶格模型进行完整分析。我们所研究的这一模型版本与 [LSM+23]的构造密切相关。

鉴于此类分析所需的细致程度，我们先简要概述以下子节。在子节7.7.1中，我们将快速回顾传统环面码模型。随后，子节7.7.2 将介绍 $\mathbb{Z}_2$ 对称环面码模型，并进行一般分析，证明其底层拓扑序与传统环面码相同。接着，我们将在第7.7.3 节定义该理论的缺陷，并证明它们满足我们的选择准则。之后，我们将在第 F符号、对称性分数化数据以及 G交叉编织的计算中，分别于第7.7.5、7.7.6和第7.7.7节展开讨论。

7.7.1 环面码回顾

7.7.1.1 环面码

我们首先回顾环面码模型的构造及其性质[Kit03] ，它是由幺正融合范畴 $\mathsf{Vec}(\mathbb{Z}_2)$ [LW05、Kon14、GHK+24] 生成的弦网。关于算子代数的全面论述可参见 [Naa11、Naa12、Naa13]。

设晶格为 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$，并在每条边上放置一个量子比特，即 $\mathcal{H}_e \simeq \mathbb{C}^2$。由此可定义准局域代数 $\mathcal{A}$。$\mathcal{A}_e$ 的一组基由泡利矩阵 $\{\mathbb{1}_v, \sigma_e^x, \sigma_e^z, \sigma_e^y\}$ 给出。

设 $v \in \Gamma$ 为一个顶点， $f \in \Gamma$ 为一个面。下文中，只要上下文明确，我们就假定 v 指顶点， f 指 Γ 中的面。我们可以如下定义 星形算子 A_v 和 晶格元算子 B_f：

$$A_v \coloneqq \prod_{e \ni v} \sigma_e^x \qquad\qquad B_f \coloneqq \prod_{e \in f} \sigma_e^z.$$

容易验证，对于所有 v， $f \in \Gamma$，都有 $[A_v, B_f] = 0$。

设 $S \in \Gamma_f$ 为一个单连通区域。我们的有限体积哈密顿量定义为

$$H_S \coloneqq \sum_{v \in S} (\mathbb{1} - A_v)/2 + \sum_{f \in S} (\mathbb{1} - B_f)/2.$$

这是一个对易投影哈密顿量，因此具有一个无挫折基态ω_0： $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$，对所有 v， $f \in \Gamma$均满足，

$$\omega_0(A_v) = \omega_0(B_f) = 1.$$

引理 7.7.1 ([AFH07])**.** 态 ω_0 是满足所有 v， $f \in$ 的唯一态 Γ

$$\omega_0(A_v) = \omega_0(B_f) = 1$$

我们将 π_0 定义为 ω_0 的 GNS 表示，并将 $\mathcal{H}_0$ 定义为 GNS 希尔伯特空间。注意， π_0 是不可约的，因为 ω_0 是纯的。

引理 7.7.2 ([Naa12])。 表示 π_0 满足严格 *Haag* 对偶性。

¯令 Γ 为与之对偶的胞腔复形 Γ。重要的是， Γ 中的顶点映射为面，$_\Gamma$ 反之亦然。边映射为对偶边。我们回顾第 7.6.2节中给出的路径和对偶路径的定义。为避免路径与对偶路径之间产生歧义，我们将用（·）表示对偶路径。

闭路径 $C \in \Gamma_f$ 是满足 $\partial_0 C = \partial_1 C$的路径。我们将其称为环路。类似地，¯我们将闭的对偶路径 $C \in \Gamma_f$定义为对偶环路。注意，每个非空环路/对偶环路都会将 Γ 分成两个单连通区域 Γ_1， $\Gamma_2 \subset \Gamma$，其中只有一个是有限的。我们分别将该区域称为环路/对偶环路的内部。

研究环面码时的一些重要对象是弦算符。弦算符有两种不同类型， F_γ， $F_{\bar{\gamma}}$。

定义 7.7.3. 设 γ 是一条有限路径， $\bar{\gamma}$ 是一条有限对偶路径。弦算符 定义为

$$F_\gamma \coloneqq \prod_{e\in\gamma} \sigma_e^z \qquad\qquad F_{\bar{\gamma}} \coloneqq \prod_{e\in\bar{\gamma}} \sigma_e^x.$$

我们有以下关系

$$F_\gamma F_{\bar{\gamma}} = (-1)^{c(\gamma,\bar{\gamma})} F_{\bar{\gamma}} F_\gamma$$

其中 $c(\gamma, \bar{\gamma})$表示 γ， $\bar{\gamma}$之间交叉点的数量。利用这些弦算符，我们定义了产生环面码超选择扇区的自同构。

定义 7.7.4。 令 γ 为一条半无限路径，并令 γ_i 对于 $i \in \mathbb{N}$ 表示由 γ 的前 i 条边组成的路径。类似地，定义相对于对偶路径 $\bar{\gamma}$ 的 $\bar{\gamma}_i$。于是，对于所有 $A \in \mathcal{A}$，我们可以定义自同构 α^ϵ_γ， $\alpha^m_{\bar{\gamma}}$，其形式为

$$\alpha^\epsilon_\gamma(A) \coloneqq \lim_{\gamma_i \uparrow \gamma} F_{\gamma_i} A F_{\gamma_i} \qquad\qquad \alpha^m_{\bar{\gamma}}(A) \coloneqq \lim_{\bar{\gamma}_i \uparrow \bar{\gamma}} F_{\bar{\gamma}_i} A F_{\bar{\gamma}_i}.$$

分别称为电荷/磁通自同构。另定义如下自同构

$$\alpha^\psi_{\gamma,\bar{\gamma}}(A) \coloneqq \alpha^\epsilon_\gamma \circ \alpha^m_{\bar{\gamma}}(A).$$

以下结果归功于 [Naa11]。

引理 7.7.5 ([Naa11，定理 3。1])。 令 γ， γ' 为任意两条半无限路径，并令 $\bar{\gamma}$， $\bar{\gamma}'$ 为任意两条半无限对偶路径。我们有，

$$\omega_0 \circ \alpha^\epsilon_\gamma \simeq \omega_0 \circ \alpha^\epsilon_{\gamma'} \qquad \omega_0 \circ \alpha^m_{\bar{\gamma}} \simeq \omega_0 \circ \alpha^m_{\bar{\gamma}'} \qquad \omega_0 \circ \alpha^\psi_{\gamma,\bar{\gamma}} \simeq \omega_0 \circ \alpha^\epsilon_{\gamma',\bar{\gamma}'}$$

为证明上述结果， [Naa11] 使用以下引理（7.7.6），该引理本身也具有独立意义。

引理 7.7.6 ([Naa11，引理 3。1])。 令 γ， γ' 为任意两条半无限路径，并令 $\bar{\gamma}$， $\bar{\gamma}'$ 为满足 $\partial_0\gamma = \partial_0\gamma'$ 且 $\partial_0\gamma' = \partial_0\bar{\gamma}'$的任意两条半无限对偶路径。则有，

$$\omega_0 \circ \alpha^\epsilon_\gamma = \omega_0 \circ \alpha^\epsilon_{\gamma'} \qquad \omega_0 \circ \alpha^m_{\bar{\gamma}} = \omega_0 \circ \alpha^m_{\bar{\gamma}'} \qquad \omega_0 \circ \alpha^\psi_{\gamma,\bar{\gamma}} = \omega_0 \circ \alpha^\psi_{\gamma',\bar{\gamma}'}$$

我们以以上引理为依据，定义以下各态:

$$\omega^\epsilon_{\partial\gamma} \coloneqq \omega_0 \circ \alpha^\epsilon_\gamma \qquad \omega^m_{\partial\bar{\gamma}} \coloneqq \omega_0 \circ \alpha^m_{\bar{\gamma}} \qquad \omega^\psi_{\partial\gamma,\partial\bar{\gamma}} \coloneqq \omega_0 \circ \alpha^\psi_{\gamma,\bar{\gamma}}$$

引理 7.7.7. 我们有 $\pi_0 \circ \alpha^{\epsilon}_{\gamma}, \pi_0 \circ \alpha^{m}_{\bar{\gamma}}, \pi_0 \circ \alpha^{\psi}_{\gamma,\bar{\gamma}}$ 均局域化于某个锥中，并且对于任意选定的半无限路径/对偶路径 $\gamma/\bar{\gamma}$ 都可传输。

证明：显然 由引理7.7.5以及自同构的定义可直接得到。 □

下面的引理已在文献中的多个地方讨论过。例如，参见[CNN18]。

引理 7.7.8 ([CNN18，定理 2。2])。**环面码模型的每个基态都等价于以下各态的凸组合** $\{\omega_0, \omega^{\epsilon}_{v}, \omega^{m}_{f}, \omega^{\psi}_{v,f}\}$，其中某个 v， $f \in \Gamma$是预先选定的。此外， ω 是环面码模型的纯基态，当且仅当 ω 等价于这四个态中的一个。

现在固定一条路径 γ_0 和一条对偶路径 $\bar{\gamma}_0$，并定义表示

$$\pi^{\epsilon} := \pi_0 \circ \alpha^{\epsilon}_{\gamma_0}, \qquad \pi^{m} := \pi_0 \circ \alpha^{m}_{\bar{\gamma}_0}, \qquad \pi^{\psi} := \pi_0 \circ \alpha^{\psi}_{\gamma_0,\bar{\gamma}_0}$$

引理 7.7.9 ([Naa11，Naa13])。 表示 $\{\pi_0, \pi^{\epsilon}, \pi^{m}, \pi^{\psi}\}$ 是任意子扇区，并且任意任意子扇区都与其中一个酉等价。

回顾允许锥集合的定义 7.2.5 $\mathcal{L}$，并回顾辅助代数的定义如下：

$$\mathfrak{A}^{a} := \overline{\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{L}} \mathcal{R}(\Lambda)}^{\|\cdot\|} \subset B(\mathcal{H}_0).$$

根据 [Naa11，命题 4.2], 映射 $\pi_0 \circ \alpha^{\epsilon}_{\gamma}$， $\pi_0 \circ \alpha^{m}_{\bar{\gamma}}$， $\pi_0 \circ \alpha^{\psi}_{\gamma,\bar{\gamma}}$ 都存在唯一的延拓至$\mathcal{A}^{a}$，使得该延拓在任意允许锥 Λ 上弱连续。此外，所有这些延拓都是 $\mathcal{A}^{a}$的端同态。

定义 7.7.10。 若对所有 $A \in \mathcal{R}(\Lambda^{c})$均有 $\rho(A) = A$，则称 ρ 是 $\mathcal{A}^{a}$ 的端同态，且在锥 Λ 中局域化。如果对任意允许的锥 Λ'，都存在 $\mathcal{A}^{a}$ 的端同态 ρ'，在 Λ' 中局域化，并满足使得 $\rho \simeq \rho'$，则称 ρ 是可传输的。我们将由局域化且可传输的 $\mathcal{A}^{a}$ 端同态构成的范畴记为$\mathbf{DHR}(\Lambda)$，其中这些端同态局域化在锥 Λ中，态射为交织算子。

注记 7.7.11. 在 [Naa11，Naa13], 这些局域化且可传输的端同态被扩展到辅助代数 $\mathcal{A}^{a}$。随后可以证明 $\mathbf{DHR}(\Lambda)$ 是一个编织幺半范畴。

定理 7.7.12 ([Naa11，定理 6.2])。 范畴 $\boldsymbol{DHR}(\Lambda)$ 与 $\mathsf{Rep}(D(\mathbb{Z}_2))$ 在编织幺半意义下等价。

具体而言，若将 $\mathsf{Rep}(D(\mathbb{Z}_2))$ 中的简单对象记为 $\mathbf{1}$、e、m、ψ，那么我们可以作出如下对应

$$\mathrm{Id} \mapsto \mathbf{1} \qquad \pi_0 \circ \alpha^{\epsilon}_{\gamma_0} \mapsto e \qquad \pi_0 \circ \alpha^{m}_{\bar{\gamma}_0} \mapsto m \qquad \pi_0 \circ \alpha^{\psi}_{\gamma_0,\bar{\gamma}_0} \mapsto \psi$$

7.7.2 SET 环面码模型

为了定义 SET 环面码模型，除了传统环面码中的边自旋外，我们还加入顶点自旋。该模型基于[LSM+23]中所描述的模型。对于 $i \in \{x, y, z\}$，顶点自旋上的泡利算符记为 τ_v^i，而我们将继续把边上的第 i个泡利算符称为 e σ_e^i。由于这些算子的支撑不相交，因此它们必然对易。在每个具有顶点 $S \in \Gamma_f$ 的有限区域 V（S）以及边 E（S）上，我们都有希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_S^V \coloneqq \bigotimes_{v \in V(S)} \mathcal{H}_v \qquad \mathcal{H}_S^E \coloneqq \bigotimes_{e \in E(S)} \mathcal{H}_e \qquad \mathcal{H}_S \coloneqq \mathcal{H}_S^V \otimes \mathcal{H}_S^E.$$

我们还为 $S \in \Gamma_f$ 定义以下代数：

$$\mathcal{A}_S^V \coloneqq B(\mathcal{H}_S^V) \qquad \mathcal{A}_S^E \coloneqq B(\mathcal{H}_S^E) \qquad \mathcal{A}_S \coloneqq B(\mathcal{H}_S).$$

我们可以按照通常的方式定义以下准局域代数：

$$\mathcal{A}^V \coloneqq \overline{\bigcup_{S \in \Gamma_f} \mathcal{A}_S^V}^{||\cdot||} \qquad \mathcal{A}^E \coloneqq \overline{\bigcup_{S \in \Gamma_f} \mathcal{A}_S^E}^{||\cdot||} \qquad \mathcal{A} \coloneqq \overline{\bigcup_{S \in \Gamma_f} \mathcal{A}_S}^{||\cdot||}.$$

请注意，在上一节中，我们所说的算子代数现在称为 $\mathcal{A}^E$。还请注意，$\mathcal{A} = \mathcal{A}^E \otimes \mathcal{A}^V$。

在这个新的自旋晶格上，我们可以通过寻找一个有限深度量子电路，并将其应用于经过修改的传统环面码哈密顿量，来定义 SET 环面码哈密顿量；该哈密顿量考虑了新的顶点自旋。回顾一下，对于任意一条边，$e, \partial_0 e$ 表示源顶点，而 $\partial_1 e$ 表示目标顶点。在每条边 e 上，定义

$$W_e \coloneqq i^{(1-\sigma_e^x)(\tau_{\partial_1 e}^z - \tau_{\partial_0 e}^z)/4} \in \mathcal{A}_e \otimes \mathcal{A}_{\partial_0 e} \otimes \mathcal{A}_{\partial_1 e}$$

由此得到自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_S)$，使得对所有 $A \in \mathcal{A}_S$

$$\alpha_S(A) = \left(\bigotimes_{e \in S^{+1}} W_e \right) A \left(\bigotimes_{e \in S^{+1}} W_e^* \right).$$

这个自同构可以范数连续地延拓为 α of $\mathcal{A}$上的一个自同构。根据下面的引理，这个自同构是一个有限深度量子电路。

引理 7.7.13。 *自同构 α 是一个深度为 4 的有限深度量子电路。*

证明： 每个 U_e 仅作用于一条边及其边界顶点。方格晶格边的四色着色立即告诉我们如何构造有限深度量子电路。□

7.7.2.1 哈密顿量

现在，我们可以将所有 $S \in \Gamma_f$ 的哈密顿量定义为

$$H_S \coloneqq \sum_{v \in V(S)} \left(\frac{\mathbb{1} - A_v}{2} + \frac{\mathbb{1} - \tilde{Q}_v}{2} \right) + \sum_{f \in F(S)} \frac{\mathbb{1} - \tilde{B}_f}{2}$$

其中，我们分别用 $V(S)$ 和 $F(S)$ 表示 S 中的顶点和面，并定义

$$\tilde{Q}_v \coloneqq \frac{\mathbb{1}+A_v}{2}\alpha(\tau_v^z) \qquad \text{and} \qquad \tilde{B}_f \coloneqq \alpha(B_f).$$

˜我们将相应的导子记为 δ。我们首先证明 H_S 是一个对易投影哈密顿量。然后，我们利用有限深度量子电路 α 将 $\tilde{\omega}$ 与传统环面码的基态联系起来，从而证明 δ 有唯一的无挫折基态$\tilde{\omega}$ 。最后，我们将利用这一关系证明，该理论中任意子的底层编织融合范畴等价于环面码的编织融合范畴。

如下引理所示，我们也可以按如下方式定义哈密顿量中的算子：

$$\tilde{B}_f \coloneqq i^{-\sum_{e\in f}\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/2}B_f \qquad \tilde{Q}_v \coloneqq \frac{\mathbb{1}+A_v}{2}Q_v \qquad Q_v \coloneqq \tau_v^x i^{-\tau_v^z\sum_{e\ni v}f(e,v)\sigma_e^x/2},$$

其中，$f(e,v)=1$当 $v=\partial_0 e$时，以及 $f(e,v)=-1$当 $v=\partial_1 e$时。

˜**引理 7.7.14**。 采用上述对 B_f 和 Q_v的定义，可得

$$\alpha(A_v)=A_v \qquad \alpha(B_f)=\tilde{B}_f \qquad \alpha(\tau_v^x)=Q_v.$$

证明：

$(\alpha(A_v)=A_v)$：由于 W_e 与 A_v 对所有 e均对易，我们直接得到 $\alpha(A_v)=A_v$。

˜$(\alpha(B_f)=B_f)$：对于每个 $e\in f$，

$$\begin{aligned} W_eB_fW_e^* &= i^{(1-\sigma_e^x)(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/4}B_f i^{-(1-\sigma_e^x)(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/4} \\ &= i^{(1-\sigma_e^x)(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/4}i^{-(1+\sigma_e^x)(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/4}B_f \\ &= i^{-\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/2}B_f \end{aligned}$$

whic对所有边 $e\in$取乘积后，h 给出了所需结果 f.

$(\alpha(\tau_v^x)=Q_v)$：考虑 e_1，$e_2\ni v$使得 $\partial_1 e_1=\partial_0 e_2=v$。那么我们有 ，

$$\begin{aligned} W_{e_1}W_{e_2}\tau_v^xW_{e_2}^*W_{e_1}^* &= \mathrm{Ad}[W_{e_1}](i^{(1-\sigma_{e_2}^x)(\tau^z_{\partial_1 e_2}-\tau_v^z)/4}\tau_v^x i^{-(1-\sigma_{e_2}^x)(\tau^z_{\partial_1 e_2}-\tau_v^z)/4}) \\ &= \mathrm{Ad}[W_{e_1}](\tau_v^x i^{(1-\sigma_{e_2}^x)(\tau^z_{\partial_1 e_2}+\tau_v^z)/4}i^{-(1-\sigma_{e_2}^x)(\tau^z_{\partial_1 e_2}-\tau_v^z)/4}) \\ &= \mathrm{Ad}[W_{e_1}](\tau_v^x i^{(1-\sigma_{e_2}^x)\tau_v^z/2}) \\ &= \tau_v^x i^{-(1-\sigma_{e_1}^x)\tau_v^z/2}i^{(1-\sigma_{e_2}^x)\tau_v^z/2} \\ &= \tau_v^x i^{-\tau_v^z(f(e_1,v)\sigma_{e_1}^x+f(e_2)\sigma_{e_2,v}^x)/2} \end{aligned}$$

对相邻边的两对都执行此共轭操作，我们便得到所需结果。

□

我们注意到，引理7.7.14 表明 H_S 是一个对易投影哈密顿量。在标准的物理学表述中，SET 的哈密顿量应当具有对称性。我们的分析仅直接要求基态具有对称性。尽管如此，证明下面这个引理仍然很有用，它蕴含了我们的哈密顿量具有对称性。注意，对称作用 β_g 由定义 7.2.1给出，其中 $U_v^g = \tau_v^x$和 $U_e^g = \mathbb{1}_v$。

引理 7.7.15。 算子 A_v, B_f, Q_v 在对称性β_g的作用下保持不变。

证明： 根据 A_v 的定义，可以直接验证 $\beta_g(A_v) = A_v$。现在我们证明 B_v 在 β_g 下是对称的。

$$\begin{aligned}\beta_g(\tilde{B}_f) &= \left(\prod_{v\in f}\tau_v^x\right) i^{-\sum_{e\in f}\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/2} B_f \left(\prod_{v\in f}\tau_v^x\right) \\ &= i^{\sum_{e\in f}\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/2} B_f \\ &= i^{\sum_{e\in f}\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})}\tilde{B}_f.\end{aligned}$$

现在利用 $(\tau^z_{\partial_1 e} - \tau^z_{\partial_0 e})$ 的本征值始终为 ± 2， 0，且 σ_e^x 的本征值为± 1这一事实，注意到 $i^{\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})}$ 与 $i^{(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})}$具有完全相同的谱分解。因此，利用 $i^{\pm\tau^z} = \pm i\tau^z$ 这一事实，

$$\beta_g(\tilde{B}_f) = i^{\sum_{e\in f}(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})}\tilde{B}_f = i^4(-i)^4\prod_{v\in f}(\tau_v^z)^2\tilde{B}_f = \tilde{B}_f.$$

现在我们转向 Q_v。考虑以下计算。

$$\begin{aligned}\beta_g(Q_v) &= \tau_v^x\tau_v^x i^{-\tau_v^z\sum_{e\ni v}f(e,v)\sigma_e^x/2}\tau_v^x = \left(i^{-\tau_v^z\sum_{e\ni v}f(e,v)\sigma_e^x}\right)\tau_v^x\left(i^{-\tau_v^z\sum_{e\ni v}f(e,v)\sigma_e^x/2}\right) \\ &= i^{\tau_v^z\sum_{e\ni v}f(e,v)\sigma_e^x}Q_v = A_vQ_v\end{aligned}$$

其中在最后一步，我们利用了以下事实：对于满足 $A_v = 1$ 的态， $\tau_v^z\sum_{e\ni v}f(e,v)\sigma_e^x \in \{\pm 4, 0\}$；对于满足 $A_v = -1$ 的态， $\tau_v^z\sum_{e\ni v}f(e,v)\sigma_e^x \in \{\pm 2\}$。因此，

$$\beta(\tilde{Q}_v) = \beta\left(\frac{\mathbb{1}+A_v}{2}Q_v\right) = \frac{\mathbb{1}+A_v}{2}A_vQ_v = \tilde{Q}_v.$$

□

根据引理 7.7.14 可知，哈密顿量 H_S 在 $\mathbb{Z}_2$ 对称性下不变。

7.7.2.2 与环面码的关系

现在，我们将传统环面码哈密顿量 $H_S^0 \in \mathcal{A}$ 定义为一个增强版本：

$$H_S^0 := H_S^{TC} + \sum_{v\in V(S)}\frac{\mathbb{1}-\tau_v^x}{2},$$

其中，$H_S^{TC} \in \mathcal{A}^E$ 是作用在 S上的环面码哈密顿量。我们只是在顶点处添加了辅助自旋，并通过能量惩罚使其处于乘积态。令 δ^0 为与这个新哈密顿量对应的导子。显然， H_S^0 仍然是一个对易投影哈密顿量。令 ω_0 为 $\mathcal{A}$ 上的一个态，定义为

$$\omega_0 \coloneqq \omega_{TC}^E \otimes \omega_0^V$$

其中， ω_{TC}^E （定义在 $\mathcal{A}^E$ 上）是环面码的无挫折基态，而 ω_0^V定义在 $\mathcal{A}^V$ 上，是由 $\omega_0^V(A)$ 给出的乘积态：$= \bigotimes_{v\in\Gamma}\langle\psi_v, A\psi_v\rangle$ 且 $|\psi_v\rangle \in \mathcal{H}_v$ 满足 $|\psi_v\rangle = \tau_v^x |\psi_v\rangle$。

那么不难看出， ω_0 是 H_S^0的无挫折基态。现在我们列出关于 ω_0的一些有用事实，这些事实已在附录 7.C中得到证明。

命题 7.7.16。 态 $\omega_0 = \omega_{TC}^E \otimes \omega_0^V$满足以下性质：

1. ω_0 是纯态。
2. ω_0 是 δ^0的唯一无挫折基态。
3. ω_0 是唯一满足以下条件的态：对所有 v， f

$$\omega_0(A_v) = \omega_0(B_f) = \omega_0(\tau_v^x) = 1$$

本命题在引理 7.C.1中得到证明。
现在将 π_0 定义为 ω_0的 GNS 表示。

命题 7.7.17。 表示 π_0 满足以下条件：

1. π_0 是不可约的。
2. π_0 满足 *Haag* 对偶性。
3. 关于 π_0 的任意任意子扇区 π 与两两不相交的任意子扇区 $\{\pi_0 \circ \zeta\}_\zeta$ $\zeta \in \{ \alpha_\gamma^\epsilon \ \alpha_{\bar{\gamma}}^m \ \alpha_{\gamma\bar{\gamma}}^\psi\}$ $\gamma \in$ 中的一个酉等价，其中 Id 、 、 、对于固定的半无限 $P(\Gamma)$ $\bar{\gamma} \in P(\Gamma)$。

