arXiv:2601.05551v1 [math.CA] 9 Jan 2026

关于 Brascamp–Lieb 不等式高斯稳定性的说明

JONATHAN BENNETT 和 MICHAEL CHRIST

ABSTRACT. 我们证明了一种一般欧几里得 Brascamp–Lieb 不等式的稳定形式，适用于勒贝格指数严格介于 1 和 2 之间的所有情形，并断言所有近极值函数都近似于高斯函数。

1. INTRODUCTION

Brascamp–Lieb 不等式为数学中经常出现的一大类多线性形式提供勒贝格空间界，它推广了许多众所周知的函数不等式，例如赫尔德不等式、Loomis–Whitney 不等式和 Young 卷积不等式。其形式为

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m f_j(B_j x)\,\mathrm{d}x \le \mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p}) \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}, \tag{1.1}$$

其中，映射 $B_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d_j}$ 是线性满射，量 $1 \le p_j \le \infty$是勒贝格指数，输入函数 f_j 是定义在 $\mathbb{R}^{d_j}$上的任意非负实值函数（对每个 $1 \le j \le m$而言），而 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 是使不等式对所有 $(f_j) = (f_1, \ldots, f_m)$ 成立的所有元素 $[0,\infty]$ 中的下确界。按照 [6], 的约定，成对的 m-元组 $(\mathbf{B}, \mathbf{p}) = ((B_j), (p_j))$ 称为 ***Brascamp–Lieb*** 数据，而最优常数$0 < \mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}) \le \infty$ 称为 ***Brascamp–Lieb*** 常数。众所周知，$\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p})$ 有限当且仅当缩放条件

$$d = \sum_{j=1}^m p_j^{-1} d_j \tag{1.2}$$

成立，且 $\mathbb{R}^d$ 的每个线性子空间 V 都是次临界的，其含义是

$$\dim(V) \le \sum_j p_j^{-1} \dim(B_j(V)). \tag{1.3}$$

关于这一点以及与 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 相关的其他结构性结果，请参阅 [6, 7] 及其中的参考文献。特别地，Lieb [23] 的一项奠基性定理指出，Brascamp– Lieb 常数总能在上确界意义下由中心高斯输入饱和，$\mathbf{f} = (f_j)$，并且对于哪些数据存在高斯极值函数，人们已有很好的认识。有了这类信息，通常会希望获得稳定性结论，即识别出呈现近等号的输入，并证明它们在适当度量下接近（此处为）高斯函数。本文的主要目标是为 (1.1) 得出这类结论。

Date: 2026年1月5日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 44A12。Brascamp–Lieb 不等式、极值函数、稳定性。第一作者获英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/W032880/1。我们感谢奥伯沃尔法赫数学研究所，特别感谢 2025年研讨会“实分析、调和分析与应用”的组织者；本研究正是在该研讨会期间启动的。*Key words and phrases.*

下文中，我们用 $\mathfrak{G}_{\mathbb{R}_+}(d)$表示$\mathbb{R}^d$上的所有正（非中心）高斯函数的集合，也就是形如 f 的函数

$$f(x) = ce^{-Q(x)+v\cdot x} \tag{1.4}$$

其中， Q 是定义在 $\mathbb{R}^d$上的正定实二次型， $v \in \mathbb{R}^d$ 和 $c \in (0, \infty)$。我们将 $\mathfrak{G}_{\mathbb{R}_+}(d)$的元素称为正高斯函数，并对 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$定义

$$\operatorname{dist}_p(f, \mathfrak{G}_{\mathbb{R}_+}(d)) = \inf_{g\in\mathfrak{G}_{\mathbb{R}_+}(d)} \|f-g\|_{L^p}. \tag{1.5}$$

我们的方法部分基于傅里叶分析，并自然地导出复值函数 f_j这一更一般情形下的稳定性结果。每当 $\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}) < \infty$时，对于任意函数$f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})$，积分 $\int_{\mathbb{R}^d} \prod_j |f_j(B_j x)| \,\mathrm{d}x$ 都是有限的，因此$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_j f_j(B_j x)\mathrm{d}x$ 是良定义的，并且满足

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m f_j(B_j x)\,\mathrm{d}x \Big| \le \mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}) \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}. \tag{1.6}$$

