arXiv:2601.05517v1 [math.AC] 9 Jan 2026

代数的半纤维积与复形的提升

SAEED NASSEH、MAIKO ONO 和 YUJI YOSH INO

Abstract. 设 k 是一个域。本文定义交换 k-代数的半纤维积这一概念，并证明这类环包含若干类交换环，其中包括局部 k-代数在其公共剩余域 k上的纤维积。对于诺特局部 k-代数 R 及其理想 I，在一定条件下，我们根据回缩、截面以及 R的半纤维积分解的存在性，刻画 k 沿自然满射 $R \twoheadrightarrow R/I$ 的可提升性。

1. Introduction

约定 1.1. 全文中，所有环均为含单位元的交换环，且k 是一个域。记号（$R, \mathfrak{m}_R$）表示一个（不一定是局部环或诺特环的）k-代数 R ，它带有一个指定的极大理想 $\mathfrak{m}_R$ ，使得复合映射$k \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}_R$ 是一个同构，即 $\mathfrak{m}_R$ 是 Spec(R)的一个 k-有理点。在这种情况下，我们简称（$R, \mathfrak{m}_R$）为“k-代数”。当我们说一个k-代数（$R, \mathfrak{m}_R$）是完备的，意指它在 $\mathfrak{m}_R$-进拓扑下完备；此时注意到（$R, \mathfrak{m}_R$）是一个完备局部环。此外，对于一个 k-代数同态 f:（$R, \mathfrak{m}_R$）$\to$（$S, \mathfrak{m}_S$），我们总是假设 f（$\mathfrak{m}_R$）$\subseteq \mathfrak{m}_S$。若不致混淆，我们也可以直接写作 f: $R \to S$ 是一个 k-代数同态，而不标明 k-有理点 $\mathfrak{m}_R$ 和 $\mathfrak{m}_S$。

k代数中值得特别关注的典型例子包括带有系数域 k 的完备局部环，以及域 k 上带有指定 k有理点的仿射环。本文结合了三个主题：（1） k代数的半纤维积；（2）模与复形的提升理论；以及（3）某些 k代数同态的截面与回缩的存在性，后文将对此进行阐述。

在第 2 节中，我们定义了 k代数的半纤维积的概念，这类代数是带单位元的交换环。我们证明，这类环涵盖了局部 k代数在其公共剩余域 k上的纤维积环、由模对 k代数作出的平凡扩张、张量代数以及完备张量代数。本节还列出半纤维积的一些基本性质，并在命题 2.11 和 2.13 中给出这类环的刻画。

本文第 3 节致力于研究模与复形的提升理论；Auslander、Ding、Solberg [1] 和

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13B35, 13D02, 13E05。*Key words and phrases.* 纤维积、提升、Poincar´e 级数、有理点、回缩、截面、半纤维积、张量代数、平凡扩张。M. Ono 部分获得 Wesco Scientific Promotion Foundation 的资助，Y. Yoshino 获得 JSPS Kakenhi Grant 19K03448 and 24K0669 的资助。

Yoshino [24]对这一课题进行了深入研究，它是交换代数中最基础且应用最广泛的概念之一。最近，这一理论被推广到微分分次（DG）同调代数框架中，以研究局部环上有限生成模的变形；参见 [11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 23]。

在本文中，对于局部 k-代数 R 及其理想 I of R，我们尤其关注 R/I-模 k 沿自然的 k-代数满射 $R \twoheadrightarrow R/I$ 的可提升性。这正是半纤维积、提升理论以及某些 k- 代数同态的截面与回缩等概念交汇之处。本文的主结果如下，其证明见第 4 节。

主定理。 假设 $(R, \mathfrak{m}_R)$ 是一个诺特局部 k-代数，且 $(T, \mathfrak{m}_T)$ 是一个完备 k-代数。令 $\varphi\colon (T, \mathfrak{m}_T) \rightrightarrows (R, \mathfrak{m}_R)$ 为一个平坦的 k-代数同态，并令 $R = R/\mathfrak{m}_T R$ 为 φ 的纤维环。那么，以下陈述等价：

(i) $\overline{R}$-模 k 可提升到 R；(ii) φ 具有一个截面；(iii) 存在 R 的一个理想 $\mathfrak{a}$，使得令 $\mathfrak{m}_S = \mathfrak{a}$ 和 $S = k \oplus \mathfrak{m}_S$后，$k$-代数 R 具有一个半纤维积分解 $R \cong T \ltimes_k S$。

正如我们在推论 4.4 和 4.6 中明确陈述的那样，属于主定理情形的例子包括以下情况：

(a) $T = k[\![x]\!]$ 满足 $\mathfrak{m}_T = (x)$，其中 x 是一个 R-正则序列，且 R 是完备的；(b) $T = k[x]$ 满足 $\mathfrak{m}_T = (x)$，其中对于某个正整数 n，$x \in \mathfrak{m}_R$ 满足条件 $(0 : x) = x^n R \neq (0)$。

最后，值得一提的是，主定理的一个变体在第 3 节中得到了证明；参见推论 3.12。这个结果尤其有趣，因为它给出了一个关于 k 可提升性的充要条件，该条件用截面来表述，而我们的主定理则用回缩来表述这一条件。

2. Semi-fiber products of algebras

本节定义代数的半纤维积这一概念，并讨论其若干性质。我们证明，半纤维积这一类包含了若干类交换环。此外，命题 2.13 给出了半纤维积的一种刻画，这一结果或许也具有独立的研究价值。

2.1. 对于一个 k-代数 $(R, \mathfrak{m}_R)$，我们有等式 $R = k \oplus \mathfrak{m}_R$（作为 k-向量空间）。因此，R 中的每个元素都可唯一地写成 k 和$\mathfrak{m}_R$中元素的和，也就是说，对于每个 $r \in R$，存在 $\ell \in k$ 和 $x \in \mathfrak{m}_R$，使得

$$r = \ell \oplus x. \tag{2.1.1}$$

为清楚起见，这里我们用记号 $\oplus$ 表示直和中元素的加法，以便将其与环中的通常加法区分开来。例如，注意对于 R 中的另一个元素 $r' = \ell' \oplus x'$，若有 $\ell' \in k$ 和 $x' \in \mathfrak{m}_R$，则 R 中的乘法 rr'可写为 $rr' = \ell\ell' \oplus (\ell x' + \ell' x + xx')$，其中 R中的加法是通常的加法。