.....这一事实 π_0 是不可约的，源于 ω_0 是纯态。本命题的其余部分分别在引理 7.C.2、7.C.3、7.C.4 以及推论 7.C.5中证明。

现在我们将范畴$\mathbf{DHR}_{\pi_0}(\Lambda)$定义为由 $\mathcal{A}^a$ 的端同态构成的编织 C^* 张量范畴；这些端同态局域化于锥 Λ 中（相对于 π_0），且可传输。注意，我们有$\mathbf{DHR}_{\pi_0}(\Lambda) \simeq \mathbf{DHR}_{\pi_0^{TC}}(\Lambda)$。

7.7.2.3 基态

现在我们了解了有关 $\tilde{\delta}$ 的一些基态性质。我们首先定义 $\tilde{\omega} \coloneqq \omega_0 \circ \alpha^{-1}$，然后证明它是 δ 的唯一无挫折基态。

引理 7.7.18。 $\tilde{\omega}$ 是满足对所有 v、$f \in \Gamma$ 的唯一态

$$\tilde{\omega}(A_v) = \tilde{\omega}(\tilde{B}_f) = \tilde{\omega}(Q_v) = 1. \tag{7.2}$$

此外，$\tilde{\omega} = \omega_0 \circ \alpha^{-1}$ 是满足以下条件的唯一态：对所有 $v, f \in \Gamma$

$$\tilde{\omega}(A_v) = \tilde{\omega}(\tilde{B}_f) = \tilde{\omega}(\tilde{Q}_v) = 1. \tag{7.3}$$

特别地，$\tilde{\omega}$ 是 δ的唯一无挫折基态。此外，此态在 β_g下具有对称性，由 δ生成的动力学也如此。

证明：我们首先证明 $\tilde{\omega} = \omega_0 \circ \alpha^{-1}$ 满足（7.2）。事实上，对于每个v，f，由引理 7.7.14 可知

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}(A_v) &= \omega_0 \circ \alpha^{-1} \circ \alpha(A_v) = \omega_0(A_v) = 1, \\
\tilde{\omega}(\tilde{B}_f) &= \omega_0 \circ \alpha^{-1} \circ \alpha(B_f) = \omega_0(B_f) = 1, \\
\tilde{\omega}(Q_v) &= \omega_0 \circ \alpha^{-1} \circ \alpha(\tau_v^x) = \omega_0(\tau_v^x) = 1.
\end{aligned}$$

现在，假设 $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ 是另一个满足（7.2）的态。那么由引理 7.7.14可知

$$\omega \circ \alpha(A_v) = \omega \circ \alpha(B_f) = \omega \circ \alpha(\tau_v^x) = 1.$$

因此，由引理 7.C.1可知 $\omega \circ \alpha = \omega_0$，由此可得 $\omega = \tilde{\omega}$。

现在我们证明 $\tilde{\omega}$ 是满足（7.3）的唯一态。只需证明，态ω 满足（7.2）当且仅当它满足（7.3）。首先，假设 ω 满足（7.3）。那么由引理7.4.3可知

$$\omega(Q_v) = \omega\left(\frac{\mathbb{1} + A_v}{2} Q_v\right) = \omega(\tilde{Q}_v) = 1,$$

因此 ω 满足（7.2）。现在，假设 ω 满足（7.2）。根据引理 7.4.3 ，我们有

$$\omega(\tilde{Q}_v) = \omega\left(\frac{\mathbb{1} + A_v}{2} Q_v\right) = \omega(Q_v) = 1,$$

因此 ω 满足（7.3）。

由此可知，$\tilde{\omega}$ 是 δ 的唯一无挫折基态，这由 [CNN18，引理 38] 得出。另请注意，由于 A_v，是对称的，$\tilde{\omega} \circ \beta_g$ 满足（7.3）。由唯一性可知，$\tilde{\omega} = \tilde{\omega} \circ \beta_g$，因此 $\tilde{\omega}$ 是对称的。引理 7.7.15 还直接推出，由 生成的动力学 δ 是对称的。□

注记 7.7.19。 哈密顿量 H_S 专门选取为在 β_g的作用下保持对称，我们将在下文对此作进一步说明。然而，考虑哈密顿量 $H'_S := \alpha(H_S^0)$ 也是自然的。注意，$\tilde{\omega}$ 是这两个哈密顿量的唯一无挫折基态，这既可由引理7.7.18 以及 [CNN18，引理 38] 得出。当然，这意味着 $\tilde{\omega}$ 是 β_g 不变的，因为它是 H_S的基态，并且可以使用有限深度量子电路获得。相对于 $\tilde{\omega}$，这些正是完全确定缺陷扇区所需的全部性质，而动力学的选择与我们的论述无关。

鉴于 $\tilde{\omega} = \omega_0 \circ \alpha^{-1}$，现在令 $\tilde{\pi} := \pi_0 \circ \alpha^{-1}$ 为 GNS 表示 $\tilde{\omega}$，其中 π_0 是 δ^0 的无挫折基态 ω_0 的 GNS 表示。

现在我们开始分析 SET 对称性富集拓扑环面码的任意子扇区 .

7.7.2.4 任意子扇区

通过将纠缠自同构 α 应用于旧的弦算符，我们可以轻松获得新的弦算符。

回顾原始环面码中弦算子的定义。我们有：

$$F_\gamma \coloneqq \prod_{e\in\gamma}\sigma_e^z \qquad\qquad F_{\bar\gamma} \coloneqq \prod_{e\in\bar\gamma}\sigma_e^x$$

现在定义纠缠弦算子如下：

$$\tilde F_\gamma \coloneqq \alpha(F_\gamma) = F_\gamma \prod_{e\in\gamma} i^{\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/2} \qquad \tilde F_{\bar\gamma} \coloneqq \alpha(F_{\bar\gamma}) = F_{\bar\gamma}$$

这些弦算子仍满足环面码弦算子的恒等式：

$$\tilde F_\gamma \tilde F_{\bar\gamma} = (-1)^{c(\gamma,\bar\gamma)} \tilde F_{\bar\gamma}\tilde F_\gamma$$

其中，$c(\gamma,\bar\gamma)$ 计算 γ，$\bar\gamma$ 之间的交叉点数目。

引理 7.7.20。我们有以下恒等式：

$$\beta_g(\tilde F_\gamma) = \tau^z_{\partial_1\gamma}\tau^z_{\partial_0\gamma}\tilde F_\gamma \qquad\qquad \beta_g(\tilde F_{\bar\gamma}) = \tilde F_{\bar\gamma}$$

证明：第二个等式是平凡的。我们证明第一个等式。

$$\begin{aligned}\beta_g(\tilde F_\gamma) &= \left(\prod_{v\in\gamma}\tau_v^x\right) F_\gamma \prod_{e\in\gamma} i^{\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/2} \left(\prod_{v\in\gamma}\tau_v^x\right)\\ &= F_\gamma \prod_{e\in\gamma} i^{-\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})/2} = \tilde F_\gamma \prod_{e\in\gamma} i^{-\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})}\end{aligned}$$

现在利用 $\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})$ 的特征值总是 ±2，0 这一事实，注意到 $i^{-\sigma_e^x(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})}$ 与 $i^{(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})}$ 具有相同的谱分解。于是得到

$$\beta_g(\tilde F_\gamma) = \tilde F_\gamma \prod_{e\in\gamma} i^{(\tau^z_{\partial_1 e}-\tau^z_{\partial_0 e})} = \tilde F_\gamma i^{(\tau^z_{\partial_1\gamma}-\tau^z_{\partial_0\gamma})} = \tilde F_\gamma i\tau^z_{\partial_1\gamma} i(-\tau^z_{\partial_0\gamma}) = \tilde F_\gamma \tau^z_{\partial_1\gamma}\tau^z_{\partial_0\gamma}.$$

在倒数第二个等式中，我们用到了 $i^{\pm\tau_v^z} = \pm i\tau_v^z$ 这一事实。 □

我们由此为任意子扇区构造新的自同构。取 $\zeta_\gamma \in \{\alpha^\epsilon_\gamma, \alpha^m_{\bar\gamma}, \alpha^\psi_{\gamma,\bar\gamma}\}$，新的自同构 $\tilde\zeta_\gamma$ 定义为

$$\tilde\zeta_\gamma \coloneqq \alpha\circ\zeta_\gamma\circ\alpha^{-1}.$$

这里要注意 ζ 对 γ 的依赖，因为在这种情形下，路径 γ，$\bar\gamma$ 并未固定。我们通常会考虑固定的路径 γ，$\bar\gamma$；在这种情形下，我们会省略 ζ 上的下标 γ。

定义表示 $\tilde\zeta_\gamma$ 不可约的，因为 $\pi_{\tilde\zeta_\gamma} = \pi_{\zeta_\gamma}\circ\alpha^{-1}$ 是一个自同构，而 π_0 是不可约的。

注 7.7.21。 容易验证，对于 $A \in \mathcal{A}$,

$$\tilde{\alpha}^{\epsilon}_{\gamma}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ad}(\tilde{F}_{\gamma_n})(A), \qquad \tilde{\alpha}^{m}_{\tilde{\gamma}}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ad}(\tilde{F}_{\tilde{\gamma}_n})(A), \qquad \tilde{\alpha}^{\psi}_{\gamma,\tilde{\gamma}}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ad}(\tilde{F}_{\gamma_n}\tilde{F}_{\tilde{\gamma}_n})(A),$$

其中，下标 n表示在前 n 条边之后进行截断。

注记 7.7.22. 令 $\zeta_\gamma \in \{\alpha^{\epsilon}_{\gamma}, \alpha^{m}_{\tilde{\gamma}}, \alpha^{\psi}_{\gamma,\tilde{\gamma}}\}$。回忆一下， ζ_γ 是一个有限深度量子电路。因此，

$$\tilde{\omega}_{\zeta_\gamma} := \tilde{\omega} \circ \tilde{\zeta}_\gamma = \omega_0 \circ \zeta_\gamma \circ \alpha^{-1} = \omega_{\zeta_\gamma} \circ \alpha^{-1}$$

˜是 δ 的基态，利用引理 7.A.3。这些表示 $\tilde{\pi}_{\zeta_\gamma}$的物理意义在于，它们是基态 $\tilde{\omega}_{\zeta_\gamma}$的 GNS 表示。

引理 7.7.23. 对称性的作用不会置换任意子类型，即 $\gamma_g(\tilde{\pi}^{\zeta_\gamma}) \simeq \tilde{\pi}^{\zeta_\gamma}$。

证明： 对于任意可观测量 $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$，我们有：

$$\gamma_g(\tilde{\pi}^{\zeta_\gamma})(A) = \beta_g \circ (\tilde{\pi} \circ \tilde{\zeta}_\gamma) \circ \beta_g(A) = \tilde{\pi} \circ \mathrm{Ad}[\beta_g(\tilde{F}_{\gamma'})](A),$$

其中， γ' 是对 γ 的截断，满足 $\mathrm{supp}(A) \cap (\gamma - \gamma') = \emptyset$。现在，存在 $U \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$˜ ˜，使得对于 γ的任意此类截断 γ'， $\mathrm{Ad}[\beta_g(F_{\gamma'})](A) = \mathrm{Ad}[UF_{\gamma'}](A)$。由连续性可得，对于所有 $A \in \mathcal{A}$, $\gamma_g(\tilde{\pi}^{\zeta_\gamma})(A) = \mathrm{Ad}[\tilde{\pi}(U)] \circ \tilde{\pi}^{\zeta_\gamma}(A)$。□

在本小节余下部分中，我们固定路径 γ、 $\bar{\gamma}$，因此省略 ζ 上的下标。

引理 7.7.24。 由 $\{\tilde{\pi}_\zeta \circ \alpha^{-1}\}_\zeta$ 给出的表示彼此不相交，并且相对于 $\tilde{\pi}$ 是任意子扇区；任意一个任意子扇区都与其中一个表示酉等价。

证明： 注意， α 是一个有限深度量子电路。结论由推论 7.C.5、引理 7.A.6以及 [NO22, 定理 47]。 □

事实上，我们可以应用 [Oga22] 中的一个定理，得到更强的结果。

命题 7.7.25。 设 Λ 是一个锥。范畴 $\boldsymbol{DHR}_{\pi_0}(\Lambda)$ 与 $\boldsymbol{DHR}_{\tilde{\pi}}(\Lambda)$ 编织幺半等价。特别地，$\boldsymbol{DHR}_{\tilde{\pi}}(\Lambda)$ 与 $\boldsymbol{DHR}^{TC}_{\pi_0}(\Lambda)$ 编织幺半等价。

证明： 注意到 α 实现了一个有限深度量子电路，再应用命题7.C.6、引理 7.A.6以及 [Oga22中的定理 61]。 □

注记 7.7.26。 先前的结果强烈暗示，我们已经找到了 H_S 的满基态子空间。事实上，如果我们将哈密顿量选为 $H'_S = \alpha(H^0_S)$，那么 α 是一个有限深度量子电路这一事实，便立即意味着由 H'_S 生成的动力学的基态子空间与由H^0_S 生成的动力学的基态子空间相同（而后者又与环面码的基态子空间相同）。

然而，由于我们选择的哈密顿量是 H_S ，而不是直接通过有限深度量子电路与 H^0_S 相关联，因此我们无法保证每个纯基态都与 $\{\tilde{\omega}_\zeta\}_\zeta$ 等价。

我们注意到，对 [CNN18] 的分析在我们的设定下仍大多适用，并且˜猜想这是 δ的满子空间。

7.7.3 对称性缺陷

回忆一下， A_v、 B_f、 Q_v这些 SET 环面码哈密顿量的项在对称作用下保持不变（引理7.7.15）。我们的缺陷构造策略将类似于第7.6.2 节和第7.4.2节。思路是考察 $\beta_g^{\bar{L}}$沿某条对偶路径 $\bar{L}$ 对 SET 环面码哈密顿量各项的作用。随后，我们使用一个显式自同构，消去对称性沿某条 $\bar{\gamma} \subset L$ 的作用。不过，在证明我们定义的表示是缺陷扇区时，并未直接使用这些关于对称作用的结果。因此，我们将这部分讨论放在附录7.E。

对于有限对偶路径 $\bar{\gamma} \in P(\Gamma)$，我们定义对称性擦除弦算符算子

$$F_{\bar{\gamma}}^{\sigma} := \prod_{e \in \bar{\gamma}} e^{-i\pi p(e)\sigma_e^x/4}$$

其中 $p(e) = +1$ ，当 $\partial_1 e$ 位于 $\bar{\gamma}$ 的右侧时；否则为 $p(e) = -1$ 。注意，「右侧」和「左侧」是相对于 γ的定向而言的。



设 $A \in \mathcal{A}$ ，并考虑一列有限对偶路径 $\{\bar{\gamma}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ，使得 $\bar{\gamma}_n \subset \bar{\gamma}_{n+1}$ ，且对于所有 n，$\partial_0 \bar{\gamma}_n$ 均为常数。将自同构 $\alpha_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$ 定义为

$$\alpha_{\bar{\gamma}}^{\sigma} := \lim_{\bar{\gamma}_n \uparrow \bar{\gamma}} F_{\bar{\gamma}_n}^{\sigma} A (F_{\bar{\gamma}_n}^{\sigma})^*.$$

设 $\bar{\xi}_1$，$\bar{\xi}_2$ 为两条具有相同端点、且除共享端点外互不相交的对偶路径。在此设置中，这两条路径围成一个曲面 $S(\xi_1, \xi_2)$。注意，根据这些路径的定义， ξ_1， ξ_2 是自避的。我们可以定义酉算子

$$\tilde{F}_{\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2}^{\sigma} := F_{\bar{\xi}_1}^{\sigma} (F_{\bar{\xi}_2}^{\sigma})^* \left(\bigotimes_{v \in S(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2)} U_v^g \right).$$

引理 7.7.27。 设 S 为有限单连通区域。那么，对于界定$V(S)$的对偶路径 $\tilde{\gamma}$， S 中顶点的集合满足

$$P_S \left(\prod_{v \in V(S)} Q_v \right) = P_S F_{\tilde{\gamma}}^{\sigma} \left(\prod_{v \in V(S)} \tau_v^x \right)$$

无论 $\tilde{\gamma}$ 的定向如何，其中 P_S 是对所有 $v \in V(S)$ 投影到 $A_v = 1$ 子空间上的投影。

证明： 我们在 S 为单个顶点自旋 v 的情形下进行此分析。一般情形可通过将较小的区域拼接在一起，并观察相反方向的路径相互抵消来归纳地得到。

从 v 正上方的边开始沿顺时针方向移动，我们将 v 相邻的边标记为 1，2，3，4。于是，

$$\frac{1+A_v}{2}Q_v=\frac{1+A_v}{2}\tau_v^x i^{-\tau_v^z(\sigma_1^x+\sigma_2^x-\sigma_3^x-\sigma_4^x)/2}=\frac{1+A_v}{2}i^{\tau_v^z(\sigma_1^x+\sigma_2^x-\sigma_3^x-\sigma_4^x)/2}\tau_v^x$$

注意，指数的谱总是偶数，因此我们可以从这个表达式中去掉 τ_v^z。所以我们有

$$\frac{1+A_v}{2}Q_v=\frac{1+A_v}{2}e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_1^x}e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_2^x}e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_3^x}e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_4^x}\tau_v^x=\frac{1+A_v}{2}F^\sigma_{1\to2\to3\to4\to1}\tau_v^x.$$

注意，我们可以通过以下方式将这条路径与反向路径联系起来：

$$F^\sigma_{1\to2\to3\to4\to1}=A_vF^\sigma_{4\to3\to2\to1\to4}.$$

因此，这一结果与定向无关。 □

引理 7.7.28. 设 ξ_1、$\bar{\xi}_2$ 是两条端点相同的对偶路径，且除了共享端点外互不相交。那么

$$\tilde{\omega}(\tilde{F}^\sigma_{\xi_1,\bar{\xi}_2})=1.$$

证明： 我们先证明由这些对偶路径围成的区域是某个单连通 S的情形。非单连通的情形可由归纳法推出。

设 $\tilde{\gamma}$ 是一条围住 S 的对偶路径，它与 ξ_1 平行，与 $\bar{\xi}_2$ 反平行。如果对偶路径 $\bar{\xi}_1$ 和 ξ_2 沿同一方向经过一条边，那么算子 $F^\sigma_{\xi_1,\xi_2}$ 在该边上作用平凡。因此，我们可以写成

$$\tilde{F}^\sigma_{\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2}=F^\sigma_{\tilde{\gamma}}\prod_{v\in V(S)}\tau_v^x.$$

于是，我们可以使用引理 7.7.27得出

$$\tilde{\omega}(\tilde{F}^\sigma_{\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2})=\tilde{\omega}\left(P_SF^\sigma_{\tilde{\gamma}}\prod_{v\in V(S)}\tau_v^x\right)=\tilde{\omega}\left(P_S\prod_{v\in V(S)}Q_v\right)=1$$

其中，对于每个 $v\in S$，P_S 是到 $A_v=1$ 子空间的投影。 □

下文中，我们令 $\mathcal{H}$ 表示对应于 $\tilde{\pi}$ 的 GNS 希尔伯特空间，并令 Ω 表示循环向量。

引理 7.7.29。 取 $\bar{\gamma}\in P(\Gamma)$，并令 L_1、L_2 为 $\bar{\gamma}$的两个不同的无限延拓。令 $\bar{\eta}_1=L_1-\bar{\gamma}$ 和 $\bar{\eta}_2=L_2-\bar{\gamma}$。那么

$$\tilde{\pi}\circ\alpha^\sigma_{\bar{\eta}_1}\circ\beta_g^{r(L_1)}\simeq\tilde{\pi}\circ\alpha^\sigma_{\bar{\eta}_2}\circ\beta_g^{r(L_2)}.$$

事实上，存在唯一的酉算子 $V\in B(\mathcal{H})$，使得上述等价成立，并满足 $V\Omega=\Omega$。该酉算子是以下序列的弱算子拓扑极限 $V_n:=\tilde{\pi}(F^\sigma(\bar{\eta}_2)_n,\xi_n)$，其中 $(\bar{\eta}_2)_n$ 是由 $\bar{\eta}_2$ 的前 n 步构成的对偶路径，而ξ_n 是一条由 $\bar{\eta}_1$ 的前 n 步以及一条对偶路径 ς_n 构成的对偶路径；后者连接 $\bar{\eta}_1$ 的第 n 步与 $\bar{\eta}_2$ 的第 n 步，其到 $\partial\bar{\gamma}=\partial\bar{\eta}_1=\partial\bar{\eta}_2$ 的距离在 $n\to\infty$ 时趋于无穷（图 7.14）。

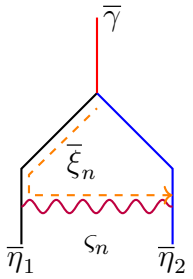


图 7.14：引理中路径的几何结构 7.7.29。

证明：我们考虑态 $\omega_i := \tilde{\omega} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_i} \circ \beta_g^{r(L_\gamma)}$。注意，对于 $i = 1, 2$, $\tilde{\pi} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_i} \circ \beta_g^{r(L_i)}$是 ω_i 的 GNS 表示。因此，根据 GNS 表示的唯一性，只需证明 $\omega_1 = \omega_2$。令 $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$。选取足够大的 n，使得 $\text{supp}(A)$ 与 ς_n 不相交。于是，

$$\begin{aligned}\omega_1(A) &= \langle \tilde{\Omega}, \tilde{\pi} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_1} \circ \beta_g^{\bar{L}_1}(A)\tilde{\Omega}\rangle = \langle \tilde{\Omega}, \tilde{\pi}(\tilde{F}^{\sigma}_{(\bar{\eta}_2)_n, \bar{\xi}_n})\tilde{\pi} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_1} \circ \beta_g^{\bar{L}_1}(A)\tilde{\pi}(\tilde{F}^{\sigma}_{(\bar{\eta}_2)_n, \bar{\xi}_n})^*\tilde{\Omega}\rangle \\ &= \langle \tilde{\Omega}, \tilde{\pi}(\tilde{F}^{\sigma}_{(\bar{\eta}_2)_n, \bar{\xi}_n}(\alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_1} \circ \beta_g^{\bar{L}_1}(A))(\tilde{F}^{\sigma}_{(\bar{\eta}_2)_n, \bar{\xi}_n})^*)\tilde{\Omega}\rangle = \langle \tilde{\Omega}, \tilde{\pi} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_2} \circ \beta_g^{r(\bar{L}_2)}(A)\tilde{\Omega}\rangle = \omega_2(A).\end{aligned}$$

为了证明引理的后半部分，我们按照 [Naa11，引理 4.1] 中的方法进行。存在一个酉算子 $V \in B(\tilde{\mathcal{H}})$，满足交织条件 $\tilde{\pi} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_1} \circ \beta_g^{r(L_1)}$，并且 $\tilde{\pi} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_2} \circ \beta_g^{r(L_2)}$满足 $V\Omega = \Omega$；这是由 GNS 表示的唯一性得出的。由舒尔引理可知，该酉算子是唯一的，因为 $\tilde{\pi} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_1} \circ \beta_g^{r(L_1)}$和 $\tilde{\pi} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_2} \circ \beta_g^{r(L_2)}$是不可约表示。现在我们证明，序列 $V_n = \tilde{\pi}(F^{\sigma}{}_{(\bar{\eta}_2)_n, \xi_n})$ 在弱算子拓扑下收敛到 V。令 $A, B \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$。取足够大的 n，使得 $\text{supp}(B)$ 与 ς_n 不相交。为方便记号，我们定义 $\tilde{\pi}_i := \tilde{\pi} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_i} \circ \beta_g^{r(L_i)}$，其中 $i = 1, 2$。于是，按照前面的同样论证，我们得到

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\pi}_1(A)\tilde{\Omega}, V_n\tilde{\pi}_1(B)\tilde{\Omega}\rangle &= \langle \tilde{\pi}_1(A)\tilde{\Omega}, \tilde{\pi}(\tilde{F}^{\sigma}_{(\bar{\eta}_2)_n, \bar{\xi}_n})\tilde{\pi}_1(B)\tilde{\Omega}\rangle = \langle \tilde{\pi}_1(A)\tilde{\Omega}, \tilde{\pi}_2(B)\tilde{\pi}(\tilde{F}^{\sigma}_{(\bar{\eta}_2)_n, \bar{\xi}_n})\tilde{\Omega}\rangle \\ &= \langle \tilde{\pi}_1(A)\tilde{\Omega}, \tilde{\pi}_2(B)\tilde{\Omega}\rangle = \langle \tilde{\pi}_1(A)\tilde{\Omega}, \tilde{\pi}_2(B)V\tilde{\Omega}\rangle = \langle \tilde{\pi}_1(A)\tilde{\Omega}, V\tilde{\pi}_1(B)\tilde{\Omega}\rangle.\end{aligned}$$

现在，由于 $\alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}_i} \circ \beta_g^{r(L_i)}$是一个自同构，$\mathcal{A}$, $\tilde{\pi}_i(\mathcal{A}_{\text{loc}})$ 在 $\mathcal{A}$ 中稠密。因此，由于 (V_n) 是一致有界序列，$V_n \to V$ WOT。□

有了这些结果，我们现在定义缺陷自同构。

定义 7.7.30。 设 $\bar{\gamma} \in P(\Gamma)$ 是一条半无限路径，L 是 $\bar{\gamma}$和 $\bar{\eta} = L - \bar{\gamma}$ 的一个补全。定义缺陷自同构 $\tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}}$为 $\tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}} := \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}} \circ \beta_g^{r(\bar{L})}$. 注意，$\tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}}$取决于 $\bar{\gamma}$的补全 L，但为简化记号，我们省略这种依赖关系。

注记 7.7.31。 请注意，根据引理 7.7.29，我们得到 $\tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}}$ 对于 $\bar{\gamma}$ 的不同补全彼此等价。

注记 7.7.32. 从物理上看，缺陷自同构 $\tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}}$ 会产生一个缺陷，其端点位于 $\partial_0\bar{\gamma}$ 附近，并沿路径 $\bar{\gamma}$形成畴壁。

注记 7.7.33. 我们有

$$\tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}} \circ \tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}} = \alpha^{m}_{\bar{\gamma}},$$

注意到 $\beta_g^{r(\bar{L})} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}} = \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}} \circ \beta_g^{r(\bar{L})}$和 $\alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}} = \alpha^{m}_{\bar{\eta}}$，即可立即看出这一点。

现在我们将以下缺陷态定义为

$$\tilde{\omega}^{\sigma}_{\bar{\gamma}} := \tilde{\omega} \circ \tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}}, \qquad \tilde{\omega}^{\sigma,\zeta_\gamma}_{\bar{\gamma}} := \tilde{\omega}^{\sigma}_{\bar{\gamma}} \circ \zeta_\gamma.$$

我们回顾 $P_R(\Gamma)$ 的定义（7.4.26定义）。

引理 7.7.34。 选取 $\bar{\gamma}_i \in P_R(\Gamma)$ 作为 $i = 1$的半无限对偶路径，2 使得 $\gamma := \bar{\gamma}_1 \cap \bar{\gamma}_2 \in P(\Gamma)$ 是一条半无限路径。则 $\tilde{\pi}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_1} \simeq \tilde{\pi}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_2}$.