我们用 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d)$表示定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的、形如(1.4)的函数集合，其中 Q 是定义在 $\mathbb{R}^d$上的正定实二次型，$v \in \mathbb{C}^d$，且 $0 \neq c \in \mathbb{C}$。我们将 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d)$的元素称为复高斯函数，并以相应的方式定义 $\operatorname{dist}_p(f, \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d))$。

记号。 假设 $\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p})$ 具有有限性，我们将 $\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{f})$ 定义为

$$\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{f}) = \frac{\left| \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m f_j \circ B_j \right|}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}}} \tag{1.7}$$

对于满足 $f_j \in L^{p_j}$ 和 $\|f_j\|_{L^{p_j}} > 0$ 的任意元组 $\mathbf{f} = (f_j : 1 \le j \le m)$，对每个 j均成立。

因此，$\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{f}} \mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{f})$，其中上确界取遍所有这类复值元组 $\mathbf{f}$。此外，Lieb 定理断言，对于每个 $\delta > 0$，存在一个由（正的中心）高斯函数组成的元组$\mathbf{f}$，使得 $\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{f}) \ge (1-\delta)\,\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p})$。

定义 1.1 （高斯稳定性）。 一个 Brascamp–Lieb 数据 $(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 称为**正高斯稳定的**，如果 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 具有有限性，并且对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\operatorname{dist}_{p_j}(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{R}_+}(d_j)) \le \varepsilon \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})} \tag{1.8}$$

对于每个 $1 \le j \le m$，只要非负函数 f_j 具有正的有限范数并满足

$$\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{f}) \ge (1-\delta)\,\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}). \tag{1.9}$$

类似地，若 $\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p})$ 有限，则称数据 $(\mathbf{B}, \mathbf{p})$ 是**复高斯稳定**的；并且对于任意$\varepsilon > 0$，都存在一个 $\delta > 0$，使得

$$\operatorname{dist}_{p_j}(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d_j)) \le \varepsilon \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})} \tag{1.10}$$

对于每个 $1 \le j \le m$，只要复值函数 f_j 具有正的有限范数并满足 (1.9)，就有

读者可以很快验证

$$\operatorname{dist}_{p_j}(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d_j)) = \operatorname{dist}_{p_j}(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{R}_+}(d_j)) \tag{1.11}$$

只要 f_j 非负，因此复高斯稳定性意味着正高斯稳定性。

近期，在估计伴随 Brascamp–Lieb 常数时，有人提出了刻画正高斯稳定的 Brascamp–Lieb 数据这一问题，见 [10, 问题 10。2] 研究表明，Young 卷积不等式的非端点情形具有复高斯稳定性，但对于更一般的数据，人们知之甚少。本文

在相当广泛——尽管远非全面——的情形下证明了高斯稳定性。事实上，我们将在复值函数的一般框架下证明以下定量稳定性结论。

定理 1.2（下述强化的 Brascamp–Lieb 不等式 L^2）。如果 $\mathrm{BL}(\mathbf{B}、\mathbf{p})$ 是有限的，并且对所有 j 都有 $1 < p_j < 2$，那么存在常数 $c_j = c$（p_j、d_j）> 0 使得

$$\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{f}) \le \mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p}) \prod_{j=1}^{m} \Big[1 - c_j \Big(\frac{\mathrm{dist}_{p_j}(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d_j))}{\|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}} \Big)^2 \Big] \tag{1.12}$$

对于所有由非零复值 $f_j \in L^{p_j}$（$\mathbb{R}^{d_j}$）函数组成的元组 $\mathbf{f} =$（f_j：$1 \le j \le m$）。

特别地，如果定理 1.2 的假设成立，如果每个 f_j 的范数都严格为正，并且 $\mathbf{f}$ 在 Brascamp–Lieb 不等式（1.6）中取等，那么对于每个 j 都有 $\mathrm{dist}^{p_j}(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d_j)) = 0$，因此，由于 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d_j)$ 是 $L^{p_j}\setminus\{0\}$的闭子空间，每个 f_j 几乎处处都等于一个复高斯函数。

