arXiv:2601.05550v1 [math.AP] 9 Jan 2026

关于一类柯西问题及其在非线性偏微分方程中的应用

Feida Jiang、Neil S. Trudinger* 和 Qiao-Qiao Xu

Abstract. 本文研究区间 $[0,+\infty)$ 内一类一般柯西问题的整体解的存在性与不存在性。我们的结果为证明欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中非线性偏微分方程的 Keller-Osserman 型结果提供了一种统一方法。作为这一一般框架的应用，我们给出了两系列非线性方程的 Keller-Osserman 型结果：一系列 k-Hessian 型方程以及一系列新的 Π_k-Hessian 型方程。对于更一般的 p-Hessian 矩阵，这些结果也得到了证明，其中 $p>1$，且非齐次项退化。

1. 引言

本文研究如下形式的一类柯西问题：

$$\begin{cases} v'(r)=Cr^{-q}\left(\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}, & r\in(0,+\infty),\\ v(0)=a, \end{cases} \tag{1.1}$$

对于任意给定的初始常数 a 以及常数 $q\geq 0,\tau>0,\theta>0,C>0$，其中 $g:\ \mathbb{R}\to(0,\ +\infty)$ 是一个非减连续函数，而 $v:\ [0,+\infty)\to[a,+\infty)$ 是一个未知函数。

我们希望证明柯西问题 (1.1) 的解的局部存在性和整体存在性，并将其应用于各类非线性偏微分方程，从而推广 Bao 和 Ji [5] 关于 k-Hessian 方程的基础工作。现在，我们给出第一个主要结果：在条件 $\tau>q\theta$ 下，方程 (1.1) 的局部存在性和正则性。

定理 1.1 (局部存在性和正则性)。假设 $g:\ \mathbb{R}\to(0,\ +\infty)$ 是一个非减连续函数，且常数 $q\geq 0,\theta>0,C>0$ 和 $\tau>q\theta$ 满足相应条件。那么，对任意常数 a，存在一个正数 R，使得柯西问题 (1.1) 存在一个解 $v\in C^1[0,R)\cap C^2(0,R)$，满足 $v'(0)=0,\ v'(r)>0$，且 $v''(r)>0$，其中 $r\in(0,\ R)$。此外，下列性质成立：

(i) 若 $\tau>\theta(q+1)$，则 $v\in C^2[0,R)$，其中 $v''(0)=0$；*(ii)* 若 $\tau=\theta(q+1)$，则 $v\in C^2[0,R)$，其中 $v''(0)=C(g(a))^{\frac{1}{\theta}}$；*(iii)* 若 $\tau<\theta(q+1)$，则 $v\in C^2(0,R)\cap W^{2,\delta}(0,R)$，其中 $\delta\in(1,\ \frac{\theta}{\theta(q+1)-\tau})$。

对于柯西问题 (1.1)，我们引入以下积分条件，以保证整体下解的存在解：

$$\int^{+\infty}\left(\int_0^t g(s)ds\right)^{-\frac{1}{\theta+1}}dt=+\infty, \tag{1.2}$$

Date：2026年1月12日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 35J60、35J96、35B65。*Key words and phrases.* 柯西问题；Keller-Osserman 条件；k-Hessian 方程；Π_k-Hessian 方程；整体下解。本研究得到国家自然科学基金（编号：12271093）、澳大利亚研究委员会（编号：DP230100499）、江苏省应用数学科研中心（资助编号：BK20233002）以及东南大学启动研究基金（编号：4007012503）的资助。*通讯作者。

其中我们省略了积分的下限，以允许其取任意正数。

接下来，我们提出第二个主要结果。该结果表明，在条件$\tau \geq q\theta + 1$下，条件（1.2）是柯西问题（1.1）存在整体解的充要条件。

定理 1.2. 假设 $g\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一个非减连续函数，$q \geq 0$、 $\theta > 0$、 $C > 0$ 和 $\tau \geq \theta q + 1$为常数。那么，柯西问题 (1.1) 存在一个解 $v \in C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$，满足 $v'(0) = 0$、 $v'(r) > 0$ 和 $v''(r) > 0$，对 $r \in (0, +\infty)$ 以及任意初值 a均成立，当且仅当条件 (1.2) 成立。此外，以下性质成立：

(i). 若 $\tau > \theta(q + 1)$，则 $v \in C^2[0, +\infty)$，且 $v''(0) = 0$；*(ii).* 若 $\tau = \theta(q + 1)$，则 $v \in C^2[0, +\infty)$，且 $v''(0) = C(\frac{g(a)}{\tau})^{\frac{1}{\theta}}$；*(iii).* 若 $\tau < \theta(q + 1)$，则 $v \in C^2(0, +\infty) \cap W^{2,\delta}_{loc}(0, +\infty)$，其中 $\delta \in (1, \frac{\theta}{(q+1)\theta-\tau})$。

在定理 1.2 中，若整体解 $v(r)$ 存在，则它是无界的，即 $\lim_{r\to+\infty} v(r) = +\infty$。这是因为 $v'(r) > 0$ 且 $v''(r) > 0$ 对于 $r \in (0, +\infty)$。

注意，定理 1.2 中关于 g 的替代假设是 $g\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ 非负且单调不减，并满足 $g(0) = 0$ 且 $g(t) > 0$ 对于 $t > 0$。在这种情形下，我们要求初值 $a \geq 0$，并且只能得到一个非负整体解 v，参见注 6.6。

由于条件（1.2）是柯西问题（1.1）存在整体解的充要条件，因此，若（1.2）不成立，我们可以转而考虑有界区域中的边界爆破问题；示例见 [6] 。

注 1.1。 请注意，定理 1.1 中关于局部存在性的假设 τ 是 $\tau > \theta q$，而定理 1.2 中关于整体存在性的假设 τ 是 $\tau \geq \theta q + 1$。当定理 1.2 中 $\theta \geq 1$ 时，(i) 或 (ii) 中的 τ 自动满足 $\tau \geq \theta q + 1$。当定理 1.2 中 $\theta > 1$ 时，$[\theta q + 1, \theta(q + 1)$ 是 (iii) 中 τ 的适当区间。当 $0 < \theta < 1$ 时，在假设 $\tau \geq \theta q + 1$ 下，只能出现情形 (i)。因此，定理 1.2 在 $\theta \geq 1$ 和 $0 < \theta < 1$ 情形中的应用有所不同。

接下来，我们陈述第三个主要结果，即在条件 $\theta q < \tau < q\theta + 1$ 下，柯西问题 (1.1) 的整体存在性与不存在性。在这一部分中，(1.1) 整体存在的充要条件有所不同。

定理 1.3. 假设 $g\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 非递减且连续，常数 $q \geq 0, \theta > 0, C > 0$ 和 $\theta q < \tau < q\theta + 1$。

(a). 若 g 满足

$$\int^{+\infty} \left(\int_0^t g^{\kappa}(s) ds \right)^{-\frac{1}{\kappa\theta+1}} dt = +\infty, \tag{1.3}$$

其中，对于某个常数 $\epsilon \in (0, \tau - \theta q)$，有 $\kappa = \frac{1-\epsilon}{\tau-\theta q-\epsilon}$，那么柯西问题 (1.1) 存在一个解$v \in C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$，满足 $v'(0) = 0, v'(r) > 0$，且 $v''(r) > 0$，对 $r \in (0, +\infty)$ 成立，并对应某个初值 a。此外，以下性质成立：

(i). 若 $\tau > \theta(q + 1)$，则 $v \in C^2[0, +\infty)$，且 $v''(0) = 0$；*(ii).* 若 $\tau = \theta(q + 1)$，则 $v \in C^2[0, +\infty)$，且 $v''(0) = C(\frac{g(a)}{\tau})^{\frac{1}{\theta}}$；*(iii).* 若 $\tau < \theta(q + 1)$，则 $v \in C^2(0, +\infty) \cap W^{2,\delta}_{loc}(0, +\infty)$，其中 $\delta \in (1, \frac{\theta}{(q+1)\theta-\tau})$。

(b). 若柯西问题 (1.1) 有解 $v \in C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$，且该解满足 *(a)* 中情形 *(i)*、*(ii)* 或 *(iii)* 的性质，满足 $v'(0) = 0, v'(r) > 0$ 以及 $v''(r) > 0$，对于 $r \in (0, +\infty)$ 以及某个初值 a，则条件 (1.2) 成立。

请注意，在定理 1.3 的若干重要应用中，条件(1.2)和(1.3)是等价的，参见推论6.1和6.2。在这些特定情形下，定理 1.3 仍为整体存在性提供充要条件。

注 1.2。 定理 1.3 中关于 τ的假设是 $\theta q < \tau < q\theta + 1$。当定理 1.3 中的 $\theta \geq 1$ 时，(ii)中的τ 以及(iii)中满足 $\tau > \theta q$的 τ 会自动满足 $\theta q < \tau < \theta q + 1$ 。当定理 1.3 中的 $0 < \theta < 1$ 时，($\theta(q+1)$ $\theta q + 1$)是(i)中 τ的适当区间。当 $\theta > 1$时，在假设$\theta q < \tau < \theta q + 1$下，只会出现情形(iii)。因此，定理 1.3 在应用于 $0 < \theta \leq 1$ 和 $\theta > 1$ 情形时表现不同。

柯西问题是微分方程领域的基石，因其在物理学、工程学和经济学等多个科学学科中具有广泛的应用而受到深入研究。我们回顾柯西问题的一些历史发展，以及它们在偏微分方程整体存在性与不存在性研究中的应用。问题 (1.1) 中的 $C = 1$、$q = n - 1$、 $\tau = n$、 $\theta = 1$ 和 $g = f$ 在 [12] 中得到了研究，并应用于带拉普拉斯算子的半线性椭圆方程

$$\Delta u = f(u), \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

含 $g = f$ 和 $\theta = 1$ 的条件（1.2）是方程 (1.4) 的著名 Keller-Osserman 条件，它是整体解存在的充要条件，参见 [12,14]。对于定义在里奇曲率下界为某个常数的完备黎曼流形上的拉普拉斯方程，当 $g = f$ 和 $\theta = 1$ 满足时，积分（1.2）的收敛意味着 [3] 中的 C^2 解不存在。 [13] 和 [5]，分别研究了将拉普拉斯算子替换为 p-拉普拉斯算子和 k-Hessian 算子后，方程 (1.4) 的 Keller-Osserman 条件。结合 k-Hessian 测度理论，第二作者与 X.-J. Wang 在 [19] 中引入了 p-k-Hessian 算子 $S_k[D(|Du|^{p-2}Du)]$ 。在 [1] 中，方程 (1.4) 中拉普拉斯算子的 Keller-Osserman 条件被推广到了 p-k-Hessian 算子。

我们工作的意义在于统一了整个欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中柯西问题 (1.1) 的一般框架，该问题包含两类更一般的非线性偏微分方程。 [1, 5, 12–14] 中的结果是定理 1.1 和 1.2 的特殊情形。除应用于具有基本右端项 $f(u)$ 的方程外，我们还允许右端项依赖于梯度 Du和变量 x。因此，我们的结果适用于退化方程或奇异方程，以及具有更复杂结构的方程，从而拓宽了现有文献的研究范围。定理 1.1 和 1.2 的主要应用如下退化或奇异k-Hessian 型方程

$$S_k^{\frac{1}{k}}[D(|Du|^{p-2}Du)] = |x|^{\alpha}|Du|^{\beta}f(u), \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{1.5}$$

以及它们的对应形式——退化或奇异 Π_k-Hessian 型方程

$$\Pi_k^{\frac{1}{C_n^k}}[D(|Du|^{p-2}Du)] = |x|^{\alpha}|Du|^{\beta}f(u), \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

其中， $p > 1, \cdots, n$、 α和 β 是给定的常数。算子 S_k 和 Π_k 的定义，以及方程 (1.5) 和 (1.6) 的 Keller-Osserman 定理，分别见第4节和第5节。

本文的主要特点可概括如下。

（i）通过统一研究一般的柯西问题（1.1），我们能够将 [1,5,12–14] 中关于 k-Hessian 方程的理论推广到带有右端项 $|x|^{\alpha}|Du|^{\beta}f(u)$ 的退化或奇异 k-Hessian 型方程（1.5）。该理论同样适用于全新的一系列 Π_k-Hessian 型方程（1.6），其中包括 [10] 中的（$n-1$）-Monge-Amp`ere 情形作为特例。据我们所知，此类右端项此前唯一已知的结果见于 [4]，其中方程

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = |x|^{\alpha}|Du|^{\beta}f(u) \tag{1.7}$$

进行了研究。注意，方程 (1.7) 是方程 (1.5) 在 $k = 1$ 时的特例，也是方程 (1.6) 在 $k = n$ 时的特例。

(ii). 在 [5] 和 [1], 中，方程 (1.5) 在 $p=2$、 $\alpha=\beta=0$ 和 $p>2$、 $\alpha=\beta=0$ 情形下分别已有研究。据我们所知，方程 (1.5) 在 $1<p<2$ 情形下尚无此类结果。本文在 $1<p<2$ 时所得结果是新的。

(iii). 现有文献中参数 θ 的取值区间为 $[0,+\infty)$。对于一般方程 (1.5) 和 (1.6)，在许多情况下会出现限制条件 $\theta\in(0,1)$；参见注 6.1。因此，在定理 1.1 的证明的步骤 2 中，我们采用不同于 $\theta\in[1,+\infty$ 情形的方法证明 $\theta\in(0,1)$ 的情形。相应地，本文关于 $0<\theta<1$ 情形的结果也是新的。

(iv). 我们在定理 1.1 中采用假设 $\tau>\theta q$ 来证明局部存在性，并在定理 1.2 中采用假设 $\tau\geq\theta q+1$ 来证明整体存在性。随后，我们还在定理 1.3 中研究 $\theta q<\tau<\theta q+1$ 时问题 (1.1) 的整体存在性，以补充定理 4.1 中 $-1<\alpha<\frac{1}{k}-1$ 的情形和定理 5.1 中 $-1<\alpha<\frac{k}{n}-1$ 的情形。值得注意的是，这些补充情形此前尚未有人研究。

(v). 将定理 1.2 和定理 1.3 应用于具有指数型非线性项和幂型非线性的 k-Hessian 型方程 (1.5) 以及 Π_k-Hessian 方程 (1.6) 时，条件（1.3）等价于条件（1.2）。因此，定理 1.2 和定理 1.3 都为这些具有此类非线性项的方程的整体存在性提供了充要条件，见推论 6.1 和 6.2。