在接下来的讨论中，我们将为半纤维积的定义奠定基础。在全文中，每当讨论半纤维积时，我们都会自动采用本讨论中的假设和记号。

2.2. 设 $(R, \mathfrak{m}_R)$ 和 $(S, \mathfrak{m}_S)$ 是 k-代数，并假设 $\mathfrak{m}_S$ 上存在一个 R 作用，记为 $*$，在此作用下， $\mathfrak{m}_S$ 成为一个 (R, S)-双模。在这种情况下，由于 S 是一个 k-代数，对于 (2.1.1) 中所述的 R 的所有元素 $r = \ell \oplus x$、 $y \in \mathfrak{m}_S$ 和 $s \in S$，我们有以下等式

$$\begin{aligned} \ell * y &= \ell y \\ r * y &= \ell y + x * y \\ r*(ys) &= (r*y)s. \end{aligned}$$

等价地，存在一个 k-线性环同态 $R \to \mathrm{End}_S(\mathfrak{m}_S)$。

定义 2.3。考虑 2.2 中的情形。我们将 R通过 S的半纤维积 定义为 $R \ltimes_k S$，如下所示:

(a) 作为一个 k-向量空间，令 $R \ltimes_k S = k \oplus \mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S$。注意，根据 2.1，我们有

$$\begin{aligned} R \ltimes_k S &= R \oplus \mathfrak{m}_S \\ &= \mathfrak{m}_R \oplus S \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

作为 k-向量空间。

(b) 对所有元素 $r,\ r' \in R$和 $y,\ y' \in \mathfrak{m}_S$，考虑等式 (2.3.1)，我们可以通过以下公式在 $R \ltimes_k S$ 上定义乘法

$$(r \oplus y) \cdot (r' \oplus y') = rr' \oplus (r*y' + r'*y + yy'). \tag{2.3.2}$$

令 $\mathfrak{m}_{R \ltimes_k S} = \mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S$，可验证 $R \ltimes_k S$是一个带单位元的交换环，因此 $(R \ltimes_k S,\ \mathfrak{m}_{R \ltimes_k S})$ 是一个 k-代数。由 (a) 部分可知，$(R,\ \mathfrak{m}_R)$ 和 $(S,\ \mathfrak{m}_S)$ 都是 $(R \ltimes_k S,\ \mathfrak{m}_{R \ltimes_k S})$ 的自然 k-子代数。

定义 2.4。我们称 k-代数 $(A,\ \mathfrak{m}_A)$ 具有半纤维积分解，如果存在 A 的 k-子代数 $(R,\ \mathfrak{m}_R)$ 和 $(S,\ \mathfrak{m}_S)$，使得存在 k-代数同构 $A \cong R \ltimes_k S$。

半纤维积的泛性质可描述如下。

2.5. 设 $(R, \mathfrak{m}_R)$ 和 $(S, \mathfrak{m}_S)$ 如 2.2 节所述。对于一个 k-代数 $(T, \mathfrak{m}_T)$，假设存在一个 k-代数同态 $f\colon R \to T$（因此， $\mathfrak{m}_T$通过 f成为一个 R-模），以及一个保持乘法的 R-模同态 $g\colon \mathfrak{m}_S \to \mathfrak{m}_T$（也就是说，对于所有元素 $y, y' \in \mathfrak{m}_S$， $g(yy') = g(y)g(y')$）。那么，存在唯一的 k-代数同态 $\varphi\colon R \ltimes_k S \to T$ 满足等式

$$\varphi|_R = f \qquad \text{and} \qquad \varphi|_{\mathfrak{m}_S} = g.$$

事实上，对于每个元素 $r \in R$ 和 $y \in \mathfrak{m}_S$，映射 φ 定义为 $\varphi(r \oplus y) = f(r) + g(y)$; 利用等式 (2.3.2)，可知它确实是一个 k-代数同态。

代数的半纤维积这一类包括若干类交换环，列举如下。

例 2.6. 设 $(R, \mathfrak{m}_R, k)$ 和 $(S, \mathfrak{m}_S, k)$ 是具有共同剩余域 k 的交换诺特局部环。那么， R 与 S 的纤维积 定义为

$$R \times_k S = \{(r, s) \in R \times S \mid \pi_R(r) = \pi_S(s)\}$$

其中 $R \xrightarrow{\pi_R} k \xleftarrow{\pi_S} S$ 是自然满射。注意， $R \times_k S$ 是一个交换诺特局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}_{R \times_k S} = \mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S$，剩余域为 k。还要注意，这类纤维积环与极大理想可分解的交换诺特局部环这一类环相同；关于纤维积环的性质和应用，我们请读者参阅

[3, 5, 6, 7, 8, 10, 17, 18, 19, 20, 22] 。

进一步假设 R 和 S 是 k-代数。通过等式 $\mathfrak{m}_R*\mathfrak{m}_S=0$定义 $*$在 $\mathfrak{m}_S$ 上的 R-作用，我们得到 $R\times_k S\cong R\ltimes_k S$。更确切地说，在此同构下， $R\ltimes_k S$ 中满足 $\ell\in k$、$x\in\mathfrak{m}_R$和 $y\in\mathfrak{m}_S$的每个元素 $\ell\oplus x\oplus y$，都对应于 $R\times_k S$中的元素 $(\ell\oplus x,\ \ell\oplus y)$。因此，正如名称所示，上述形式的$k$-代数的每个纤维积都是半纤维积。

例 2.7. 环R 的平凡扩张（也称为永田理想化）是由一个 R-模 M 定义的 R-模 $R\oplus M$，其环结构由乘法 $(r\oplus m)\cdot(r'\oplus m')=rr'\oplus(rm'+r'm)$ 给出，其中所有 $r,\ r'\in R$ 和 $m,\ m'\in M$均成立。注意， M是 $R\ltimes M$的一个理想，且满足 $M^2=0$。