证明：我们考虑纯态 $\tilde{\omega}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_i}$。考虑 $\bar{\gamma}_1$ 的补全 L_1 和 $\bar{\gamma}_2$ 的补全 L_2，使得 L_1 和 L_2 仅在一个有限区域内不同。将该区域称为 S。那么对于所有可观测量$A \in \mathcal{A}_{S^c}$，我们有：

$$\tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_1}(A) = \alpha_{\bar{L}_1 - \bar{\gamma}_1} \circ \beta_g^{r(\bar{L}_1)}(A) = \alpha_{\bar{L}_2 - \bar{\gamma}_2} \circ \beta_g^{r(\bar{L}_2)}(A) = \tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_2}(A)$$

注意，由于 $\tilde{\omega}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_1}$ 和 $\tilde{\omega}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_2}$ 都是纯态，因此 $\tilde{\omega}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_1}$ 和 $\tilde{\omega}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_2}$ 等价，当且仅当它们拟等价 [KR97，命题 10.3。7]。因此，我们可以应用 [BR87，推论 2.6。11]。注意，对于所有 $A \in \mathcal{A}_{S^c}$ 我们都有

$$\tilde{\omega}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_1}(A) = \tilde{\omega} \circ \tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_1}(A) = \tilde{\omega} \circ \tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_2}(A) = \tilde{\omega}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_2}(A),$$

所以我们有 $\tilde{\pi}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_1} \simeq \tilde{\pi}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_2}$。

现在，如果我们选择了不同的补全 L_i 那么令 L_2' 为 $\bar{\gamma}_2$ 的一个补全，使得 $\bar{L}_2'$ 仅在一个有限区域上与 $\bar{L}_1$ 不同。定义 $\pi' := \tilde{\pi} \circ \alpha_{\bar{L}_2' - \bar{\gamma}_2} \circ \beta_g^{r(\bar{L}_2')}$。根据引理7.7.29，$\pi' \simeq \tilde{\pi}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_2}$。但是 $\pi' \simeq \tilde{\pi}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_1}$ 根据前面的分析，因此我们仍有 $\tilde{\pi}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_1} \simeq \tilde{\pi}^{\sigma}_{\bar{\gamma}_2}$ 并且已经证明了所需结果。□

7.7.4 缺陷扇区

定义 $\tilde{\pi}^{\sigma}_{\bar{\gamma}} := \tilde{\pi} \circ \tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}}$，并设 $\tilde{\pi}$（态 $\tilde{\omega}$ 的 GNS 表示）为参考表示。我们首先验证第 7.2.1 节中给出的所有假设均成立。由于对每个顶点 $v \in \Gamma$，$g \mapsto U_v^g$ 给出的 G 的表示都是忠实的，因此假设 2 成立。由引理 7.7.18，假设 3 成立。根据引理 7.C.2、7.7.13 和 7.A.7，并利用 $\tilde{\pi} \simeq \pi_0 \circ \alpha^{-1}$ 这一事实，可知假设 4 成立。由引理 7.7.18，$\tilde{\omega}$ 是纯的，因此假设 5 成立。请注意，这意味着 $\tilde{\pi}$ 是不可约的。此外，$\tilde{\omega}$ 是平移不变的，因此根据标准论证 [Naa11, KMSW06]，假设 6 成立。

引理 7.7.35。 对于所有路径 $\bar{\gamma} \in P_R(\Gamma)$，表示 $\tilde{\pi}^{\sigma}_{\bar{\gamma}}$ 是一个 g-缺陷扇区。

证明：设 L 是 $\bar{\gamma}$ 的一个补全，并设 $\bar{\eta} = L - \bar{\gamma}$。选取一个锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$，使得 $\bar{\eta}$ 包含于 Λ，并设 $A \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$。于是我们有

$$\tilde{\pi}^{\sigma}(A) = \tilde{\pi} \circ \tilde{\alpha}^{\sigma}_{\bar{\gamma}}(A) = \tilde{\pi} \circ \alpha^{\sigma}_{\bar{\eta}} \circ \beta_g^{r(\bar{L})}(A) = \tilde{\pi} \circ \beta_g^{r(\bar{L})}(A).$$

在最后一个等式中，我们利用了这样一个事实：$\beta_g(A) \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$，因为 β_g 是格点对称性；此外还利用了这一事实：对于任意可观测量 $A' \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$，$\alpha_{\bar{\eta}}^{\sigma}(A) = A$，因为 $\alpha_{\bar{\eta}}^{\sigma}$ 局域化在 Λ 内。由于 $\bar{\gamma} \in P_R(\Gamma)$，$\partial r(L) \cap \Lambda^c$ 与 $r(\Lambda)$ 仅相差有限个顶点。这表明 $\tilde{\pi}_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$ 局域化在 Λ 中。

还需证明 $\tilde{\pi}_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$ 是可传输的。另取一个锥 Λ'。现在我们再选取另一条路径 $\bar{\gamma}' \in P_R(\Gamma)$ 和补全 L'，使得 $L' - \bar{\gamma}'$ 完全包含于 Λ'。根据上述论证，我们有 $\tilde{\pi}_{\bar{\gamma}'}^{\sigma}$ 是 g-局域化于 Λ'。利用引理7.7.34，我们得到 $\tilde{\pi}_{\bar{\gamma}}^{\sigma} \simeq \tilde{\pi}_{\bar{\gamma}'}^{\sigma}$，从而可知 $\tilde{\pi}_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$ 是可传输的。□

我们定义一些由 $\tilde{\pi}^{\sigma,\ \zeta}_{\bar{\gamma},\ \bar{\gamma}} := \tilde{\pi}_{\bar{\gamma}}^{\sigma} \circ \zeta$ 给出的表示。在此省略 ζ 上的下标，因为此处我们固定了定义自同构的路径。

引理 7.7.36。由 $\{\tilde{\pi}_{\bar{\gamma}_R}^{\sigma,\zeta}\}_{\zeta}$ 给出的表示相对于 $\tilde{\pi}_{\bar{\gamma}_R}^{\sigma}$ 互不相交，且属于任意子扇区；每个任意子扇区都与其中一个表示酉等价。

证明：由于 $\tilde{\alpha}_{\bar{\gamma}_R}^{\sigma}$ 是一个有限深度量子电路，结论由引理7.7.24、7.A.6以及 [NO22定理 4 得出。7]。□

引理 7.7.37。取一些 $\bar{\gamma}_0 \in \bar{P}_R(\Gamma)$。表示 $\tilde{\pi}^{\sigma,\ \zeta}_{\bar{\gamma}_0,\ \bar{\gamma}_0}$ 是相对于 $\tilde{\pi}$ 的 g-缺陷扇区，而表示 $\tilde{\pi}^{\zeta}$ 是 $\zeta \in \{\mathrm{Id}\ \alpha_{\gamma}^{\epsilon}, \alpha_{\bar{\gamma}}^{m}, \alpha_{\gamma,\ \bar{\gamma}}^{\psi}\}$ 的 *1*-缺陷扇区，假设 $\gamma \in P(\Gamma)$ $\bar{\gamma} \in P(\Gamma)$ 包含在某个锥 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 中。

证明：由引理7.7.35 可知，$\tilde{\pi}_{\bar{\gamma}_0}^{\sigma}$ 是一个 g-缺陷扇区，而 $\tilde{\pi}$ 显然是一个 1-缺陷扇区。由于 $\tilde{\pi}^{\zeta}$ 是相对于 $\tilde{\pi}$ 的任意子扇区（引理 7.7.24），因此 π^{ζ} 是可 1-缺陷扇区化的。由于 $\tilde{\pi}^{\sigma,\ \zeta}_{\bar{\gamma}_0,\ \bar{\gamma}_0}$ 是相对于 $\tilde{\pi}_{\bar{\gamma}_0}^{\sigma}$ 的任意子扇区，因此 $\tilde{\pi}^{\sigma,\ \zeta}_{\bar{\gamma}_0,\ \bar{\gamma}_0}$ 是可 g- 缺陷扇区化的。

由于 $\gamma,\ \bar{\gamma} \subset \Lambda$, ζ 局域化在 Λ 中。因此，对于所有可观测量 $A \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$，我们都有 $\tilde{\pi}^{\zeta}(A) = \tilde{\pi}(A)$，所以 $\tilde{\pi}^{\zeta}$ 局域化在 Λ 中。由上述论证可知，$\tilde{\pi}^{\zeta}$ 是一个 1-缺陷扇区。同样，选取 $\bar{\gamma}_0$ 的一个补全 $\bar{L}_0$，我们有 $\tilde{\pi}^{\sigma,\ \zeta}_{\bar{\gamma}_0,\ \bar{\gamma}_0}$ 在某个包含 $\gamma, \bar{\gamma}$ 和 $\bar{L}_0 - \bar{\gamma}_0$ 的 $\Lambda' \in \mathcal{L}$ 中是 g-局域化的，因此 $\tilde{\pi}^{\sigma,\ \zeta}_{\bar{\gamma}_0,\ \bar{\gamma}_0}$ 是一个 g-缺陷扇区。□

现在我们固定对偶路径为 $\bar{\gamma}_R$ 如图7.1b所示，并在记号中省略它。缺陷始终位于这条对偶路径上。新的记号为

$$\tilde{\pi}^{\sigma} := \tilde{\pi}_{\bar{\gamma}_R}^{\sigma}, \qquad \tilde{\pi}^{\sigma,\zeta} := \tilde{\pi}^{\sigma} \circ \zeta.$$

命题 7.7.38。令 $\zeta \in \{\mathrm{Id}\ \alpha_{\gamma}^{\epsilon}, \alpha_{\bar{\gamma}}^{m}, \alpha_{\gamma,\ \bar{\gamma}}^{\psi}\}$。表示 $\{\pi^{\zeta}\}_{\zeta}$ 是相对于 $\tilde{\pi}$ 的不可约且互不相交的缺陷扇区，$\{\pi^{\sigma,\zeta}\}_{\zeta}$ 也如此。每个可扇区化的缺陷表示都与其中一个酉等价。

证明：注意到，根据引理 7.7.24 和 7.7.36，$\{\pi^{\zeta}\}_{\zeta}$和 $\{\pi^{\sigma,\zeta}\}_{\zeta}$所表示的集合是互不相交的缺陷扇区。现在，设 π 是一个 g-可扇区化表示，其中 g 是非平凡群元素。由引理 7.3.2，我们有 $\pi \simeq \rho$，其中 ρ 是一个g-缺陷扇区。由引理 7.4.27，我们有 $\tilde{\pi}^{\sigma}$ 是一个 g-缺陷扇区。由引理 7.3.22，我们有 ρ 是关于 $\tilde{\pi}^{\sigma}$的一个任意子扇区。但根据引理 7.7.36 $\rho \simeq \tilde{\pi}^{\sigma},\ \zeta$，其中 ζ 属于该集合。对 $g = 1$ 重复相同的分析，并使用引理 7.3.22 和 7.7.24，可得另一种情形，因而得到结论。□

注记 7.7.39。 可以证明，范畴 $\mathbf{DHR}_{\tilde{\pi}^\sigma}(\Lambda)$ 与 $\mathbf{DHR}_{\tilde{\pi}}(\Lambda)$ 编织幺半等价。由于 $\tilde{\alpha}^\sigma_{\tilde{\gamma}}$ 是一个有限深度量子电路，该结论由 [Oga22，定理 61]立即得到。

尽管上述结果比命题 7.7.38更强，我们注意到 $\mathbf{DHR}_{\tilde{\pi}^\sigma}(\Lambda)$ 是以 $\tilde{\pi}^\sigma$ 为参考态的任意子扇区范畴。虽然该范畴中的对象正是我们最终感兴趣的对象，但我们不希望继承该范畴中的融合和编织结构，因为这会忽略缺陷的存在。下面我们将构造我们所关注的 G-交叉编织幺半范畴。

7.7.5 缺陷张量范畴

在本子节中，我们将对称性富化环面码缺陷 $G\mathsf{Sec}^{ETC}$ 描述为一个 $\mathbb{Z}_2$-分级张量范畴。在接下来的子节中，我们将给出其余的G-交叉编织数据。

在本手稿余下部分中，我们固定一条半无限路径 γ_0 及其对偶路径 $\bar{\gamma}_0$，并据此定义缺陷自同构。我们对 γ_0 和 $\bar{\gamma}_0$ 的具体选择将在记号 7.7.41中详细说明。我们将 $\overline{\mathbf{DHR}}_{\tilde{\pi}^\sigma}(\Lambda)$ 记为相对于 $\tilde{\pi}^\sigma_{\tilde{\gamma}_R}$的局域可传输任意子扇区线性 范畴。我们必须在形式上遗忘 $\mathbf{DHR}_{\tilde{\pi}^\sigma}(\Lambda)$ 中通常的张量积。回顾一下，$\mathbf{DHR}_{\tilde{\pi}}(\Lambda)$ 是相对于 $\tilde{\pi}$的局域可传输任意子扇区范畴，我们有

$$G\mathsf{Sec}^{ETC}(\Lambda) = \mathbf{DHR}_{\tilde{\pi}}(\Lambda) \oplus \mathbf{DHR}_{\tilde{\pi}^\sigma}(\Lambda)$$

其中，$\oplus$ 是线性范畴的直和，而不是张量范畴或编织张量范畴的直和。我们将张量积取为通常的缺陷扇区张量积。稍后将会看到，在此张量积下，直和将提升为 $\mathbb{Z}_2$分次。

我们用 $\{1, \epsilon, m, \psi\}$表示 $\mathbf{DHR}_{\tilde{\pi}}(\Lambda)$中的简单对象，例如，$\epsilon$对应于将自同构 $\alpha^\epsilon_{\gamma_0}$ 延拓到 $\mathcal{A}^a$ （引理 7.3.4）。同样，$\mathbf{DHR}_{\tilde{\pi}^\sigma}(\Lambda)$中的简单对象记为 $\{1^\sigma, \epsilon^\sigma, m^\sigma, \psi^\sigma\}$。根据引理 7.7.36，对于每个 $a \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$，我们都可以通过将 $\tilde{\pi}^\sigma_{\gamma_0} \circ a|_{\mathcal{A}}$唯一地延拓到 $\mathcal{A}^a$来定义这些不同的缺陷扇区。换言之，对于每个 $a \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$，我们定义 $a^\sigma := 1^\sigma \otimes \bar{a}$，其中 1^σ是将 $\tilde{\pi}^\sigma_{\gamma_0}$ 延拓到 $\mathcal{A}^a$所得的延拓。我们选取了 $I := \{1, \epsilon, m, \psi, 1^\sigma, \epsilon^\sigma, m^\sigma, \psi^\sigma\}$ 作为$\mathcal{K}_0(G\mathsf{Sec}^{ETC})$的基。

记号 7.7.40. 为简化记号，从现在起，当（对偶）路径是典范的（γ_0） $\bar{\gamma}_0$时，我们省略自同构上的（对偶）路径下标。

记号 7.7.41。 我们将使用图7.15 来确定一些几何记号。首先，我们将原点顶点 0 取为黄色大点。每条竖直边的定向均向上，每条水平边的定向均向右。我们将L 取为紧邻顶点 0 右侧的竖直灰线，使得 $\beta^{r(L)}$ 是该直线右侧各顶点上的对称作用。红色射线为 $\bar{\gamma}_R$。取 γ_0 为从 0 向下延伸的紫色波浪射线。由此，我们有 $\partial\gamma_0 = 0$。我们将 $\bar{\gamma}_0$ 取为橙色对偶路径

它紧邻 γ_0 右侧，并终止于与原点相邻的边。蓝色阴影表示锥 Λ。

注意，由于半平面对称性作用于 γ_0 的右侧，我们自动得到 $\alpha^\epsilon \circ \beta_g^{r(L)} = \beta_g^{r(L)} \circ \alpha^\epsilon$。

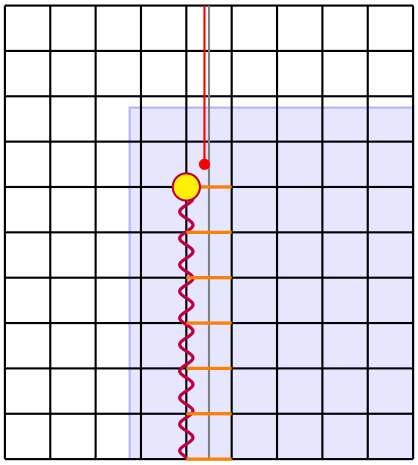


图 7.15：射线 $\bar{\gamma}_R$ 和 ϵ， m， ψ 弦。

引理 7.7.42. *G节^{ETC} 的融合规则由 $\boldsymbol{DHR}_{\tilde{\pi}}(\Lambda)$ 中通常的环面码融合规则以及等式 $a^\sigma \otimes b = (ab)^\sigma$ （对于 a、 $b \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$ 和 $1^\sigma \otimes 1^\sigma = m$）确定。*

证明： 我们已经在命题 7.7.25 中证明，$\mathbf{DHR}_{\tilde{\pi}}(\Lambda)$ 满足环面码通常的融合规则。第二个结论直接由以下事实得出： $a^\sigma = 1^\sigma \otimes a$。最后，我们可以注意到 $\beta_g^{r(L)} \circ \alpha^\sigma = \alpha^\sigma \circ \beta_g^{r(L)}$，并由注记 7.7.33 $\alpha^\sigma \circ \alpha^\sigma = \alpha^m$。因此，

$$1^\sigma \circ 1^\sigma|_{\mathfrak{A}} = \alpha^\sigma \circ \beta_g^{r(\overline{L})} \circ \alpha^\sigma \circ \beta_g^{r(\overline{L})} = \alpha^\sigma \circ \alpha^\sigma \circ \beta_g^{r(\overline{L})} \circ \beta_g^{r(\overline{L})} = \alpha^m.$$

作为辅助代数的端同态， $1^\sigma \otimes 1^\sigma = m$。

注意，其余融合规则都可由 G-交叉编织的存在性，以及对称性在任意子上作用平凡这一事实推出，正如引理 7.7.23中所示。□

命题 7.7.43。 *张量器 $\Omega_{i,\ j}$ 是平凡的。因此，张量范畴 $G\mathsf{Sec}^{ETC}$ 的骨架化是严格的。*

证明： 为证明这一点，我们只需说明，可以为每个同构类选取代表端同态，使任意两个代表的复合仍是一个代表。根据引理 7.7.42，剩下只需证明 $a \otimes 1^\sigma = a^\sigma$ 对 $a \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$成立。其余等式都可由此轻易推出。

对于 $a \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$，我们有

$$\alpha^a \circ \alpha^\sigma = \alpha^\sigma \circ \alpha^a \qquad \text{and} \qquad \alpha^a \circ \beta_g^{r(\overline{L})} = \beta_g^{r(\overline{L})} \circ \alpha^a.$$

因此，我们有

$$a \otimes 1^{\sigma}|_{\mathfrak{A}} = \alpha^{a} \circ \alpha^{\sigma} \circ \beta_g^{r(\overline{L})} = \alpha^{\sigma} \circ \beta_g^{r(\overline{L})} \circ \alpha^{a} = a^{\sigma}|_{\mathfrak{A}}.$$

将此端同态扩展到辅助代数 $\mathcal{A}^a$，可得 $a \otimes 1^{\sigma} = a^{\sigma}$。因此，所有张量结构同构都是平凡的。□

7.7.6 对称性分数化

现在，我们按照第 G节^{ETC} 中的方案，计算 7.3.4.1的对称性分数化数据。回顾一下，我们选择的 $\mathcal{K}_0(G$节$^{ETC})$ 的基为 $I = \{1, \epsilon, m, \psi, 1^{\sigma}, \epsilon^{\sigma}, m^{\sigma}, \psi^{\sigma}\}$。对于每个 $h \in \mathbb{Z}_2$和 $i \in I$，我们都有酉交织算子V_h^i: $\gamma_h(\pi_i) \to \pi_{h(i)}$。我们将 $g \in \mathbb{Z}_2$ 保留为非平凡元素。当 $h \neq g$， $V_h^i = 1$。

引理 7.7.44。对于任意 $x \in \mathcal{A}^a$,

$$\tau_0^z \gamma_g(\alpha^{\epsilon})(x)(\tau_0^z)^* = \alpha^{\epsilon}(x).$$

证明：由连续性可知，只需证明 x 为局部算子的情形。根据定义 γ_g，我们有

$$\tau_0^z \gamma_g(\alpha^{\epsilon})(x)(\tau_0^z)^* = \tau_0^z \beta_g \alpha^{\epsilon}(\beta_g^{-1}(x))(\tau_0^z)^*.$$

由于 x 是局部的，且 β_g^{-1}保持局域算子的支撑不变， $\beta_g^{-1}(x)$ 也是局部的。取γ' 为路径 γ_0 的一条有限子路径，它定义了 α^{ϵ}，其中 $\partial_0\gamma' = \partial\gamma_0 = 0$。利用注记7.7.21，由于 α^{ϵ} 是一个有限深度量子电路，我们可以选择足够长的 γ'，使得

$$\alpha^{\epsilon}(\beta_g^{-1}(x)) = \alpha_{\gamma'}^{\epsilon}(\beta_g^{-1}(x))$$