本文组织如下。第2节证明柯西问题 (1.1) 的局部存在性和正则性。第3节研究柯西问题 (1.1) 的整体存在性和不存在性。我们证明条件（1.2）是一个充要条件，并证明定理 1.2。在第4节和第5节中，我们分别将定理 1.2 应用于两类非线性偏微分方程：k-Hessian 型方程和 Π_k-Hessian 型方程。在第5节中，我们作若干总结性评论。文末给出了函数 f 的一些显式例子（对应方程 (1.5) 和 (1.6)），以及 Π_k-Hessian 型方程 (1.6) 的整体下解。

2. Local existence and regularity of the Cauchy problem

本节我们研究柯西问题 (1.1)，并给出定理 1.1 的证明。我们用欧拉方法证明 (1.1) 的局部存在性，并讨论不同 τ 取值范围下 (1.1) 的局部解的正则性。本节末尾还将讨论在某个 $p>1$ 下，当 $\tau=\theta(q+\frac{1}{p-1})$ 时，(1.1) 的局部解的另一项性质。

定理 *1.1* 的证明。我们首先用欧拉方法分三步构造局部解 v。

步骤 *1*：我们定义分段线性函数 ψ。我们在矩形上定义一个泛函 $F(\cdot,\cdot)$

$$\mathcal{R}:=[0,l]\times\{v\in C^0[0,l]:a\leq v<a+h\}$$

by

$$G(r,v):=Cr^{-q}\left(\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{2.1}$$

其中 l 和 h 是较小的正数。于是，对于 $r>0$, $v'(r)=G(r,v(r))$，且 $G(r,v)>0$。我们在 $[0,l]$ 上定义分段线性函数 $\psi(\cdot)$，如下：

$$\begin{cases}\psi(r)=a, & r_0\leq r\leq r_1,\\ \psi(r)=\psi(r_{i-1})+G\left(r_{i-1},\psi(r_{i-1})\right)(r-r_{i-1}), & r_{i-1}<r\leq r_i,\quad i=2,\cdots,m,\end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $0=r_0<r_1<\cdots<r_m=l$ 和 $m\in\mathbb{N}$。

那么，当 l充分小时，我们有

$$a \le \psi(r) < a + h, \quad r \in [0, l]. \tag{2.3}$$

为证明（2.3），由于 g 是非递减的且 $\tau > q\theta$，我们有

$$\begin{aligned} F(r,\psi) \le & C r^{-q} \left(\int_0^r s^{\tau-1} ds \right)^{\frac{1}{\theta}} g^{\frac{1}{\theta}}(\psi(l)) \\ = & C \left(\frac{1}{\tau} \right)^{\frac{1}{\theta}} r^{\frac{\tau}{\theta}-q} g^{\frac{1}{\theta}}(\psi(l)) \\ \le & C \left(\frac{1}{\tau} \right)^{\frac{1}{\theta}} l^{\frac{\tau}{\theta}-q} g^{\frac{1}{\theta}}(\psi(l)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

对于 $r \in [0, l]$。因此由（2.2）和（2.4），可得

$$a \le \psi(r) \le a + \max_{0 \le r \le l} G(r, \psi(r)) l \le a + C \left(\frac{1}{\tau} \right)^{\frac{1}{\theta}} l^{\frac{\tau}{\theta}+1-q} g^{\frac{1}{\theta}}(\psi(l)), \quad r \in [0, l],$$

从而，如果 h 固定，则我们可以将 l 取得足够小，使得（2.3）成立。即，$(r, \psi) \in \mathcal{R}$.

步骤 *2*：我们证明 ψ 是 ε-近似解(1.1)。为此，我们需要证明，对于任意小的 $\varepsilon > 0$，都可以选取适当的点 $\{r_i\}_{i=1、\cdots、m}$，使得

$$\left| \psi'(r) - G(r, \psi(r)) \right| < \varepsilon, \quad r \in [0, l]. \tag{2.5}$$

由（2.1）和 $\tau > \theta q$ 可知

$$\lim_{r \to 0} G(r, \psi(r)) = 0.$$

那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\bar{r} \in (0, l)$，使得对于 $0 \le r < \bar{r}$，有

$$G(r, \psi(r)) < \varepsilon.$$

我们可以选择 $r_1 = \bar{r}$，从而得到

$$\left| \frac{d\psi(r)}{dr} - G(r, \psi(r)) \right| = |G(0, \psi(0)) - G(r, \psi(r))| < \varepsilon, \quad 0 \le r < \bar{r}. \tag{2.6}$$

对于 $\bar{r} \le r \le l$，不妨设 $r_{i-1} \le r \le r_i$，其中 $i = 2, \cdots, m$。我们将讨论分为两种情形：$\theta \ge 1$ 和 $0 < \theta < 1$。

情况1。 $\theta \ge 1$。在这种情形下，有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d\psi(r)}{dr} - G(r, \psi(r)) \right| \\ = & |G(r_{i-1}, \psi(r_{i-1})) - G(r, \psi(r))| \\ = & C \left| r_{i-1}^{-q} \left(\int_0^{r_{i-1}} s^{\tau-1} g(v(s)) ds \right)^{\frac{1}{\theta}} - r^{-q} \left(\int_0^r s^{\tau-1} g(v(s)) ds \right)^{\frac{1}{\theta}} \right| \\ \le & C \left| r_{i-1}^{-q\theta} \int_0^{r_{i-1}} s^{\tau-1} g(v(s)) ds - r^{-q\theta} \int_0^r s^{\tau-1} g(v(s)) ds \right|^{\frac{1}{\theta}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

由于 $\int_0^r s^{\tau-1} g(v(s)) ds = (\int_0^{r_{i-1}} + \int_{i-1}^r) s^{\tau-1} g(v(s)) ds$，由 (2.7) 可得

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d\psi(r)}{dr} - G(r, \psi(r)) \right| \\ \le & C \left(\left| r_{i-1}^{-q\theta} - r^{-q\theta} \right| \int_0^{r_{i-1}} s^{\tau-1} g(v(s)) ds + r^{-q\theta} \int_{r_{i-1}}^r s^{\tau-1} g(v(s)) ds \right)^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq Cg^{\frac{1}{\theta}}(a+h)\left(\left|r_{i-1}^{-q\theta}-r^{-q\theta}\right|\int_0^{r_{i-1}}s^{\tau-1}ds+r^{-q\theta}\int_{r_{i-1}}^{r}s^{\tau-1}ds\right)^{\frac{1}{\theta}} \qquad (2.8)\\
&\leq C\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}g^{\frac{1}{\theta}}(a+h)\left(l^{\tau}\left|r_{i-1}^{-q\theta}-r^{-q\theta}\right|+\bar{r}^{-q\theta}|r^{\tau}-r_{i-1}^{\tau}|\right)^{\frac{1}{\theta}}\\
&\leq C\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}g^{\frac{1}{\theta}}(a+h)\left(l^{\tau}\bar{r}^{-q\theta-1}q\theta+\tau l^{\tau-1}\bar{r}^{-q\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}|r-r_{i-1}|^{\frac{1}{\theta}},
\end{aligned}
$$

where 在最后一个不等式中使用了中值定理。对于上述 $\varepsilon>0$，我们取

$$
0<\delta_1<\frac{\tau\bar{r}^{q\theta+1}}{l^{\tau-1}(q\theta l+\tau\bar{r})g(a+h)}\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\theta}. \qquad (2.9)
$$

那么，对于 $\max\limits_{2\leq i\leq m}|r-r_{i-1}|<\delta_1$，由 (2.8) 和 (2.9) 可得

$$
\left|\frac{d\psi(r)}{dr}-G(r,\psi(r))\right|<\varepsilon,\quad r\in[\bar{r},l]. \qquad (2.10)
$$

情形 2. $0<\theta<1$。在此情形下，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{d\psi(r)}{dr}-G(r,\psi(r))\right|\\
=&|G(r_{i-1},\psi(r_{i-1}))-G(r,\psi(r))|\\
=&C\left|r_{i-1}^{-q}\left(\int_0^{r_{i-1}}s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}-r_{i-1}^{-q}\left(\int_0^{r}s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}\right.\\
&\left.+r_{i-1}^{-q}\left(\int_0^{r}s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}-r^{-q}\left(\int_0^{r}s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}\right|\\
=&Cr_{i-1}^{-q}\left|\left(\int_0^{r_{i-1}}s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}-\left(\int_0^{r}s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}\right|\\
&+C\left(\int_0^{r}s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}\left|r_{i-1}^{-q}-r^{-q}\right|.
\end{aligned}
$$

利用中值定理，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{d\psi(r)}{dr}-G(r,\psi(r))\right|\\
\leq&C\bar{r}^{-q}\frac{1}{\theta}\left(\int_0^{r}s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}-1}\int_{r_{i-1}}^{r}s^{\tau-1}g(v(s))ds\\
&+Cq\bar{r}^{-q-1}\left(\int_0^{r}s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}|r-r_{i-1}|\\
\leq&C\bar{r}^{-q}\frac{1}{\theta}g^{\frac{1}{\theta}}(a+h)\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}-1}l^{\tau(\frac{1}{\theta}-1)}l^{\tau-1}|r-r_{i-1}| \qquad (2.11)\\
&+Cq\bar{r}^{-q-1}g^{\frac{1}{\theta}}(a+h)\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}l^{\frac{\tau}{\theta}}|r-r_{i-1}|\\
=&C\bar{r}^{-q-1}\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}l^{\frac{\tau}{\theta}-1}g^{\frac{1}{\theta}}(a+h)(\tau\bar{r}+\theta ql)|r-r_{i-1}|.
\end{aligned}
$$

对于上述 $\varepsilon>0$，我们取

$$0<\delta_2<\frac{\theta\bar{r}^{q+1}\tau^{\frac{1}{\theta}}\varepsilon}{Cl^{\frac{\tau}{\theta}-1}g^{\frac{1}{\theta}}(a+h)(\tau\bar{r}+\theta ql)}. \tag{2.12}$$

那么，对于 $\max\limits_{2\le i\le m}|r-r_{i-1}|<\delta_2$，由 (2.11) 和 (2.12) 可得

$$\left|\frac{d\psi(r)}{dr}-G(r,\psi(r))\right|<\varepsilon,\quad r\in[\bar{r},l]. \tag{2.13}$$

结合 (2.6)、(2.10) 和 (2.13)，得到 (2.5)，这说明 ψ 是 (1.1) 的一个 ε-近似解。

步骤 *3*：由我们的构造可推得 (1.1) 的可解性。设 ψ。令 $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为一个趋于 0 的正数列。假设序列 $\{\psi_j\}$ 是 (1.1) 在 $[0,l]$上的 ε_j-近似解，即

$$\left|\frac{d\psi_j(r)}{dr}-G(r,\psi_j(r))\right|<\varepsilon_j,\quad r\in[0,l]. \tag{2.14}$$

容易看出

$$\left|\psi_j(r'')-\psi_j(r')\right|<\max_{1\le i\le m}G(r_i,\psi(r_i))|r''-r'|\le M|r''-r'|,$$

对于任意 r'，$r''\in[0,l]$，因此序列 $\{\psi_j\}$ 等度连续且一致有界。由阿尔泽拉–阿斯科利定理，存在一个一致收敛子列，我们仍记为$\{\psi_j\}$。设 $\lim\limits_{j\to+\infty}\psi_j=v$。由于 ψ_j在 $[0,l]$上连续，我们知道 v在 $[0,l]$上连续。由于 $\psi_j(0)=0$，因此 $v(0)=0$。令

$$\triangle_j(r):=\frac{d\psi_j(r)}{dr}-G(r,\psi_j(r)), \tag{2.15}$$

由 (2.14)，我们有

$$|\triangle_j(r)|<\varepsilon_j,\quad r\in[0,l]. \tag{2.16}$$

对 (2.15) 积分并利用 (2.16)，令 $j\to+\infty$，得到

$$\begin{aligned} v(r)=\lim_{j\to+\infty}\psi_j(r)&=a+\lim_{j\to+\infty}\int_0^r[G(s,\psi_j(s))+\triangle_j(s)]\,ds\\ &=a+\int_0^r\lim_{j\to+\infty}[G(s,\psi_j(s))+\triangle_j(s)]\,ds\\ &=a+\int_0^r G(s,v(s))ds. \end{aligned} \tag{2.17}$$

由于 v 在 $[0,l]$ 上连续，由 (2.17) 可知，v 在 $(0,l]$ 上连续可微。对 (2.17) 求导，可见 v 在 $[0,l]$ 上满足 (1.1)。

通过以上三个步骤，我们得到 (1.1) 在 $[0,l]$ 上的一个解 v。事实上，我们可以将 $[0,l]$ 延拓到更大的区间。无妨假设存在一个最大存在区间$[0,R)$，使得 v 在 $[0,R)$ 上满足 (1.1)，且当 $r\to R$ 时，$v(r)\to\infty$。于是 $v\in C[0,R)\cap C^1(0,R)$。

接下来，我们将检查 v 在 0 处的可微性以及 $v'(0)$的值。根据洛必达法则，由（1.1）可得

$$\lim_{r\to0}v'(r)=C\left(\lim_{r\to0}\frac{\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds}{r^{\theta q}}\right)^{\frac{1}{\theta}}=C\left(\frac{g(a)}{\theta q}\lim_{r\to0}r^{\tau-\theta q}\right)^{\frac{1}{\theta}}=0, \tag{2.18}$$

其中 $v(0)$ 使用了$= a$ 和 $\tau > \theta q$。利用（2.17）、 $v(0) = a$，并再次应用洛必达法则，我们有 e

$$\lim_{r\to 0}\frac{v(r)-v(0)}{r-0}=\lim_{r\to 0}\frac{\int_0^r G(s,v(s))ds}{r}=\lim_{r\to 0}G(r,v(r))=\lim_{r\to 0}v'(r)=0, \tag{2.19}$$

其中，最后一个等式中用到了 (2.18)。由 (2.18) 和 (2.19) 可知， v 在 0 处连续可微，且 $v'(0) = 0$。由 (1.1) 和 g 的正性可知， v 的单调性显而易见。也就是说，对于 $r \in (0, R)$， $v'(r) > 0$。