对于一个 k-代数 $(R,\mathfrak{m}_R)$ 和一个 R-模 M，令 $S=k\ltimes M$，其中 M被视为一个 k-向量空间（因此，$(S,\mathfrak{m}_S)$ 是一个局部 k-代数，其极大理想为 $\mathfrak{m}_S=M$），我们有一个 k-代数的自然同构 $R\ltimes M\cong R\ltimes_k S$。因此，每个由模扩张 k-代数得到的平凡扩张都是一个半纤维积。

例 2.8. 设 $(R,\mathfrak{m}_R)$ 和 $(T,\mathfrak{m}_T)$ 是 k-代数。注意，张量积 $(R\otimes_k T,\mathfrak{m}_R\otimes_k T+R\otimes_k\mathfrak{m}_T)$ 是一个 k- 代数，我们称之为张量代数。现在，令 $S=k\oplus\mathfrak{m}_S$，其中 $\mathfrak{m}_S=R\otimes_k\mathfrak{m}_T$（因此， $\mathfrak{m}_S$ 是一个 R-模），则 $(S,\mathfrak{m}_S)$ 是一个 k-代数，并且存在一个 k-代数的同构 $R\otimes_k T\cong R\ltimes_k S$。因此，每个张量代数都是一个半纤维积。注意，$(S,\mathfrak{m}_S)$ 不一定是诺特的；参见例 2.12。

例 2.9。 设 $(R,\mathfrak{m}_R)$ 和 $(T,\mathfrak{m}_T)$ 是完备局部 k-代数。类似于例 2.8，每个完备张量积 k-代数 $(R\widehat{\otimes}_k T,\mathfrak{m}_R\widehat{\otimes}_k T+R\widehat{\otimes}_k\mathfrak{m}_T)$ 都是半纤维积。更确切地说，在此情形下我们有 $R\widehat{\otimes}_k T\cong R\ltimes_k S$，其中 $S=k\oplus\mathfrak{m}_S$ 和 $\mathfrak{m}_S=R\widehat{\otimes}_k\mathfrak{m}_T$。

在定义 2.3 中，如果 R-作用 $*$ 在 $\mathfrak{m}_S$ 上是通过交换诺特局部 k-代数的同态给出的，那么半纤维积的概念就退化为例 2.6 中引入的普通纤维积概念。我们将其记录为以下结果。

命题 2.10. 设$(R,\mathfrak{m}_R)$和$(S,\mathfrak{m}_S)$为交换诺特局部 k 代数。若 $\mathfrak{m}_S$ 上的 R-模结构是经由 k-代数同态 $f\colon R\to S$ 诱导的，则由下式定义的映射 $\psi\colon R\ltimes_k S\to R\times_k S$

$$\psi(\ell\oplus x\oplus y)=(\ell\oplus x,\ell\oplus(y+f(x)))$$

其中 $\ell\in k$、 $x\in\mathfrak{m}_R$ 和 $y\in\mathfrak{m}_S$，是 k-代数的一个同构。

证明。 利用等式 (2.3.2) 可以容易地验证 ψ 是一个 k-代数同态。此外，对于所有属于 $R\times_k S$ 的 $(\ell\oplus x,\ell\oplus y)$，注意到

$$\psi(\ell\oplus x\oplus(y-f(x)))=(\ell\oplus x,\ell\oplus y)$$

因此， ψ 是满射。 ψ 是单射这一事实显然成立。 □

接下来的结果概述了有关半纤维积的一些基本事实。读者可能会想知道，半纤维积还具有哪些环论、同调或几何性质，也就是说，是否存在能同时涵盖例 2.6–2.9 的普遍规律。目前，这并非本文的主要关注点或探讨主题。

命题 2.11. 设$(R,\mathfrak{m}_R)$ 和$(S,\mathfrak{m}_S)$ 如 *2.2* 所述。则以下陈述成立：

(a) 如果 R 和 S 是有限生成的 k-代数，那么 $R\ltimes_k S$也是。(b) 如果 R 和 S 是有限生成的 k-代数的局部化，那么 $R\ltimes_k S$也是。(c) 假设 $(R,\mathfrak{m}_R)$ 和 $(S,\mathfrak{m}_S)$ 是完备局部 k-代数，并且 $\mathfrak{m}_S$ 上的 $\mathfrak{m}_R$-进拓扑是分离的，即 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{m}_R^n*\mathfrak{m}_S)=(0)$。那么，$R\ltimes_k S$ 是完备局部 k-代数。(d) 如果 R 是诺特的，且 $\mathfrak{m}_S$ 作为 R-模有限生成，那么 $R\ltimes_k S$ 也是诺特的。(e) 如果 $R\ltimes_k S$ 是诺特的，那么 R也是。

我们只证明 (c) 部分，因为其他结论的证明都很直接。

证明。 为证明 (c) 部分，设 $A=R\ltimes_k S$和 $\mathfrak{m}_A=\mathfrak{m}_R\oplus\mathfrak{m}_S$。于是，我们有等式 $\mathfrak{m}_A^2=\mathfrak{m}_R^2\oplus(\mathfrak{m}_R*\mathfrak{m}_S+\mathfrak{m}_S^2)$。更一般地，由归纳法可得

$$\mathfrak{m}_A^n=\mathfrak{m}_R^n\oplus\left(\mathfrak{m}_R^{n-1}*\mathfrak{m}_S+\mathfrak{m}_R^{n-2}*\mathfrak{m}_S^2+\cdots+\mathfrak{m}_R*\mathfrak{m}_S^{n-1}+\mathfrak{m}_S^n\right)$$

对所有整数 $n\geqslant 1$均成立。由于根据我们的假设，由理想序列 $\{\mathfrak{m}_R^n*\mathfrak{m}_S\mid n\geqslant 1\}$ 定义的 $\mathfrak{m}_S$ 上的拓扑是分离的，因此由 [9, 定理（30.1）]可知，对于任意正整数 n，都存在一个正整数 $m(n)$，使得包含关系 $\mathfrak{m}_R^{m(n)}*\mathfrak{m}_S\subseteq\mathfrak{m}_S^n$ 成立。因此，对所有正整数 n，我们有

$$\mathfrak{m}_A^{m(n)+n}\subseteq\mathfrak{m}_R^n\oplus\mathfrak{m}_S^n. \tag{2.11.1}$$