并且使 $\alpha^{\epsilon}(x)$ 的支撑与 $\partial_1\gamma'$不相交。最后，结合引理7.7.20 ，以上推理表明

$$\begin{aligned}
\tau_0^z \gamma_g(\alpha^{\epsilon})(x)(\tau_0^z)^* &= \tau_0^z \beta_g(\alpha_{\gamma'}^{\epsilon}(\beta_g^{-1}(x)))(\tau_0^z)^* \\
&= \tau_0^z \beta_g(\tilde{F}_{\gamma'}^{\epsilon}) x \beta_g(\tilde{F}_{\gamma'}^{\epsilon})^*(\tau_0^z)^* \\
&= \tau_{\partial_1\gamma'}^z \tilde{F}_{\gamma'}^{\epsilon} x (\tilde{F}_{\gamma'}^{\epsilon})^*(\tau_{\partial_1\gamma'}^z)^* \\
&= \tau_{\partial_1\gamma'}^z \alpha_{\gamma'}^{\epsilon}(x)(\tau_{\partial_1\gamma'}^z)^* \\
&= \tau_{\partial_1\gamma'}^z \alpha^{\epsilon}(x)(\tau_{\partial_1\gamma'}^z)^* \\
&= \alpha^{\epsilon}(x).
\end{aligned}$$

□

该引理表明，我们可以取 $V_g^{\epsilon} = \tau_0^z$，其中 g 是 $\mathbb{Z}_2$ 的非平凡元素。类似的计算表明

$$V_g^1 = V_g^m = V_g^{1^{\sigma}} = V_g^{m^{\sigma}} = \mathbb{1}$$

and

$$V_g^{\psi} = V_g^{\epsilon^\sigma} = V_g^{\psi^\sigma} = \tau^z_{\partial\gamma}.$$

注意到 1^σ 在该对称性下是不变的，因此我们有：第 η节中的非平凡值（作为对应于态射的算子，而非态射本身）7.3.4.1 为

$$\eta(g,g)_\epsilon = \eta(g,g)_\psi = \eta(g,g)_{\epsilon^\sigma} = \eta(g,g)_{\psi^\sigma} = -1.$$

由于 $V_1 = \mathbb{1}$，我们得到，对于所有基元素 $a, b \in \mathcal{K}_0$（GSec），都有 $\mu_1(a,b) = 1$。

现在我们计算 $\mu_g(a,b)$，其中 g 是 $\mathbb{Z}_2$ 的非平凡元素。命题7.7.43 告诉我们，所有张量结构同构 $(\Omega_{i,j})$ 都是平凡的，因此我们有

$$V_g^{ij} = \mu_g(i,j) V_g^i \gamma_g(\pi_i)(V_g^j).$$

在这个模型中，可以很容易地验证 $V_g^{ij} = V_g^i V_g^j$。因此，

$$\mu_g(i,j)\mathbb{1} = \gamma_g(\pi_i)(V_g^j)^* V_g^j = V_g^i \pi_i(V_g^j)^*(V_g^i)^* V_g^j.$$

然而，利用以下事实：对于所有基元素 $i,j \in I$，$\pi_i(\tau_0^z) = \tau_0^z$且 $[V_g^i, V_g^j] = 0$，我们得到 $\mu_g(i,j) = 1$。因此，对应于 μ 的所有骨架数据都是平凡的。

7.7.7 G-交叉编织

现在我们可以计算 G-交叉编织数据了。最重要的是，我们要计算 $a \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$ 的 $c_{1^\sigma,1^\sigma}$、$c_{a,1^\sigma}$ 和 $c_{1^\sigma,a}$。

在记号 7.7.45中，我们将定义算子 U_N^π，其极限为算子 U^π，该算子将 π从 Λ输运至 Δ，适用于 π中的某些简单 G第^{ETC}节。

记号 7.7.45。我们将考虑下面的两幅图（图 7.16 和 7.17）来定义U_N^π。图中描绘的是 $N = 4$的情形。我们从第一幅图（图 7.16）开始。关于根据这一几何结构定义缺陷自同构的内容，请参阅记号 7.7.41 。回忆一下，我们将顶点 0 取为黄色大点。我们将$-L$ 取为紧邻顶点 0（原点）右侧的竖直灰线，使得 $\beta_g^{r(L)}$是这条线右侧顶点上的对称作用。如前所述，我们将 γ_0 取为紫色波浪射线，并将 γ_0 取为紧邻 γ_0 右侧、终止于原点相邻边的对偶路径。锥 Λ 以蓝色阴影表示，而锥 Δ 以红色表示。

取路径ξ_N 为沿顺时针方向绕过黑色大圆点的黑色蜿蜒对偶路径。橙色边表示 ξ_N经过的边。此对偶路径以 N 参数化，使其在原点下方第 N条边处与 γ 相交。取区域 A_N 为由 ξ_N围成的黑点$(N+2) \times 5$ 集。现在我们可以定义

$$U_N^\sigma := F^\sigma_{\bar{\xi}_N} \prod_{v \in A_N} \tau_v^x.$$

我们还定义

$$U_N^m := F^m_{\bar{\xi}_N}.$$

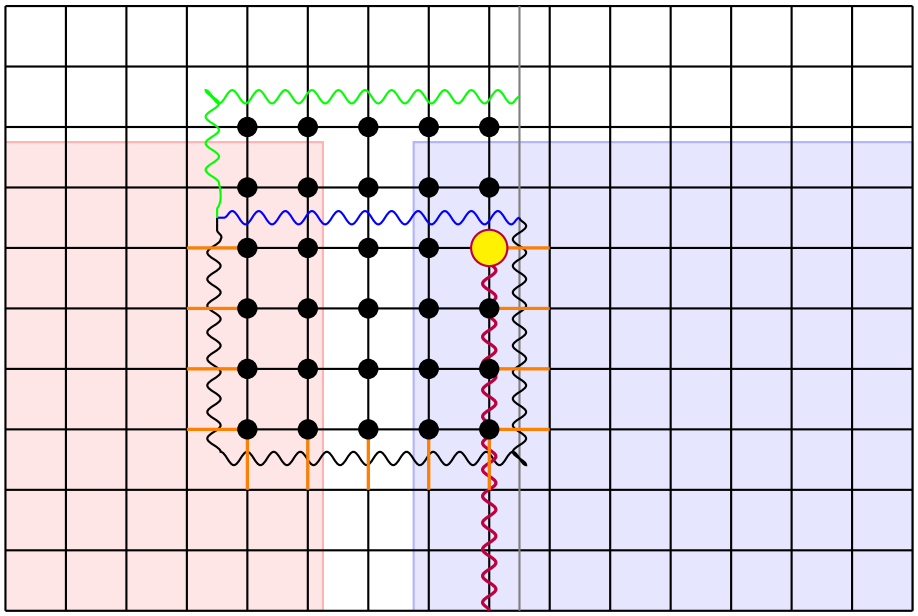


图 7.16： $N = 4$时 1^σ弦与 U_N^m和 U_N^σ算子的几何结构。

在第二幅图（图7.17）中，我们用紫色画出了情形 ζ_N 下的路径 $N = 4$。它从 0 向下延伸 N 条边，沿着 5 条边朝 Δ前进，然后向上延伸 N 条边。注意， ζ_N 和 ξ_N 在原点下方共享第 N条边。从ζ_N，我们定义

$$U_N^\epsilon := \tilde{F}^\epsilon_{\zeta_N}.$$

我们还定义

$$U_N^\psi := U_N^\epsilon U_N^m.$$

注意，我们之前分别将 F_γ^ϵ和 F_γ^m简称为F_γ和F_γ。为避免混淆，在下面的讨论中我们会保留这些上标。

命题 7.7.46。 序列 (U_N^σ)、(U_N^m)、(U_N^ϵ)和(U_N^ψ) 在弱算子拓扑下收敛到酉算子 U^σ、 U^ϵ、 U^m、 U^ψ， 它们将各自对应的缺陷从 Λ 传输到 Δ。

证明： U^ϵ， U^m， U^ψ的陈述可通过适当修改[Naa11，引理 4。1] 中的证明得到，以考虑到我们模型的弦算符并非恰好是通常的环面码弦算符。现在我们证明关于 U^σ的陈述。定义 ξ' 为图7.16中从 0 开始的蓝色对偶路径。令 S 为图 7.16中 ξ' 正上方的 2×5 顶点自旋网格。令 γ' 为图 7.16 中的绿色对偶路径，其方向选取为使其端点与 ξ'相同。令 η_1 为一条从 γ'的端点出发并向下延伸的垂直对偶路径，并令 $\eta_2 := \xi' + \eta_1$。我们令 L_1 为由路径 L 、γ' 和η_1依次组成的无限路径。同理，我们令 L_2 为由路径L和 η_2依次组成的无限路径。于是我们注意到 $\tilde{\pi} \circ \alpha^\sigma_{\eta_1} \circ \beta_g^{r(L_1)}$是一个在 $\bar{\Delta}$中局域化的缺陷扇区 g。现在注意到，酉算子 $U := F^\sigma_{\xi'} \prod_{v \in S} \tau_v^x$交织着

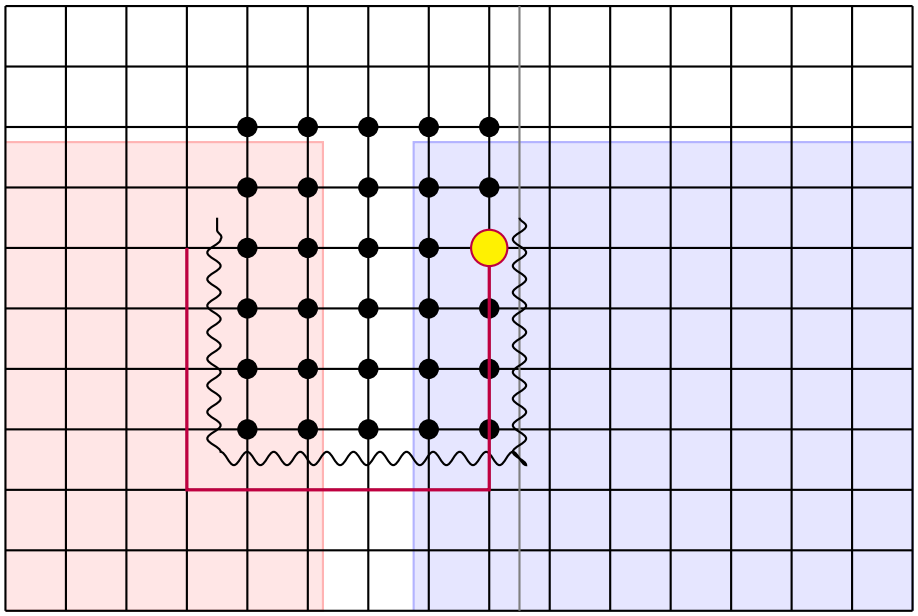


图 7.17： U_N^{ϵ}和 U_N^{ψ}算子的几何结构，其中 $N = 4$。

缺陷扇区 g局域化于 Λ，并且 $\tilde{\pi} \circ \alpha_{\eta_2}^{\sigma} \circ \beta_{g^-}^{r(L_2)}$。然后，应用引理7.7.29，即可得到所需结果。□

原则上，我们可以定义更多酉交织算子，将其他对称性缺陷从 Λ 输运至 Δ。我们省略这些算子的定义，因为在计算 G-交叉编织数据时不会用到它们。

下文中，我们将采用根据弦算子伴随定义的任意子自同构，参见注记7.7.21。

命题 7.7.47。任意子的唯一非平凡编织同构为

$$c_{m,\epsilon} = c_{m,\psi} = c_{\psi,\epsilon} = c_{\psi,\psi} = -1.$$

证明：根据我们设置的几何结构，只要 $a \in \{1, \epsilon\}$ 或$b \in \{1, m\}$,

$$c_{a,b} = b((U^a)^*)U^a = 1.$$

令 N表示 0 下方第 N条边。根据定义 $\alpha_{\gamma_0}^m$和 U_N^{ϵ}，我们有

$$m((U_N^{\epsilon})^*)U_N^{\epsilon} = \sigma_N^x(U_N^{\epsilon})^*\sigma_N^x U_N^{\epsilon} = \sigma_N^x\sigma_N^z\sigma_N^x\sigma_N^z = -1.$$

因此，$c_{m,\epsilon} = -1$。

由连续性可得

$$c_{m,\psi} = \psi((U^m)^*)U^m = \epsilon(m((U^m)^*))U^m = \epsilon((U^m)^*)U^m = c_{m,\epsilon} = -1.$$

利用事实 7.3.28，我们有

$$c_{\psi,b} = c_{m,b}c_{\epsilon,b} = c_{m,b}.$$

因此，我们也有 $c_{\psi,\epsilon} = c_{\psi,\psi} = -1$。 □

命题 7.7.48。 我们有编织 $c_{1^\sigma,\ \epsilon} = \tau_0^z$。

证明：在此证明中，令 γ_N 为由 γ_0 的顶部 N 条边构成的路径。定义自伴算子 $X_N := \prod_{v\in A_N} \tau_v^x$。那么

$$U_N^\sigma = X_N F_{\bar{\xi}_N}^\sigma = F_{\bar{\xi}_N}^\sigma X_N.$$

我们将 γ_N 的最顶部边标记为边 1，将 γ_N 的最底部边标记为 N。我们将从边 1 顶端到边 N 底端的 $N+1$ 个顶点依次标记为 $0 = \partial\gamma_0 = \partial_0\gamma_N$ 至 $N = \partial_1\gamma_N$。使用此记法，我们定义

$$S_N := \prod_{e=1}^{N} \sigma_e^z, \qquad T_n := \prod_{k=1}^{n} i^{\sigma_k^z(\tau_{k-1}^z - \tau_k^z)/2},$$

使得 $\tilde{F}_{\gamma_N}^\epsilon = S_N T_N$。简单计算可得 $T_n^2 = \tau_0^z \tau_n^z$。另外注意，

$$X_N T_N^* = X_N T_{N-1}^* i^{-\sigma_N^x(\tau_{N-1}^z - \tau_N^z)/2} = T_{N-1} X_N i^{-\sigma_N^x(\tau_{N-1}^z - \tau_N^z)/2}.$$

我们利用这些事实和记法计算如下：

$$\begin{aligned}
\epsilon((U_N^\sigma)^*) &= \tilde{F}_{\gamma_N}^\epsilon (U_N^\sigma)^* (\tilde{F}_{\gamma_N}^\epsilon)^* \\
&= \left[\tilde{F}_{\gamma_N}^\epsilon (F_{\bar{\xi}_N}^\sigma)^* (\tilde{F}_{\gamma_N}^\epsilon)^*\right] \left[\tilde{F}_{\gamma_N}^\epsilon X_N (\tilde{F}_{\gamma_N}^\epsilon)^*\right] \\
&= \left[\sigma_N^z (F_{\bar{\xi}_N}^\sigma)^* \sigma_N^z\right] \left[\tilde{F}_{\gamma_N}^\epsilon X_N (\tilde{F}_{\gamma_N}^\epsilon)^*\right] \\
&= \left[e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_N^x} (F_{\bar{\xi}_N}^\sigma)^*\right] [S_N T_N X_N T_N^* S_N] \\
&= \left[e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_N^x} (F_{\bar{\xi}_N}^\sigma)^*\right] \left[S_N T_{N-1}^2 i^{\sigma_N^x(\tau_{N-1}^z - \tau_N^z)/2} X_N i^{-\sigma_N^x(\tau_{N-1}^z - \tau_N^z)/2} S_N\right] \\
&= \left[-i\sigma_N^x (F_{\bar{\xi}_N}^\sigma)^*\right] \left[S_N T_{N-1}^2 i^{\sigma_N^x \tau_{N-1}^z} X_N S_N\right] \\
&= \left[-i\sigma_N^x (F_{\bar{\xi}_N}^\sigma)^*\right] \left[S_N \tau_0^z \tau_{N-1}^z (i\sigma_N^x \tau_{N-1}^z) X_N S_N\right] \\
&= \sigma_N^x \tau_0^z (F_{\bar{\xi}_N}^\sigma)^* S_N \sigma_N^x S_N X_N \\
&= -\tau_0^z (F_{\bar{\xi}_N}^\sigma)^* X_N \\
&= -\tau_0^z (U_N^\sigma)^*.
\end{aligned}$$

利用引理 7.7.44，我们便有

$$\gamma_g(\epsilon)((U_N^\sigma)^*) = \tau_0^z(-\tau_0^z (U_N^\sigma)^*)\tau_0^z = \tau_0^z (U_N^\sigma)^*.$$

取适当的极限并利用连续性，我们得到

$$c_{1^\sigma,\epsilon} = \gamma_g(\epsilon)((U^\sigma)^*) U^\sigma = \tau_0^z.$$

□

引理 7.7.49。在 G节^{ETC}中，我们有 $c_{1^\sigma,\ 1} = c_{1^\sigma,\ m} = c_{1^\sigma,\ 1^\sigma} = 1$。

证明：取 $a \in \{1, m, 1^\sigma\}$。则 $\gamma_g(a) = a$且 $a((U_N^\sigma)^*) = (U_N^\sigma)^*$。因此，

$$c_{1^\sigma,a} = \gamma_g(a)((U^\sigma)^*)U^\sigma = 1.$$

□

引理 7.7.50。我们有编织 $c_{1^\sigma,\ \psi} = \tau_0^z$。

证明：依照引理 7.7.44的证明，可以证明 $\gamma_g(\psi)(-) = \tau_0^z\psi(-)\tau_0^z$。接下来可以进行如下计算：

$$\begin{aligned} c_{1^\sigma,\psi} &= \gamma_g(\psi)((U^\sigma)^*)U^\sigma = \tau_0^z\epsilon(m((U^\sigma)^*))\tau_0^z U^\sigma = \tau_0^z\epsilon(c_{1^\sigma,m}(U^\sigma)^*)\tau_0^z U^\sigma \\ &= \tau_0^z\epsilon((U^\sigma)^*)\tau_0^z U^\sigma = \gamma_g(\epsilon)((U^\sigma)^*)U^\sigma = c_{1^\sigma,\epsilon} = \tau_0^z. \end{aligned}$$

其中，第四个等式由以下事实可得：$c_{1^\sigma,\ m} = 1$，根据引理 7.7.49；第五个等式由引理 7.7.44得出，最后一个等式由命题 7.7.48得出。□

引理 7.7.51。对于 $b \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$，$c_{1^\sigma,\ b^\sigma} = c_{1^\sigma,\ b}$。

证明：若 $n = 0$，则取 $b \in \{1, m\}$，若 $n = 1$，则取 $b \in \{\epsilon, \psi\}$。利用引理 $c_{1^\sigma,\ 1^\sigma} = 1$中的事实7.7.49，并将引理 7.7.44推广，可得 $\gamma_g(\psi)(-) = \tau_0^z\psi(-)\tau_0^z$，于是有

$$\begin{aligned} c_{1^\sigma,b^\sigma} &= \gamma_g(b^\sigma)((U^\sigma)^*)U^\sigma = (\tau_0^z)^n b(1^\sigma((U^\sigma)^*))(\tau_0^z)^n U^\sigma \\ &= (\tau_0^z)^n b(c_{1^\sigma,1^\sigma}(U^\sigma)^*)(\tau_0^z)^n U^\sigma = \gamma_g(b)(c_{1^\sigma,1^\sigma}(U^\sigma)^*)U^\sigma = c_{1^\sigma,b}. \end{aligned}$$

□

引理 7.7.52. 对于所有 $a \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$，都有 $c_{a,\ 1^\sigma} = 1$。

证明：令 $a \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$。直接计算可得 $1^\sigma((U_N^a)^*) = (U_N^a)^*$。因此，

$$c_{a,1^\sigma} = 1^\sigma((U^a)^*)U^a = 1.$$

□

引理 7.7.53. 对于 $a,\ b \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$，$c_{a,\ b^\sigma} = c_{a,\ b}$。

证明：利用 这一事实 $c_{a,\ b}$ 是命题 7.7.47中的单位元的标量倍数 ，

$$\begin{aligned} c_{a,b^\sigma} &= b^\sigma((U^a)^*)U^a = 1^\sigma(b((U^a)^*))U^a = 1^\sigma(c_{a,b}(U^a)^*)U^a \\ &= c_{a,b}1^\sigma((U^a)^*)U^a = c_{a,b}c_{a,1^\sigma} = c_{a,b} \end{aligned}$$

这里我们用到了引理 $c_{a,\ 1^\sigma} = 1$ 7.7.52中的事实。 □

引理 7.7.54。对于 $a,\ b \in \{1, \epsilon, m, \psi\}$，$c_{a^\sigma,b} = c_{a,b}c_{1^\sigma,b}$

证明： 这是事实 7.3.28 的一个特殊情形，理由如下：

$$c_{a^\sigma,b} = c_{1^\sigma,b}1^\sigma(c_{a,b}) = c_{a,b}c_{1^\sigma,b}.$$

□

引理 7.7.55。对于 a、$b \in \{1,\epsilon,m,\psi\}$、$c_{a^\sigma,b^\sigma} = c_{a,b}c_{1^\sigma和b}$。

证明： 根据事实7.3.28，

$$c_{a^\sigma,b^\sigma} = c_{1^\sigma,b^\sigma}1^\sigma(c_{a,b^\sigma}) = c_{1^\sigma,b^\sigma}c_{a,b^\sigma},$$

其中第二个等式利用了以下事实：根据引理 7.7.53 和命题 7.7.47，c_{a,b^σ} 是恒等算子的标量倍。然后我们使用引理 7.7.51 得到

$$c_{a^\sigma,b^\sigma} = c_{1^\sigma,b}c_{a,b}.$$

□

定理 7.7.56。 G-交叉编织在 $G\mathsf{Sec}^{ETC}$ 上的形式如下表所示：

$c_{\pi_1,\ \pi_2}$	$\pi_2=1$	ϵ	m	ψ	1^σ	ϵ^σ	m^σ	ψ^σ
$\pi_1=1$	1	1	1	1	1	1	1	1
ϵ	1	1	1	1	1	1	1	1
m	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
ψ	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1^σ	1	τ_0^z	1	τ_0^z	1	τ_0^z	1	τ_0^z
ϵ^σ	1	τ_0^z	1	τ_0^z	1	τ_0^z	1	τ_0^z
m^σ	1	$-\tau_0^z$	1	$-\tau_0^z$	1	$-\tau_0^z$	1	$-\tau_0^z$
ψ^σ	1	$-\tau_0^z$	1	$-\tau_0^z$	1	$-\tau_0^z$	1	$-\tau_0^z$

证明： 该表的左上象限由命题 7.7.47给出。然后利用左上象限和引理 7.7.53得到右上象限。第五行由命题 7.7.48、引理 7.7.49、引理 7.7.50以及引理 7.7.51得出。下半部分的其余部分由上半部分、第五行以及引理 7.7.54 和7.7.55给出。□

7.8 讨论

在本手稿中，我们严格证明了 [BBCW19] 关于一个 2+1D SET 的对称性缺陷构成一个 G-交叉编织张量范畴的预期。为此，我们依据 DHR 范式定义了对称性缺陷。通过计算与 SPT 以及$\mathbb{Z}_2$ 对称环面码相关的晶格模型所对应的缺陷范畴，我们展示了这一定义的实用性。

未来研究的一个潜在方向是理解反幺正对称性（例如时间反演对称性）的作用。在 [BBC+20]、[WL17],和 [BC18]中可以找到对此类 SET 的讨论。然而，对于此类体区缺陷的详细微观理解仍然缺失，尤其是在 DHR 理论的背景下。

我们预计，还有许多其他晶格模型也适用于我们的分析。特别是， [LSM+23] 中提出的对称性富化拓扑序模型构成了一类极为一般的模型，它们是通过依次规范化全局对称性的阿贝尔商群得到的。除了提供大量可供研究的模型外，这项研究也表明，从规范化的角度理解超选择理论或许颇有裨益。

最后， [HBFL16] 提出了一个 $\mathbb{Z}_2$对称环面码模型，其中对称性会交换任意子 ϵ 和 m。在该例中， $\mathbb{Z}_2$对称性缺陷具有非整数的量子维数，这为基于 DHR 风格的分析带来了有趣的挑战。这篇手稿还介绍了各种其他可通过规范化全局对称性而与弦网相关联的精确可解对称性富化拓扑序。

致谢

我们感谢 Juan Felipe Ariza Mej´ıa、Sven Bachmann、Tristen Brisky、Chian Yeong Chuah、Martin Fraas、Brett Hungar、Corey Jones、Michael Levin、Pieter Naaijkens、Bruno Nachtergaele、David Penneys、Sean Sanford、Wilbur Shirley、Daniel Spiegel 和 Dominic Williamson，感谢他们的宝贵交流。SV 获得了美国国家科学基金会 DMS-2108390 号资助。DW 获得了美国国家科学基金会 DMS-2154389 号资助。KK 获得了美国国家科学基金会 DMS 1654159 号资助，同时也获得了新兴材料中心的支持；该中心是由美国国家科学基金会资助的材料研究科学与工程中心，资助编号为 DMR-2011876。

7.A 算子代数与范畴论简介

7.A.1 一般设定、锥与无穷远边界

令 Γ 为一个由顶点、边和面组成的二维胞腔复形，并在Γ 的顶点上赋予图距离。对于我们所考虑的示例，通常取 Γ 为正则晶格，例如三角晶格或方格晶格。图7.1a中给出了一个示例。