事实上，由 (1.1) 中 $v'(r)$ 的形式可知， $v \in C^2(0, R)$ 显而易见。对 (1.1) 中的方程求导，得到

$$\begin{aligned} v''(r) &= \frac{C}{\theta}g(v(r))r^{-(q+1-\tau)}\left(\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}-1} - Cqr^{-(q+1)}\left(\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= C\left(\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}-1}\left(\frac{g(v(r))}{\theta r^{q+1-\tau}}-\frac{q\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds}{r^{q+1}}\right), \end{aligned} \tag{2.20}$$

对于 $r \in (0, R)$。由 v 和 g 的单调性，从 (2.20) 可推出

$$v''(r) \geq C\left(\frac{1}{\theta}-\frac{q}{\tau}\right)r^{\tau-(q+1)}g(v(r))\left(\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}-1} > 0, \tag{2.21}$$

最后一个不等式中用到了 g 和 $\tau > \theta q$ 的正性。

到目前为止，我们已经证明，对于$r \in (0, R)$， $v \in C^1[0, R) \cap C^2(0, R)$，且 $v'(0) = 0$， $v'(r) > 0$，并且 $v''(r) > 0$。

最后，我们证明断言 (i)、(ii) 和 (iii)。根据v 在 0 处的二阶导数定义，由 (1.1) 可得

$$\begin{aligned} v''(0) &= \lim_{r\to 0}\frac{v'(r)-v'(0)}{r-0} = C\lim_{r\to 0}\frac{\left(\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds\right)^{\frac{1}{\theta}}}{r^{q+1}} \\ &= C\left(\frac{g(a)}{\theta(q+1)}\right)^{\frac{1}{\theta}}\lim_{r\to 0}r^{\tau-\theta(q+1)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

利用洛必达法则，由 (2.20) 可计算得

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0}\frac{v''(r)}{r^{\frac{1}{\theta}[\tau-\theta(q+1)]}} \\ =&C\lim_{r\to 0}\left(\frac{\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds}{r^\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}-1}\left(\frac{g(v(r))}{\theta}-\frac{q\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds}{r^\tau}\right) \\ =&C\left(\frac{1}{\theta}-\frac{q}{\tau}\right)\tau^{1-\frac{1}{\theta}}g^{\frac{1}{\theta}}(a). \end{aligned} \tag{2.23}$$

(i). $\tau > \theta(q + 1)$。由 (2.22) 和 (2.23)，我们有 $v''(0) = \lim_{r\to 0} v''(r) = 0$，这表明$v \in C^2[0, R)$。

(ii). $\tau = \theta(q + 1)$。由 (2.22)，我们有 $v''(0) = C\left(\frac{g(a)}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}$。由 (2.23)，我们有 $\lim_{r\to 0} v''(r) = C\left(\frac{\tau}{\theta}-q\right)\tau^{-\frac{1}{\theta}}g^{\frac{1}{\theta}}(a) = C\left(\frac{g(a)}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}$.于是得到 $v \in C^2[0, R)$。

(iii). $\theta q < \tau < \theta(q + 1)$。对于 $\delta \in (0, \frac{\theta}{(q+1)-\tau})$，我们有 $-1 < \frac{\delta}{\theta}[\tau - \theta(q + 1)] < 0$。因此，积分$\int_0^R r^{\frac{\delta}{\theta}[\tau-\theta(q+1)]}dr$ 收敛。由 (2.23) 可知，$\lim_{r\to 0}\frac{v''}{r^{\frac{\delta}{\theta}[\tau-\theta(q+1)]}}$ 等于一个正的常数。因此，积分$\int_0^R (v''(r))^\delta dr$ 收敛，这表明 $v \in C^2(0, R) \cap W^{2,\delta}(0, R)$。

至此，该引理的证明完成。 □

注记 2.1. 注意，对于任意初值 $a \in \mathbb{R}$，方程 (1.1) 都存在局部解。若 a 为正，则解 v 对所有 $r \in [0, R)$ 均为正。

下面的引理给出了当 $\tau = \theta(q + \frac{1}{p-1})$ 对某个 $p > 1$ 成立时，方程 (1.1) 的局部解的另一条性质，并将在第4节和第5节中使用。

引理 2.1. 假设在定理 *1.1* 的假设下， v 是柯西问题 (1.1) 的局部解。如果 $\tau = \theta(q + \frac{1}{p-1})$ 对某个 $p > 1$ 成立，那么

$$\lim_{r\to 0}\left[(v'(r))^{p-1}\right]' = \lim_{r\to 0}\frac{(v'(r))^{p-1}}{r} = C^{l-1}\left(\frac{g(a)}{\tau}\right)^{\frac{p-1}{\theta}}. \tag{2.24}$$

证明。 利用 (1.1) 和洛必达法则，我们得到

$$\lim_{r\to 0}\frac{v'(r)}{r^{\frac{1}{\theta}(\tau-\theta q)}} = C\lim_{r\to 0}\left(\frac{\int_0^r s^{\tau-1}g(v(s))ds}{r^{\tau}}\right)^{\frac{1}{\theta}} = C\left(\frac{g(a)}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.25}$$

由 (2.23) 和 (2.25)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0}\left[(v'(r))^{p-1}\right]' = \lim_{r\to 0}\left[(p-1)(v'(r))^{p-2}v''(r)\right]\\
=&(p-1)\left[C\left(\frac{g(a)}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right]^{p-2} C\left(\frac{1}{\theta}-\frac{q}{\tau}\right)\tau^{1-\frac{1}{\theta}}g^{\frac{1}{\theta}}(a)\lim_{r\to 0} r^{\frac{p-1}{\theta}(\tau-\theta q)-1}\\
=&C^{p-1}\left(\frac{g(a)}{\tau}\right)^{\frac{p-1}{\theta}}\frac{p-1}{\theta}(\tau-\theta q)\lim_{r\to 0} r^{\frac{p-1}{\theta}(\tau-\theta q)-1}\\
=&C^{p-1}\left(\frac{g(a)}{\tau}\right)^{\frac{p-1}{\theta}},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

其中，利用 $\tau = \theta(q + \frac{1}{p-1})$ 得到了最后一个等式。利用洛必达法则和 (2.26)，我们得到

$$\lim_{r\to 0}\frac{(v'(r))^{p-1}}{r} = \lim_{r\to 0}\left[(v'(r))^{p-1}\right]' = C^{p-1}\left(\frac{g(a)}{\tau}\right)^{\frac{p-1}{\theta}}, \tag{2.27}$$

这就完成了 (2.24) 的证明。 □

注2.2。为了推导（2.27）中的 $\lim_{r\to 0}\frac{(v'(r))^{p-1}}{r} = C^{p-1}\left(\frac{g(a)}{\tau}\right)^{\frac{p-1}{\theta}}$，若不直接使用洛必达法则，也可以在条件 $\tau = \theta(q + \frac{1}{p-1})$ 下由（1.1）计算得到。

3. Entire existence and nonexistence of the Cauchy problem

本节将证明，当 $\tau \geq \theta q + 1$ 时，Keller-Osserman 条件（1.2）是柯西问题（1.1）存在整体解的充要条件。当 $\theta q < \tau < \theta q + 1$ 时，我们证明条件（1.2）和（1.3）分别是问题（1.1）具有整体存在性的必要且充分条件。

对于满足 (1.1) 的 $v(r)$，直接计算可得

$$v''(r)\left(v'(r)\right)^{\theta-1} + \frac{q}{r}\left(v'(r)\right)^{\theta} = \frac{C^{\theta}}{\theta}r^{\tau-q\theta-1}g(v(r)). \tag{3.1}$$

注意，(1.1) 的 Keller-Osserman 条件隐含在 (3.1) 的首项与末项之间的关系中，这将在证明中揭示。

在证明定理 1.2 和 1.3 之前，我们先证明下面的引理。该引理将有助于证明定理 1.2 和 1.3 中 Keller-Osserman 条件（1.2）的必要性。在这个引理中，仅假设 τ 满足 $\tau > \max\{\theta(q-1),\ 0\}$。

引理 3.1. 假设 $g:\ \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一个非减连续函数，$q\geq 0$、 $\theta>0$、 $C>0$ 和 $\tau>\max\{\theta(q-1)\ 0\}$ 为常数，且 v 是柯西问题 (1.1) 的一个解，其中对于所有 $r\geq 0$，$v'(0)=0$，且初值为某个 a。如果条件 (1.2) 不成立，那么存在一个足够大的正数常数 R_0，使得

$$v''(r)\left(v'(r)\right)^{\theta-1}>\frac{C^\theta}{2\theta}r^{\tau-q\theta-1}g(v(r)), \tag{3.2}$$

对于 $r>R_0$。

引理 *3.1* 的证明。令 $\tilde{g}(t)=\left(\int_0^t g(s)ds\right)^{-\frac{1}{\theta+1}}$，由于条件（1.2）不成立，我们有$\int^\infty \tilde{g}(t)dt<\infty$。因此，当 $s\to\infty$ 时， $\int_s^\infty \tilde{g}(t)dt\to 0$。此外，注意到 $\tilde{g}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上递减，我们有

$$0<t\tilde{g}(t)\leq 2\int_{\frac{t}{2}}^t\tilde{g}(s)ds<2\int_{\frac{t}{2}}^\infty\tilde{g}(s)ds\to 0,\quad \text{as}\quad t\to\infty,$$

这表明

$$t\tilde{g}(t)=t\left(\int_0^t g(s)ds\right)^{-\frac{1}{\theta+1}}\to 0,\quad \text{as}\quad t\to\infty.$$

结合 g 非递减这一事实，我们有

$$\left(\frac{g^{\frac{1}{\theta}}(t)}{t}\right)^\theta=\frac{tg(t)}{t^{\theta+1}}\geq\frac{\int_0^t g(s)ds}{t^{\theta+1}}=(t\tilde{g}(t))^{-(\theta+1)}\to\infty,\quad \text{as}\quad t\to\infty.$$

因此，存在一个常数 $t_1>a$，使得

$$g^{\frac{1}{\theta}}(t)>t-a,\quad \forall\, t>t_1. \tag{3.3}$$

由于对于 $r>0,\ v'(r)>0$，我们有对于 $r>0,\ v(r)>v(0)=a$。由于 g 非递减且 $v(0)=a$，由（1.1）可得

$$v'(r)\geq Cr^{-q}g^{\frac{1}{\theta}}(a)\left(\int_0^r s^{\tau-1}ds\right)^{\frac{1}{\theta}}=C\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}r^{\frac{\tau}{\theta}-q}g^{\frac{1}{\theta}}(a).$$

从 0 积分到 r，并再次利用 $v(0)=a$，可得

$$v(r)\geq C\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}\frac{\theta}{\tau-q\theta+\theta}g^{\frac{1}{\theta}}(a)r^{\frac{\tau}{\theta}-q+1}+a,\quad r>0.$$

由于 $\tau>\max\{\theta(q-1)\ 0\}$，由上述不等式可知，存在 $\tilde{r}>0$ 使得

$$v(r)>t_1,\quad \forall r>\tilde{r}.$$

因此，由 (3.3) 可得

$$g^{\frac{1}{\theta}}(v(r))>v(r)-a,\quad r>\tilde{r}. \tag{3.4}$$

由于当 $r>0$ 时，$v'(r)>0$，由 (3.1) 可得

$$v''(r)\left(v'(r)\right)^{\theta-1}\leq\frac{1}{\theta}C^\theta r^{\tau-q\theta-1}g(v(r)),\quad r>0.$$

将此式乘以 $(\theta+1)v'(r)$，得到

$$(\theta+1)v''(r)\left(v'(r)\right)^\theta\leq\frac{\theta+1}{\theta}C^\theta r^{\tau-q\theta-1}g(v(r))v'(r),\quad r>0.$$

将此式从 0 积分到 $r(>\tilde{r})$，得到

$$\begin{aligned}\left(v'(r)\right)^{\theta+1} &\le \frac{\theta+1}{\theta}C^{\theta}r^{\tau-q\theta-1}g(v(r))(v(r)-a)\\ &< \frac{\theta+1}{\theta}C^{\theta}r^{\tau-q\theta-1}g^{1+\frac{1}{\theta}}(v(r)), \quad r>\tilde{r},\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中，第一处不等式用到了 $v'(0) = 0$以及 g 的单调性，第二处不等式用到了（3.4）。通过直接计算，由（3.5）可得

$$\frac{q}{r}\left(v'(r)\right)^{\theta} < \left[q\theta\left(\frac{\theta+1}{C\theta}\right)^{\frac{\theta}{\theta+1}} r^{-\frac{\tau-q\theta+\theta}{\theta+1}}\right]\frac{C^{\theta}}{\theta}r^{\tau-q\theta-1}g(v(r)). \tag{3.6}$$

由于 $\tau > \max\{\theta(q-1)\ 0\}$，我们可以取一个足够大的正数常数 $R_0 > \tilde{r}$，使得

$$q\theta\left(\frac{\theta+1}{C\theta}\right)^{\frac{\theta}{\theta+1}} r^{-\frac{\tau-q\theta+\theta}{\theta+1}} < \frac{1}{2}, \quad r>R_0. \tag{3.7}$$

由（3.6）和（3.7）可得

$$\frac{q}{r}\left(v'(r)\right)^{\theta} < \frac{C^{\theta}}{2\theta}r^{\tau-q\theta-1}g(v(r)), \quad r>R_0. \tag{3.8}$$

将（3.8）代入（3.1），即可得到（3.2）。 □

注记 3.1。注意，在引理 3.1 中，（3.2）_右端的$_{1\ 2}$ 可以替换为任意常数$\xi \in (0,\ 1)$。具体而言，在引理 3.1 的假设下，若条件（1.2）不成立，对于任意˜给定的常数 $\xi \in (0,\ 1)$，都存在一个足够大的正数常数 R_0，使得

$$v''(r)\left(v'(r)\right)^{\theta-1} > \xi\frac{C^{\theta}}{\theta}r^{\tau-q\theta-1}g(v(r)), \tag{3.9}$$

˜当 $r > R_0$。

现在我们准备给出定理 1.2 的证明。

定理 *1.2* 的证明。我们首先证明条件（1.2）的充分性。假设对于所有 $r \in [0,+\infty)$，柯西问题（1.1）不存在整体解。由定理 1.1，满足 $v(0) = a \ge 0$ 和 $v'(0) = 0$ 的（1.1）解 v，对于某个 $R > 0$，有最大存在区间 $[0, R)$。也就是说，当 $r \to R$ 时，$v(r) \to +\infty$。由于对于 $r > 0$，$v'(r) > 0$，由（3.1）可得

$$v''(r)\left(v'(r)\right)^{\theta-1} \le \frac{C^{\theta}}{\theta}r^{\tau-q\theta-1}g(v(r)) < \frac{C^{\theta}}{\theta}R^{\tau-q\theta-1}g(v(r)), \quad 0<r<R, \tag{3.10}$$