如果 $\mathcal{S}=\{a_n\oplus b_n\in\mathfrak{m}_R\oplus\mathfrak{m}_S\mid n\geqslant 1\}$ 是 $\mathfrak{m}_A$-进拓扑中的柯西序列，那么根据 (2.11.1)，序列 $\{a_n\mid n\geqslant 1\}$ 和 $\{b_n\mid n\geqslant 1\}$ 分别也是 R 和 S 在 $\mathfrak{m}_R$-进和 $\mathfrak{m}_S$-进拓扑中的柯西序列。因此，$\mathcal{S}$ 根据我们的假设收敛，也就是说， $R\ltimes_k S$ 是一个完备局部 k-代数。□

下一个例子表明，在命题 2.11 的 (e) 部分中，假设 $R\ltimes_k S$ 是诺特的，并不一定意味着 S 是诺特的。

例 2.12. 设 $A=k[x,y]$、 $R=k[x]$和 $S=k[x^ny\mid 0\leqslant n\in\mathbb{Z}]$。那么，$k$-代数 A 存在半纤维积分解 $A\cong R\ltimes_k S$。

我们以以下结果结束本节，该结果给出了半纤维积的一种简单刻画，或许具有独立的研究价值。

命题 2.13. 对于 k-代数 $(A,\mathfrak{m}_A)$，以下条件等价：

(i) A 存在半纤维积分解 $A\cong R\ltimes_k S$，分解为 k-子代数$(R,\mathfrak{m}_R)$ 和 $(S,\mathfrak{m}_S)$；
(ii) 存在一个直和分解 $\mathfrak{m}_A=\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{I}$，其中各项为 k-向量空间，且 $\mathfrak{u}$ 是 A 的乘法封闭子集， $\mathfrak{I}$ 是 A 的理想。

证明。 通过令 $\mathfrak{u}=\mathfrak{m}_R$ 和 $\mathfrak{I}=\mathfrak{m}_S$，可直接得出 (i) $\Longrightarrow$ (ii)。(ii) $\Longrightarrow$ (i)：令 $R=k\oplus\mathfrak{u}$ 和 $S=k\oplus\mathfrak{I}$。令 $\mathfrak{m}_R=\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{m}_S=\mathfrak{I}$，注意到 $(R,\mathfrak{m}_R)$ 和 $(S,\mathfrak{m}_S)$ 是 $(A,\mathfrak{m}_A)$ 的 k- 子代数。通过在 $\mathfrak{m}_S$ 上定义 R-作用为 A 中 R 与 $\mathfrak{m}_S$ 的乘法，我们得到 $A\cong R\ltimes_k S$。□

3. Lifting of complexes

本节中，我们介绍可提升性的概念，并给出一些例子。我们以 Poincar´e 级数为工具，证明定理 3.7，从而能够根据截面的概念刻画 k 的可提升性；参见推论 3.12。我们先约定以下内容，并在本节中始终遵循。

约定 3.1。 在本节中，$(R,\ \mathfrak{m}_R)$ 是一个 k-代数；对于 R 的理想 $I \subseteq \mathfrak{m}_R$，我们用 $(R,\ \mathfrak{m}_R)$ 表示剩余 k- 代数 $\overline{R}/I$，其中 $\mathfrak{m}_R = \mathfrak{m}_R/I$。此外，我们令 π 表示自然满射 $R \twoheadrightarrow R$。

接下来，我们回顾提升的经典定义。

定义 3.2。 如果一个 R-自由复形（即由自由 R-模组成的复形）F 可以提升到 R（沿着 π），则称其为 可提升 的；如果存在一个 R-自由复形 L，使得 $L\otimes_R R \cong F$作为 R-复形成立。此时，我们称 L 是将 F 提升到 R的提升 。如果存在一个 R-自由分解 M 可以提升到 R，则称一个 $\overline{R}$-模 M 可以提升 到 R 。

3.3. 在定义 3.2 中，若 $(R, \mathfrak{m}_R)$ 是一个诺特完备局部环，且 I 由一个 R-正则序列生成，那么一个由有限生成自由R-模组成的下有界 R-复形 $\overline{F}$ 可以沿 π 提升到 $\underline{R}$，前提是 $\mathrm{Ext}^2_R(F,F) = 0$；参见 Yoshino $[24, \text{引理 (3.2)}]$。Nasseh 和 Sather-Wagstaff $[16, \text{主定理}]$ 将此结论推广到 I 不一定由 R-正则序列生成的情形。此推广之所以可行，是因为将 R 替换为 Koszul 复形 $K^R(I)$，并假设 F 是一个同调下有界且同调逐次有限的半自由 DG $K^R(I)$-模。

正如我们在引言中所提到的，本文关注的是 R-模 k 到 R的可提升性。因此，我们在此通过给出一些相关例子继续讨论。在下列例子中，x 和 y 分别表示变量 x 和 y 在 R中的剩余类。另外，符号 $\simeq$ 用于表示拟同构。第一个例子考察 R-模 k 沿 π的提升性质，其中R 是一个非纤维积的半纤维积；参见例 2.12。

例 3.4。 设 $R = k[x,y]$ 和 $R = R/\overline{xR} \cong k[y]$。则，剩余域 k 的 $\overline{R}$-自由分解 $0 \to \overline{R} \xrightarrow{\overline{y}} \overline{R} \to 0$ 可提升到 R，且其提升 L 在拟同构意义下唯一：$0 \to R \xrightarrow{y} R \to 0$。注意， $L \simeq R/yR$。

下一个例子考察 R-模 k 沿 π的提升性质，其中 R 是一个纤维积环。

例 3.5。 设 $R = k[x,y]/(xy) \cong k[x] \times_k k[y]$ 且 $R = R/(x-\overline{y}) \cong k[x]/(x^2)$。则，剩余域 k 的 R- 自由分解 F： $\cdots \to R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \to \overline{0}$ 可提升到 R，其提升为

$$\Big(\cdots \to R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{y} R \xrightarrow{x} R \to 0\Big) \simeq R/xR$$
$$\Big(\cdots \to R \xrightarrow{y} R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{y} R \to 0\Big) \simeq R/yR.$$