给定一个子集 $\Sigma \subset \Gamma$，记 Σ的补集为 $\Sigma^c \subset \Gamma$，其定义为 $\Sigma \cap \Sigma^c = \emptyset$和 $\Sigma \cup \Sigma^c = \Gamma$。

现在我们来描述 $\mathbb{R}^2$ [BBC+24（第 A 节）中的“无穷远边界圆”2]。更准确地说，对于某些子集 $S \subseteq \mathbb{R}^2$，存在一个相应的子集 $\partial_\infty(S) \subseteq S^1$，定义如下：

$$\partial_\infty(S) \coloneqq \lim_{r\to\infty} r^{-1} \cdot (C_r \cap S),$$

其中 C_r 是以原点为中心、半径为 r 的圆。

我们考虑两类可定义 $S \subseteq \mathbb{R}^2$ $\partial_\infty(S)$ 的子集，特别是半无限路径和锥。对于许多半无限路径而言， p $\partial_\infty(p)$ 仅由一个

点组成。我们用 $P(\mathbb{R}^2)$ 表示这类路径的集合。通常， $\mathbb{R}^2$ 中的一条路径决定了 Γ 的对偶晶格上的一条¯路径。更具体地说， Γ 的对偶晶格是晶格 Γ，其顶点对应于 Γ 中的面，并且其边与 Γ 的边横向相交。如果路径 $p \subset \mathbb{R}^2$ 不与 Γ 中的任何顶点相交，那么它便决定了对偶晶格上的一条路径，¯ 即由与 p 相交的边所对应的对偶边组成的路径。我们用 $P(\Gamma)$ 表示路径 $\gamma \subset \bar{\Gamma}$ 的集合，这些路径对应于一条路径 $p \subset \mathbb{R}^2$ ，其中 $p \in P(\mathbb{R}^2)$。在本文中，我们固定一条路径 $R \in P(\mathbb{R}^2)$，它对应于一条对偶路径 $\bar{\gamma}_R \in \bar{P}(\Gamma)$。为简单起见，我们通常假设 R 是一条射线，不过也可以考虑更一般的路径 R。

现在描述我们所考虑的主要区域类型，即锥。具体而言，锥 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ 是如下形式的子集

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R}^2 : (x-a) \cdot \hat{v}/2 > \|x-a\| \cos(\theta/2)\}.$$

这里 $a \in \mathbb{R}^2$ 是锥的顶点，ˆ$v \in \mathbb{R}^2$ 是指定锥轴的单位向量，而 $\theta \in (0, 2\pi)$是锥的张角。注意，若 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个锥，则 ∂_∞(Δ是 S^1 中以ˆv 为中点、长度为 θ的区间。因此，我们称 ∂_∞(Δ为无穷远处的边界区间，对应于 Δ [BBC+24，定义 A。5]。

最后，我们将中的锥 Γ 定义为形如 $\Lambda = \Gamma \cap \Delta$的子集 $\Lambda \subseteq \Gamma$，其中 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$是一个锥。注意，通常有许多种 Δ 的选择满足 $\Lambda = \Gamma \cap \Delta$；然而，所有选择都具有相同的无穷远处的边界区间。

7.A.2 算子代数

本节简要介绍无限晶格上量子自旋系统的算子代数方法。有关更多细节，请参阅 [Naa17、BR87、BR97]。在本节及接下来的几个与模型无关的章节中，我们使用“格点”一词。本文所讨论的例子中，格点是 Γ的顶点；不过，“格点”一词也使我们能够涵盖更一般的模型（例如 [HBFL16]中所描述的模型）。为每个格点 $s \in \Gamma$关联一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^{d_s}$ ，其中 $d_s \in \mathbb{N}$。令 Γ_f 为 Γ的有限子集所构成的集合。于是，我们可以将有限格点集 $S \in \Gamma_f$ 上的张量积定义为$\mathcal{H}_S := \bigotimes_{s \in S} \mathcal{H}_s$。那么， $\mathcal{A}_S := B(\mathcal{H}_S)$ 是一个 C^* 代数。

现在，令 S， $S' \in \Gamma_f$ 满足 $S \subset S'$。那么，我们可以通过在所有 $s \in S' \setminus S$ 上张量乘以单位元来定义典范包含关系$\mathcal{A}_S \hookrightarrow \mathcal{A}_{S'}$。据此，我们可以将局域可观测量代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ 定义为

$$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} := \bigcup_{S \in \Gamma_f} \mathcal{A}_S$$

及其范数完备化，

$$\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}}^{\|\cdot\|}$$

这个代数称为准局域可观测量代数，或简称准局域代数。

顾名思义，该代数中的元素都可以由严格局域可观测量逼近，也就是说，这些可观测量仅在有限子集 $S \in \Gamma_f$ 上以不同于单位元的方式作用。我们称可观测量 $A \in \mathcal{A}$ 的 支撑是满足 $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ 的最小集合 $\Sigma \subset \Gamma$，并将 A 的支撑记为 supp(A)。

我们注意到，可以在任意（不一定有限的）子集$\Sigma \subset \Gamma$ 上定义准局域代数 $\mathcal{A}_\Sigma$：首先将 Γ 替换为 Σ，然后采用上述步骤。当讨论锥 Λ上的准局域代数 $\mathcal{A}_\Lambda$ 时，我们将主要使用这一事实。

7.A.2.1 态与表示

设 ω 是 $\mathcal{A}$ 上的一个态，即范数为 1 的正线性泛函。我们用 $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 上所有态构成的空间。

利用 Gelfand、Naimark 和 Segal 的构造（简称 GNS 构造），可以为 $(\omega, \mathcal{A})$ 关联一个 GNS 三元组 $(\pi, \mathcal{H}, |\Omega\rangle)$，其中 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，$\pi: \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ 是映到 $\mathcal{H}$ 上的一个 *-表示，而 $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}$ 是一个循环向量，使得对所有 $A \in \mathcal{A}$，都有 $\omega(A) = \langle\Omega\ \pi(A)\Omega\rangle$。任意态 ω 对应的 GNS 三元组在酉等价意义下唯一。

如果对每个满足 $0 \le \phi \le \omega$、$\phi = \phi(1)\omega$ 的 $\phi: \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$，一个态都满足相应条件，我们就称该态为纯态。如果 ω 是一个纯态，那么它的 GNS 表示 π 是不可约的。

若两个表示 $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ 和 $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ 酉等价，则记为$\pi_1 \simeq \pi_2$。若两个态 ω_1，ω_2 属于 $\mathcal{A}$，且它们的 GNS 表示等价，则称这两个态等价（仍记为 $\omega_1 \simeq \omega_2$）。

7.A.2.2 动力学

可以为任意 $S \in \Gamma_f$定义一个自伴哈密顿量 $H_S \in \mathcal{A}_S$。在无限体积极限下，H_S 在范数意义下不收敛，但仍可作为动力学生成元而具有意义。对于任意可观测量 $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$，极限 $\delta(A) := \lim_{S\to\Gamma} i[H_S, A]$ 存在，并扩展为 $\mathcal{A}$ 上稠密定义的无界 *-导子。若一个态 ω_0 满足对所有 $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$都有下式，则称其为**基态**：

$$-i\omega_0(A^*\delta(A)) \ge 0,$$

若存在某个 $g > 0$，使得对所有满足 $\omega_0(A) = 0$ 的 $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$，都有下式成立，则称其有**能隙**：

$$-i\omega_0(A^*\delta(A)) \ge g\omega_0(A^*A).$$

在我们的例子中，哈密顿量 H_S 将具有如下形式：$H_S = \sum_{Z\subseteq S} \Phi(Z)$。这里，$\Phi: \Gamma_f \to \mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}$ 是一个满足以下条件的映射：

- $\Phi(Z) \in \mathcal{A}_Z$ 对于 $Z \in \Gamma_f$，并且
- $\Phi(Z) \ge 0$ 对于所有 $Z \in \Gamma_f$。

我们称 $\Phi(Z)$ 为**相互作用**。如果存在 $n > 0$，使得当 Z 不包含在半径为 n的球中时，$\Phi(Z) = 0$，则称这些相互作用为**有限程**。注意，在这种情况下，对于满足 $\mathrm{supp}(A) = S$ 的 $A \in \mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}$，我们有：

$$\delta(A) = i\left[\sum_{Z\cap S\neq\emptyset} \Phi(Z), A\right],$$

由于相互作用是有限程的，因此该和是有限的。类似地，如果存在某个 $N > 0$，使得对每个 $Z \in \Gamma_f$, $\|\Phi(Z)\| \le N$，我们就称相互作用是一致有界的。在我们的例子中，相互作用将是一致有界且有限程的。

若基态 ω_0 对所有 $S \in \Gamma_f$ 都满足 $\omega_0(H_S) = 0$，则称其为无挫折基态。注意，根据 [CNN18，第 3.8], 条引理，态 ω_0: $\mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ 是无挫折基态，当且仅当对所有 $S \in \Gamma_f$ 都有 $\omega_0(H_S) = 0$。在我们的例子中，对于所考虑的导子，将存在唯一的无挫折基态 ω_0。根据标准论证（例如参见 [JNPW23，第 2.24] 条推论），ω_0 必须是纯态。事实上，假设 ϕ: $\mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ 满足 $0 \leq \phi \leq \omega_0$。那么对所有 $S \in \Gamma_f$，我们有

$$0 \leq \phi(H_S) \leq \omega_0(H_S) = 0,$$

因此，对于所有 $S \in \Gamma_f$，$\phi(H_S) = 0$。所以，由 $\omega(A) = \phi^{1}(\mathbb{1})\phi(A)$ 定义的映射 ω: $\mathfrak{A} \to \mathbb{C}$，对 $A \in \mathfrak{A}$ 而言是一个态，并满足对于所有 $S \in \Gamma_f$，$\omega(H_S) = 0$，因此 ω 是一个无挫折基态。于是，$\omega = \omega_0$，从而 $\phi = \phi(\mathbb{1})\omega_0$。

我们令 $(\pi_0, \mathcal{H}_0)$ 为 ω_0 的 GNS 表示。

7.A.2.3 冯·诺伊曼代数

令 $(\pi_0, \mathcal{H}_0)$ 为态 ω_0: $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 的 GNS 表示。对于每个集合 $S \subseteq \Gamma$，我们可以将 $\mathcal{R}(S) := \pi_0(\mathcal{A}_S)'' \subseteq B(\mathcal{H}_0)$ 记作，其中 $(')$ 表示 $B(\mathcal{H}_0)$ 中的交换子。等价地，$\mathcal{R}(S)$ 是 $\pi_0(\mathcal{A}_S)$ 在弱算子拓扑下的闭包。更具体地说，若 (A_i) 是 $B(\mathcal{H}_0)$ 中的一个网，则对于所有 $\xi, \eta \in \mathcal{H}_0$，$\langle \eta, A_i \xi \rangle \to \langle \eta, A\xi \rangle$ 时，$A_i \to A$。若态 ω_0 是纯态，则代数 $\mathcal{R}(S)$ 是因子，这意味着它们的中心是平凡的。

冯·诺伊曼代数 M 中两个投影存在一种有用的等价概念。若 $p, q \in M$ 是两个投影，我们称 p, q 是穆雷–冯·诺依曼等价的，记作$p \sim q$，如果存在 $v \in M$ 使得 $v^*v = P$ 且 $vv^* = Q$。若冯·诺伊曼代数 M存在 $p \in M$，使得 $p \neq \mathbb{1}$ 但 $p \sim \mathbb{1}$ 在 M中，则称其为无限。冯·诺伊曼代数 M 还有一个更具体的概念，即适当无限；不过，当 M 是因子时，这等价于无限。我们将考虑区域 $\Lambda \subseteq \Gamma$（具体而言是锥），使得代数 $\mathcal{R}(\Lambda)$ 是无限因子。

7.A.2.4 对称性

我们假设存在一个群 G 到 $\mathcal{A}$上的对称作用，即一个忠实同态β: $G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$，其定义为 $g \mapsto \beta_g$ 对所有 $g \in G$ 均成立。我们称 β_g 为一个对称自同构。在我们考虑的情形中，对称作用是格点上的，即对每个 $s \in \Gamma$，我们假设 G 在每个 $\mathcal{H}_s$ 上都有一个由酉算子 U_s^g 作用于格点 s的作用。在这种情况下，β_g 由定义 7.2.1中的公式给出。

令 α: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是一个自同构。如果对于所有 $g \in G$ 都有$\alpha \circ \beta_g = \beta_g \circ \alpha$，我们称 α 满足该对称性。

7.A.2.5 任意子扇区

下述定义最初由 Doplicher-Haag-Roberts 在公理化量子场论中提出 [DHR71，DHR74]。后来，Pieter Naaijkens 在 [Naa11], 中将其改编到晶格系统的框架下，该框架由 [BF82] 提出。对于此定义，我们要求 π_0 是不可约表示（等价地，ω_0 是纯态）。

定义 7.A.1。 若不可约表示 $(\pi,\ \mathcal{H})$ 满足以下条件，则称其相对于 $(\pi_0,\ \mathcal{H}_0)$ 满足超选择准则：相对于 对于任意选定的锥 Λ，存在一个酉算子U：$\mathcal{H}\to\mathcal{H}_0$，使得对于任意选定的锥 Λ 和 $A\in\mathcal{A}_{\Lambda^c}$，均有

$$U\pi(A)U^*=\pi_0(A)$$

我们将这样的表示称为 π 一个任意子扇区。

7.A.2.6 准局域代数的自同构

在本小节中，我们讨论保持准局域代数结构的各种类型的自同构。通常，我们希望考虑在一定扩展范围内保持局域性的自同构；这类自同构称为量子元胞自动机 [SW04]。

定义 7.A.2。自同构 α：$\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ 称为量子元胞自动机（简称QCA），如果存在 $s>0$ 使得 $\alpha(\mathcal{A}_S)\subseteq\mathcal{A}_{S^{+s}}$ 且 $\alpha^{-1}(\mathcal{A}_S)\subseteq\mathcal{A}_{S^{+s}}$，其中 S^{+s} 是 Γ 中与 S的距离至多为 s的格点集合。我们称 s 为 QCAα的扩展范围。

引理 7.A.3。对于任意 $S\in\Gamma_f$，令 H_1、$s:=\sum_{Z\subseteq S}\Phi_1(Z)$ 为具有有限程相互作用的哈密顿量，并令 δ_1 为相应的导子。

设 α：$\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$是一个扩展范围为 s 的量子元胞自动机，对 $Z\in\Gamma_f$，定义 $\Phi_2(Z):=\alpha(\Phi_1(Z))$。令$H_2$、$s:=\sum_{Z\subseteq S}\Phi_2(Z)$ 为相应的哈密顿量，δ_2 为相应的导子。若 ω_2 是导子 δ_2 的基态，则 $\omega_1:=\omega_2\circ\alpha$ 是 δ_1 的基态。

证明：由于 ω_2 是 δ_2 的基态，对所有 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$，我们有

$$-i\omega_2(A^*\delta_2(A))\geq 0.$$

现在令 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ 满足 $\mathrm{supp}(A)=S$。那么我们有，

$$\begin{aligned}-i\omega_1(A^*\delta_1(A))&=-i\omega_1\left(A^*i\left[\sum_{Z\cap S\neq\emptyset}\Phi_1(Z),A\right]\right)=\omega_2\circ\alpha\left(A^*\left[\sum_{Z\cap S\neq\emptyset}\Phi_1(Z),A\right]\right)\\&=\omega_2\left(\alpha(A)^*\left[\sum_{Z\cap S\neq\emptyset}\alpha(\Phi_1(Z)),\alpha(A)\right]\right)\\&=\omega_2\left(\alpha(A)^*\left[\sum_{Z\cap S\neq\emptyset}\Phi_2(Z),\alpha(A)\right]\right).\end{aligned}$$

现在，根据 $\Phi_2(Z)$ 的定义，

$$\delta_2(\alpha(A))=i\left[\sum_{Z\cap S\neq\emptyset}\Phi_2(Z),\alpha(A)\right]$$

因此，我们有

$$-i\omega_1(A^*\delta_1(A)) = -i\omega_2(\alpha(A)^*\delta_2(\alpha(A)) \geq 0.$$

因此， ω_1 确实是 δ_1的基态。 □

容易看出，量子元胞自动机组成一个群。一种特殊类型的量子元胞自动机是有限深度量子电路（简称 FDQC）；参见定义7.2.11。

引理 7.A.4。设 $\alpha\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 是由 $\{\mathcal{U}^d\}_{d=1}^D$ 构成的有限深度量子电路，其中 $\mathcal{U}^d$ 中每个酉算子的支撑都包含在直径为 N 的球内。那么 α 是扩展范围为 $s = ND$ 的量子元胞自动机。

证明：只需证明，对于所有 $d = 1, \ldots, D$， α_d 都是扩展范围为 N 的量子元胞自动机。设 $S \subseteq \Gamma$ 且 $A \in \mathcal{A}_{S,\mathrm{loc}}$ 那么我们有

$$\alpha_d(A) = \mathrm{Ad}\left(\prod_{U\in\mathcal{U}^d} U\right)(A).$$

由于每个 $U \in \mathcal{U}^d$ 的支撑都包含在直径为 N 的球内，$\mathrm{supp}(\mathrm{Ad}(\prod_{U\in\mathcal{U}^d} U)(A)) \subseteq \mathrm{supp}(A)^{+N}$。因此 $A \in \mathcal{A}_{S^{+N}}$，所以 α_d 是扩展范围至多为 N 的量子元胞自动机。□

另一个有用的概念是准可因子化自同构的概念；相关研究见 [NO22、Oga22]，其被定义为与基态复合后保持任意子数据的映射。

定义 **7.A.5.** 设 α 是 $\mathcal{A}$ 的一个自同构，并考虑一个锥的包含关系 s

$$\Gamma_1' \subset \Lambda \subset \Gamma_2'$$

如果存在一个酉算子 $u \in \mathcal{A}$，以及分别作用于 $\mathcal{A}_\Lambda$ 和 $\mathcal{A}_{\Lambda^c}$ 的自同构 α_Λ 和 α_{Λ^c}，使得 α 相对于该包含关系是准可因子化的，则称 α 相对于该包含关系准可因子化，即

$$\alpha = \mathrm{Ad}(u) \circ \widetilde{\Xi} \circ (\alpha_\Lambda \otimes \alpha_{\Lambda^c}),$$

其中， $\widetilde{\Xi}$是 $\mathcal{A}_{\Gamma_2'\setminus\Gamma_1'}$上的一个自同构。

引理 7.A.6. 如果 $\alpha\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 是一个有限深度量子电路，那么对于每个锥 Λ， α 都相对于某个锥的包含关系 $\Gamma_1' \subset \Lambda \subset \Gamma_2'$准可因子化。

证明： 我们首先注意到，对于每个 $d = 1, \ldots, D$，我们可以假设 $\bigcup_{U\in\mathcal{U}^d} \mathrm{supp}(U) = \Gamma$。事实上，若不然，我们总可以对每个 $s \notin \bigcup_{U\in\mathcal{U}^d} \mathrm{supp}(U)$ 将 $\mathbb{1}_s$ 纳入 $\mathcal{U}^d$。现在令 Λ 为一个锥。我们定义 $\mathcal{U}^1_{\text{在}} := \{U \in \mathcal{U}^1 \colon U \in \mathcal{A}_\Lambda\}$，以及 $\mathcal{U}^1_{\text{在外}} := \{U \in \mathcal{U}^1 \colon U \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}\}$。我们还定义 $\Lambda_0 := \Lambda$ 和 $\Lambda_0' := \Lambda^c$。对于 $d = 1, \ldots, D-1$，我们归纳地定义

$$\Lambda_d := \bigcup_{U\in\mathcal{U}^d_{\mathrm{in}}} \mathrm{supp}(U), \qquad \Lambda_d' := \bigcup_{U\in\mathcal{U}^d_{\mathrm{out}}} \mathrm{supp}(U),$$

$$\mathcal{U}^{d+1}_{\mathrm{in}} := \{U \in \mathcal{U}^{d+1} : U \in \mathcal{A}_{\Lambda_d}\}, \qquad \mathcal{U}^{d+1}_{\mathrm{out}} := \{U \in \mathcal{U}^{d+1} : U \in \mathcal{A}_{\Lambda_d'}\}.$$

注意，对于所有 $d=1,\dots,D-1$， $\Lambda_{d-1}\subseteq\Lambda_d$ 和 $\Lambda'_{d-1}\subseteq\Lambda'_d$ 均成立。特别地，对于所有 $d=0,1,\dots,D-1$，有 $\Lambda_d\subseteq\Lambda$ 和 $\Lambda'_d\subseteq\Lambda^c$。

对于 $d=1,\dots,D$，我们定义 $\alpha_d^{\mathrm{in}}\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 和 $\alpha_d^{\mathrm{out}}\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A}$

$$\alpha_d^{\mathrm{in}}(A):=\mathrm{Ad}\left(\prod_{U\in\mathcal{U}_{\mathrm{in}}^d}U\right)(A),\qquad \alpha_d^{\mathrm{out}}(A):=\mathrm{Ad}\left(\prod_{U\in\mathcal{U}_{\mathrm{out}}^d}U\right)(A).$$

对于 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$。注意，由于对所有 $d=0,1,\dots,D-1$， $\Lambda_d\subseteq\Lambda$ 和 $\Lambda'_d\subseteq\Lambda^c$，我们有 α_d^{in} 是 $\mathcal{A}_\Lambda$ 的自同构，且 α_d^{out} 是 $\mathcal{A}_{\Lambda^c}$ 的自同构，对所有 $d=1,\dots,D$ 均成立。因此我们有

$$\alpha_\Lambda:=\alpha_D^{\mathrm{in}}\circ\cdots\circ\alpha_1^{\mathrm{in}},\qquad \alpha_{\Lambda^c}:=\alpha_D^{\mathrm{out}}\circ\cdots\circ\alpha_1^{\mathrm{out}}$$

分别是 $\mathcal{A}_\Lambda$ 和 $\mathcal{A}_{\Lambda^c}$ 的自同构。

现在我们考虑自同构

$$\alpha_\Lambda\otimes\alpha_{\Lambda^c}=(\alpha_D^{\mathrm{in}}\otimes\alpha_D^{\mathrm{out}})\circ\cdots\circ(\alpha_1^{\mathrm{in}}\otimes\alpha_1^{\mathrm{out}}).$$

我们注意到，对所有 $d=1,\dots,D$，

$$\alpha_d^{\mathrm{in}}\otimes\alpha_d^{\mathrm{out}}(A)=\mathrm{Ad}\left(\prod_{U\in\mathcal{U}_{\mathrm{in}}^d\cup\mathcal{U}_{\mathrm{out}}^d}U\right)(A),$$

对于 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$。对于 $d=1,\dots,D$，我们定义 $\widehat{\mathcal{U}}^d:=\mathcal{U}^d\setminus(\mathcal{U}^{d}{}_{\text{内}}\cup\mathcal{U}^{d}{}_{\text{外}})$，并定义 $\Xi_d\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$

$$\Xi_d(A):=\mathrm{Ad}\left(\prod_{U\in\widehat{\mathcal{U}}^d}U\right)(A)$$

对于 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$。我们类似地定义 $\Xi\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，令 $\Xi:=\Xi_D\circ\cdots\circ\Xi_1$。注意，$\alpha_d=\Xi_d\circ(\alpha_d^{\mathrm{in}}\otimes\alpha_d^{\mathrm{out}})$。根据 α_d^{in} 和 α_d^{out} 的定义可知，对于所有 $d'\geq d$，Ξ_d 都与 $\Xi_{d'}$ 对易。因此，我们有

$$\Xi\circ(\alpha_\Lambda\otimes\alpha_{\Lambda^c})=(\Xi_D\circ(\alpha_D^{\mathrm{in}}\otimes\alpha_D^{\mathrm{out}}))\circ\cdots\circ(\Xi_1\circ(\alpha_1^{\mathrm{in}}\otimes\alpha_1^{\mathrm{out}}))=\alpha_D\circ\cdots\circ\alpha_1=\alpha.$$