其中，最后一个不等式中用到了 $\tau \ge \theta q+1$。将（3.10）的两边乘以（$\theta+1$）v'（r），并从 0 到 r 对其积分，得到

$$\left(v'(r)\right)^{\theta+1} < \frac{\theta+1}{\theta}C^{\theta}R^{\tau-q\theta-1}\int_a^{v(r)} g(s)ds,$$

其中用到了 $v(0) = a$ 和 $v'(0) = 0$。因此，我们有

$$\left(\int_a^{v(r)} g(s)ds\right)^{-\frac{1}{\theta+1}} v'(r) < \left[\frac{\theta+1}{\theta}C^{\theta}R^{\tau-q\theta-1}\right]^{\frac{1}{\theta+1}}. \tag{3.11}$$

积分　将 (3.11) 从 0 积分到 R，并利用 $v(0) = a$ 和 $v(R) = +\infty$ 这一事实，我们得到 t

$$\int_a^{\infty}\left(\int_a^{v} g(s)ds\right)^{-\frac{1}{\theta+1}} dv < \left[\frac{\theta+1}{\theta}C^{\theta}R^{\tau-q\theta-1}\right]^{\frac{1}{\theta+1}} R < \infty,$$

当 $a \geq 0$ 时，这与 Keller-Osserman 条件（1.2）矛盾。因此，在条件（1.2）下，柯西问题（1.1）存在一个整体解 v，满足 $v'(0) = 0$，对所有 $r \geq 0$ 以及非负初值 a 均成立。

接下来，我们证明条件（1.2）的必要性。反设

$$\int^{\infty} \left(\int_0^t g(s)ds \right)^{-\frac{1}{\theta+1}} dt < \infty. \tag{3.12}$$

由于 $\tau \geq \theta q + 1 > \max\{\theta(q-1), 0\}$，由引理 3.1，在条件（3.12）下，不等式（3.2）成立。将不等式（3.2）的两边乘以 $v'(r)$，并从 R_0 积分至 $r(> R_0)$，由于 $\tau \geq \theta q + 1$，可得

$$\begin{aligned}(v'(r))^{\theta+1} >& \frac{\theta+1}{2\theta} C^{\theta} R_0^{\tau-q\theta-1} \int_{v(R_0)}^{v(r)} g(s)ds + (v'(R_0))^{\theta+1} \\ >& \frac{\theta+1}{2\theta} C^{\theta} R_0^{\tau-q\theta-1} \int_{v(R_0)}^{v(r)} g(s)ds, \quad r > R_0,\end{aligned}$$

即

$$\left(\int_{v(R_0)}^{v(r)} g(s)ds \right)^{-\frac{1}{\theta+1}} v'(r) > \left(\frac{\theta+1}{2\theta} C^{\theta} R_0^{\tau-q\theta-1} \right)^{\frac{1}{\theta+1}}, \quad r > R_0. \tag{3.13}$$

不失一般性，可将 $v(R_0)$ 视为正常数。否则，证明显然成立。再次将（3.13）从 R_0 积分至 $r(> R_0)$，可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\theta+1}{2\theta} C^{\theta} R_0^{\tau-q\theta-1} \right)^{\frac{1}{\theta+1}} (r - R_0) \\ <& \int_{v(R_0)}^{v(r)} \left(\int_{v(R_0)}^t g(s)ds \right)^{-\frac{1}{\theta+1}} dt \\ \leq& \left(\int_{v(R_0)}^{2v(R_0)} + \int_{2v(R_0)}^{\infty} \right) \left(\int_{v(R_0)}^t g(s)ds \right)^{-\frac{1}{\theta+1}} dt \\ \leq& v^{\frac{\theta}{\theta+1}}(R_0) g^{-\frac{1}{\theta+1}}(v(R_0)) + \int_{2v(R_0)}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} g(s)ds \right)^{-\frac{1}{\theta+1}} dt \\ =& v^{\frac{\theta}{\theta+1}}(R_0) g^{-\frac{1}{\theta+1}}(v(R_0)) + 2\int_{v(R_0)}^{\infty} \left(\int_0^t g(s)ds \right)^{-\frac{1}{\theta+1}} dt,\end{aligned} \tag{3.14}$$

最后一个不等式用到了 g 的单调不减性。由于（3.14）中的 r 可以任意大，（3.14）与（3.12）矛盾。因此，必要性的证明完成。□

注 3.2. 定理 1.2 已用于证明抛物型 k-Hessian 方程的全局径向解不存在（变量可分离）

$$-u_t[S_k(D^2u)]^{\alpha} = 1, \quad \mathbb{R}_-^{n+1},$$

对于 $-\frac{1}{k} < \alpha < 0$；参见 [2] 中的定理 1.1(2)。

最后，我们证明定理 1.3。

定理 1.3 的证明。 我们先证明条件（1.3）的充分性。假设对所有 $r \in [0, +\infty$，柯西问题（1.1）都不存在整体解。根据定理 1.1，解

v 满足 (1.1)，且 $v(0) = a \geq 0$， $v'(0) = 0$ 的解，其最大存在区间为 $[0, R)$，其中 $R > 0$。也就是说，当 $r \to R$ 时， $v(r) \to +\infty$。由于对 $r > 0$， $v'(r) > 0$，由 (3.1) 可得

$$v''(r)\left(v'(r)\right)^{\theta-1} \leq \frac{C^\theta}{\theta} r^{\tau-q\theta-1} g(v(r)), \quad 0 < r < R. \tag{3.15}$$

由于 $\theta q < \tau < \theta q+1$，我们有 $-1 < \tau-\theta q-1 < 0$。将（3.15）两边乘以 $(\theta+\frac{1}{\kappa})(v'(r))^{\theta+\frac{1}{\kappa}}$，并从 0 积分到 $r(< R)$，得到

$$\begin{aligned}\left(v'(r)\right)^{\theta+\frac{1}{\kappa}} <& \frac{\theta+\frac{1}{\kappa}}{\theta} C^\theta \int_0^r s^{\tau-\theta q-1} g(v(s))(v'(s))^{\frac{1}{\kappa}} ds \\ \leq& \frac{\theta+\frac{1}{\kappa}}{\theta} C^\theta \left(\int_0^r \frac{1}{s^{1-\epsilon}} ds\right)^{\frac{\theta q+1-\tau}{1-\epsilon}} \left(\int_a^{v(r)} g^\kappa(s) ds\right)^{\frac{1}{\kappa}} \\ \leq& \frac{\theta+\frac{1}{\kappa}}{\theta} C^\theta \left(\frac{R^\epsilon}{\epsilon}\right)^{\frac{\theta q+1-\tau}{1-\epsilon}} \left(\int_a^{v(r)} g^\kappa(s) ds\right)^{\frac{1}{\kappa}},\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中，第一处不等式用到了 $v'(0) = 0$，第二处不等式用到了 Hölder 不等式； κ和 ϵ 是条件（1.3）中的相同常数。由（3.16），得到

$$\left(\int_a^{v(r)} g^\kappa(s) ds\right)^{-\frac{1}{1+\kappa\theta}} v'(r) \leq \bar{C}, \tag{3.17}$$

其中

$$\bar{C} = \left[\frac{\theta+\frac{1}{\kappa}}{\theta} C^\theta \left(\frac{R^\epsilon}{\epsilon}\right)^{\frac{\theta q+1-\tau}{1-\epsilon}}\right]^{\frac{1}{\theta+\frac{1}{\kappa}}}.$$

将（3.17）从 0 积分到 R，并利用 $v(0) = a$ 和 $v(R) = +\infty$ 这一事实，得到

$$\int_a^\infty \left(\int_a^v g^\kappa(s) ds\right)^{-\frac{1}{\kappa\theta+1}} dv < \bar{C}R < +\infty,$$

当 $a \geq 0$ 时，这与 Keller-Osserman 条件（1.3）矛盾。因此，在条件（1.3）下，对于所有 $r \geq 0$ 以及非负初值 a，柯西问题（1.1）存在一个整体解 v，满足 $v'(0) = 0$。

接下来，我们证明条件（1.2）的必要性。反设（3.12）成立。由于$\tau > \theta q > \max\{\theta(q-1)\ 0\}$，由引理 3.1 可知，在（3.12）成立时，不等式（3.2）成立。将（3.2）两边乘以 $v'(r)$，并从 R_0 积分至 $r(> R_0)$，由于 $-1 < \tau-\theta q-1 < 0$，可得

$$\begin{aligned}(v'(r))^{\theta+1} >& \frac{\theta+1}{2\theta} C^\theta \int_{R_0}^r s^{\tau-q\theta-1} g(v(s)) v'(s) ds + (v'(R_0))^{\theta+1} \\ >& \frac{\theta+1}{2\theta} C^\theta r^{\tau-q\theta-1} \int_{v(R_0)}^{v(r)} g(s) ds, \quad r > R_0,\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中，第二个不等式中用到了 $v'(R_0) > 0$。由（3.18），可得

$$\left(\int_{v(R_0)}^{v(r)} g(s) ds\right)^{-\frac{1}{\theta+1}} v'(r) > \left(\frac{\theta+1}{2\theta} C^\theta\right)^{\frac{1}{\theta+1}} r^{\frac{\tau-q\theta-1}{\theta+1}}, \quad r > R_0. \tag{3.19}$$

不失一般性，我们可以将 $v(R_0)$ 视为一个正的常数。否则，证明显而易见。再次对 (3.19) 从 R_0 积分到 $r(> R_0)$，将 (3.14) 的第一行替换为下式后，(3.14) 仍然成立：

$$\left(\frac{\theta+1}{2\theta} C^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{\theta+1}{\tau-\theta q+\theta} \left(r^{\frac{\tau-\theta q+\theta}{\theta+1}} - R_0^{\frac{\tau-\theta q+\theta}{\theta+1}}\right).$$

由于 (3.14) 中的 r 可以任意大，且 $\tau-\theta q+\theta>0$，这与 (3.12) 矛盾。因此，必要性的证明完成。□

4. Applications to k-Hessian type equations

本节首先回顾 k-Hessian 算子及其径向对称形式。然后，我们分别将定理 1.2 应用于标准的 k-Hessian 方程、退化或奇异的 k-Hessian 方程，以及其他扩展形式的 k-Hessian 方程。最后，我们还将定理 1.3 应用于这些方程。

归一化的 k-Hessian 算子定义为

$$\tilde{S}_k[u]=S_k^{\frac{1}{k}}[D^2u], \tag{4.1}$$

对于 $k=1,\cdots,n$，函数 S_k 是特征值的 k 次乘积之和，即

$$S_k[D^2u]:=S_k(\lambda(D^2u))=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\prod_{s=1}^{k}\lambda_{i_s}(D^2u),\quad k=1,\cdots,n. \tag{4.2}$$

在 (4.2) 中，$i_1,\cdots,i_k\subset\{1,\cdots,n\}$，而 $\lambda(D^2u)=(\lambda_1(D^2u)\cdots,\lambda_n(D^2u))$ 表示矩阵 D^2u 的特征值。(4.2) 中的算子 S_k 是 k 阶初等对称多项式，在与几何问题相关的完全非线性偏微分方程中得到了广泛研究；参见 [17, 21]。注意，当 $k=1$ 时，(4.2) 中的算子 S_k 退化为拉普拉斯算子；当 $k=n$ 时，则退化为 Monge-Amp`ere 算子。因此，(4.2) 中的 $S_k(k=1,\cdots,n)$ 是一组在拉普拉斯算子与 Monge-Amp`ere 算子之间进行插值的算子。

为研究椭圆情形，我们定义 G¨arding 锥，

$$\Gamma_k=\{\lambda\in\mathbb{R}^n\mid S_i(\lambda)>0,\ i=1,\cdots,k\}, \tag{4.3}$$

并假设 $\lambda(D^2u)\in\Gamma_k$。这里，如果对于所有 $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$，函数 $u\in C^2(\Omega)$ 满足 $\lambda(D^2u)\in\Gamma_k$，则称其在 Ω 中是可容许的。

假设 $v\in C^2[0,\infty)$ 是径向对称的，且 $v'(0)=0$。那么对于 $r=|x|=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2}$ 和 $u(x)=v(r)$，D^2u 的特征值为

$$\lambda(D^2u)(x)=\begin{cases}\left(v''(r),\dfrac{1}{r}v'(r),\cdots,\dfrac{1}{r}v'(r)\right), & r\in(0,+\infty),\\ (v''(0),\cdots,v''(0)), & r=0,\end{cases} \tag{4.4}$$

其中使用了 $v''(0)=\lim_{r\to0}\frac{v'(r)-v'(0)}{r-0}=\lim_{r\to0}\frac{v'(r)}{r}$。为方便起见，在本文中我们将 $\frac{1}{r}v'(r)|_{r=0}=v''(0)$ 解释为。通过直接计算可得

$$S_k[D^2u]:=S_k(\lambda(D^2u))=\begin{cases}C_{n-1}^{k-1}\left(\dfrac{v'(r)}{r}\right)^{k-1}\left(v''(r)+\dfrac{n-k}{k}\dfrac{v'(r)}{r}\right), & r\in(0,+\infty),\\ C_n^k(v''(0))^k, & r=0,\end{cases} \tag{4.5}$$

and

$$\tilde{S}_k[u]=\begin{cases}\left(C_{n-1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\dfrac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{k-1}{k}}\left(v''(r)+\dfrac{n-k}{k}\dfrac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{1}{k}}, & r\in(0,+\infty),\\ \left(C_n^k\right)^{\frac{1}{k}}v''(0), & r=0.\end{cases} \tag{4.6}$$

接下来，我们将在以下各小节中讨论若干 k-Hessian 型方程。

4.1. **标准 k-Hessian 情形**。我们首先回顾标准的 k-Hessian 方程，其中 [5],

$$\tilde{S}_k[u] = f(u), \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{4.7}$$

为了研究方程 (4.7) 的径向对称解 $u(x) = v(r)$，利用 (4.6)，只需考虑

$$\left(C_{n-1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left(v''(r) + \frac{n-k}{k}\frac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{1}{k}} = f(v(r)),\ r > 0, \tag{4.8}$$