注意，在拟同构意义下，这些是 F 到 R 的唯一提升。

下一个例子展示了若干种 k 无法沿着 π提升的情形。

例3.6。 考虑以下情形：

(a) $R = k[x,y]/(x^2 - y^3)$ 和 $\overline{R} = R/(y) \cong k[x]/(x^2)$；或
(b) $R = k[x]$ 和 $\overline{R} = R/(x^2) \cong k[x]/(x^2)$。
在这两种情形下，剩余域 k 的 $\overline{R}$-自由分解 $\cdots \to R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} \overline{R} \xrightarrow{x} \overline{R} \to \overline{0}$ 都不能提升到 R。

这是本节的主要结果，它给出了沿着 π 提升 k 的必要条件。

定理 3.7。若 $(R, \mathfrak{m}_R)$ 是一个诺特局部 k-代数，且 R-模 k 可提升到 $\overline{R}$，则 I 由 $\mathfrak{m}_R$ 的一个极小生成集的子集生成。

该定理的证明将在一些准备工作之后给出。

3.8. 设 M 是一个有限生成的 R-模，可提升到 R，其提升为 R-复形 L；再设 F 是 R 的一个 R-自由分解。注意，$L \otimes_R F$ 是由自由 R-模构成的复形。此外，作为 R-复形和 R-复形，我们有 $M \simeq L \otimes_R R$。因此，作为 R-复形，$M \simeq \overline{L} \otimes_R F$，故 $L \otimes_R F$ 是 M 的一个 $\overline{R}$-自由分解。

定义 3.9. 设 $(R, \mathfrak{m}_R, k)$ 是一个诺特局部环。回顾一下，同调下有界且同调逐次有限的 R-复形 N 的庞加莱 $'$级数 定义为

$$P_N^R(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k \left(\operatorname{Tor}_i^R(k, N)\right) t^i \in \mathbb{Z}[\![t]\!].$$

作为我们在 3.8 节讨论的推论，可得以下结果。

引理 3.10. 若 $(R, \mathfrak{m}_R)$ 是一个诺特局部 k-代数，则对于一个有限生成的 R-模 M，若其可沿着 π 提升到 R，便有等式

$$P_M^R(t) = P_M^{\overline{R}}(t) P_{\overline{R}}^R(t). \tag{3.10.1}$$

证明。考虑 3.8 中的情形。由于 $M \simeq L \otimes_R R$ 是 R-复形，因此由 [2, 引理 (1.5.3)]可得

$$P_M^{\overline{R}}(t) = P_L^R(t) P_{\overline{R}}^{\overline{R}}(t) = P_L^R(t). \tag{3.10.2}$$

将 [2, 引理 (1.5.3)] 再次应用于 R-复形的拟同构 $M \simeq L \otimes_R F$，并利用 F 是 R 的一个 R-自由分解这一事实，可得

$$P_M^R(t) = P_L^R(t) P_F^R(t) = P_L^R(t) P_{\overline{R}}^R(t). \tag{3.10.3}$$

结合 (3.10.2) 和 (3.10.3)，即可得到等式 (3.10.1)。 □

定理 *3.7* 的证明。考察引理 3.10 中等式 (3.10.1) 两边 t 的系数，我们得到等式

$$\nu_R(\mathfrak{m}_R) = \nu_{\overline{R}}(\mathfrak{m}_{\overline{R}}) + \nu_R(I)$$

其中 ν 表示最小生成元个数。这个等式意味着，若 I 由 $x_1, \ldots, x_t$ 极小生成，则 $x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2$ 线性无关。因此，I 由 $\mathfrak{m}_R$ 的一个极小生成集的部分元素生成。□

我们的下一个结果是定理 3.7 的推论，该定理给出了若干关于 k 沿着 π具有可提升性的等价条件。这个结果尤为有趣，因为它以截面的形式给出了 k 具有可提升性的充要条件，而我们的主定理则以回缩的形式给出了这样的条件。我们先提醒读者截面和回缩的定义。

定义 3.11。设 $f\colon R \to S$ 和 $g\colon S \to R$ 是 k-代数同态，且 f 是单射，g 是满射，并且 $g \circ f = \mathrm{id}_R$。在这种情况下，$f$ 称为 g 的截面，而 g 称为 f 的 回缩。

推论 3.12。假设 $(R, \mathfrak{m}_R)$ 是一个诺特完备局部 k-代数，并且 I 满足等式 $\mathfrak{m}_R I = (0)$。那么，以下命题等价：

(i) $\overline{R}$-模 k 可提升到 R；(ii) 每个有限生成的 R-模都可提升到 R；

(iii) 自然满射 $\pi\colon R \twoheadrightarrow R$ 有一个截面；(iv) R 有一个半纤维积分解 $R \cong R \ltimes I \cong R \ltimes_k (k \ltimes I)$。

在证明这一结果之前，我们先指出以下事实。

3.13. 设 $(R, \mathfrak{m}_R)$ 是一个诺特完备局部 k-代数，且 I 是 R 的一个理想，满足 $\mathfrak{m}_R I = (0)$。容易验证，若 I 由 $\mathfrak{m}_R$ 的一个极小生成集中的部分元素生成，则 $R \cong (R/I) \ltimes I$ 作为 k-代数成立。事实上，在这种情况下，我们可以假设 $R = k[\![x, y]\!]/J$，其中 $x \cup y$ 是一个有限变量集，J 是 $k[\![x, y]\!]$ 的一个理想，满足 $J \subseteq (x, y)^2$，而 I 是 R 中由 $\overline{x}$ 模 J 生成的理想。根据我们的假设，J 包含理想 $(x)^2$ 和 $(x)(y)$，因此可以取 $k[\![y]\!]$ 中的元素序列 f，使得 $J = ((x)^2, (x)(y), f)$。于是，$R/I \cong k[\![y]\!]/(f)$，因此 $(R/I) \ltimes I \cong R$。

推论 *3.12* 的证明。蕴含关系 (iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) 显然成立。

(i) $\Longrightarrow$(iv)：若 $\overline{R}$-模 k 可提升到 R，则由定理 3.7 可知，I 由 $\mathfrak{m}_R$ 的一个极小生成集的部分元素生成。由于 $\mathfrak{m}_R I = (0)$，如我们在 3.13 中所讨论的，我们得到同构 $R \cong R \ltimes I$。此外，由例 2.7 可知 $R \cong R \ltimes_k (k \ltimes I)$。□