将定理 1.2 的表述专门化到非负函数，且其中成立时，结论（1.12）变为 (1.11)

$$\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{f}) \le \mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p}) \prod_{j=1}^{m} \Big[1 - c_j \Big(\frac{\mathrm{dist}_{p_j}(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{R}_+}(d_j))}{\|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}} \Big)^2 \Big]. \tag{1.13}$$

推论 1.3。如果 $\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p})$ 有限，并且 $1 < p_j < 2$ 对每个 $1 \le j \le m$ 都成立，那么 $(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 是复高斯稳定的（因此也是正高斯稳定的）。此外，在这种情况下，(1.8)（因此 (1.10)）成立，其中 $\delta = C\varepsilon^2$，且常数 $C > 0$ 仅取决于指数 p_j 和维数 d_j。

自然会希望得到一个更强的结论：将各个 f_j 与高斯函数的接近程度，替换为 m-元组 $\mathbf{f} = (f_j : 1 \le j \le m)$ 与一个实现该不等式最优常数的高斯函数组的接近程度。下一个定理的证明将说明，有时可以在推论 1.3 的逐分量结论基础上，得到这类结论。

如果元组 $\mathbf{g}$ 满足 $0 < \|g_j\|_{p_j} < \infty$ 对每个指标 j 都成立，并且

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} g_j(B_j x)\, \mathrm{d}x \Big| = \mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p}) \prod_{j=1}^{m} \|g_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}, \tag{1.14}$$

也就是说，若 $\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p};\mathbf{g}) = \mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p})$。

回忆 [6]，若 $(\mathbf{B}, \mathbf{p})$ 满足 (1.2)，且 $\mathbb{R}^d$ 的每个非零真子空间 V 都严格次临界（即满足 (1.3)，且不等式严格成立），则称其为简单的。因此，任何简单的 Brascamp–Lieb 数据都具有有限的 Brascamp–Lieb 常数。[6], 确立了简单数据的一个关键特征：存在正的中心高斯极值函数，并且除齐次性和 (1.2) 所允许的缩放外，该极值函数唯一。

定理 *1.4.* 假设 (B, p) 是简单的，并且对每个指标 $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$，$p_j \in (1, 2)$。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意元组 $f = (f_j : 1 \le j \le m)$，若其由非负可测函数构成且满足 $BL(B, p; f) \ge (1 - \delta)\, BL(B, p)$，则存在一个由非负高斯函数构成的元组 $g = (g_j : 1 \le j \le m)$，它实现最优常数 $BL(B, p)$，并满足

$$\|f_j - g_j\|_{L^{p_j}} \le \varepsilon \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})} \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

$(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 是简单的这一假设并非必要条件。我们希望在后续工作中讨论更一般的 $(\mathbf{B},\mathbf{p})$。

注 1.5. 粗略地说，维数 d_j 相对较小且多重线性次数 m不是太高的数据，通常满足假设 $1 < p_j < 2$，这可由缩放条件 (1.2) 看出。例如，若 $d_1 = \cdots = d_m = 1$ 且 $p_1 = \cdots = p_m = p := d^{-1}m$，则对于线性映射$B_1, \dots, B_m$ 的一般选取，只要 $m \geq d$，BL(**B**, **p**) 就是有限的；这可由 H¨older 不等式结合富比尼定理推出。于是，只要 $d < m < 2d$，定理 1.2 的假设就得到满足。如果 $m = d$ 或 $m = 2d$，则定理 1.2 的结论很容易看出会失效。在第一种情形，即对应于 $p = 1$ 的情形，相关的 Brascamp–Lieb 不等式归结为富比尼恒等式，而对于该恒等式，(1.12) 会极其严重地失效。在第二种情形，即对应于 $p = 2$ 的情形，一个反例由一维柯西–施瓦茨不等式的 d 个副本的乘积给出；另见下文注 3.2 和注 3.7。

注 1.6. Brascamp–Lieb 不等式通常也可等价地表述为对非负函数成立：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(B_j x)^{q_j}\,\mathrm{d}x \leq \widetilde{\mathrm{BL}}(\mathbf{B},\mathbf{q}) \prod_{j=1}^m \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_j}} f_j\Big)^{q_j}, \tag{1.15}$$