其中 $v'(0) = 0$。将其写成散度形式并对两边积分后，等价于考虑柯西问题

$$\begin{cases} v'(r) = r^{1-\frac{n}{k}} \left(\dfrac{k}{C_{n-1}^{k-1}} \displaystyle\int_0^r s^{n-1} f^k(v(s))ds\right)^{\frac{1}{k}}, \quad r \in (0, +\infty), \\ v(0) = a. \end{cases} \tag{4.9}$$

当 $C = \left(k/C_{n-1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}$、$q = \frac{n}{k} - 1$、$\tau = n$、$\theta = k$ 和 $g = f^k$ 时，这个问题对应于问题 (1.1)。事实上，我们还将考虑右端含有 $|x|^\alpha$ 和梯度项 $|Du|^\beta$ 的退化或奇异 k-Hessian 方程，即

$$\tilde{S}_k[u] = |x|^\alpha |Du|^\beta f(u), \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{4.10}$$

其中 $\alpha > -1$ 和 $\beta < 1$ 是某些常数。在这种情形下，令 $u(x) = v(r)$，相应的常微分方程为

$$\left(C_{n-1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left(v''(r) + \frac{n-k}{k}\frac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{1}{k}} = r^\alpha |v'(r)|^\beta f(v(r)),\ r > 0, \tag{4.11}$$

其中 $v'(0) = 0$。观察 (4.11) 的散度结构，可得

$$v'(r) = r^{1-\frac{n}{k}} \left(\frac{k}{C_{n-1}^{k-1}} \int_0^r s^{k\alpha+n-1} |v'(s)|^{k\beta} f^k(v(s))ds\right)^{\frac{1}{k}} > 0,\ r > 0. \tag{4.12}$$

因此，可以去掉（4.11）右端的绝对值符号。于是，我们可以得到等价的柯西问题

$$\begin{cases} v'(r) = r^{1-\frac{n}{k}} \left(\dfrac{k(1-\beta)}{C_{n-1}^{k-1}} \displaystyle\int_0^r s^{k(\alpha+\beta)-n\beta+n-1} f^k(v(s))ds\right)^{\frac{1}{k(1-\beta)}}, \quad r \in (0, +\infty), \\ v(0) = a. \end{cases} \tag{4.13}$$

当 $C = \left[k\ (1-\beta\ C_{n-1}^{k-1}\right]^{k}\ )^{(1-\beta)}$，$q = \frac{n}{k} - 1$, $\tau = k(\alpha+\beta) - n\beta + n$ 时，该问题对应于问题（1.1），

$\theta = k(1-\beta)$ and $g = f^k$.

4.2. **推广到 p-k Hessian 方程**。在本小节中，我们考虑第 4.1 节中的方程，其中 Hessian 矩阵 D^2u 被 $D(|Du|^{p-2}Du)$ 所替代，其中 $p > 1$。在这一部分中，如果对于所有 $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$，函数$u \in C^2(\Omega)$ 满足 $\lambda(D(|Du|^{p-2}Du)) \in \Gamma_k$，则称其在 Ω 中是可容许的。

假设 $v \in C^2[0, \infty)$ 是径向对称的，且 $v'(0) = 0$。那么，对于 $r = |x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$和$u(x) = v(r)$，$D(|Du|^{p-2}Du)$ 的特征值由下式给出

$$\lambda(D(|Du|^{p-2}Du)) = \left(((v'(r))^{p-1})', \frac{(v'(r))^{p-1}}{r}, \cdots, \frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\right), \quad r > 0. \tag{4.14}$$

通过直接计算可得

$$S_k[D(|Du|^{p-2}Du)] = C_{n-1}^{k-1}\left(\frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\right)^{k-1}\left(((v'(r))^{p-1})' + \frac{n-k}{k}\frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\right), \quad r>0. \tag{4.15}$$

我们不采用 (4.7)，而是考虑

$$S_k^{\frac{1}{k}}[D(|Du|^{p-2}Du)] = f(u), \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{4.16}$$

那么，相应的常微分方程为

$$\left(C_{n-1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\right)^{\frac{k-1}{k}}\left(((v'(r))^{p-1})' + \frac{n-k}{k}\frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\right)^{\frac{1}{k}} = f(v(r)),\ r>0, \tag{4.17}$$

其中 $v'(0)=0$。由 (4.17) 可得

$$\begin{cases} v'(r) = r^{\frac{k-n}{k(p-1)}}\left(\dfrac{k}{C_{n-1}^{k-1}}\displaystyle\int_0^r s^{n-1}f^k(v(s))ds\right)^{\frac{1}{k(p-1)}}, \quad r\in(0,+\infty), \\ v(0)=a. \end{cases} \tag{4.18}$$

当 $C=\left(k/C_{n-1}^{k-1}\right)^{k^{(p-1)}}$，$q=k^{n-k^{(p-1)}}$，$\tau=n$, $\theta=k(p-1)$ 且 $g=f^k$ 时，这个问题对应于问题 (1.1)。

此外，我们还可以考虑方程 (4.16) 的退化版本或奇异版本，即对于某些常数 $\alpha>-1$ 和 $\beta<p-1$，方程 (1.5)。通过对 (1.4) 的径向对称解进行计算，可得柯西问题

$$\begin{cases} v'(r) = r^{\frac{k-n}{k(p-1)}}\left(\dfrac{k(p-\beta-1)}{C_{n-1}^{k-1}(p-1)}\displaystyle\int_0^r s^{k\alpha+\frac{k-n}{p-1}\beta+n-1}f^k(v(s))ds\right)^{\frac{1}{k(p-\beta-1)}}, \quad r\in(0,+\infty), \\ v(0)=a. \end{cases} \tag{4.19}$$

当 $C=\left[k^{(p-\beta-1)^{k^{(p-1)}}}\left(C_{n-1}^{k-1}\right)^{(p-1)}\right]^{(p-\beta-1)^{-1}}$，$q=k^{n-k^{(p-1)}}$，$\tau=k\alpha+\frac{k-n}{p-1}\beta+n$, $\theta=k(p-\beta-1)$ 且 $g=f^k$ 时，这个问题对应于问题 (1.1)。

4.3. **Keller-Osserman 定理**。我们考虑方程 (1.5)，并证明其 Keller-Osserman 定理，其中方程 (4.7)、(4.10) 和 (4.16) 是其特例。

我们先给出两个引理。第一个引理是一个比较结果。

引理 4.1。假设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一个非减连续函数，$\alpha>-1$, $\beta<p-1$和 $p>1$。假设以下条件之一成立：

(i). $p\le\alpha+\beta+2$, $v(r)\in C^2[0,R)$ 是方程 *(4.19)* 在 $r\in(0,R)$ 上的一个解，满足 $v'(0)=0$ 且 $v(r)\to+\infty$ 作为 $r\to R$，并且 $u(x)\in C^2(\mathbb{R}^n)$ 是方程 *(1.5)* 的一个整体可容许解。*(ii).* $p>\alpha+\beta+2$, $(p-1)\alpha+\beta\ge0$, $v(r)\in C^2(0,R)\cap W^{2,\delta}(0,R)$ 对于 $\delta\in(1,\frac{p-\beta-1}{p-\alpha-\beta-2})$ 是方程 *(4.19)* 在 $r\in(0,R)$ 上的一个解，满足 $v'(0)=0$ 且 $v(r)\to+\infty$ 作为 $r\to R$，并且 $u(x)\in C^2(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\cap W^{2,\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 对于 $\delta\in(1,\frac{p-\beta-1}{p-\alpha-\beta-2})$ 是方程 *(1.5)* 的一个整体可容许解。

于是我们有

$$u(x)\le v(|x|), \quad \forall x\in B_R. \tag{4.20}$$

证明。假设 $p\le\alpha+\beta+2$ 和 $p>\alpha+\beta+2$ 以及 (i) 和 (ii) 中 v 的正则性，分别可由定理 1.1 中的 $\tau\ge\theta(q+1)$ 和 $\theta q<\tau<\theta(q+1)$ 验证。令

$$L[h] := S_k^{\frac{1}{k}}[D(|Dh|^{p-2}Dh)] = |x|^\alpha|Dh|^\beta f(h).$$

(i). 令 $w(x) = v(r)$ 对于 $r = |x|$，直接计算可得，$w(x) \in C^2(B_R)$ 是方程 (1.5) 的整体可容许解。即，$L[w] = 0$ 在 B_R 中。

如果 $u > w$ 在 B_R中的某处成立，那么存在某个常数 $a > 0$，使得 $u - a$ 在某个内点 $x_0 \in B_R$处从下方接触 w，这意味着 $u - a - w \leq 0$ 在 B_R中成立。于是存在 $R' \in (0, R)$使得 $x_0 \in B_{R'}$。由于当 $x \to \partial B_R$ 时，$w(x) = v(|x|) \to +\infty$，且 u 在 B_R中有界，我们可以假设$\sup(u - a - w) < 0$。由 f 的单调不减性，有$B_{R'}$

$$L[u - a] \geq L[u] = 0 = L[w], \quad \text{in } B_{R'}. \tag{4.21}$$

根据最大值原理，有

$$0 = \sup_{B_{R'}}(u - a - v) = \sup_{\partial B_{R'}}(u - a - v) < 0,$$

这就产生了矛盾。

(ii)。在这种情形下，我们只需证明 $w(x) = v(r)$满足 $|Dw|^{p-2}Dw \in C^1(B_R)$。根据 $|Dw|^{p-2}Dw$ 在0处的导数定义，有

$$\begin{aligned}
&D_i(|Dw|^{p-2}D_j w)(0)\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(v')^{p-1}}{r}\delta_{ij}\\
&= \lim_{r\to 0} \left[\frac{k}{nC_{n-1}^{k-1}} f^k(a) r^{\frac{k}{p-1}[(p-1)\alpha+\beta]}\right]^{\frac{p-1}{k(p-\beta-1)}} \delta_{ij}\\
&= \left(\frac{k}{nC_{n-1}^{k-1}} f^k(a)\right)^{\frac{p-1}{k(p-\beta-1)}} \left(\lim_{r\to 0} r^{\frac{(p-1)\alpha+\beta}{p-\beta-1}}\right)\delta_{ij},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

for $i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$，其中 δ_{ij}是通常的克罗内克δ。对于 $x \in B_R\backslash\{0\}$，有

$$D_i(|Dw|^{p-2}D_j w)(x) = \left[(p-1)(v'(r))^{p-2}v''(r) - \frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\right]\frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\delta_{ij}. \tag{4.23}$$

由 (2.18) 和 (2.23)，可得

$$v'(r) = O\left(r^{\frac{\alpha+1}{p-\beta-1}}\right), \quad v''(r) = O\left(r^{\frac{\alpha+\beta+2-p}{p-\beta-1}}\right), \ \text{ as } r \to 0. \tag{4.24}$$

于是，可得

$$D_i(|Dw|^{p-2}D_j w)(x) = O\left(r^{\frac{(p-1)\alpha+\beta}{p-\beta-1}}\right)\left(\frac{x_i x_j}{r^2} + \delta_{ij}\right), \ \text{ as } x \to 0. \tag{4.25}$$

由 (4.22) 和 (4.25)，可得

$$D_i(|Dw|^{p-2}D_j w)(0) = \lim_{x\to 0} D_i(|Dw|^{p-2}D_j w)(x) = 0, \tag{4.26}$$

证明 $(p-1)\alpha + \beta > 0$。因此，当 $(p-1)\alpha + \beta > 0$ 时，我们得到 $|Dw|^{p-2}Dw \in C^1(B_R)$.

接下来，我们考虑 $(p-1)\alpha + \beta = 0$ 的情形。注意，在引理 2.1 中，假设 $\tau = \theta(q + \frac{1}{p-1})$ 在 $q = \frac{n-k}{k}(p-1)$、$\tau = k\alpha + \frac{k-n}{p-1}\beta + n$ 和 $\theta = k(p-\beta-1)$ 下恰好就是 $(p-1)\alpha + \beta = 0$。将 $g = f^k$ 和引理 2.1 应用于 (4.23)，即可得到

$$\lim_{x\to 0} D_i(|Dw|^{p-2}D_j w)(x) = \left(\frac{k}{nC_{n-1}^{k-1}} f^k(a)\right)^{\frac{p-1}{k(p-\beta-1)}} \delta_{ij}. \tag{4.27}$$

当 $(p-1)\alpha+\beta=0$ 时，(4.22) 化为

$$D_i(|Dw|^{p-2}D_jw)(0)=\left(\frac{k}{nC_{n-1}^{k-1}}f^k(a)\right)^{\frac{p-1}{k(p-\beta-1)}}\delta_{ij}. \tag{4.28}$$

由 (4.27) 和 (4.28)，我们有

$$D_i(|Dw|^{p-2}D_jw)(0)=\lim_{x\to 0}D_i(|Dw|^{p-2}D_jw)(x)=\left(\frac{k}{nC_{n-1}^{k-1}}f^k(a)\right)^{\frac{p-1}{k(p-\beta-1)}}\delta_{ij}, \tag{4.29}$$

若 $(p-1)\alpha+\beta=0$，则成立。因此，当 $(p-1)\alpha+\beta=0$ 时，我们得到 $|Dw|^{p-2}Dw\in C^1(B_R)$。

对于 (ii) 中的 $x\in B_R$，$u(x)\le v(|x|)$ 的其余证明与 (i) 相同。细节从略。□

下一个引理说明了 (1.5) 的整体下解与柯西问题 (4.19) 的整体解之间的关系。

引理 4.2. 假设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一个非减连续函数，且 $\alpha>-1$、$\beta<p-1$ 和 $p>1$。

(i). 若 $p\le\alpha+\beta+2$，则 *(1.5)* 存在一个整体可容许下解 $u(x)\in C^2(\mathbb{R}^n)$，当且仅当柯西问题 *(4.19)* 对某个初值 a 存在解 $v(r)\in C^2[0,\infty)$。*(ii).* 若 $p>\alpha+\beta+2$ 且 $(p-1)\alpha+\beta\ge 0$，则 *(1.5)* 存在一个整体可容许下解 $u(x)\in C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})\cap W^{2,\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$，当且仅当柯西问题 *(4.19)* 对某个初值 a 存在解 $v(r)\in C^2(0,+\infty)\cap W^{2,\delta}_{loc}(0,+\infty)$，其中 $\delta\in(1,\frac{p-\beta-1}{p-\alpha-\beta-2})$。

证明。我们只证明 (i)，因为 (ii) 的证明相同。

(i). 充分性显然。若存在满足 (4.19) 的解 $v(r)\in C^2(0,+\infty)$。令 $u(x)=v(r)$，直接计算可得，$u(x)$ 是 (1.5) 的整体解。这表明 $u(x)\in C^2(\mathbb{R}^n)$ 是 (1.1) 所需的下解。