还需证明存在锥的包含关系 $\Gamma'_1\subset\Lambda\subset\Gamma'_2$，使得 Ξ 是 $\mathcal{A}_{\Gamma'_2\setminus\Gamma'_1}$ 上的自同构。此处，我们使用以下假设：对于每个 $d=1,\dots,D$，$\bigcup_{U\in\mathcal{U}^d}\mathrm{supp}(U)=\Gamma$。我们还利用这样一个事实：每个 $U\in\bigcup_{d=1}^D\mathcal{U}^d$ 的支撑至多为 N。由这两个事实可知，$\widehat{\mathcal{U}}^1=\mathcal{U}^1\setminus(\mathcal{U}^1_{\mathrm{in}}\cup\mathcal{U}^1{}_{\mathrm{out}})$ 中的酉算子全都支撑于条带 $\Delta_1=\Lambda^{+N}\cap(\Lambda^c)^{+N}$ 中。类似地，对于每个 $d=2,\dots,D$，$\widehat{\mathcal{U}}^d$ 中的酉算子都支撑于条带 $\Delta_d:=\Delta_{d-1}^{+N}=\Lambda^{+dN}\cap(\Lambda^c)^{+dN}$ 中。因此，$\bigcup_{d=1}^D\widehat{\mathcal{U}}^d$ 中的所有酉算子都支撑于条带 $\Delta_D=\Lambda^{+DN}\cap(\Lambda^c)^{+DN}$ 中。特别地，Ξ 是 $\mathcal{A}_{\Delta_D}$ 上的自同构。现在，若令 $\Gamma'_1:=\left((\Lambda^c)^{+DN}\right)^c$ 且 $\Gamma'_2:=\Lambda^{+DN}$，则 $\Gamma'_1\subset\Lambda\subset\Gamma'_2$ 且 $\Delta_D=\Gamma'_2\setminus\Gamma'_1$。结论得证。□

我们回顾有界扩展 Haag 对偶性的概念（定义 7.2.4）。于是得到以下结果，这是 [BBC+24命题 510] 的一个特殊情形。

引理 7.A.7。若 $\pi\colon\ \mathcal{A}\to B(\mathcal{H})$ 满足严格 *Haag* 对偶性，且 $\alpha\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个扩展范围为 s 的量子元胞自动机，则 $\pi\circ\alpha$ 满足扩展范围为 $2s$ 的有界扩展 *Haag* 对偶性。

证明：我们考虑由 $\pi(\mathcal{A}_\Lambda)''$ 和 $\pi\circ\alpha(\mathcal{A}_\Lambda)''$给出的冯·诺伊曼代数网，其中 Λ 遍历所有锥。注意，对于每个锥 Λ,

$$\pi\circ\alpha(\mathcal{A}_\Lambda)''\subseteq\pi(\mathcal{A}_{\Lambda^{+s}})'',$$
$$\pi(\mathcal{A}_\Lambda)''\subseteq\pi\circ\alpha(\alpha^{-1}(\mathcal{A}_\Lambda))''\subseteq\pi\circ\alpha(\mathcal{A}_{\Lambda^{+s}})''.$$

根据 [BBC+24，命题 5。10]，$\pi\circ\alpha$ 满足扩展范围为 $2s$ 的有界扩展 Haag 对偶性。 □

7.A.3 范畴论

本节将定义本文中要用到的基本范畴论概念。有关更多细节，读者可查阅 [EGNO15] 了解代数背景，并查阅 [GLR85, JP17] 了解 C*-/W*-背景。在我们的例子中，我们将研究一个$\mathcal{C}$ 线性对合范畴。线性范畴是指满足以下条件的范畴 $\mathcal{C}$：对于所有 a、$b\in\mathcal{C}$，Hom($a\to b$) 是一个向量空间，且复合是双线性的。线性范畴 $\mathcal{C}$ 是 dagger 范畴，当且仅当对于所有 a、$b\in\mathcal{C}$，存在一个反线性映射 $(-)^*$：Hom($a\to b$) $\to$Hom($b\to a$)，使得对于所有 $f\colon\ a\to b$ 以及 $g\colon\ b\to c$，在 $\mathcal{C}$ 中，$(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$。此外，我们的线性对合范畴是正交柯西完备的，这意味着它们包含所有正交直和及子对象。给定 a_1、……、$a_n\in\mathcal{C}$，a_1、……、a_n 的正交直和是一个对象 $\bigoplus_{i=1}^n a_i$，以及态射 $v_j\colon\ a_j\to\bigoplus_{i=1}^n a_i$（对所有 $j\in\{1,\dots,n\}$），并满足以下性质：

- $v_i^*v_i=\mathrm{Id}_{a_i}$ for all $i\in\{1,\dots,n\}$, and
- $\sum_{i=1}^n v_iv_i^*=\mathrm{Id}_{\bigoplus_{i=1}^n a_i}$.

注意，正交直和 $\bigoplus_{i=1}^n a_i$ 在唯一同构的意义下是唯一的。为简便起见，我们通常也省略“正交”一词。类似地，若对 $\mathcal{C}$ 中的每个投影 $p\colon\ a\to a$（即满足 $p^*=p=p^2$的态射），都存在一个对象 $b\in\mathcal{C}$（称为<款式 id='9'>子对象</款式>）以及一个映射 $v\colon\ b\to a$，使得 $v^*v=\mathrm{Id}_b$ 且 $vv^*=p$，那么我们称范畴承认所有子对象。（承认子对象这一性质也称为投影完备，不过本文不使用这一术语。）与直和的情形一样，给定 $\mathcal{C}$中的一个投影 $p\colon\ a\to a$，任何两个对应于 p 的子对象都是同构的。

我们考虑的范畴也将是严格幺半范畴。若存在一个函子 $-\otimes-\colon\ \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，使得对所有 a、b、$c\in\mathcal{C}$，都有 $(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$，并且存在一个对象 $\mathbb{1}\in\mathcal{C}$满足 $\mathbb{1}\otimes a=a=a\otimes\mathbb{1}$，则称范畴 $\mathcal{C}$ 为严格幺半范畴。（还有一种更一般的幺半范畴概念，它不要求严格；不过，我们的例子将是严格幺半范畴。）两个（严格）幺半范畴之间的映射称为幺半函子。更具体地说，若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是（严格）幺半范畴，那么若函子 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 具有自然张量约束同构$F^2_{a,b}\colon\ F(a)\otimes F(b)\to F(a\otimes b)$以及单位元同构 $F^1\colon\ F(\mathbb{1}_\mathcal{C})\to\mathbb{1}_\mathcal{D}$，且满足相干条件，我们就称其为幺半函子。我们通常考虑严格的幺半函子，也就是说，对所有a、$b\in\mathcal{C}$、F，都有$(a)\otimes F(b)=F(a\otimes b)$，且对 $F^2_{a,b}=$，有 $\mathrm{Id}_{F(a)\otimes F(b)}$，此外 $F^1=\mathrm{Id}_{\mathbb{1}_\mathcal{D}}$。

现在，我们按照 [M¨ug05] 中的定义，给出严格的 G-交叉幺半和 G-交叉编织的概念。若 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是范畴 $\mathcal{C}$的子范畴，则称 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 不相交，如果对每个 $a \in \mathcal{A}$ 和 $b \in \mathcal{B}$，都有 $\mathrm{Hom}(a \to b) = \{0\}$。现在，设 G 是一个有限群。若范畴 $\mathcal{C}$ 满足 $\mathcal{C} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{C}_g$，其中 $\{\mathcal{C}_g\}_{g\in G}$ 是$\mathcal{C}$的一族互不相交的子范畴，则称其为 G-分次的。换言之，我们要求每个对象 $a \in \mathcal{C}$ 都具有 $a = \bigoplus_{g\in G} a_g$的形式，其中 $a_g \in \mathcal{C}_g$。我们用 $\mathcal{C}_{\mathrm{hom}}$ 表示 $\mathcal{C}$ 中由 $\bigcup_{g\in G} \mathcal{C}_g$中的对象构成的全子范畴，并称 $a \in \mathcal{C}$ 为齐次的，如果 $a \in \mathcal{C}_{\mathrm{hom}}$。按照 [M¨ug05],，我们令 $\partial\colon \mathcal{C}_{\mathrm{hom}} \to G$为由 ∂a定义的映射：若 $a \in \mathcal{C}_g$，则 $= g$。

定义 7.A.8. 范畴 $\mathcal{C}$ 是一个 G-分次严格幺半范畴，如果 $\mathcal{C}$ 是一个 G-分次范畴，且其幺半结构严格，并且分次映射 $\partial\colon \mathcal{C}_{\mathrm{hom}} \to G$ 满足 $\partial(a \otimes b) = \partial a \partial b$，对所有 a，$b \in \mathcal{C}_{\mathrm{hom}}$均成立。

定义 7.A.9 ([M¨ug05，定义 2.9])。一个严格的 G-交叉幺半范畴是一个 G-分次严格幺半范畴 $\mathcal{C}$，并配备严格幺半同构 $\gamma_g\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，使得以下条件成立：

- $g \mapsto \gamma_g$ 是一个群同态，
- $\gamma_g(\mathcal{C}_h) \subseteq \mathcal{C}_{ghg^{-1}}$。

定义 7.A.10 ([M¨ug05，定义 2.16])。严格 G-交叉幺半范畴上的一个编织是由同构 $c_{a,\,b}\colon a \otimes b \to \gamma_{\partial a}(b) \otimes a$ 组成的集合，其中 $a \in \mathcal{C}_{\mathrm{hom}}$ 和 $b \in \mathcal{C}$ 满足以下相干条件：

- （自然性）对所有 $f_1\colon a \to b$ 属于 $\mathcal{C}_{\text{态射}}$ 以及 $f_2\colon c \to d$ 属于 $\mathcal{C}$，

$$(\gamma_{\partial a}(f_2) \otimes \mathrm{Id}_a) \circ c_{a,c} = c_{a,d} \circ (\mathrm{Id}_a \otimes f_2), \qquad (\mathrm{Id}_{\gamma_{\partial a}(c)} \otimes f_1) \circ c_{a,c} = c_{b,c} \circ (f_1 \otimes \mathrm{Id}_c),$$

- （幺半性）对所有 a，$b \in \mathcal{C}_{\text{态射}}$ 以及 c，$d \in \mathcal{C}$，

$$c_{a,c\otimes d} = (\mathrm{Id}_{\gamma_{\partial a}(c)} \otimes c_{a,d}) \circ (c_{a,c} \otimes \mathrm{Id}_d), \qquad c_{a\otimes b,c} = (c_{a,\gamma_{\partial b}(c)} \otimes \mathrm{Id}_b) \circ (\mathrm{Id}_a \otimes c_{b,c}),$$

- （γ_g 保持编织）对所有 $a \in \mathcal{C}_{\text{态射}}$、$b \in \mathcal{C}$ 和 $g \in G$、$\gamma_g\,(c_{a,\,b}) = c_{\gamma_g\,(a)\ \ \gamma_g\,(b)}$。

我们指出，上述严格 G-交叉编织幺半范畴的定义，是 G-交叉编织幺半范畴定义的严格化版本 [EGNO15，定义 8.24。1]。然而，我们构造的 G-交叉编织幺半范畴将以这种方式成为严格的。尽管如此，仍然可以采用与 [BBCW19] 中类似的方法，恢复其中描述的对称性分数化数据；该方法类似于 [BKM23] 中用于计算任意子扇区的 F- 和R-符号的方法。我们将在第 7.3.4.1节演示这一计算。

我们还要指出，当该范畴是 dagger 范畴时，本节所述的所有相干性同构都应为酉算子。

7.B Levin-Gu SPT 的有用结果

回顾自同构 $\alpha\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$（参见定义 7.6.1）。

引理 7.B.1. 自同构 α 是一个有限深度量子电路。特别地，α 是一个扩展范围为 $s=1$ 的准可因子化量子元胞自动机。

证明：

我们将 Γ 中的三角形划分为基本六边形，使其铺砌整个平面。注意，这种基本六边形的铺砌可以用三种颜色着色，我们将其定为红色、蓝色和绿色。图 7.18 展示了一个示例。我们用 $\mathscr{R}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{G}$分别表示红色、蓝色和绿色六边形的集合。现在，我们将 $\mathcal{U}^1$、$\mathcal{U}^2$ 和 $\mathcal{U}^3$定义为以下酉算子的集合：

$$\mathcal{U}^1\coloneqq\left\{\prod_{\triangle\subseteq H}U_\triangle : H\in\mathscr{R}\right\},\quad \mathcal{U}^2\coloneqq\left\{\prod_{\triangle\subseteq H}U_\triangle : H\in\mathscr{B}\right\},\quad \mathcal{U}^3\coloneqq\left\{\prod_{\triangle\subseteq H}U_\triangle : H\in\mathscr{G}\right\}.$$

注意，对于 $d=1,\ 2,\ 3$，如果 $U_1,\ U_2\in\mathcal{U}^d$满足 $U_1\neq U_2$，那么 $\operatorname{supp}(U_1)\cap\operatorname{supp}(U_2)=\emptyset$。此外，每个 $U\in\bigcup_{d=1}^3\mathcal{U}^d$仅作用于一个基本六边形中的七个顶点。因此，集合 $\{\mathcal{U}^1,\mathcal{U}^2,\mathcal{U}^3\}$定义了一个深度为 3 的量子电路。若我们定义 $\widehat{\alpha}_d\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 为

$$\widehat{\alpha}_d(A)=\operatorname{Ad}\left(\prod_{U\in\mathcal{U}^d}U\right)(A)$$

对于 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$，那么我们有，对于 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$

$$\alpha=\operatorname{Ad}\left(\prod_{\triangle\subseteq\Gamma}U_\triangle\right)(A)=\widehat{\alpha}_3\circ\widehat{\alpha}_2\circ\widehat{\alpha}_1(A).$$

因此，α 是一个有限深度量子电路。

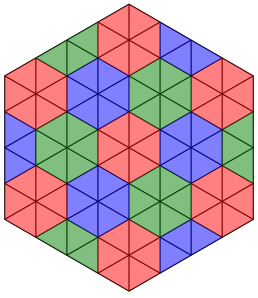


图 7.18：将三角晶格铺砌成红色、蓝色和绿色六边形的示例。$\mathcal{U}^1$，$\mathcal{U}^2$，$\mathcal{U}^3$分别支撑于红色、蓝色和绿色三角形上。每个酉算子U 作用于以顶点 v 为中心的六边形 H，且支撑于 v^{+1}。

根据引理 7.A.4 和 7.A.6，α 是一个准可因子化的量子元胞自动机。为了证明 α 的扩展范围为 1，注意，对于 $A\in\mathfrak{A}_{\mathrm{loc}}$，$\alpha(A)$ 是由相互对易的酉算子对 A 进行共轭所得，它们的作用

于三角形上。由于面上的每个顶点到其他任意顶点的距离都是 1，因此，支撑 $\alpha(A)$ 中的任意顶点到 $\mathrm{supp}(A)$ 中某个顶点的距离至多为 1。因此 $\mathrm{supp}(\alpha(A)) \subseteq \mathrm{supp}(A)^{+1}$。□

引理 7.B.2。 对于所有 $v \in \Gamma$,

$$\alpha^{-1}(\sigma_v^x) = B_v,$$

特别地，这意味着对于所有 $V \in \Gamma_f$，

$$\alpha^{-1}(H_V^0) = H_V.$$

这是 *[LG12, 附录 A]*在无限体积情形下的结果。

证明：令 $\triangle_v$ 为包含顶点 $v \in \Gamma$ 的三角形集合。我们记 $< vpq >$，以明确指代一个面 $< vpq > \in \triangle_v$，其顶点为 v、p、$q \in \Gamma$。

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(\sigma_v^x) &= \prod_{\triangle\in\triangle_v} e^{-\frac{i\pi}{24}(3\prod_{v'\in\triangle}\sigma_{v'}^z - \sum_{v'\in\triangle}\sigma_{v'}^z)} \sigma_v^x \prod_{\triangle\in\triangle_v} e^{\frac{i\pi}{24}(3\prod_{v\in\triangle}\sigma_v^z - \sum_{v\in\triangle}\sigma_v^z)} \\
&= \sigma_v^x \prod_{<vpq>\in\triangle_v} e^{\frac{i\pi}{8}\sigma_v^z\sigma_p^z\sigma_q^z + \frac{i\pi}{24}(-\sigma_v^z+\sigma_p^z+\sigma_q^z) + \frac{i\pi}{8}\sigma_v^z\sigma_p^z\sigma_q^z + \frac{i\pi}{24}(-\sigma_v^z-\sigma_p^z-\sigma_q^z)} \\
&= \sigma_v^x \prod_{\triangle\in\triangle_v} e^{\frac{i\pi}{4}\prod_{v'\in\triangle}\sigma_{v'}^z - \frac{i\pi}{12}\sigma_v^z} = \sigma_v^x i^{(-\sigma_v^z)} \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{\frac{1}{2}(\sigma_v^z\sigma_p^z\sigma_q^z)}
\end{aligned}$$

在前一个等式中，我们使用了单位元 $e^{i\pi/2} = i$，并且以 v 为顶点的面有 6 个，因此 $\sum_{\triangle\in\triangle_v} \frac{i\pi}{12}\sigma_v^z = \frac{i\pi}{2}\sigma_v^z$

$$= \sigma_v^x i^{3\sigma_v^z} \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{\frac{1}{2}(\sigma_v^z\sigma_p^z\sigma_q^z)} = \sigma_v^x \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{\frac{1}{2}(\sigma_v^z+\sigma_v^z\sigma_p^z\sigma_q^z)} = \sigma_v^x \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{\frac{1}{2}\sigma_v^z(1+\sigma_p^z\sigma_q^z)} = \sigma_v^x M,$$

其中 $M = \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{\frac{1}{2}\sigma_v^z(1+\sigma_p^z\sigma_q^z)}$。我们断言 $M = \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{\frac{1}{2}(1+\sigma_p^z\sigma_q^z)}$。事实上，由于 σ_v^z、σ_p^z、σ_q^z 的本征值为 ± 1，$i^{\frac{1}{2}\sigma_v^z(1+\sigma_p^z\sigma_q^z)}$ 的本征值与 $i^{\frac{1}{2}(1+\sigma_p^z\sigma_q^z)}$ 的本征值完全相同（特征向量也完全相同）。因此，$i^{\frac{1}{2}\sigma_v^z(1+\sigma_p^z\sigma_q^z)} = i^{\frac{1}{2}(1+\sigma_p^z\sigma_q^z)}$，所以 $M = \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{\frac{1}{2}(1+\sigma_p^z\sigma_q^z)}$。此外，$M = M^{-1}$，因为 $i^{\frac{1}{2}(1+\sigma_p^z\sigma_q^z)}$ 的本征值为 ± 1，因此 M 的本征值为 ± 1。这可以看作是一种规范冗余。利用这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
&= \sigma_v^x M^{-1} = \sigma_v^x \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{-\frac{1}{2}(1+\sigma_p^z\sigma_q^z)} = \sigma_v^x i^{-3} \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{-\frac{1}{2}\sigma_p^z\sigma_q^z} \\
&= -\sigma_v^x i^3 \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{-\frac{1}{2}\sigma_p^z\sigma_r^z} = -\sigma_v^x \prod_{<vpq>\in\triangle_v} i^{\frac{1}{2}(1-\sigma_p^z\sigma_r^z)} = B_v
\end{aligned}$$

引理的陈述可直接由这一结果得出，因为哈密顿量是由这些单独的项求和而成的。

现在，对于所有的 $V \in \Gamma_f$，$\alpha^{-1}(H_V^0) = H_V$ 都可直接得出。 □

我们回顾第 α^γ 节中定义的自同构 7.6.2，以及第 $\tilde{\pi}$ 和 $\tilde{\pi}_\gamma$ 节中定义的表示 7.6.3。

引理 7.B.3。 表示 $\tilde{\pi}$ 和 $\tilde{\pi}_\gamma$ 不等价。（等价地， $\tilde{\omega} \not\simeq \tilde{\omega}_\gamma$。）

证明：注意，由于 $\tilde{\omega}$ 和 $\tilde{\omega}_\gamma$ 是纯态， $\tilde{\omega}$ 和 $\tilde{\omega}_\gamma$ 等价当且仅当它们拟等价 [KR97，命题 10.3。7]。因此，我们可以应用 [BR87，推论 2.6。11]。令 $V \in \Gamma_f$。那么，由于 γ 是半无限对偶路径，存在 $v \in \gamma - \partial_0\gamma - \partial_1\gamma$使得每个 $\triangle \in \triangle_v$ 都满足 $\triangle \subseteq V^c$。注意，最后一个条件意味着$\widehat{\ }\mathrm{supp}(B_v) \subseteq V^c$。我们令

$$\triangle_v^\gamma := \{< vqq' > \in \triangle_v : \gamma \text{ intersects the edge between } q \text{ and } q'\}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_v &= -\sigma_v^x \prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma} i^{\frac{1+\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} \prod_{<vqq'>\in\triangle_v\setminus\triangle_v^\gamma} i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} \\
&= -\sigma_v^x \prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma} i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z} i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} \prod_{<vqq'>\in\triangle_v\setminus\triangle_v^\gamma} i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} \\
&= B_v \prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma} i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}.
\end{aligned}$$

因此，由于 $\tilde{\omega}(B_v) = 1$ 和 $B_v \leq \mathbb{1}$，由引理7.4.3 可得

$$\tilde{\omega}(\widehat{B}_v) = \tilde{\omega}(B_v\widehat{B}_v) = \tilde{\omega}\left(B_v^2 \prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma} i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}\right) = \tilde{\omega}\left(\prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma} i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}\right),$$

其中最后一步用到了 $B_v^2 = 1$。

现在，由于 $\gamma \in P(\Gamma)$，我们可以假设存在 $p \in \Gamma$，使得 p 恰好包含在一个面 $\triangle := < vpp' > \in \triangle_v^\gamma$ 中。（如果不存在这样的 $p \in \Gamma$，那么可以为 v 选择另一种取法，使得这样的 p 确实存在。）因此，我们有

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}(\widehat{B}_v) &= \tilde{\omega}\left(\prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma} i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}\right) = \tilde{\omega}\left(B_p \prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma} i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z} B_p\right) \\
&= \tilde{\omega}\left(\sigma_p^x \prod_{<prr'>\in\triangle_p} i^{\frac{1-\sigma_r^z\sigma_{r'}^z}{2}} i^{\sigma_p^z\sigma_{p'}^z} \prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma\setminus\{\triangle\}} i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z} \sigma_p^x \prod_{<prr'>\in\triangle_p} i^{\frac{1-\sigma_r^z\sigma_{r'}^z}{2}}\right) \\
&= \tilde{\omega}\left(i^{-\sigma_p^z\sigma_{p'}^z} \prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma\setminus\{\triangle\}} i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z} \sigma_p^x \prod_{<prr'>\in\triangle_p} i^{\frac{1-\sigma_r^z\sigma_{r'}^z}{2}} \sigma_p^x \prod_{<prr'>\in\triangle_p} i^{\frac{1-\sigma_r^z\sigma_{r'}^z}{2}}\right) \\
&= \tilde{\omega}\left(i^{-\sigma_p^z\sigma_{p'}^z} \prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma\setminus\{\triangle\}} i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z} B_p^2\right) = \tilde{\omega}\left(i^{-\sigma_p^z\sigma_{p'}^z} \prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma\setminus\{\triangle\}} i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}\right).
\end{aligned}$$

现在，由于 σ_p^z的特征值为 1 和 -1，我们有 $i^{-\sigma_p^z\sigma_{p'}^z}=(i^{\sigma_p^z\sigma_{p'}^z})^{-1}=-i^{\sigma_p^z\sigma_{p'}^z}$。因此，我们有

$$\tilde{\omega}(\widehat{B}_v)=\tilde{\omega}\left(i^{-\sigma_p^z\sigma_{p'}^z}\prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma\setminus\{\triangle\}}i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}\right)=\tilde{\omega}\left(-i^{\sigma_p^z\sigma_{p'}^z}\prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma\setminus\{\triangle\}}i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}\right)$$
$$=-\tilde{\omega}\left(\prod_{<vqq'>\in\triangle_v^\gamma}i^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}\right)=-\tilde{\omega}(\widehat{B}_v).$$

$\hat{}$ $\hat{}$因此，$\tilde{\omega}(B_v)=0$。然而，$\tilde{\omega}_\gamma(B_v)=1$。因此，我们有

$$|\tilde{\omega}(\widehat{B}_v)-\tilde{\omega}_\gamma(\widehat{B}_v)|=1=\|\widehat{B}_v\|,$$

因此根据 [BR87，推论 2.6。11]，$\tilde{\omega}\neq\tilde{\omega}_\gamma$。 □

¯**引理 7.B.4。 </style}若 ,(**Γ) 满足条件，且 $\gamma_1\cap\gamma_2$ 不包含半无限对偶路径，则有 $\tilde{\pi}_{\gamma_1}\not\simeq\tilde{\pi}_{\gamma_2}$ （等价地，$\tilde{\omega}_{\gamma_1}\not\simeq\tilde{\omega}_{\gamma_2}$）。