我们以如下评注结束本节。

3.14. 设 $(R, \mathfrak{m}_R)$ 是一个（完备）局部 k-代数。假设 R-模 k 可提升到 $\overline{R}$，则同态 π 不一定有截面。例如，例 3.5 中的 k- 代数同态 $R = k[x, y]/(xy) \twoheadrightarrow R = R/(x - y)$ 不存在截面。因此，推论 3.12 中的附加假设 $\mathfrak{m}_R I = (0)$ 是必要的。根据该推论，一个值得提出的一般性问题是：要使 π 有截面，还需要哪些附加条件？

4. Proof of Main Theorem

本节在完成必要准备后，将证明主定理并讨论其若干推论。我们首先从 k-代数同态的截面角度，给出半纤维积的另一种刻画。主定理的证明将用到这一刻画。

定理 4.1. 对于 k-代数 $(R, \mathfrak{m}_R) \subseteq (A, \mathfrak{m}_A)$，有如下结论：

(a) 包含映射 $R \subseteq A$ 有截面，当且仅当存在 A 的一个 k-子代数 $(S, \mathfrak{m}_S)$，使得 A 具有半纤维积分解 $A \cong R \ltimes_k S$。(b) 假设 $R \subseteq A$ 有截面。那么，*(a)* 部分中得到的 $S \subseteq A$ 也有截面，当且仅当 $A \cong R \times_k S$。

证明。(a) 假设 $\pi\colon A \to R$ 是包含映射 $R \subseteq A$ 的截面。令 $S = k \oplus \mathfrak{m}_S$，其中 $\mathfrak{m}_S = \mathrm{Ker}(\pi)$，并注意到 $\mathfrak{m}_S$ 上的 R-作用 $*$ 由下述方式给出

：在 A中，将 R 和 $\mathfrak{m}_S$ 的元素相乘即可得到该作用，因此显然有 $A \cong R \ltimes_k S$。(a) 部分的逆命题显然成立。

(b) 设 $\pi'\colon A \to S$ 是包含映射 $S \subseteq A$ 的截面。根据 (a)，我们可以通过 $R \ltimes_k S$ 将 A 识别。设 $f\colon R \to S$ 是 k-代数同态 π' 与包含映射 $R \subseteq A$ 的复合，并注意到 $\mathfrak{m}_S$ 上的 R-模结构由 f 给出。因此，由命题 2.10 可得 $R \ltimes_k S \cong R \times_k S$，如所求。□

主定理的证明将在进一步准备之后给出，这些准备包含在下面两个引理中。

引理 4.2. 设 $\varphi\colon (T, \mathfrak{m}_T) \to (A, \mathfrak{m}_A)$ 是一个 k-代数同态。假设 T 是完备的，且 A 是分离的，也就是说，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}_A^n = (0)$。若等式 $\mathfrak{m}_T A = \mathfrak{m}_A$ 成立，则 φ 是满射。

证明。由于 $A = k \oplus \mathfrak{m}_A$，由我们的假设可得

$$\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_T A = \varphi(\mathfrak{m}_T) + \varphi(\mathfrak{m}_T)\mathfrak{m}_A.$$

因此，对于元素 $x \in \mathfrak{m}_A$，存在正整数 r_1 以及元素a_1，$b_{1i} \in \mathfrak{m}_T$和 $x_{1i} \in \mathfrak{m}_A$，对于 $1 \leqslant i \leqslant r_1$，使得

$$x = \varphi(a_1) + \sum_{i=1}^{r_1} \varphi(b_{1i}) x_{1i}.$$

对 n 使用归纳法，我们得到等式

$$x = \varphi(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + \sum_{i=1}^{r_n} \varphi(b_{ni}) x_{ni}$$

其中 r_n 是正整数，对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$，$b_{ni} \in \mathfrak{m}_T^n$ 都有 $a_j \in \mathfrak{m}_T^j$，并且对所有 $1 \leqslant i \leqslant r_n$ 都有 $x_{ni} \in \mathfrak{m}_A$。由于 T 是完备的，$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 是 T 中的一个元素。此外，由等式可得

$$x - \varphi(\alpha) = \varphi\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i\right) + \sum_{i=1}^{r_n} \varphi(b_{ni}) x_{ni}$$

$x - \varphi(\alpha) \in \mathfrak{m}_A^n$ 对所有整数 $n \geqslant 1$ 都成立。因此，由于 A 是分离的，我们得到等式 $x = \varphi(\alpha)$ 在 A 中成立，这意味着 φ 是满射。□

引理 4.3. 假设$(R, \mathfrak{m}_R)$ 是一个诺特局部 k-代数，且$(T, \mathfrak{m}_T)$ 是$(R, \mathfrak{m}_R)$ 的一个 k-子代数，使得 R 是 T-平坦的。设 F是一个由有限生成自由 R-模组成的复形。若对某个整数 n，有 $\mathrm{H}_n(F \otimes_T k) = 0$，则$\mathrm{H}_n(F) = 0$。

证明。证明分以下步骤进行。

步骤 1：对所有整数 $i \geqslant 1$，都有 $\mathbf{H}_n\left(F \otimes_T \left(T/\mathfrak{m}_T^i\right)\right) = 0$。此结论通过对 i 使用归纳法证明。事实上，对于整数 $i > 1$，由于 F是一个 T-平坦复形，短正合列

$$0 \to \mathfrak{m}_T^{i-1}/\mathfrak{m}_T^i \to T/\mathfrak{m}_T^i \to T/\mathfrak{m}_T^{i-1} \to 0$$

T-模诱导出一个短正合列

$$0 \to F \otimes_T \left(\mathfrak{m}_T^{i-1}/\mathfrak{m}_T^i\right) \to F \otimes_T \left(T/\mathfrak{m}_T^i\right) \to F \otimes_T \left(T/\mathfrak{m}_T^{i-1}\right) \to 0$$