接下来证明必要性。假设柯西问题 (4.19) 不存在整体解。由定理 1.1，问题 (4.19) 在最大存在区间 $[0,R)$ 上有解 $v(r)$，且 $v(R)=+\infty$ and $v(0)=a$。由引理 4.1，(1.5) 的任意下解 $u(x)$ 都满足 $u(x)\le v(r)$，其中 $|x|\le R$。特别地，$u(0)\le v(0)=a$。然而，由于 a 是任意的，取 $a=\frac{u(0)}{2}$，使得 $u(0)>0$; $a=2u(0)$ 对于 $u(0)<0$; 并且 $a=-1$ 对于 $u(0)=0$，便得到矛盾。□

利用引理 4.2，我们应用定理 1.2 来证明 k-Hessian 方程 (1.5) 的 Keller-Osserman 定理。

定理 4.1 (k-Hessian 型方程的 Keller-Osserman 定理)。假设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一个非减连续函数，$\alpha\ge\frac{1}{k}-1$, $\beta<p-1$ 和 $p>1$。

(i)。若 $p\le\alpha+\beta+2$，则存在一个整体非平凡可容许下解 $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$ 满足 (1.5) 当且仅当

$$\int^{+\infty}\left(\int_0^t f^k(s)ds\right)^{-\frac{1}{k(p-\beta-1)+1}}dt=+\infty \tag{4.30}$$

成立;

(ii)。若 $p>\alpha+\beta+2$ 且 $(p-1)\alpha+\beta\ge 0$，则存在一个整体非平凡可容许下解 $u(x)\in C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})\cap W^{2,\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 满足 (1.5) 对 $\delta\in(1,\frac{p-\beta-1}{p-\alpha-\beta-2})$ 成立，当且仅当 (4.30) 成立。

证明。我们只证明（i），因为（ii）的证明相同。

(i). 我们看到，方程 (1.5) 对应的柯西问题为 (4.19)。当 $C=\left[k(p-\beta-1)C_{n-1}^{k-1}(p-1)\right]^{\frac{1}{k(p-\beta-1)}}$，$q=\frac{n-k}{k(p-1)}$，$\tau=k\alpha+\frac{k-n}{p-1}\beta+n$, $\theta=k(p-\beta-1)$ 和 $g=f^k$ 时，它恰好就是问题 (1.1)。当

$p>1$ 时，很容易验证 $\alpha \geq \frac{1}{k}-1$ 蕴含 $\tau \geqq \theta q+1$； $\beta<p-1$ 蕴含 $\theta>0$；且 $p \leq \alpha+\beta+2$ 蕴含 $\tau \geq \theta(q+1)$。此外， $C>0$ 和 $q \geq 0$ 自动成立。于是，根据定理 1.2 和引理 4.2，存在一个整体非平凡下解 $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$，当且仅当 (4.30) 成立。□

利用引理 4.2，我们应用定理 1.3，证明以下关于 k-Hessian 方程 (1.5) 的定理。

定理 4.2。 假设 $f:\ \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ 是一个非减连续函数， $-1<\alpha<\frac{1}{k}-1, \beta<p-1$ 和 $p>1$。 –

(a). 如果 f 满足

$$\int^{+\infty}\left(\int_0^t f^{\kappa k}(s)ds\right)^{-\frac{1}{\kappa k(p-\beta-1)+1}}dt=+\infty, \tag{4.31}$$

其中 $\kappa=\frac{1-\epsilon}{k\alpha+1-\epsilon}$，对某个常数 $\epsilon \in (0, k(\alpha+1))$成立，那么存在一个整体非平凡可容许下解 $u(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)\cap C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ 满足 *(1.5)*。此外，以下性质成立：

(i). 如果 $p \leq \alpha+\beta+2$，那么 $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$；
(ii). 如果 $p>\alpha+\beta+2$，$(p-1)\alpha+\beta \geq 0$，那么 $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})\cap W^{2,\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 当 $\delta \in (1, \frac{p-\beta-1}{p-\alpha-\beta-2})$。

(b). 若方程 (1.5) 存在一个满足 *(a)* 中 *(i)* 或 *(ii)* 的整体非平凡可容许下解 u，则条件 (1.2) 成立。

证明。 结合定理 1.3 和引理 4.2，即可直接得到证明。 □

5. Applications to Π_k-Hessian type equations

本节介绍 Π_k-Hessian 算子，它们可视为第 4 节中 k-Hessian 算子的对应形式。我们将研究 Π_k-Hessian 型方程的各种径向对称形式，包括标准的 k-Hessian 方程、退化或奇异的 k-Hessian 方程，以及 k-Hessian 方程的其他扩展形式。我们证明，这一系列 Π_k-Hessian 型方程也涵盖在定理 1.2 和定理 1.3 的框架内。

Π_k-Hessian 算子定义为

$$\tilde{\Pi}_k[u]=(\Pi_k[D^2u])^{\frac{1}{C_n^k}}, \tag{5.1}$$

其中 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 对于 $k=1,\cdots,n$，函数 Π_k 是 k个特征值和的乘积，即

$$\Pi_k[D^2u]:=\Pi_k(\lambda(D^2u))=\prod_{i_1<\cdots<i_k}\left(\sum_{s=1}^k\lambda_{i_s}(D^2u)\right),\quad k=1,\cdots,n. \tag{5.2}$$

在 (6.6) 中， $i_1,\cdots,i_k \subset \{1,\cdots,n\}$ 和 $\lambda(D^2u)=(\lambda_1(D^2u)\ \cdots,\lambda_n(D^2u))$ 表示矩阵 D^2u 的特征值。

为了在椭圆情形下进行研究，我们定义锥：

$$\mathcal{P}_k=\{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{s=1}^k\lambda_{i_s}>0\} \tag{5.3}$$

并假设在本节中始终有 $\lambda(D^2u) \in \mathcal{P}_k$。这里，若函数 $u \in C^2(\Omega)$ 满足对所有 $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$，均有 $\lambda(D^2u) \in \mathcal{P}_k$，则称其在 Ω 中可容许。

Π_k-Hessian 算子与微分几何中的 k-凸超曲面密切相关[15,16],，也是研究 [7–9,18] 中增广 Hessian 方程的斜边值问题时所用算子的主要例子。显然，式 (6.7) 中的算子 Π_k

当 $k=n$时退化为拉普拉斯算子，而当 $k=1$时则退化为 Monge-Amp`ère 算子。因此， $\Pi_k$-Hessian 算子可视为上一节中 $k$-Hessian 算子的对应物；后一类算子也是一组在拉普拉斯算子与 Monge-Amp`ère 算子之间进行插值的算子。

假设 $v\in C^2[0,\infty)$ 是径向对称的，且 $v'(0)=0$。那么对于 $r=|x|=(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ 和 $u(x)=v(r)$，有 $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$，并且 D^2u 的特征值由 (4.4) 给出。通过直接计算，我们得到

$$\Pi_k[D^2u]:=\Pi_k(\lambda(D^2u))=\begin{cases}\left(k\dfrac{v'(r)}{r}\right)^{C_{n-1}^k}\left(v''(r)+(k-1)\dfrac{v'(r)}{r}\right)^{C_{n-1}^{k-1}}, & r\in(0,+\infty),\\ (kv''(0))^{C_n^k}, & r=0,\end{cases}\tag{5.4}$$

对于 $k=1,\ \cdots,\ n$，其中约定若 $k=n$，则 $C_{n-1}^k=0$。因此，归一化形式

$$\tilde{\Pi}_k[D^2u](x)=\begin{cases}\left(k\dfrac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{n-k}{n}}\left(v''(r)+(k-1)\dfrac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{k}{n}}, & r\in(0,+\infty),\\ kv''(0), & r=0,\end{cases}\tag{5.5}$$

对于 $k=1,\ \cdots,\ n$。

接下来，我们将在以下小节中考虑几个 Π_k-Hessian 型方程。

5.1. 标准 Π_k-Hessian 情形。 我们首先考虑非齐次项为 $f(u)$ 的归一化 Π_k-Hessian 方程，即

$$\tilde{\Pi}_k[u]=f(u),\quad \text{in } \mathbb{R}^n.\tag{5.6}$$

利用 (5.5)，我们可以将 (5.6) 的径向对称形式写为

$$\left(k\frac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{n-k}{n}}\left(v''(r)+(k-1)\frac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{k}{n}}=f(v(r)),\quad r>0,\tag{5.7}$$

满足 $v'(0)=0$。通过观察（5.7）中的散度结构，我们得到相应的柯西问题

$$\begin{cases}v'(r)=\dfrac{r^{1-k}}{k}\left(\displaystyle\int_0^r ns^{n-1}f^{\frac{n}{k}}(v(s))ds\right)^{\frac{k}{n}}, & r\in(0,+\infty),\\ v(0)=a.\end{cases}\tag{5.8}$$

当 $C=n^{\frac{k}{n}}/k$、$q=k-1$、$\tau=n$、$\theta=\frac{n}{k}$ 和 $g=f^{\frac{n}{k}}$ 时，此问题对应于问题（1.1）。

我们还将进一步考虑退化或奇异的 Π_k-Hessian 方程

$$\tilde{\Pi}_k[u]=|x|^\alpha|Du|^\beta f(u),\quad \text{in } \mathbb{R}^n,\tag{5.9}$$

对于某些常数 $\alpha>-1$ 和 $\beta<1$。令 $u(x)=v(r)$，则得到

$$\left(k\frac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{n-k}{n}}\left(v''(r)+(k-1)\frac{v'(r)}{r}\right)^{\frac{k}{n}}=r^\alpha|v'(r)|^\beta f(v(r)),\quad r>0,\tag{5.10}$$

其中 $v'(0)=0$。与 (4.12) 类似，我们也可以推导出 $v'(r)>0$ for $r>0$，因此可以省去 (5.10) 右端的绝对值符号。由此，直接计算可得柯西问题

$$\begin{cases}v'(r)=\dfrac{r^{1-k}}{k^{\frac{1}{1-\beta}}}\left(\displaystyle\int_0^r n(1-\beta)s^{\frac{n}{k}(\alpha+\beta)-n\beta+n-1}f^{\frac{n}{k}}(v(s))ds\right)^{\frac{k}{n(1-\beta)}}, & r\in(0,+\infty),\\ v(0)=a.\end{cases}\tag{5.11}$$

当 $C=\left[n(1-\beta)/k^{\frac{n}{k}}\right]^{\frac{k}{(1-\beta)}}$、$q=k-1$、$\tau=\frac{n}{k}(\alpha+\beta)-n\beta+n$、$\theta=\frac{n}{(1-\beta)k}$ 以及 $g=f^{\frac{n}{k}}$ 时，该问题对应于问题 (1.1)。

5.2. **推广到 p-Π_k Hessian 方程**。在本小节中，我们考虑第 5.1 节中的方程，将 Hessian 矩阵 D^2u 替换为 $D(|Du|^{p-2}Du)$，其中 $p>1$。在这一部分中，如果对于所有 $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$，都有 $\lambda(D(|Du|^{p-2}Du))\in\mathcal{P}_k$，则称函数$u\in C^2(\Omega)$在 Ω 中是可容许的。

假设 $v\in C^2[0,\infty)$ 是径向对称的，且 $v'(0)=0$。那么，对于 $r=|x|=(\sum^n x_i^2)^{1/2}$和$_{i=1}u(x)=v(r)$，$D(|Du|^{p-2}Du)$ 的特征值由 (4.14) 给出。通过直接计算，我们得到

$$\Pi_k[D(|Du|^{p-2}Du)]=\left(k\frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\right)^{C_{n-1}^k}\left(((v'(r))^{p-1})'+(k-1)\frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\right)^{C_{n-1}^{k-1}},\quad r>0. \tag{5.12}$$

我们用下式代替 (5.6)：

$$\left(\Pi_k[D(|Du|^{p-2}Du)]\right)^{\frac{1}{C_n^k}}=f(u),\quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{5.13}$$

于是，相应的常微分方程为

$$\left(k\frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\right)^{\frac{n-k}{n}}\left(((v'(r))^{p-1})'+(k-1)\frac{(v'(r))^{p-1}}{r}\right)^{\frac{k}{n}}=f(v(r)),\quad r>0, \tag{5.14}$$

其中 $v'(0)=0$。通过观察（5.7）中的散度结构，我们得到柯西问题

$$\begin{cases} v'(r)=r^{\frac{1-k}{p-1}}\left(\int_0^r \frac{n}{k^{\frac{n}{k}}}s^{n-1}f^{\frac{n}{k}}(v(s))ds\right)^{\frac{k}{n(p-1)}}, & r\in(0,+\infty),\\ v(0)=a. \end{cases} \tag{5.15}$$

当 $C=(n/k^{\frac{n}{k}})^{\frac{k}{n(p-1)}}$、$q=\frac{k-1}{p-1}$、$\tau=n$、$\theta=\frac{n}{(p-1)k}$ 以及$g=f^{\frac{n}{k}}$时，该问题对应于问题（1.1）。

此外，我们还考虑方程（5.13）的退化或奇异形式，即对于某些常数 $\alpha>-1$ 和 $\beta<p-1$，方程（1.6）。通过对（1.6）的径向对称解进行计算，我们得到柯西问题

$$\begin{cases} v'(r)=r^{\frac{1-k}{p-1}}\left(\int_0^r \frac{n(p-\beta-1)}{k^{\frac{n}{k}}(p-1)}s^{n\left[\frac{\alpha}{k}+(\frac{1}{k}-1)\frac{\beta}{p-1}+1\right]-1}f^{\frac{n}{k}}(v(s))ds\right)^{\frac{k}{n(p-\beta-1)}}, & r\in(0,+\infty),\\ v(0)=a. \end{cases} \tag{5.16}$$

当 $C=\left[n(p-\beta-1)k^{\frac{n}{k}}(p-1)\right]^{\frac{k}{(p-\beta-1)}}$、$q=\frac{k-1}{p-1}$、$\tau=n\left[\frac{\alpha}{k}+(\frac{1}{k}-1)\frac{\beta}{p-1}+1\right]$, $\theta=\frac{n(p-\beta-1)}{k}$ and $g=f^{\frac{n}{k}}$.时，该问题对应于问题（1.1）

5.3. **Keller-Osserman 定理**。本小节考虑方程（1.6），并证明其 Keller-Osserman 定理，其中方程（5.6）、（5.9）和（5.13）都是其特殊情形。