其中指数为 $0 \leq q_j \leq 1$。显然，令 $q_j = 1/p_j$并对每个 j将（非负）函数 f_j 替换为 $f_j^{p_j}$，即可得到 (1.1)，其中 BL(**B**,**q**) =BL(**B**, **p**）。在此情形下，相应的正高斯稳定性概念（例如参见 [10, 定义 7.1]）如下：给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\mathrm{dist}_1(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{R}}(d_j)) \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{d_j}} f_j$$

对每个 j，只要

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m f_j(B_j x)^{q_j}\,\mathrm{d}x \geq (1-\delta)\,\widetilde{\mathrm{BL}}(\mathbf{B},\mathbf{q}) \prod_{j=1}^m \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_j}} f_j\Big)^{q_j}.$$

容易验证，这一（实）高斯稳定性概念与定义 1.1 中的概念一致，因此定理 1.2 表明，只要 BL(**B**,**q**) 有限，且对所有 j，$\frac{1}{2} < q_j < 1$，就具有这种稳定性。

注记 1.7。上述实高斯稳定性概念的一种变体见于 [11]，的猜想 2.2，其中针对 L^p 赝球的体积不等式建立了稳定性结果。

注记 1.8。对于泛函 $(f_j) \mapsto \int \prod_j (f_j \circ B_j)$ 的相关稳定性问题，在输入函数 f_j 限定为集合的示性函数时，已有若干研究针对某些数据 $(B_j : 1 \leq j \leq m)$ 进行了探讨，其中包括 [13, 14, 15, 19, 20, 21, 22]。

2. Proof of Theorem 1.2

定理 1.2 是 Brascamp–Lieb 常数的某种傅里叶不变性与尖锐 Hausdorff–Young 不等式的稳定形式相结合的直接推论。我们先讨论前者，其中涉及傅里叶–*Brascamp–Lieb* 常数 $\widehat{\mathrm{BL}}$(**B**,**p**)，它定义为傅里叶–Brascamp–Lieb 不等式的最优常数

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(B_j x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq \widehat{\mathrm{BL}}(\mathbf{B},\mathbf{p}) \prod_{j=1}^m \|\widehat{f_j}\|_{L^{p_j'}(\mathbb{R}^{d_j})} \quad \forall\, f_j \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{d_j}), \tag{2.1}$$

其中，$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ 表示定义域为 $\mathbb{R}^n$ 的所有复值 Schwartz 函数的类，而 p' 表示与 p 共轭的指数。关于一般 Brascamp–Lieb 数据情形下这一结果的起源，请参阅 [5]，以及较近期的 [9, 8]。

引入常数

$$\mathbf{A}_p = \Big(\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}}\Big)^{1/2}.$$

定理 2.1（Brascamp–Lieb 常数的傅里叶不变性 [5]）。对于任意 *Brascamp–Lieb* 数据 $(\mathbf{B}, \mathbf{p})$，

$$\widehat{\mathrm{BL}}(\mathbf{B},\mathbf{p}) = \mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p}) \cdot \prod_{j=1}^{m} \mathbf{A}_{p_j}^{-d_j}.$$

为证明定理 1.2，相关的观察是：如果 $p_j \le 2$ 对所有 j 都成立，那么根据 Beckner 的尖锐 Hausdorff–Young 不等式

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \le \mathbf{A}_p^d \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \tag{2.2}$$

该不等式对所有 $1 \le p \le 2$ ([3, 4]) 均成立，因此 (1.1)（或等价地，(1.6)）可以加强为

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(B_j x)\,\mathrm{d}x \Big| \le \mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p}) \prod_{j=1}^{m} \mathbf{A}_{p_j}^{-d_j} \|\widehat{f_j}\|_{L^{p_j'}(\mathbb{R}^{d_j})}. \tag{2.3}$$

接下来我们回顾尖锐 Hausdorff–Young 不等式 (2.2) 的稳定形式。

定理 2.2（稳定 Hausdorff–Young 不等式 [18]）。对于每个 $p \in (1, 2)$ 都存在 $c = c(p, d) > 0$ 使得

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \le \mathbf{A}_p^d \Big[1 - c\Big(\frac{\mathrm{dist}_p(f, \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d_j))}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}\Big)^2\Big] \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