证明：注意，由于 $\tilde{\omega}_{\gamma_1}$ 和 $\tilde{\omega}_{\gamma_2}$ 是纯态，$\tilde{\omega}_{\gamma_1}$ 和 $\tilde{\omega}_{\gamma_2}$ 等价当且仅当它们拟等价 [KR97，命题 10.3.7]。因此，我们可以应用 [BR87，推论 2.6.11]。由于 $\gamma_1\cap\gamma_2$ 不包含半无限对偶路径，对于每个 $V\in\Gamma_f$，存在 $v\in\Gamma$使得 $v\notin\gamma_1$、$v\in\gamma_2-\partial_0\gamma_2-\partial_1\gamma_2$，且每个 $\triangle\in\triangle_v$ 都满足 $\triangle\subseteq V^c$。注意，最后一个条件意味着 supp($\widehat{B}_v^{\gamma_2}$) $\subseteq V^c$，其中 $\widehat{B}_v^{\gamma_2}=\beta_g^{r(L_{\gamma_2})}(B_v)$。注意，$\sim\tilde{\omega}_{\gamma_1}(B_v)=1$，因为 $v\notin\gamma_1$，所以根据引理 7.B.3 的证明，$\tilde{\omega}_{\gamma_1}(B_v^{\gamma_2})=0$。另一方面，$\sim\tilde{\omega}_{\gamma_2}(B_v^{\gamma_2})=1$。因此，我们有

$$|\tilde{\omega}_{\gamma_1}(\widehat{B}_v^{\gamma_2})-\tilde{\omega}_{\gamma_2}(\widehat{B}_v^{\gamma_2})|=1=\|\widehat{B}_v^{\gamma_2}\|,$$

因此，根据 [BR87，推论 2.6。11]，$\tilde{\omega}_{\gamma_1}\not\simeq\tilde{\omega}_{\gamma_2}$。 □

7.C 带辅助顶点自旋的环面码

现在我们回顾该系统的哈密顿量 H_S^0，其形式为

$$H_S^0:=H_S^{TC}+\sum_{v\in V(S)}\frac{\mathbb{1}-\tau_v^x}{2},$$

其中，$H_S^{TC}\in\mathcal{A}^E$ 是定义在 S上的环面码哈密顿量。令 δ^0 为相应的导子。容易看出，H_S^0 仍然是一个对易投影哈密顿量。令 ω_0 为定义在 $\mathcal{A}$ 上的一个态，其定义为

$$\omega_0:=\omega_{TC}^E\otimes\omega_0^V$$

其中，ω_{TC}^E（定义在 $\mathcal{A}^E$上）是环面码的无挫折基态，而 ω_0^V定义在 $\mathcal{A}^V$ 上，是由 $\omega_0^V(A)$ 给出的乘积态：$=\bigotimes_{v\in\Gamma}\langle\psi_v,\ A\psi_v\rangle$ 并且 $|\psi_v\rangle\in\mathcal{H}_v$ 满足 $|\psi_v\rangle=\tau_v^x|\psi_v\rangle$。

那么很容易看出，ω_0 是 H_S^0的无挫折基态。事实上，我们有以下引理。

引理 *7.C.1. </style}*态 ω_0 是满足以下条件的唯一态：对所有 v， f

$$\omega_0(A_v) = \omega_0(B_f) = \omega_0(\tau_v^x) = 1$$

特别是，这意味着 ω_0 是纯的。

证明：我们首先注意到 ω_0满足上述方程。事实上，$\omega_0 = \omega_{TC}^E \otimes \omega_0^V$，并且对于每个 v， f(A_v) $= \omega_{TC}^E$ (B_f) $= 1$以及 $\omega_0^V(\tau_v^x) = 1$。现在，假设 ω： $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$是一个态，满足对于所有 v、 f，都有 $\omega(A_v) = \omega$ (B_f) $= \omega(\tau_v^x) = 1$。我们首先断言，对于某个 ω^E： $\mathcal{A}^E \to \mathbb{C}$，有 $\omega = \omega^E \otimes \omega_0^V$。事实上，设 $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$ 是一个简单张量。那么，对于某个 $A^E \in \mathcal{A}^E$ 和 $A^V \in \mathcal{A}^V$，有 $A = A^E \otimes A^V$。此外，由于 A 是一个简单张量，对于某个 $A_v^V \in \mathcal{A}_v$，有 $A^V = \bigotimes_{v \in \text{supp}(A^V)} A_v^V$。对于每个顶点 v，我们定义 P_v: $= (\mathbb{1} + \tau_v^x)/2 \in \mathcal{A}_v$。注意， P_v 是一个秩一投影，且 $\omega(P_v) = 1$。因此，利用引理 7.4.3，我们得到

$$\omega(A) = \omega(A^E \otimes A^V) = \omega\left(A^E \otimes \bigotimes_{v \in \text{supp}(A^V)} P_v A_v^V P_v\right).$$

现在， $P_v A_v^V P_v \in \mathbb{C} P_v$ 对所有 $v \in \text{supp}(A^V)$ 都成立，因为 $P_v \in \mathcal{A}_v$ 是一个秩一投影，s o

$$\bigotimes_{v \in \text{supp}(A^V)} P_v A_v^V P_v = \lambda \bigotimes_{v \in \text{supp}(A^V)} P_v$$

对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 成立。因此我们有

$$\omega(A) = \omega\left(A^E \otimes \bigotimes_{v \in \text{supp}(A^V)} P_v A_v^V P_v\right) = \lambda\omega\left(A^E \otimes \bigotimes_{v \in \text{supp}(A^V)} P_v\right) = \lambda\omega(A^E) = \omega(A^E)\omega_0^V(A^V).$$

由于简单张量张成了 $\mathcal{A}$ 的一个稠密子空间，我们得到 $\omega = \omega^E \otimes \omega_0^V$ 对某个 $\omega^E \in \mathcal{S}(\mathcal{A}^E)$ 成立。

It 尚待证明的是 $\omega^E = \omega_{TC}^E$。然而，这可由引理7.7. 1. □

定义 π_0 为 ω_0 的 GNS 表示，并令 π_0^{TC} 为ω_{TC}^E的 GNS 表示。另令 π_0^V 为 ω_0^V 的 GNS 表示。

由于 ω_{TC}^E， ω_0^V都是纯的，因此 ω_0也是纯的。相应的 GNS 表示均不可约。

引理 7.C.2. 表示 π_0 满足 *Haag* 对偶性。

证明： 首先，注意到$\omega_0 = \omega_{TC}^E \otimes \omega_0^V$并观察到，根据 GNS 表示的唯一性，$\pi_0 \simeq \pi_0^{TC} \otimes \pi_0^V$。事实上，不失一般性，我们可以假设 $\pi_0 = \pi_0^{TC} \otimes \pi_0^V$。设 Λ 为一个锥。那么，由于 π_0^{TC}和 π_0^V都满足锥的 Haag 对偶性，我们有

$$\pi_0(\mathcal{A}_\Lambda)' = (\pi_0^{TC}(\mathcal{A}_\Lambda^E) \otimes \pi_0^V(\mathcal{A}_\Lambda^V))' = \pi_0^{TC}(\mathcal{A}_\Lambda^E)' \otimes \pi_0^V(\mathcal{A}_\Lambda^V)' = \pi_0^{TC}(\mathcal{A}_{\Lambda^c}^E)'' \otimes \pi_0^V(\mathcal{A}_{\Lambda^c}^V)'' = \pi_0(\mathcal{A}_{\Lambda^c})''.$$

□

引理 7.C.3。 关于 π 至多存在四个任意子扇区 $_0$.

证明：根据引理 7.C.2， π_0 满足锥的 Haag 对偶性。还容易验证，π_0 满足锥的近似分裂性质 [Naa11，定义 5.1]。这是因为 $\pi_0 \simeq \pi_0^{TC} \otimes \pi_0^V$ 满足近似分裂性质，而 π_0^{TC} 满足近似分裂性质，且 π_0^V 满足分裂性质。因此，根据 [Naa13，定理 3.6], ，不同任意子扇区的数量可以通过计算以下子因子的指标来界定。设 $\Upsilon = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$，其中 Λ_1 和 Λ_2 是充分远离的不相交锥。那么，不同任意子扇区的数量至多为 $[\pi_0(\mathcal{A}_{\Upsilon^c})' : \pi_0(\mathcal{A}_\Upsilon)'']$。现在，我们有

$$\pi_0(\mathcal{A}_\Upsilon)'' = \pi_0^{TC}(\mathcal{A}_\Upsilon)'' \otimes \pi_0^V(\mathcal{A}_\Upsilon)'',$$
$$\pi_0(\mathcal{A}_{\Upsilon^c})' = \pi_0^{TC}(\mathcal{A}_{\Upsilon^c})' \otimes \pi_0^V(\mathcal{A}_{\Upsilon^c})' = \pi_0^{TC}(\mathcal{A}_{\Upsilon^c})' \otimes \pi_0^V(\mathcal{A}_\Upsilon)'',$$

其中最后一步成立，是因为 π_0^V是乘积态的 GNS 表示。因此，应用 [Naa13，定理 4。9],我们得到

$$\begin{aligned}[\pi_0(\mathcal{A}_{\Upsilon^c})' : \pi_0(\mathcal{A}_\Upsilon)''] &= [\pi_0^{TC}(\mathcal{A}_{\Upsilon^c})' \otimes \pi_0^V(\mathcal{A}_\Upsilon)'' : \pi_0^{TC}(\mathcal{A}_\Upsilon)'' \otimes \pi_0^V(\mathcal{A}_\Upsilon)''] \\ &= [\pi_0^{TC}(\mathcal{A}_{\Upsilon^c})' : \pi_0^{TC}(\mathcal{A}_\Upsilon)''] = 4.\end{aligned}$$

□

现在我们证明，相对于 π_0，至少存在 4 个任意子扇区。为此，我们沿用此前定义的 $\mathcal{A}^E$ 的自同构，其形式为 α_γ^ϵ、 $\alpha_{\bar\gamma}^m$、α_γ^ψ 、$\bar\gamma$ （定义 7.7.4）。

引理 7.C.4。 令 $\zeta \in \{\mathrm{Id}\ \alpha_\gamma^\epsilon、\ \alpha_{\bar\gamma}^m、\ \alpha_\gamma^\psi, \bar\gamma\}$ 为 $\mathcal{A}^E$的一个自同构。则表示 $\pi^\zeta := (\pi_0^{TC} \circ \zeta) \otimes \pi_0^V$是相对于 π_0的两两不相交的任意子扇区。

证明： 表示 π^ζ显然是不可约的，因为 π_0^{TC}、π_0^V均不可约，而 ζ 是一个自同构。现在我们检验它是否满足超选择准则。为此，我们证明它是局域化且可传输的。

我们首先检查它是否局域化在某个锥 Λ 中。设 Λ 是一个包含 γ，$\bar\gamma$ 的锥。我们证明 π^ζ 局域化在 Λ 中。只需检查对于所有简单张量 $A \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$， $\pi^\zeta(A) = \pi_0(A)$。设 $A \in \mathcal{A}_{\Lambda^c}$ 是一个简单张量。那么我们有 $A = A^V \otimes A^E$，其中 $A^V \in \mathcal{A}^V_{\Lambda^c}$ 且 $A^E \in \mathcal{A}^E_{\Lambda^c}$，因此我们有

$$\pi^\zeta(A) = (\pi_0^{TC} \circ \zeta)(A^E) \otimes \pi_0^V(A^V) = \pi_0^{TC}(A^E) \otimes \pi_0^V(A^V) = \pi_0(A).$$

因此， π^ζ 局域化在 Λ 中。

现在我们检查可输运性。设 Λ' 是另一个锥。由于 $\pi_0^{TC} \circ \zeta$ 可传输，存在某个自同构 ζ': $\mathcal{A}^E \to \mathcal{A}^E$，使得 $\pi_0^{TC} \circ \zeta'$ 局域化在 Λ' 和 $\pi_0^{TC} \circ \zeta' \simeq \pi_0^{TC} \circ \zeta$ 中。根据上述论证，$(\pi_0^{TC} \circ \zeta') \otimes \pi_0^V$ 局域化在 Λ' 中，并且

$$(\pi_0^{TC} \circ \zeta') \otimes \pi_0^V \simeq (\pi_0^{TC} \circ \zeta) \otimes \pi_0^V = \pi^\zeta.$$

因此 π^ζ 是可传输的。

最后，我们证明这些表示 $\{\pi^\zeta\}_\zeta$ 两两不等价。我们以情形 $\zeta = \alpha_\gamma^\epsilon$ 和$\zeta' = \alpha_\gamma^\psi$ 为例, $\bar\gamma$ 其他情形同理。令$\omega^\zeta := \omega_0 \circ \zeta$ 以及 $\omega^{\zeta'} := \omega_0 \circ \zeta'$。我们使用推论 [BR87，2.6。11] 以及 [KR97，命题 10.3。7]。

选取一个有限单连通区域 S。然后考虑 $F_C \in \mathcal{A}_{S^c}$ 对于一个足够大的环路$C \in \Gamma_f$，使得 $\partial\bar{\gamma}$位于 C 的内部，$\bar{C}$。于是我们有 $\omega^{\zeta'}(F_C) = 1$，而$\omega^{\zeta}(F_C) = -1$。由于对于每个选定的 S，都存在一个足够大的环路 C，使得 $F_C \in \mathcal{A}_{S^c}$，因此我们有 $\pi^{\zeta} \not\simeq \pi^{\zeta'}$。这就证明了完整结果。□

推论 7.C.5. 任意任意子扇区 π 相对于 π_0 酉等价于以下两两不相交的任意子扇区之一：$\{\pi^{\zeta}\}_{\zeta}$ 其定义见引理 7.C.4。

证明： 这可直接由引理7.C.3和 7.C.4得出。 □

事实上，我们有以下更强的结果。

命题 7.C.6. 给定一个锥 Λ，任意子扇区范畴 $\boldsymbol{DHR}_{\pi_0}(\Lambda)$，即相对于 π_0 局域化于 Λ 的任意子扇区范畴，与任意子扇区范畴 $\boldsymbol{DHR}_{\pi_0^{TC}}(\Lambda)$，即相对于 π_0^{TC} 局域化于 Λ 的任意子扇区范畴，编织幺半等价。

证明： 根据引理 7.C.2， π_0 满足 Haag 对偶性，因此局域化在 Λ 中的任意子扇区可规范地延拓到辅助代数 $\mathcal{A}^a$ [BF82, Naa11]。现在，我们在引理7.C.4 中用于构造任意子扇区的自同构，正是 [Naa11]中使用的自同构。因此，关于$\mathbf{DHR}_{\pi_0}(\Lambda)$ 的任意子扇区范畴，相对于 π_0 局域化于 Λ，与相对于 π_0^{TC}在 [Naa11]中构造的任意子扇区范畴相同。□

7.D 描述 Levin- Gu SPT 缺陷扇区的自同构

现在，我们的目标是为 Levin-Gu SPT 明确构造α_{γ}^{g} 定义 7.4.14 中的缺陷自同构，其中 $g \in \mathbb{Z}_2$ 是非平凡元素。

注意，无限对偶路径 $\gamma \in P(\Gamma)$ 将 Γ 分为两半，分别记作$r(L_\gamma)$ $\ell(L_\gamma)$。我们先写出自同构 $\tilde{\beta}^{r(L_\gamma)}{}_g = \alpha^{-1} \circ \beta^{r(L_\gamma)g} \circ \alpha$。对于所有 $A \in \mathcal{A}_{loc}$，我们可以计算以下表达式 $\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}(A)$。利用 Levin-Gu SPT 中$\alpha, \beta_g^{r(L_\gamma)}$的显式形式，可得：

$$\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}(A) = \left(\prod_{v\in r(L_\gamma)} B_v\right) A \left(\prod_{v\in r(L_\gamma)} B_v\right)^*$$

注意， $\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}$可扩展为 $\mathcal{A}$上的良定义自同构。

令 $A \in \mathcal{A}_{loc}$。考虑一个六边形 $V \subseteq r(L_\gamma)$，使六边形的一条边沿着 L_γ （见图 7.19），并取 V 足够大，使得

$$\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}(A) = \left(\prod_{v\in V} B_v\right) A \left(\prod_{v\in V} B_v\right)^*.$$

现在我们来计算上述表达式。为此，我们注意到该晶格 Γ是三部的。请参见图7.19 ，其中展示了三分结构以及所考虑的六边形 V 。我们

令 a，b，c表示根据三分结构对 Γ中顶点所赋的标签；对于 $j=a$，b，c，令 $V_j \subseteq V$表示标签为 j的顶点集合。此外，对于$j=a$，b，c，令 $Q_j := \prod_{v\in V_j} B_v$。因此，我们得到

$$\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}(A) = (Q_a Q_b Q_c) A (Q_a Q_b Q_c)^*.$$

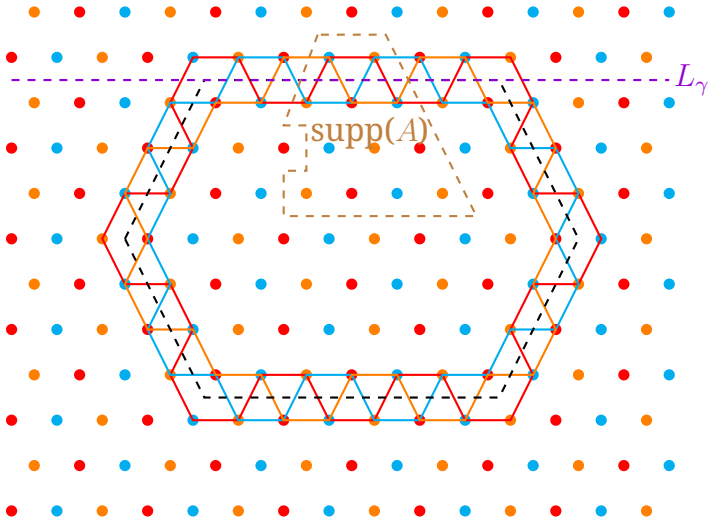


图 7.19：位于直线 L_γ 右侧的六边形 V，我们在该直线上对 B_v 项取乘积。六边形足够大，因此 supp(A) 不会与六边形的顶点相交。顶点和边的颜色分别对应标签 a、b、c。

现在，我们计算每个 $j=a$ 的 Q_j、b、c。我们注意到

$$Q_j = \prod_{v\in V_j} B_v = \prod_{v\in V_j} \prod_{<vqq'>\in \triangle_v} -\sigma_v^x i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}.$$

现在，如果 $v\in V_j$ 和 $<vqq'>\in \triangle_v$，那么 q、q' 对应于其他标签（而不是 j）。因此，我们有

$$Q_j = \prod_{v\in V_j} \prod_{<vqq'>\in \triangle_v} -\sigma_v^x i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} = Z_j X_j,$$

其中，$X_j := \prod_{v\in V_j}\sigma_v^x$，且对于对应于非$j$标签的 $v\in\Gamma$，Z_j 是σ_v^z 的某个函数。我们通过考察满足以下条件的每条边 qq' 来计算 Z_j：对于某个$v\in V_j$，$<vqq'>\in\triangle_v$。需要考虑两种情形。首先，假设 qq' 是一条边，其标签为图 7.19 中与 j对应的颜色。那么，对于恰好一个$v\in V_j$，$i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}$会作为因子出现在 B_v中。现在，假设 qq' 是 V中两个非j 顶点之间的一条边，且不沿着 V的边界，因此 qq'不是图 7.19 中的一条有色边。于是，对于两个不同的 $v\in V_j$，$i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}$都会出现在 B_v 中。我们注意到

$$\left(i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)^2 = i^{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z} = i(i^{-1})^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}.$$

由于$\sigma_q^z\sigma_{q'}^z$ 的本征值为 ± 1，我们有

$$\left(i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)^2 = i(i^{-1})^{\sigma_q^z\sigma_{q'}^z} = i(i^{-1})\sigma_q^z\sigma_{q'}^z = \sigma_q^z\sigma_{q'}^z.$$

因此我们有

$$Z_j = \prod_{v\in V_{\widehat{j}}}\sigma_v^z \prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{j}}} i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}},$$

其中 $L_{\gamma\widehat{j}}$ 是对应于 j 的路径，如图 7.19 所示，而 $V_{\widehat{j}}$ 是 j 中非 V 顶点的集合，这些顶点有一条边 e 连接到 j 中的另一个非 V 顶点，其中 $e\notin L_{\gamma\widehat{j}}$。利用这一计算，我们有

$$\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}(A) = (Q_aQ_bQ_c)A(Q_aQ_bQ_c)^* = (Z_aX_aZ_bX_bZ_cX_c)A(Z_aX_aZ_bX_bZ_cX_c)^*.$$

我们计算右侧的量。首先注意到

$$X_aZ_b = \prod_{v\in V_a}\sigma_v^x \prod_{v\in V_{\widehat{b}}}\sigma_v^z \prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{b}}} i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} = (-1)^k \prod_{v\in V_{\widehat{b}}}\sigma_v^z \prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{b}}} i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_a}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} \prod_{v\in V_a}\sigma_v^x,$$

其中，如果 q、$q'\in V_a$ 中的一个成立，则为 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon_a=1$；否则为 $\varepsilon_a=0$。注意，当我们用上述算子进行共轭时，$(-1)^k$ 的因子会抵消。类似地，我们有

$$X_aX_bZ_c = \prod_{v\in V_a\cup V_c}\sigma_v^x \prod_{v\in V_{\widehat{c}}}\sigma_v^z \prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{c}}} i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} = (-1)^k \prod_{v\in V_{\widehat{c}}}\sigma_v^z \prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{c}}} i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_s}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} \prod_{v\in V_a\cup V_c}\sigma_v^x,$$

其中同样地，如果 q、$q'\in V$ 中恰有一个成立，则为 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon_s=1$；否则为 $\varepsilon_s=0$。于是我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}(A) &= (Z_aX_aZ_bX_bZ_cX_c)A(Z_aX_aZ_bX_bZ_cX_c)^* \\ &= \mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in V_{\widehat{a}}}\sigma_v^z \prod_{v\in V_{\widehat{b}}}\sigma_v^z \prod_{v\in V_{\widehat{c}}}\sigma_v^z \prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{a}}} i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} \prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{b}}} i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_a}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} \prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{c}}} i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_s}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)\circ\beta_g^{r(L_\gamma)}(A).\end{aligned}$$

现在，由于相对于 A的支撑而言，V 很大，我们可以忽略六边形 V 各角处发生的效应，并简化上述表达式。特别地，我们有

$$\mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in V_{\widehat{a}}}\sigma_v^z \prod_{v\in V_{\widehat{b}}}\sigma_v^z \prod_{v\in V_{\widehat{c}}}\sigma_v^z\right)(A') = \mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial V}\sigma_v^z\right)(A'),$$

其中，∂V 是沿着 V边界的顶点集合。这里，A' 定义为

$$A' := \mathrm{Ad}\left(\prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{a}}} i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} \prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{b}}} i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_a}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}} \prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{c}}} i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_s}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)\circ\beta_g^{r(L_\gamma)}(A)$$

因此，我们有

$$\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}(A)=\mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial V}\sigma_v^z\prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{a}}}i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{b}}}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_a}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{c}}}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_s}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)\circ\beta_g^{r(L_\gamma)}(A).$$

现在，我们可以在上面的方程中用 $r(L_\gamma)$ 替换 V，并且还可以重新定义 $L_{\gamma\widehat{a}}$，$L_{\gamma\widehat{b}}$，$L_{\gamma\widehat{c}}$，使其表示沿路径 L_γ 的延拓。于是，对于任意 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$，

$$\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}(A)=\mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial r(L_\gamma)}\sigma_v^z\prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{a}}}i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{b}}}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_a}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\prod_{qq'\in L_{\gamma\widehat{c}}}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_s}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)\circ\beta_g^{r(L_\gamma)}(A)$$

令 $\xi=L_\gamma-\gamma_\circ$ 对于 $j=a,\ b,\ c$，我们类似于上文定义 $\xi_{\widehat{j}}$，$\gamma_{\widehat{j}}$（见上文图 7.20）。现在注意到

$$\tilde{\beta}_g^{r(L_\gamma)}\circ(\beta_g^{r(L_\gamma)})^{-1}(A)=\eta^\gamma\otimes\eta^\xi(A)$$

其中

$$\eta^\xi(A)\coloneqq\mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial r(\xi)}\sigma_v^z\prod_{qq'\in\xi_{\widehat{a}}}i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\prod_{qq'\in\xi_{\widehat{b}}}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_a}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\prod_{qq'\in\xi_{\widehat{c}}}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_s}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)(A)$$

$$\eta^\gamma(A)\coloneqq\mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial r(\gamma)}\sigma_v^z\prod_{qq'\in\gamma_{\widehat{a}}}i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\prod_{qq'\in\gamma_{\widehat{b}}}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_a}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\prod_{qq'\in\gamma_{\widehat{c}}}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_s}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)(A)$$