为了考察方程 (1.6)，我们转而考察柯西问题 (5.16)，它对应于满足 $C=\left[n(p-\beta-1)k^{\frac{n}{k}}(p-1)\right]^{\frac{k}{(p-\beta-1)}}$、$q=\frac{k-1}{p-1}$，$\tau=n\left[\frac{\alpha}{k}+(\frac{1}{k}-1)\frac{\beta}{p-1}+1\right]$, $\theta=\frac{n}{(p-\beta-1)k}$和 $g=f^{\frac{n}{k}}$的 (1.1)。我们注意到，当 $p>1$ 时，$q\geq 0$ 自动成立；当 $p>1$ 和 $\beta<p-1$ 时，$C>0$ 和 $\theta>0$ 成立；当 $\alpha>-1$ 时，$\tau>\theta q$ 成立。因此，关于 α、β 和 p 的基本假设是

$$p>1,\quad \alpha>-1,\quad \text{and } \beta<p-1. \tag{5.17}$$

定理 1.2 中另一个关键等式是 $\tau = \theta(q+1)$，对于 (1.6)，它是 $p = \alpha + \beta + 2$。那么，$\tau \geq \theta(q+1)$ 和 $\tau < \theta(q+1)$ 对应于

$$p \leq \alpha + \beta + 2, \quad \text{and } p > \alpha + \beta + 2, \tag{5.18}$$

分别地。在 $p > \alpha + \beta + 2$ 的情形下，根据定理 1.2，解 $v(r) \in C^2(0, +\infty) \cap W^{2,\delta}_{loc}(0, +\infty)$，其中

$$\delta \in (1, \frac{p-\beta-1}{p-\alpha-\beta-2}). \tag{5.19}$$

同样在此情形下，与引理 4.1 (ii) 类似，我们仍需假设

$$(p-1)\alpha + \beta \geq 0, \tag{5.20}$$

以保证 $|Dw|^{p-2}Dw$ 在 0 处为 C^1，其中 $w(x) = v(r)$。

由于 (5.17)、(5.18)、(5.19) 和 (5.20) 成立，若分别用 (1.6) 和 (5.16) 替换 (1.5) 和 (4.19)，引理 4.1 和引理 4.2 仍然成立。注意，在 (1.6) 和 (5.16) 的条件下证明引理 4.1 的过程中，我们仍需要借助引理 2.1。

然后，我们应用定理 1.2，为 Π_k-Hessian 方程 (1.6) 表述 Keller-Osserman 定理。

定理 5.1（Keller-Osserman 定理：关于 Π_k-Hessian 型方程）。假设 $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一个非减连续函数，$\alpha \geq \frac{k}{n} - 1$、$\beta < p-1$ 和 $p > 1$。

（i）。若 $p \leq \alpha + \beta + 2$，则存在一个整体非平凡可容许下解 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$，它是（1.6）的解，当且仅当

$$\int^{+\infty} \left(\int_0^t f^{\frac{n}{k}}(s)ds \right)^{-\frac{1}{\frac{n(p-\beta-1)}{k}+1}} dt = +\infty \tag{5.21}$$

成立；

（ii）。若 $p > \alpha+\beta+2$ 且 $(p-1)\alpha+\beta \geq 0$，则存在一个整体非平凡可容许下解 $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \cap W^{2,\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$，它是（1.6）的解，其中 $\delta \in (1, \frac{p-\beta-1}{p-\alpha-\beta-2})$，当且仅当（5.21）成立。

证明。证明过程仿照定理 4.1。现在，Keller-Osserman 条件（1.2）结合 $g = f^{\frac{n}{k}}$ 和 $\theta = \frac{n}{k}(p-\beta-1)$ 给出条件（5.21）。□

由于引理 4.1 和 4.2 在分别用（1.6）和（5.16）替换（1.5）和（4.19）后仍然成立，我们也应用定理 1.3，为 Π_k-Hessian 方程（1.6）表述以下定理：

定理 5.2。假设 $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一个非减连续函数，$-1 < \alpha < \frac{k}{n} - 1$、$\beta < p-1$ 和 $p > 1$。

(a). 如果 f 满足

$$\int^{+\infty} \left(\int_0^t f^{\frac{\kappa n}{k}}(s)ds \right)^{-\frac{1}{\frac{\kappa n(p-\beta-1)}{k}+1}} dt = +\infty, \tag{5.22}$$

其中 $\kappa = \frac{1-\epsilon}{n\frac{\alpha+1}{k} - \epsilon}$ 对于某个常数 $\epsilon \in (0, \frac{n(\alpha+1)}{k})$，则存在一个整体非平凡可容许下解 $u(x) \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$，它是 (1.6) 的解。此外，以下性质成立：

(i). 如果 $p \leq \alpha + \beta + 2$，那么 $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$；

(ii). 如果 $p > \alpha+\beta+2$，$(p-1)\alpha+\beta \geq 0$，那么 $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \cap W^{2,\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 对于 $\delta \in (1, \frac{p-\beta-1}{p-\alpha-\beta-2})$。

(b). 如果方程(1.6) 存在一个满足 *(a)* 中 *(i)* 或 *(ii)* 的整体非平凡可容许下解 u 那么条件(1.2) 成立。

证明。 结合定理 1.3 和引理 4.2（将 (1.5) 替换为 (1.6)）即可直接得到证明。 □

6. 备注与例子

本节将介绍一些与柯西问题 (1.1) 以及 k-Hessian 和 Π_k-Hessian 方程相关的评注。我们将给出方程 (1.5) 和 (1.6) 的一些显式例子，以及 (1.6) 的整体下解的显式例子。

备注 6.1。 在处理 $[1,5,10,12–14]$, 中的偏微分方程时，相应柯西问题 (1.1) 中的参数 θ 总是要求大于或等于 1。本文中，(4.7) 中的 $\theta = k$ 和 (5.6) 中的 $\theta = \frac{n}{k}$ 均大于或等于 1。请注意，对于方程 (4.10)、(4.16)、(1.5)、(5.9)、(5.13) 和 (1.6)，我们的 θ 可能小于 1。为此，我们已单独讨论了 $0 < \theta < 1$ 情形；参见定理 1.1 证明中的情形 2。因此，本文的结果涵盖所有正的 θ。

注 6.2: 注意，对于 Π_k-Hessian 方程，定理 5.1 是新的。当 $k = n$ 时，定理 5.1 退化为 $[12, 14]$ 中拉普拉斯型方程的经典 Keller-Osserman 条件的相关结果。当 $k = 1$ 时，我们的结果与 $[5]$ 中关于 Monge-Amp`ere 方程的结果一致。我们指出， $k = n - 1$ 情形还可具体应用于 $(n - 1)$ Monge-Amp`ere 方程 $\det^{\frac{1}{n}}(\Delta uI - D^2u) = f(u)$，该方程近年来引起了一些研究兴趣；参见 $[11, 20]$。$(n - 1)$ Monge-Amp`ere 方程的 Keller-Osserman 条件在 $[10]$ 中建立。容易验证，$\det^{\frac{1}{n}}(\Delta uI - D^2u) = \tilde{P}_{n-1}(D^2u)$。因此，当 $k = n-1$ 和 $\alpha = \beta = 0$ 时，本文的定理 5.1 将 $[10]$ 中的相应结果作为特例包含在内。当 Keller-Osserman 条件中的积分收敛时， $\mathbb{R}^n$ 的有界区域中 $(n - 1)$ Monge-Amp`ere 方程的边界爆破问题在 $[6]$ 中得到研究。

注 6.3。 算子 $S_k[D(|Du|^{p-2}Du)]$最早由第二作者和 X.-J. Wang 在 $[19]$ 中引入。当 $k = 1$ 时，它退化为 p-拉普拉斯算子；当$p = 2$ 时，则退化为 k-Hessian 算子。因此，主要结果定理 4.1 和 5.1 与 p-拉普拉斯方程的相关结果具有相似性。例如，当我们将定理 4.1 应用于方程 (4.16) 时， $C^2(\mathbb{R}^n)$ 中整体次解的情形为 $1 < p \leq 2$，而 $C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ 中整体次解的情形 $\cap W^{2,\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 为 $p > 2$。对于特定方程 (4.16)， $p > 2$ 情形已在 $[1]$, 中研究，而 $p = 2$ 时的标准 k-Hessian 情形则在 $[5]$ 中得到考察。据我们所知，方程 (4.16) 中 $1 < p < 2$ 情形下的结果是新的。

注记 6.4。 本文将柯西问题 (1.1) 应用于两类非线性偏微分方程，即 k-Hessian 型方程和 Π_k-Hessian 型方程。比较 (4.19) 和 (5.16) 中p、 q、 τ 与 θ 的形式，可见这两类方程之间存在“对偶性”。具体而言，将 (4.19) 中 p、 q、 τ 里的 k 以及 θ 替换为 $\frac{n}{k}$，便得到 (5.16) 中相应的 p、 q、 τ 与 θ；而将 (5.16) 中 p、 q、 τ 里的 k 以及 θ 替换为 $\frac{n}{k}$，便得到 (4.19) 中相应的 p、 q、 τ 与 θ。因此，分别针对 k-Hessian 型方程 (1.5) 和 Π_k-Hessian 型方程 (1.6) 的 Keller-Osserman 条件 (4.30) 和 (5.21) 也具有这种对偶性。鉴于这种对偶性，值得

请注意，当 $km = n$ 时， m-Hessian 型方程 $S_m^{\frac{1}{m}}[D(|Du|^{p-2}Du)] = |x|^{\alpha}|Du|^{\beta}f(u)$ 与 Π_k-Hessian 型方程 (1.6) 具有完全相同的 Keller-Osserman 条件。在 $km = n$ 情形下，更一般的方程为:

$$AS_m^{\frac{1}{m}}[D(|Du|^{p-2}Du)] + B\Pi_k^{\frac{1}{C_n^k}}[D(|Du|^{p-2}Du)] = |x|^{\alpha}|Du|^{\beta}f(u) \tag{6.1}$$

其中 $A(C_{n-1}^{m-1})^{\frac{1}{m}} + Bk^{1-\frac{1}{m}} > 0$，其 Keller-Osserman 条件为

$$\int^{+\infty} \left(\int_0^t f^m(s)ds \right)^{-\frac{1}{m(p-\beta-1)}+1} = +\infty, \tag{6.2}$$

其中 A 和 B 为常数。

注 6.5。 定理 4.1 和 5.1 可推广到更一般的方程

$$S_k^{\frac{1}{k}}[D(|Du|^{p-2}Du)] = |x|^\alpha |Du|^\beta (x \cdot Du)^\gamma f(u), \tag{6.3}$$

and

$$\left(\Pi_k[D(|Du|^{p-2}Du)]\right)^{\frac{1}{C_n^k}} = |x|^\alpha |Du|^\beta (x \cdot Du)^\gamma f(u), \tag{6.4}$$

分别成立。方程 (6.3) 和 (6.4) 的柯西问题分别为 (4.19) 和 (5.16)，其中 α 和 β分别替换为 $\alpha+\gamma$ 和 $\beta+\gamma$。因此，我们可以得到定理 4.1 和 5.1 的推广版本。

注 6.6。 注意，定理 1.1 在 g 为正连续函数时得到了证明。或者，如果 g 非负且满足 $g(0) = 0, g(t) > 0$ for $t > 0$，那么初值为 $a \geq 0$ 的方程 (1.1) 的正解 v 也将是可容许的。因此，定理 1.1 在这种情形下仍然成立。我们还指出，本文中对 g 的假设可以替换为 $g:\ \mathbb{R} \to [0,\infty)$ 是一个非负且非递减的函数，并满足 $g(0) = 0, g(t) > 0$ for $t > 0$。因此，定理 4.1 和 5.1 中的函数 f 对 g也适用相同的替代条件。此外，在定理 4.1 和 5.1 中，当 $a = 0$时，“整体非平凡可容许下解”应替换为“非负整体非平凡可容许下解”；当$a > 0$时，应替换为“正整体非平凡可容许下解”。

接下来，我们给出了满足注 6.6 中两个替代假设的一些显式例子 f。我们在下面两个推论中予以介绍。

推论 6.1. 设 $c \geq 0$ 和 $f(t) = e^{ct}$满足定理 *4.1* 或定理 *4.2*（定理 *5.1* 或定理 *5.2*）的假设，则 (1.5)（或 (1.6)）存在整体非平凡可容许下解，当且仅当

$$c = 0.$$

注意，推论 6.1（$c = 0$）证实了方程[1] [1] $S_k^k[D(|Du|^{p-2}Du)] = |x|^\alpha |Du|^\beta$和 $\left(\Pi_k[D(|Du|^{p-2}Du)]\right)^{C_n^k} = |x|^\alpha |Du|^\beta$存在整体下解 u。进一步研究这些方程在 $\mathbb{R}^n$中的整体解的 Liouville 型结果将会很有意义。

推论 6.2。设 $d \geq 0$ 且

$$f(t) = \begin{cases} t^d, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

在定理 *4.1* 或定理 *4.2*（定理 *5.1* 或定理 *5.2*）的假设下，则(1.5)（或(1.6)）存在非负非平凡的可容许下解 u 当且仅当

$$d \leq p - \beta - 1.$$

注 6.7。 注意，对于推论 6.1 中的方程 (1.5)（推论 6.2 中的方程 (1.6)），下解的正则性与定理 4.1 或定理 4.2（定理 5.1 或定理 5.2）中的相同。

我们首先证明推论 6.1，该推论涉及右端的指数型非线性项。

推论 *6.1* 的证明。 我们仅给出方程 (1.6) 的证明。方程 (1.5) 的证明类似。

由于 $c \geq 0$，显然 $f \in C(\mathbb{R})$ 是一个正的非递减函数。根据定理 5.1，方程 (1.6) 存在整体次解当且仅当 (5.21) 成立，即

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_0^t e^{\frac{nc}{k}s} ds \right)^{-\frac{1}{\frac{n(p-\beta-1)}{k}+1}} dt = +\infty, \tag{6.5}$$

其中 a 是 $\mathbb{R}$ 中的任意常数。当 $c = 0$ 时，(6.5) 显然成立。当 $c > 0$ 时，我们有

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_0^t e^{\frac{nc}{k}s} ds \right)^{-\frac{1}{\frac{n(p-\beta-1)}{k}+1}} dt = \left(\frac{k}{nc} \right)^{-\frac{1}{\frac{n(p-\beta-1)}{k}+1}} \int_a^{+\infty} (e^{\frac{nc}{k}t} - 1)^{-\frac{1}{\frac{n(p-\beta-1)}{k}+1}} dt.$$