对所有非零的 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$。

定理 1.2 的证明。 由于 $p_j \in (1,2)$，定理 2.2 给出一个常数 $c_j = c_j(p_j, d_j) > 0$，使得

$$\|\widehat{f_j}\|_{L^{p_j'}(\mathbb{R}^d)} \le \mathbf{A}_{p_j}^{d_j} \Big[1 - c_j\Big(\frac{\mathrm{dist}_{p_j}(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d_j))}{\|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}}\Big)^2\Big] \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}$$

对每个 $1 \le j \le m$ 都成立。定理现在由 (2.3) 得出。 □

推论 1.3 的证明。 设 $\mathbf{f}$ 是一个由 $\mathbb{C}$ 值函数组成的元组，满足 $0 < \|f_j\|_{L^{p_j}} < \infty$。将推论的假设 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{f}) \ge (1-\delta)\,\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 与结论

$$\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{f}) \le \mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p}) \prod_{j=1}^{m} \Big[1 - c_j\Big(\frac{\mathrm{dist}_{p_j}(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d_j))}{\|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}}\Big)^2\Big]$$

定理 1.2 的

$$\sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\mathrm{dist}_{p_j}(f_j, \mathfrak{G}_{\mathbb{C}}(d_j))}{\|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}}\Big)^2 \le C\delta,$$

这只是用 $\delta \asymp \varepsilon^2$ 重新表述了已公布的结论。 □

3. Remarks and examples

以下五点说明有助于将我们的结果置于适当的背景中，并界定未来可能拓展的范围。

注 3.1。对于非负函数的 Brascamp–Lieb 不等式 (1.1) f_j，它与对 L^{p_j} 中复值函数的扩展 (1.6) 显然是等价的；然而，刻画非负输入的极值函数和近极值函数的结果，并不能推出复值输入的相应结果。例如，对于与 Gowers–Host–Kra 范数相关的多线性形式，非负的最大化元组是高斯函数，而

复值最大化元组则包含振荡因子 e^{iP}，其中 P 是实值多项式；当多重线性次数变得任意高时，这些多项式的次数也可以任意高。Neuman [24] 已经获得了针对 Gowers–Host–Kra 范数的 $\mathbb{C}$-值近极值函数的稳定性结果。关于这一点，另请参见注 3.7。

注 3.2. 对于指数 $p_j \in [2,\infty)$，若不增加额外假设，高斯稳定性并不成立，即使输入为非负输入也是如此。事实上，对于任意 $m \geq 2$ 以及满足 $\sum_{j=1}^m p_j^{-1} = 1$ 的任意指数$p_j \in (1,\infty)$，都存在非负元组 (f_j)，使得 H¨older 不等式取等号

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m f_j(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}$$

且其中没有任何函数 f_j 在 L^{p_j} 范数下接近高斯函数。另一方面，对于某些属于 $[2,\infty)$ 的指数，高斯稳定性确实成立。事实上，对于对应于 Young 卷积不等式的 Brascamp–Lieb 数据，在所有非端点情形下的高斯稳定性已在 [16, 17] 中得到证明。

注 1.5 中的简单例子进一步说明，若将定理 1.2 的表述中条件 $\mathbf{p} \in (1,2)^m$ 替换为 $\mathbf{p} \in [1,2)^m$ 或 $\mathbf{p} \in (1,2]^m$，正高斯稳定性可能不成立。

注记 3.3. 定理 1.2 及其推论中的陈述将 f_j 到 $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ 的射影距离提升到 2 次方，这一幂次是最佳的，下一命题将说明这一点。

命题 3.4. 不存在可由高斯函数取到极值的 *Brascamp–Lieb* 数据$(\mathbf{B},\mathbf{p})$，使得(1.13)，进而(1.12)，在射影距离的幂次小于2时成立。

对于 Young 卷积不等式这一特例，[17] 已证明了这一点。

证明。固定一个由高斯函数构成的极值元组 (g_j)，再取一个由非零紧支撑光滑函数构成的元组 (h_j)，并考虑由 (g_j) 的归一化扰动构成的单参数族 $(f_{t,j})$：

$$f_{t,j} = (g_j + th_j)/\|g_j + th_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}.$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{dist}_{p_j}(f_{t,j}, \mathfrak{G}_{\mathbb{R}_+}(d_j))}{\|f_{t,j}\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}} \gtrsim |t|$$