T-复形。注意，复形 $F\otimes_T\left(\mathfrak{m}_T^{i-1}/\mathfrak{m}_T^i\right)$ 是 $F\otimes_T k$的直和，因此 H$_n\left(F\otimes_T\left(\mathfrak{m}_T^{i-1}/\mathfrak{m}_T^i\right)\right)=0$。另一方面，根据归纳步骤，我们有 H$_n\left(F\otimes_T\left(T/\mathfrak{m}_T^{i-1}\right)\right)=0$。因此，$\mathrm{H}_n\left(F\otimes_T\left(T/\mathfrak{m}_T^i\right)\right)=0$。

步骤 2：分别记 $B_n(F)$ 和 $Z_n(F)$ 为 F 的第 n 个边界集和第 n 个循环集。那么，对于所有整数 $i\geqslant 1$，我们都有包含关系 $Z_n(F)\subseteq B_n(F)+\mathfrak{m}_T^iF_n$。为证明这一点，注意到对于所有整数 $i\geqslant 1$，我们都有

$$Z_n\left(F\otimes_T\left(T/\mathfrak{m}_T^i\right)\right)=B_n\left(F\otimes_T\left(T/\mathfrak{m}_T^i\right)\right)=\left(B_n(F)+\mathfrak{m}_T^iF_n\right)/\mathfrak{m}_T^iF_n \tag{4.3.1}$$

其中第一个等式由步骤 1 得出。现在，令 $z\in Z_n(F)$。那么，我们有$z\otimes_T\left(T/\mathfrak{m}_T^i\right)\in Z_n(F)\otimes_T\left(T/\mathfrak{m}_T^i\right)\subseteq Z_n\left(F\otimes_T\left(T/\mathfrak{m}_T^i\right)\right)$。因此，由 (4.3.1) 可得 $z\in B_n(F)+\mathfrak{m}_T^iF_n$。

步骤 3：现在我们证明 H$_n(F)=0$。为此，注意到根据步骤 2，我们有

$$Z_n(F)\subseteq\bigcap_{i\geqslant 1}\left(B_n(F)+\mathfrak{m}_T^iF_n\right)\subseteq\bigcap_{i\geqslant 1}\left(B_n(F)+\mathfrak{m}_R^iF_n\right)=B_n(F)$$

其中，最后一个等式成立是因为 $B_n(F)\subseteq F_n$，且 F_n 是诺特局部环 $(R,\mathfrak{m}_R)$ 上的自由模。因此，我们有 $Z_n(F)=B_n(F)$，从而等式 H$_n(F)=0$ 成立。□

主定理的证明。 定理 4.1 的(a)部分已证明等价关系 (ii) $\iff$ (iii)。

(i) $\implies$ (ii)：假设 R-模 k 可提升到 R，则存在一个 R-自由复形 L，使得 $L\otimes_R R$ 是 k的一个 R-自由分解。因此，由同构 $L\otimes_T k\cong L\otimes_R R$ 可知，对所有整数 $n\geqslant 1$，H$_n(L\otimes_T k)=0$。所以，根据引理 4.3，对所有整数 $n\geqslant 1$，我们有 H$_n(L)=0$。令 H$_0(L)=R/J$，其中 J 是 R的一个理想，则 L 是 R/J的一个 R-自由（因而是 T-平坦）分解。由于 R/J 是 k的提升模，我们有 $R/J\otimes_R R\cong k$，因此，$\mathfrak{m}_{R/J}$ 可由 $\mathfrak{m}_T(R/J)$ 识别。根据引理 4.2，复合映射 $T\xrightarrow{\varphi}R\twoheadrightarrow R/J$ 是满射。另一方面，由于 $L\otimes_T k$ 是无环的，对所有整数 $i\geqslant 1$，我们有 $\mathrm{Tor}_i^T(R/J,k)=0$。因此，$R/J$ 是 T-平坦的，我们得出 $T\xrightarrow{\varphi}R\twoheadrightarrow R/J$是一个同构，这意味着 φ 有一个截面。

(ii) $\implies$ (i)：设 $\pi\colon R\to T$ 是 φ的一个截面。那么，T 是一个 R-模，通过 π，并且我们可以考虑 T的一个 R-自由分解 $F=\cdots\to F_1\to F_0\to 0$。由于每个$F_i$ 都是 T-平坦的，$F\otimes_R R\cong F\otimes_T k$ 是$T\otimes_R R\cong k$的一个 R-自由分解。因此，F是将 R-模 k 提升到 R的一个提升，如所需。□

以下结果是主定理的直接推论。

推论 4.4。 假设 $(R,\mathfrak{m}_R)$ 是一个诺特完备局部 k-代数，并设 $R=R/xR$，其中 $x\in\mathfrak{m}_R$ 是 R中的正则序列。那么，以下陈述等价：

(i) $\overline{R}$-模 k 可提升到 R；(ii) 包含映射 $k[\![x]\!]\subseteq R$ 有一个截面；(iii) 存在一个 k-子代数$(S,\mathfrak{m}_S)$，–它是$(R,\mathfrak{m}_R)$ 的子代数，并且 R具有半纤维积分解 $R\cong k[\![x]\!]\ltimes_k S$。

更准确地说，在这些等价条件下，$S=k\oplus\mathfrak{m}_S$，其中 $\mathfrak{m}_S$ 是包含映射 $k[\![x]\!]\subseteq R$的截面的核。

证明。由于 $\underline{x}$ 是 R中的正则序列，包含映射 $k[\![x]\!] \subseteq R$ 是平坦的；例如参见 [4, 习题 18.18]。因此，该断言可由定理 4.1 (a) 和主定理的证明推出。□

4.5. 考虑推论 4.4 的情形。根据我们在 3.3 节中的讨论，如果 $\operatorname{Ext}^2_R(k,k) = 0$，即 $\overline{R}$ 是克鲁尔维数至多为 1 的正则环，那么推论 4.4 的等价条件成立。

我们以下述结果结束本文，该结果是推论 4.4 的一个变体。注意，在这一结果中，与推论 4.4 不同，我们讨论的是一个非正则元素。

推论 4.6。 设 $(R,\mathfrak{m}_R)$ 是一个诺特局部 k-代数（不一定完备）。设 n 为正整数，x 是 $\mathfrak{m}_R$ 中满足 $(0:x) = \underline{x^n R} \neq (0)$ 的元素，并且 $R = R/xR$。则以下条件等价：