因此，我们确实注意到，Levin-Gu SPT 满足假设 8 。

现在我们 得到缺陷自同构 $\alpha^\gamma:=\alpha_\gamma^g=\eta^\xi\circ\beta_g^{r(L_\gamma)}$（定义 7.4.14），其形式为

$$\alpha^\gamma(A)=\mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial r(\xi)}\sigma_v^z\prod_{qq'\in\xi_{\widehat{a}}}i^{\frac{1-\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\prod_{qq'\in\xi_{\widehat{b}}}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_a}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\prod_{qq'\in\xi_{\widehat{c}}}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_s}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)\circ\beta_g^{r(L_\gamma)}(A)$$

对于 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$。这里，$\partial r(\xi)$ 是 $\partial r(L_\gamma)$ 沿 ξ 的部分。

现在我们写出第 α^γ 节中所用公式的简化形式：7.6.3。与该节中的做法相同，我们定义 $N(\xi$ 为 Γ 中包含ξ 中所有顶点及其间边的子图。我们用 ξ_{in} 表示 $N(\xi$ 中同时属于 r $(L_{\bar{\gamma}_R}$ 的顶点路径，并用 ξ_{out} 表示 $N(\xi$ 中不属于 $r(L_{\bar{\gamma}_R}$ 的顶点路径（图 7.13）。在这种情形下，我们有

$$\alpha^{\bar{\gamma}_R}(A)=\mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial r(\xi)}\sigma_v^z\prod_{qq'\in N(\xi)}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma_q^z\sigma_{q'}^z}{2}}\right)\circ\beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}(A)$$

对于 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$。注意，$\varepsilon_{qq'}\in\{0,1\}$，其中 $\varepsilon_{qq'}$ 的值由前面的讨论确定。

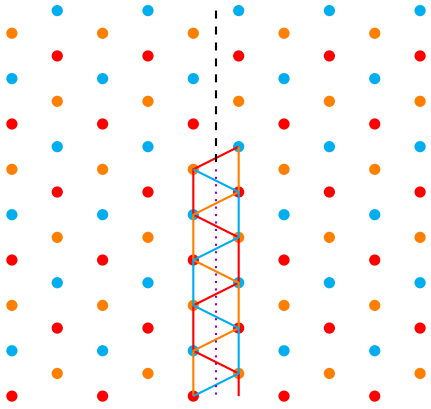


图 7.20：定义 α^{γ} 所用记号的示意图。黑色虚线路径为 γ，紫色点线路径为 ξ。红色、蓝色和橙色顶点分别对应标签 a、b 和 c，红色、蓝色和橙色边则分别表示路径 $\xi_{\widehat{a}}$、$\xi_{\widehat{b}}$、$\xi_{\widehat{c}}$。区域 $\partial r\left(\xi\right)$ 由虚线右侧且与一条相邻的彩色边相接的那些边组成。

引理 7.D.1。 我们有 $\alpha^{\bar{\gamma}_R}\circ\alpha^{\bar{\gamma}_R}=\mathrm{Ad}(\sigma^z_{\partial\xi_{\mathrm{in}}}\sigma^z_{\partial\xi_{\mathrm{out}}})$，其中 $\partial\xi_{\mathrm{in}}$ 和 $\partial\xi_{\mathrm{out}}$ 分别是 ξ_{in} 和 ξ_{out} 的端点。

证明：不难验证

$$\begin{aligned}\alpha^{\bar{\gamma}_R}\circ\alpha^{\bar{\gamma}_R}&=\mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial r(\xi)}\sigma^z_v\beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}(\sigma^z_v)\prod_{qq'\in N(\xi)}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\beta_g^{r(L_{\bar{\gamma}_R})}\left(i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\right)\right)\\&=\mathrm{Ad}\left(\prod_{v\in\partial r(\xi)}\sigma^z_v(-\sigma^z_v)\prod_{qq'\in N(\xi)}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\cdot i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}(-1)^{\epsilon_s}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\right)\\&=\mathrm{Ad}\left(\prod_{qq'\in N(\xi)}i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\cdot i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}(-1)^{\epsilon_s}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\right).\end{aligned}$$

这里，$\epsilon_s=1$ 当且仅当 q、$q'\in r$ 中恰有一个成立；L_γ，其他情况。在特别地，$\epsilon_s=1$ 当且仅当 $qq'\notin\xi_{\mathrm{in}}$ 且 $qq'\notin\xi_{\mathrm{out}}$。

注意，若 $\epsilon_s=1$，则

$$i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\cdot i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}(-1)^{\epsilon_s}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}=i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\cdot i^{\frac{1+(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}=i^{\frac{1-(\sigma^z_q)^2(\sigma^z_{q'})^2}{4}}=1.$$

另一方面，如果 $\epsilon_s=0$，那么

$$i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\cdot i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}(-1)^{\epsilon_s}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}=i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\cdot i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}=i^{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}.$$

因此我们有

$$\alpha^{\bar{\gamma}_R}\circ\alpha^{\bar{\gamma}_R}=\mathrm{Ad}\left(\prod_{qq'\in N(\xi)} i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\cdot i^{\frac{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}(-1)^{\epsilon_s}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}{2}}\right)$$
$$=\mathrm{Ad}\left(\prod_{qq'\in\xi_{\text{in}}\cup\xi_{\text{out}}} i^{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}\right).$$

最后，我们化简 $i^{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}$。注意

$$i^{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}=i\left(i^{(-1)^{\varepsilon_{qq'}+1}}\right)\sigma^z_q\sigma^z_{q'}=i\cdot i^{(-1)^{\varepsilon_{qq'}+1}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'},$$

其中最后一个等式成立，是因为这两个算子具有完全相同的特征值和特征向量。因此，我们有

$$\alpha^{\bar{\gamma}_R}\circ\alpha^{\bar{\gamma}_R}=\mathrm{Ad}\left(\prod_{qq'\in\xi_{\text{in}}\cup\xi_{\text{out}}} i^{1-(-1)^{\varepsilon_{qq'}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}}\right)=\mathrm{Ad}\left(\prod_{qq'\in\xi_{\text{in}}\cup\xi_{\text{out}}} i\cdot i^{(-1)^{\varepsilon_{qq'}+1}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}\right)$$
$$=\mathrm{Ad}\left(\prod_{qq'\in\xi_{\text{in}}\cup\xi_{\text{out}}}\sigma^z_q\sigma^z_{q'}\right)=\mathrm{Ad}(\sigma^z_{\partial\xi_{\text{in}}}\sigma^z_{\partial\xi_{\text{out}}}).$$

□

注意，如果 $\gamma\in P(\Gamma)$ 是任意一条半无限路径，我们仍可用相同的步骤构造一个自同构α^γ: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，尽管这里不再进行构造。

7.E 将 SET 环面码缺陷扇区与哈密顿量项联系起来

回顾第7.7.2节讨论的 SET 环面码模型。本节旨在证明一些关于 SET 环面码哈密顿量各项上的对称作用的结果。这将把 SET 环面码的分析与我们在以下章节中对对称保护拓扑相的分析联系起来：7.6.2 和7.4.2。

引理7.E.1。取一条无限对偶路径 $L\in P(\Gamma)$。我们有，

$$\beta_g^{r(\bar{L})}(A_v)=A_v\qquad\beta_g^{r(\bar{L})}(\tilde{Q}_v)=\tilde{Q}_v\qquad\beta_g^{r(\bar{L})}(\tilde{B}_f)=\left(\prod_{v\in r(\bar{L})\cap f}\prod_{e\ni v} ig(e,v)\sigma^x_e\right)\tilde{B}_f$$

其中，$g(e,v)=+1$ 当 $\partial_1 e=v$ 且 $g(e,v)=-1$ 当 $\partial_0 e=v$。

证明：第一个单位元关系显而易见。对于第二个单位元关系，我们注意到：

$$\tilde{Q}_v=\frac{\mathbb{1}+A_v}{2}Q_v=\frac{\mathbb{1}+A_v}{2}Q_v\frac{\mathbb{1}+A_v}{2}=\frac{\mathbb{1}+A_v}{2}\left(\tau^x_v i^{-\tau^z_v\sum_{e\ni v}f(e,v)\sigma^x_e/2}\right)\frac{\mathbb{1}+A_v}{2}$$

现在我们注意到，当 $A_v = +1$, $\sum_{e\ni v} f(e,\ v)\sigma_e^x/2$ 的特征值为 ± 2，0 时，因此可以从指数中去掉 $-\tau_v^z$。于是得到：

$$= \frac{\mathbb{1} + A_v}{2} \left(\tau_v^x i^{\sum_{e\ni v} f(e,v)\sigma_e^x/2}\right) \frac{\mathbb{1} + A_v}{2}.$$

现在从上述 $\tilde{Q}_v$ 的显式形式显然可知，$\beta_g^{r(\bar{L})}(\tilde{Q}_v) = \tilde{Q}_v$。

对于第三个恒等式，我们将其改写为 $\tilde{B}_f$ 如下：

$$\tilde{B}_f = \prod_{e\in f} i^{-\sigma_e^x(\tau_{\partial_1 e}^z - \tau_{\partial_0 e}^z)/2} B_f = \prod_{v\in f} i^{-\tau_v^z(\sum_{e\ni v} g(e,v)\sigma_e^x)/2} B_f.$$

现在我们观察到

$$\begin{aligned}\beta_g^{r(\bar{L})}(\tilde{B}_f) &= \prod_{v\in f; v\in r(\bar{L})} i^{\tau_v^z(\sum_{e\ni v} g(e,v)\sigma_e^x)/2} \prod_{v\in f; v\notin r(\bar{L})} i^{-\tau_v^z(\sum_{e\ni v} g(e,v)\sigma_e^x)/2} B_f \\ &= \prod_{v\in f; v\in r(\bar{L})} i^{\tau_v^z(\sum_{e\ni v} g(e,v)\sigma_e^x)} \tilde{B}_f\end{aligned}$$

现在注意到 $\sum_{e\ni v} g(e,\ v)\sigma_e^x$ 的本征值属于 $\{\pm 2, 0\}$，因此可以省去 τ_v^z。现在，

$$= \prod_{v\in f; v\in r(\bar{L})} i^{\sum_{e\ni v} g(e,v)\sigma_e^x} \tilde{B}_f = \prod_{v\in r(\bar{L})\cap f} \prod_{e\ni v} i g(e,v)\sigma_e^x \tilde{B}_f,$$

其中，在最后一个等式中，我们用到了若 $A^2 = 1$，则 $i^A = iA$。这就证明了结论。 □

现在回忆一下第 $\alpha_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$ 节定义的自同构7.7.3。以下引理表明 $\alpha_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$ 沿着 $r(L)$ 在 A_v、B_f 上的对称性作用 Q_v 可以通过自同构 $\alpha_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$ 沿着 L 的一部分作用来消除。

引理 7.E.2。设 $\bar{\gamma} \in P(\Gamma)$ 是一条半无限路径，L 是 $\bar{\gamma}$ 和 $\bar{\eta} = L - \bar{\gamma}$的一个补全。选取一个锥 Λ，使得 $\bar{\gamma}$ 包含于 Λ中。那么对于所有格点 s 和 $C_s \in \{A_v, B_f, Q_v\}$，若支撑$(C_s) \subset \Gamma \cap \Lambda^c$，

$$\alpha_{\bar{\eta}}^{\sigma} \circ \beta_g^{\bar{L}}(C_s) = C_s.$$

Proof : For all s sufficiently f很远 from – 上这 s Lemma follows immediately f 7 7 15 自.....

现在注意，对于 A_v，Q_v 其支撑与 L重叠的情况，结论可直接由7.E.1 以及 $\alpha_{\bar{\eta}}^{\sigma}$ 仅由 σ_e^x 项组成这一事实得出。

剩下的就是检查 B_f 支撑与 L重叠的项。根据引理7.E.1可知

$$\beta_g^{r(\bar{L})}(\tilde{B}_f) = \left(\prod_{v\in r(\bar{L})\cap f} \prod_{e\ni v, e\in f} i g(e,v)\sigma_e^x\right) \tilde{B}_f$$

其中，当 $\partial_1 e = v$ 时，$g(e,\ v) = +1$；当 $\partial_0 e = v$ 时，$g(e,\ v) = -1$。因此，

$$\alpha_{\bar{\eta}}^{\sigma} \circ \beta_g^{\bar{L}}(\tilde{B}_f) = \alpha_{\bar{\eta}}^{\sigma} \left(\left(\prod_{v \in r(\bar{L}) \cap f} \prod_{e \ni v, e \in f} ig(e,v)\sigma_e^x \right) \tilde{B}_f \right) = \left(\prod_{v \in r(\bar{L}) \cap f} \prod_{e \ni v, e \in f} ig(e,v)\sigma_e^x \right) \alpha_{\bar{\eta}}^{\sigma}(\tilde{B}_f)$$
$$= \left(\prod_{v \in r(\bar{L}) \cap f} \prod_{e \ni v, e \in f} ig(e,v)\sigma_e^x \right) \left(\prod_{e \in \bar{L} \cap f} e^{-i\pi p(e)\sigma_e^x/2} \right) \tilde{B}_f$$
$$= \left(\prod_{v \in r(\bar{L}) \cap f} \prod_{e \ni v, e \in f} ig(e,v)\sigma_e^x \right) \left(\prod_{e \in \bar{L} \cap f} (-i)p(e)\sigma_e^x \right) \tilde{B}_f = B_f,$$

其中，最后一个等式源于以下事实：

$$\left(\prod_{v \in r(\bar{L}) \cap f} \prod_{e \ni v} ig(e,v)\sigma_e^x \right) = \left(\prod_{e \in \bar{L} \cap f} ip(e)\sigma_e^x \right)$$

¯通过检查直线 L 与 f相交的所有情形，可以验证此单位元。现在我们已经证明了所需结果。□

最后，我们回顾一下对偶路径的缺陷态 $\tilde{\omega}_{\bar{\gamma}}^{\sigma} = \tilde{\omega} \circ \tilde{\alpha}_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$，其中对偶路径为 $\bar{\gamma}$，且 $\tilde{\alpha}_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$ 由定义 7.7.30给出。

引理 7.E.3。 取一条对偶路径 $\bar{\gamma}$。对于 $\bar{\gamma}$之外的所有格点 s，态 $\tilde{\omega}_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$ 看起来与基态相同。具体而言，取 $C_s \in \{A_v, B_f, Q_v\}$。那么对于 $\bar{\gamma}$之外的所有格点 s，

$$\tilde{\omega}_{\bar{\gamma}}^{\sigma}(C_s) = 1$$

证明： 直接利用 $\tilde{\alpha}_{\bar{\gamma}}^{\sigma}$ 的定义以及引理 7.E.2和7.7.18即可得出。 □

利益冲突

作者无利益冲突需要披露。

数据可用性

本手稿没有相关数据。

参考文献

[AFH07] R.Alicki、M.Fannes 和 M.Horodecki。关于 Kitaev 的量子存储器提案的统计力学视角。*J. Phys. A*，40(24):6451–6467，2007年。

[BBC+20] Maissam Barkeshli、Parsa Bonderson、Meng Cheng、Chao-Ming Jian 和 Kevin Walker。物质的反射与时间反演对称性富集拓扑相：路径积分、不可定向流形与反常。数学物理通讯，374(2):1021–1124，2020。[BBC+24] Anupama Bhardwaj、Tristen Brisky、Chian Yeong Chuah、Kyle Kawagoe、Joseph Keslin、David Penneys 和 Daniel Wallick。冯·诺依曼代数偏序集的超选择扇区。arXiv:2410.21454，2024年。[BBCW19] Maissam Barkeshli、Parsa Bonderson、Meng Cheng 和 Zhenghan Wang。拓扑相的对称性分数化、缺陷与规范化。物理评论B辑，100:115147，2019年9月。[BC18] Maissam Barkeshli 和 Meng Cheng。（2+1）维物质拓扑相中的时间反演与空间反射对称性局域化反常。物理评论B辑，98:115129，2018年9月。[BCFO24] Sven Bachmann、Matthew Corbelli、Martin Fraas 和 Yoshiko Ogata。描述量子霍尔效应中任意子的张量范畴与电导量子化。arXiv:2410.04736，2024年。[BF82] Detlev Buchholz 和 Klaus Fredenhagen。局域性与粒子态的结构。数学物理通讯，84(1):1–54，1982年。[BKM23] Alex Bols、Boris Kjær 和 Alvin Moon。无限体积中的双半子态。arXiv:2306.13762，2023年。[Bom10] H. Bombin。带扭结的拓扑序：阿贝尔模型中的伊辛任意子。《物理评论快报》，105:030403，2010年7月。[BR87] O. Bratteli 和 D.W. Robinson。算子代数与量子统计力学。1。物理学丛书与专著。施普林格出版社，纽约，第二版，1987年。 C^*—与 W^*—代数、对称群、态的分解。[BR97] O. Bratteli 和 D.W. Robinson。算子代数与量子统计力学。2。物理学丛书与专著。施普林格出版社，柏林，第二版，1997年。平衡态。量子统计力学模型。[BV23] Alex Bols 和 Siddharth Vadnerkar。Kitaev 量子双模型的任意子扇区分类。arXiv:2310.19661，2023年。[CGLW13] Xie Chen、Zheng-Cheng Gu、Zheng-Xin Liu 和 Xiao-Gang Wen。对称性保护拓扑序及其对称群的群上同调。物理评论B辑，87:155114，2013年4月。[Che17] Xie Chen。二维拓扑相中的对称性分数化。《物理学评论》，2:3–18，2017年。

[CHK+24] Chian Yeong Chuah、Brett Hungar、Kyle Kawagoe、David Penneys、Mario Tomba、Daniel Wallick 和 Shuqi Wei。Kitaev量子双模型的边界代数。《数学物理学杂志》，65(10)：论文编号102201，2024年。[CNN18] Matthew Cha、Pieter Naaijkens 和 Bruno Nachtergaele。Kitaev 阿贝尔量子双模型的无限体积基态的完备集合。《数学物理通讯》，357(1)：125–157，2018年。[CNN20] Matthew Cha、Pieter Naaijkens 和 Bruno Nachtergaele。无限量子自旋系统中荷的稳定性。《数学物理通讯》，373(1)：219–264，2020。[DGNO10] Vladimir Drinfeld、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。关于辫融合范畴 I。《数学精选》，16(1)：1–119，2010。[DHR71] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E. Roberts。局域可观测量与粒子统计 I。《数学物理通讯》，23：199–230，1971年。[DHR74] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E. Roberts。局域可观测量与粒子统计 II。《数学物理通讯》，35：49–85，1974。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。张量范畴，《数学调查与专著》第205卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年。[FN15] Leander Fiedler 和 Pieter Naaijkens。阿贝尔群的Kitaev量子双模型的Haag 对偶性。《数学物理评论》，27(9)：1550021，43，2015。[GF93] Fabrizio Gabbiani 和 J¨urg Fr¨ohlich。算子代数与共形场论。《数学物理通讯》，155(3)：569–640，1993。[GHK+24] David Green、Peter Huston、Kyle Kawagoe、David Penneys、Anup Poudel 和 Sean Sanford。富化弦网模型及其激发。Quantum，8：1301，2024年3月。[GLR85] P. Ghez、R. Lima 和 J. E. Roberts。W^*-范畴。《太平洋数学杂志》，120(1)：79–109，1985。[GNVW12] D. Gross、V. Nesme、H. Vogts 和 R. F. Werner。一维量子游走与元胞自动机的指标理论。《数学物理通讯》，310(2)：419–454，2012年。[GRO24] Jos´e Garre Rubio 和 Yoshiko Ogata。SET 相中的任意子对称性分数化。arXiv:2411.01210，2024年。[HBFL16] Chris Heinrich、Fiona Burnell、Lukasz Fidkowski 和 Michael Levin。对称性富集弦网：SET 相的精确可解模型。《物理评论B辑》，94：235136，2016年12月。

[HFH23] Jeongwan Haah、Lukasz Fidkowski 和 Matthew B. Hastings。高维中的非平凡量子元胞自动机。《数学物理通讯》，398(1)：469–540，2023年。[HK64] Rudolf Haag 和 Daniel Kastler。量子场论的代数方法。《数学物理学杂志》，5：848–861，1964年。[JNPW23] Corey Jones、Pieter Naaijkens、David Penneys 和 Daniel Wallick。局部拓扑序与边界代数。arXiv:2307.12552，2023年。[Jon23] Corey Jones。准局域代数的DHR 双模与对称量子元胞自动机。arXiv:2304.00068，2023年。[JP17] Corey Jones 和 David Penneys。刚性 C*-张量范畴中的算子代数。《数学物理通讯》，355(3)：1121–1188，2017年。[Kit03] A. Yu. Kitaev。通过任意子实现容错量子计算。《物理年刊》，303(1)：2–30，2003年。[KMSW06] M. Keyl、T. Matsui、D. Schlingemann 和 R. F. Werner。无限量子自旋链的纠缠Haag 对偶性与类型性质。《数学物理评论》，18(9)：935–970，2006年。[Kon14] L. Kong。Levin-Wen 模型的一些普适性质。载于《第十七届国际数学物理大会》，第444–455页。World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2014年。[KR97] Richard V. Kadison 和 John R. Ringrose。算子代数理论基础。第二卷，《数学研究生教程》第16卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年。高级理论，1986年原版的更正重印本。[KR24] Isaac H. Kim 和 Daniel Ranard。二维拓扑相的分类：将基态映射到弦网。arXiv:2405.17379，2024年。[KVW24] Kyle Kawagoe、Siddharth Vadnerkar 和 Daniel Wallick。关于对称性缺陷与分数化的算子代数方法。arXiv预印本 arXiv:2410.23380，2024年。[LG12] Michael Levin 和 Zheng-Cheng Gu。对称性保护拓扑相的编织统计方法。《物理评论B辑》，86：115109，2012年9月。[LSM+23] Yabo Li、Hiroki Sukeno、Aswin Parayil Mana、Hendrik Poulsen Nautrup 和 Tzu-Chieh Wei。通过测量辅助的部分规范化对称性保护拓扑有序态，构造对称性富集拓扑序。《物理评论B辑》，108：115144，2023年9月。[LW05] Michael A. Levin 和 Xiao-Gang Wen。弦网凝聚：拓扑相的物理机制。《物理评论B辑》，71：045110，2005年1月。

[M¨ug05] Michael M¨uger. 共形轨形理论与编织交叉 G范畴。数学物理通讯，260(3):727–762，2005年。[Naa11] Pieter Naaijkens. 平面上 Kitaev环面码中的局域化端同态。《数学物理评论》，23(4):347–373，2011年。[Naa12] Pieter Naaijkens. 环面码中锥的 Haag 对偶性与远端分裂性质。《数学物理快报》，101(3):341–354，2012年。[Naa13] Pieter Naaijkens. 二维量子自旋模型中的 Kosaki-Longo 指数与荷的分类。《数学物理学杂志》，54(8):081901，17，2013年。[Naa17] Pieter Naaijkens. 无限晶格上的量子自旋系统，《物理学讲义》第933卷。施普林格，Cham，2017年。简明介绍。[NO22] Pieter Naaijkens and Yoshiko Ogata. 二维系统中的分裂性质与近似分裂性质：稳定性及超选择扇区的缺失。数学物理通讯，392(3):921–950，2022年。[NT13] Sergey Neshveyev and Lars Tuset. 紧量子群及其表示范畴，《Cours Sp´ecialis´es [Specialized Courses]》第20卷。法国数学会，巴黎，2013年。[Oga21] Yoshiko Ogata. 二维量子自旋系统中具有格点有限群对称性的对称性保护拓扑相的一个 $H^3(G,\mathbb{T})$ 值指标。《数学论坛 Pi》，9：论文编号 e13，62，2021年。[Oga22] Yoshiko Ogata. 从满足近似 Haag 对偶性的有能隙基态导出编织 C^*张量范畴。《数学物理学杂志》，63(1):论文编号 011902，48，2022年。[SW04] B. Schumacher and R. F. Werner. 可逆量子元胞自动机。arXiv:quant-ph/0405174，2004。[Wen02] Xiao-Gang Wen. 量子序与对称自旋液体。物理评论B辑，65:165113，2002年4月。[WL17] Chenjie Wang and Michael Levin. 时间反演对称拓扑序的反常指标。《物理评论快报》，119:136801，2017年9月。[WV06] Fa Wang and Ashvin Vishwanath. 三角格子与 Kagom´e 晶格上的自旋液体态：施温格玻色子态的射影对称群分析。物理评论B辑，74:174423，2006年11月。