令 $F(t) := (e^{\frac{nc}{k}t} - 1)^{\frac{n}{(p-\beta-1)k+1}}$，其中 $t \geq a$。由于

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 F(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{(e^{\frac{nc}{k}t} - 1)^{\frac{1}{\frac{n(p-\beta-1)}{k}+1}}} = \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\frac{2n(p-\beta-1)}{k}+2}}{e^{\frac{nc}{k}t} - 1} \right)^{\frac{1}{\frac{n(p-\beta-1)}{k}+1}} = 0, \quad c > 0,$$

我们得到积分 $\int_a^{\infty} F(t)dt$ 收敛，这表明当 $c > 0$ 时 (6.5) 不成立

为了应用定理 5.2，我们需要检验 (5.22) 中的积分。容易验证，对于 $f(t) = e^{ct}$ 且 $c \geq 0$，(5.22) 与 (5.21) 具有相同的收敛性。因此可得出与上文相同的结论。□

现在我们证明推论 6.2，其中右端为幂型非线性。

推论 *6.2* 的证明。 我们只给出方程 (1.6) 的证明。方程 (1.5) 的证明相同。

显然，当 $d \geq 0$, $f \in C[0, \infty)$ 是一个非负且非递减的函数，并满足$f(0) = 0$, $f(t) > 0$对于 $t > 0$ 时，由定理 5.1，(1.6) 的整体下解存在，当且仅当 (5.21) 成立。我们验证 f 满足条件 (5.21)，即

$$\int_{a'}^{+\infty} \left(\int_0^t s^{\frac{nd}{k}} ds \right)^{-\frac{1}{\frac{n(p-\beta-1)}{k}+1}} dt = +\infty, \tag{6.6}$$

其中 a' 是 $\mathbb{R}^+$中的任意常数。由于 $f(t) = t^d$ 对于 $t \geq 0$，我们有

$$\int_{a'}^{+\infty} \left(\int_0^t s^{\frac{nd}{k}} ds \right)^{-\frac{1}{\frac{n(p-\beta-1)}{k}+1}} dt = \left(\frac{k}{nd+k} \right)^{-\frac{1}{\frac{n(p-\beta-1)}{k}+1}} \int_{a'}^{+\infty} t^{-\frac{nd+k}{n(p-\beta-1)+k}} dt. \tag{6.7}$$

容易验证，(6.7) 中的无穷积分 $\int_{a'}^{+\infty} t^{-\frac{nd+k}{n(p-\beta-1)+k}} dt$ 在 $d \leq p - \beta - 1$时发散，在 $d > p - \beta - 1$时收敛。应用定理 5.1 和注 6.6，方程 (1.6) 的推论 6.2 证明完毕。

为了应用定理 5.2，我们需要检查 (5.22) 中的积分。容易验证，当 $f(t) = t^d$时，(5.22) 与 (5.21) 具有相同的收敛性；当 $t > 0$和 $f(t) = 0$时，亦然。因此，它得出与上述相同的结论。□

本节最后，我们给出一些满足推论 6.1 和 6.2 的显式整体下解。这些例子针对 Π_k-Hessian 型方程。关于 k-Hessian 方程的例子也类似。

前两个整体次解的例子针对标准的 Π_k-Hessian 方程 (5.6)。其中一个对应指数型非线性项，另一个对应幂型非线性项。

例6.1. 对于任意 $a \geq \frac{1}{k}$、 $b \in \mathbb{R}^n$ 和 $j \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \frac{1}{2}ax^2 + b \cdot x + j \tag{6.8}$$

是方程(5.6) 的整体可容许下解，其中 $f(t) = e^{ct}$，且 $c = 0$。

例6.2。对于 $A \geq \frac{1}{k}$，

$$u(x) = e^{\frac{1}{2}A|x|^2} \tag{6.9}$$

是方程(5.6) 的整体可容许下解，其中 $f(t) = t^d$，且 $d \in [0, 1]$。

The 接下来的三个整体下解例子针对 Π_k-Hessian 型方程 (1.6).

例6.3。对于任意 $a \geq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$和 $j \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \frac{1}{2}ax^2 + j \tag{6.10}$$

是一个整 式(1.6) 在 $\alpha = 2, \beta = -2, p = 2$ 和 $f(t) = e^{ct}$ ($c =$下的可容许下解 0).

例6.4。任意 $a \geq \left((k + \frac{1}{2})C_{n-1}^{k-1} + kC_{n-1}^{k}\right)^{-3}$ 和 $j \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \frac{1}{4}a|x|^4 + j \tag{6.11}$$

是式(1.6) 在 $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{6C_n^k}, p = \frac{3}{2}$和 $f(t) = e^{ct}$ ($c = 0$)下的整体可容许下解。

例6.5。任意 $a \geq \left((k + \frac{9}{2})C_{n-1}^{k-1} + kC_{n-1}^{k}\right)^{-\frac{1}{2}}$和 $j \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \frac{2}{3}a|x|^{\frac{3}{2}} + j \tag{6.12}$$

是式(1.6) 在 $\alpha = 0, \beta = \frac{9}{C_n^k}, p = 11$ 和 $f(t) = e^{ct}$ ($c = 0$)下的整体可容许下解，其中$k = 1, 2 \cdots, n - 1$。注意，式(6.12) 中的函数 u 属于 $C^2(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \cap W^{2,\delta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$，对于某个$\delta \in (1, \frac{10C_n^k - 9}{9(C_n^k - 1)})$。

例6.3、例6.4和例6.5分别满足 $p = \alpha + \beta + 2$、 $p < \alpha + \beta + 2$和 $p > \alpha + \beta + 2$ 以及（$p - 1$）$\alpha + \beta \geq 0$。在这些例子中， α 都处于范围 $[\frac{k}{n} - 1, +\infty)$ 内。

接下来，我们再给出一个 α 处于范围（-1， $\frac{k}{n} - 1$）内的例子。

例6.6。对于任意 $a \geq \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-6}$ 和 $j \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \frac{1}{4}a|x|^4 + j \tag{6.13}$$

是(1.6) 的整体可容许下解，其中 $k = n$、 $\alpha = -\frac{1}{2}$、 $\beta = \frac{1}{3}$、 $p = \frac{3}{2}$以及 $f(t) = e^{ct}$ ($c = 0$)。

本节最后，我们在下表1中总结非线性偏微分方程的示例与 Cauchy 问题 (1.1) 之间的关系。

非线性方程	方程形式	问题 (1.1) 中的参数
k-Hessian 方程	$S_k^{\frac{1}{k}}[u] = f(u)$	$C = \left(k/C_{n-1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}$, $q = \frac{n}{k} - 1$, $\tau = n$, $\theta = k$, $g = f^k$
k-Hessian 方程 带有退化右端项	$S_k^{\frac{1}{k}}[u] = \lvert x\rvert^{\alpha}\lvert Du\rvert^{\beta} f(u)$	$C = \left[\frac{k(1-\beta)}{C_{n-1}^{k-1}}\right]^{\frac{1}{k(1-\beta)}}$, $q = \frac{n}{k} - 1$, $\tau = k(\alpha+\beta) - n\beta + n$, $\theta = k(1-\beta)$, $g = f^k$
p-k-Hessian 方程	$S_k^{\frac{1}{k}}[D(\lvert Du\rvert^{p-2}Du)] = f(u)$	$C = \left(k/C_{n-1}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k(p-1)}}$, $q = \frac{n-k}{k(p-1)}$, $\tau = n$, $\theta = k(p-1)$, $g = f^k$
p-k-Hessian 方程 带退化右端项	$S_k^{\frac{1}{k}}[D(\lvert Du\rvert^{p-2}Du)] = \lvert x\rvert^{\alpha}\lvert Du\rvert^{\beta} f(u)$	$C = \left[\frac{k(p-\beta-1)}{C_{n-1}^{k-1}(n-k)}\right]^{\frac{1}{k(p-\beta-1)}}$, $q = \frac{n-k}{k(p-1)}$, $\tau = k\alpha + \frac{k-n}{p-1}\beta + n$, $\theta = k(p-\beta-1)$, $g = f^k$
Π_k-Hessian 方程	$\Pi^{\frac{1}{C^k}}{}_{k^n}[D^2u] = f(u)$	$C = n^{\frac{k}{n}}/k$, $q = k-1$, $\tau = n$, $\theta = \frac{n}{k}$, $g = f^{\frac{n}{k}}$
Π_k-Hessian 方程 具有退化右端项	$\Pi_k^{\frac{1}{C_n^k}}[D^2u)] = \lvert x\rvert^{\alpha}\lvert Du\rvert^{\beta} f(u)$	$C = \left[n(1-\beta)/k^{\frac{n}{k}}\right]^{\frac{k}{n(1-\beta)}}$, $q = k-1$, $\tau = \frac{n}{k}(\alpha+\beta) - n\beta + n$, $\theta = \frac{n(1-\beta)}{k}$, $g = f^{\frac{n}{k}}$
p-Π_k-Hessian 方程	$\Pi^{\frac{1}{C^k}}{}_{k^n}[D(\lvert Du\rvert^{p-2}Du)] = f(u)$	$C = (n/k^{\frac{n}{k}})^{\frac{n}{k(p-1)}}$, $q = \frac{k-1}{p-1}$, $\tau = n$, $\theta = \frac{n(p-1)k}{n}$, $g = f^{\frac{n}{k}}$
p-Π_k-Hessian 方程 带有退化右端项	$\Pi_k^{\frac{1}{C_n^k}}[D(\lvert Du\rvert^{p-2}Du)] = \lvert x\rvert^{\alpha}\lvert Du\rvert^{\beta} f(u)$	$C = \left[\frac{n(p-\beta-1)k^{\frac{n}{k}}}{(\frac{n}{k(p-\beta-1)})^{p-1}}\right]^{\frac{k-1}{p-1}}$, $q = \frac{k-1}{p-1}$, $\tau = n\left[\frac{\alpha}{k} + (\frac{1}{k}-1)\frac{\beta}{p-1} + 1\right]$, $\theta = \frac{n(p-\beta-1)}{k}$, $g = f^{\frac{n}{k}}$

TABLE 1. 非线性方程及柯西问题 (1.1) 中的相应参数

REFERENCES

1. J.G. Bao, Q. Feng, 关于 p k *Canad.* - - *Math. Bull.* **65** 2022 1004 1019
Hessian 不等式整体可解性的充要条件, , ( ), – 。2. N. Cao, F. Jiang, 一类抛物型 k *Discrete* -Hessian 方程的整体解与渐近行
Contin. Dyn. Syst. **48** 2026 196 230
为, , ( ), – 。3. S.Y. Cheng, S.T. Yau, 黎曼流形上的微分方程及其几何应用,
Comm. Pure , ( ), – 。
Appl. Math. **28** 1975 333 354

4. R. Filippucci, P. Pucci 和 M. Rigoli，带梯度项的非线性加权 p-拉普拉斯椭圆不等式，*Commun. Contemp. Math.*，12 (2010)，501–535。5. X.H. Ji，J.G. Bao，Hessian 不等式可解的充要条件， *Proc. Amer. Math. Soc.*，138 2010 175 188 ( )，–。6. J. Ji，H. Deng，F. Jiang，实 $(n-1)$ Monge-Amp`ere 方程的边界爆破问题， *Nonlinear Anal.*，250 2025 113669，13 ( )，论文编号 pp.。7. F. Jiang，N.S. Trudinger，增广 Hessian 方程的斜边值问题 II， *Nonlinear Anal.*，154 2017 148 173 ( )，–。8. F. Jiang，N.S. Trudinger，增广 Hessian 方程的斜边值问题 I， *Bull. Math. Sci.*，8 (2018)，353–411。9. F. Jiang，N.S. Trudinger，增广 Hessian 方程的斜边值问题 III，

Comm. Partial，( )，–。

Differential Equations **44** 2019 708 748

10. F. Jiang，J.W. Ji 和 M.N. Li，实 $(n-1)$ Monge-Amp`ere 方程整体可解的充要条件， *Ann. Mat. Pura Appl.*，204 (2025)，447–476。11. H.M. Jiao 和 J.X. Liu，黎曼流形上的一类 Hessian 型方程， *Proc. Amer. Math. Soc.*，151 (2023)，569–581。12. J.B. Keller，关于 $\Delta u = f(u)$ 的解， *Comm. Pure Appl. Math.*，10 (1957)，505–510。13. Y. Naito，H. Usami，不等式 $div(A(Du)Du) \geq f(u)$ 的整体解， *Math. Z.*，225 (1997)，167–175。14. R. Osserman，关于不等式 $\Delta u \geq f(u)$， *Pacific J. Math.*，7 (1957)，1641–1647。15. J.-P. Sha， p-凸黎曼流形， *Invent. Math.*，83 (1986)，437–447。16. J.-P. Sha，把手体与 p-凸性， *J. Differ. Geom.*，25 (1987)，353–361。17. N.S. Trudinger，关于 Hessian 方程的 Dirichlet 问题， *Acta Math.*，175 (1995)，151–164。18. N.S. Trudinger，从最优传输到共形几何，载于《几何分析——献给田刚 60 岁生日》， *Progr. Math.*，Birkh¨auser/Springer，333 2020，511–520。19. N.S. Trudinger，X.-J. Wang，Hessian 测度 II， *Ann. of Math. (2)*，150 (1999)，579–604。20. V. Tosatti 和 B. Weinkove，紧致 Kähler 流形上 $(n-1)$-拟全纯函数的 Monge-Amp`ere 方程， *J. Amer. Math. Soc.*，30 (2016)，311–346。21. X.-J. Wang， k-Hessian 方程， *Lecture Notes in Math.*，1977 (2009)，177–252。

School of Mathematics and Shing-Tung Yau Center of Southeast University, Southeast University, Nanjing 211189 Shanghai ,
P.R. China; Shanghai Institute for Mathematics and Interdisciplinary Sciences, , 200433, P.R.China
Email address: jiangfeida@seu.edu.cnMathematical Sciences Institute, The Australian National University,
Canberra ACT 0200, Australia*Email address*: neil.trudinger@anu.edu.au
School of Mathematics and Shing-Tung Yau Center of Southeast University, Southeast University, Nanjing 211189 ,
P.R. China*Email address*: qiaoqiaoxu@seu.edu.cn