(i) $\overline{R}$-模 k 可提升到 R；(ii) 考虑 k-子代数 $(k[x],(x))$，它是 $(R,\mathfrak{m}_R)$ 的子代数，则包含映射 $k[x] \subseteq R$ 有一个截面；(iii) 存在 k-子代数 $(S,\mathfrak{m}_S)$，它是 $(R,\mathfrak{m}_R)$ 的子代数，使得 R 具有半纤维积分解 $R \cong k[x] \ltimes_k S$。

更准确地说，在这些等价条件下，$S = k \oplus \mathfrak{m}_S$，其中 $\mathfrak{m}_S$ 是包含映射 $k[x] \subseteq R$ 的截面的核。

证明。令 $T = k[X]/(X^{n+1})$，并考虑由映射 $T \xrightarrow{\cong} k[x]$ 和 $k[x] \hookrightarrow R$ 复合得到的 k-代数同态 $T \to R$。注意，序列

$$\cdots \xrightarrow{X} T \xrightarrow{X^n} T \xrightarrow{X} T \to k \to 0 \tag{4.6.1}$$

是正合的。因此，假设 $(0:x) = x^n R$ 意味着序列

$$\cdots \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x^n} R \xrightarrow{x} R \to \overline{R} \to 0$$

将函子 $R \otimes_T -$ 作用于正合列 (4.6.1) 所得到的序列也是正合的。因此，对于所有整数 $i \geqslant 1$，$\operatorname{Tor}^T_i(R,k) = 0$，也就是说，$R$ 是 T-平坦的。现在，由定理 4.1 (a) 和主定理的证明可得断言。□

References

1. M. Auslander、S. Ding 和 Ø. Solberg, *Liftings and weak liftings of modules*, 《J. Algebra》, **156**（1993），273–317。2. L. L. Avramov 和 H.-B. Foxby, *Ring homomorphisms and finite Gorenstein dimension*, 《Proc. London Math. Soc.》, **75**（1997），第3期，241–270。3. A. Dress 和 H. Kr¨amer, *Bettireihen von Faserprodukten lokaler Ringe*, 《Math. Ann.》**215**（1975），79–82。4. D. Eisenbud, *Commutative algebra With a view toward algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., 150, Springer-Verlag, 纽约, 1995。xvi+785页。5. T. H. Freitas 和 J. A. Lima, *On general fiber product rings Poincaré series and their* , , 预 *structure* 2024 arXiv:2402.12125 印本, 。6. H. Geller, *Minimal Free Resolutions of Fiber Products*, Proc. Amer. Math. Soc., **150**（2022年），第10期，4159–4172。7. A. I. Kostrikin 和 I. R. ˇSafarevi˘c, *Groups of homologies of nilpotent algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **115**（1957年），1066–1069。8. W. F. Moore, *Cohomology over fiber products of local rings* **321** 2009 3, , 《J. Algebra》 (), 第–期。9. M. Nagata, *Local Rings*, 第13卷。纯粹与应用数学丛书。Interscience Publishers（John Wiley & Sons 旗下），纽约—伦敦，1962年，第xiv+234页。

10. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *Tor algebra of local rings with decomposable maximal ideal* , 《Archiv der Mathematik》（即将刊出）。11. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *Diagonal tensor algebra and naïve liftings*, 《Journal of Pure and Applied Algebra》, **229**（2025）, 第1期, 论文编号107808。12. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *Obstruction to naïve liftability of DG modules*, 《J. Com- mut. Algebra》, **16**（2024年）, 第4期, 459–475。13. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *On the semifree resolutions of DG algebras over the enveloping DG algebras* **52** 2024 2, 657 667 , 《Communications in Algebra》, （）, 第–期。14. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *Naïve liftings of DG modules*, 《Mathematische Zeitschrift》, **301**（2022年）, 第1期, 1191–1210。15. S. Nasseh、M. Ono 和 Y. Yoshino, *The theory of j-operators with application to (weak) liftings of DG modules* **605** 2022 199 225 , 《J. Algebra》, （）, –。16. S. Nasseh 和 S. Sather-Wagstaff, *Liftings and Quasi-Liftings of DG modules*, 《J. Algebra》, **373**（2013）, 162–182。17. S. Nasseh 和 S. Sather-Wagstaff, *Vanishing of Ext and Tor over fiber products*, Proc. Amer. Math. Soc. **145**（2017）, 第11期, 4661–4674。18. S. Nasseh、S. Sather-Wagstaff 和 R. Takahashi, *Ring homomorphisms and local rings with quasi-decomposable maximal ideal* **52** 2024 10, 4295 4313 , 《Communications in Algebra》（）, 第–期。19. S. Nasseh、S. Sather-Wagstaff、R. Takahashi 和 K. VandeBogert, *Applications and homo-logical properties of local rings with decomposable maximal ideals*, 《Journal of Pure and Applied Algebra》**223**（2019）, 第3期, 1272–1287。20. S. Nasseh 和 R. Takahashi, *Local rings with quasi-decomposable maximal ideal*, 《Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society》, **168**（2020）, 第2期, 305–322。21. S. Nasseh 和 Y. Yoshino, *Weak liftings of DG modules*, 《J. Algebra》, **502**（2018）, 233–248。22. T. Ogoma, *Existence of dualizing complexes*, 《Journal of Mathematics of Kyoto University》, **24**（1984）, 第1期, 27–48。23. M. Ono 和 Y. Yoshino, *A lifting problem for DG modules*, 《J. Algebra》, **566**（2021）, 342–360。24. Y. Yoshino, *The theory of L-complexes and weak liftings of complexes*, 《J. Algebra》, **188**（1997）, 第1期, 144–183。

Department of Mathematical Sciences, Georgia Southern University, Statesboro,GA 30460, U.S.A.*Email address*: snasseh@georgiasouthern.edu

Department of Mathematics, Okayama University, 3-1-1 Tsushima-naka, Kita-ku, Okayama700-8530, Japan*Email address*: onomaiko.math@okayama-u.ac.jp

Graduate School of Environmental, Life, Natural Science and Technology, Okayama University, Okayama 700-8530, Japan*Email address*: yoshino@math.okayama-u.ac.jp