对于每个 $1 \leq j \leq m$，在 $t = 0$ 的某个邻域内成立。接下来我们注意到该函数 n

$$u(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m f_{t,j}(B_j x)\mathrm{d}x$$

是光滑的，并且满足 $u(0) = \mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 以及 $u'(0) = 0$。假若 (1.13) 在（射影）距离的幂等于 r时成立，则将推出

$$u(t) - u(0) - tu'(0) \leq -c\,\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})|t|^r$$

对某个常数 $c > 0$。然而，由于 $u \in C^2(\mathbb{R})$，若$r < 2$，则当 t 足够小时这必然不成立。□

注记 3.5. 若某个 $p_k > 2$，则 (1.12) 不能在 $\mathrm{dist}_{p_k}(f_k, \mathfrak{G}_{\mathbb{C}})$ 升至 2 次幂时成立：

命题 3.6. 假设 $(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 是高斯可极值化的。若 $p_k > 2$ 对某个 k成立，则 (1.12)，从而 (1.13)，对任意正常数序列c_j都不成立。

对于 Young 卷积不等式的特殊情形，这一点已在 [16] 中得到观察。

命题 *3.6* 的证明。 由 (1.12) 和 (1.13) 中射影距离的线性不变性，结合高斯可极值数据等价于几何数据这一事实（见 [6]），只需对几何数据证明命题 3.6——也就是说，对于满足 $B_jB_j^* = I$ 的每个 j 的数据，并满足框架条件

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^{-1} B_j^* B_j = I. \tag{3.1}$$

回顾一下，对于这类数据，$\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p}) = 1$；例如参见 [6]。现在假设 (1.13) 对某个 $p_1 > 2$ 成立，并令 $g_j : \mathbb{R}^{d_j} \to \mathbb{R}_+$ 由 $g_j(x) = e^{-\pi|x|^2/p_j}$ 对每个$1 \le j \le m$给出；这些量的选取恰好使得 $\|g_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})} = 1$。由于数据组 $(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 是几何的，元组 (g_j) 是一个极值元。接下来，对于一个光滑紧支撑函数 $\varphi\colon \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}_+$，令

$$f_1 = g_1 + \delta\varphi(x - t(\delta)v)$$

并且当 $1 < j \le m$ 时 $f_j = g_j$；这里 $\delta > 0$ 是一个小参数，v 是 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中的非零元素，而函数 $t(\delta) \to \infty$ 当 $\delta \to 0$ 时按如下方式变化：

$$\frac{t(\delta)}{\log(1/\delta)} \to \infty. \tag{3.2}$$

由此增长性可知

$$\|f_1\|^{p_1}_{L^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})} = 1 + O(\delta^{p_1}).$$

此外，由 (3.1) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{m} f_j(B_j x)\mathrm{d}x = 1 + \delta \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi Q(x)} \varphi(x - t(\delta)v)\mathrm{d}x,$$

其中

$$Q(x) = \sum_{j=2}^{m} |B_j x|^2/p_j = \Big\langle \sum_{j=2}^{m} p_j^{-1} B_j^* B_j x, x \Big\rangle.$$

由于 $p_1 > 1$ 和 $B_1^* B_1$ 是一个投影，由 (3.1) 可知 Q 是正定的；再次利用 (3.2)，我们得出

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{m} f_j(B_j x)\,\mathrm{d}x}{\prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}} = 1 + O(\delta^{p_1}).$$

这与 (1.13) 矛盾，因为 $p_1 > 2$ 和

$$\frac{\mathrm{dist}_{p_1}(f_1, \mathfrak{G}_{\mathbb{R}_+}(d_1))}{\|f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})}} \gtrsim \|f_1 - g_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})} \gtrsim \delta.$$

□

注 3.7。 当因子数量 m 过大时，关于复值极值函数的一般理论往往会偏离关于非负极值函数的理论。为说明这一点，令 $d \ge 2$ 和 $m > d$。设 $v_1, \ldots, v_m$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的元素，其中任意 d 个元素均线性相关。定义 $B_j\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ 为 $B_j(x) = \langle x, v_j\rangle$ 对每个指标 j。令 $\mathbf{p} = (p_j)$，其中对所有 $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ 都有 $p_j = m/d$。则 $(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 是简单的，因此存在一个正高斯极值函数。

事实上，对于 $\mathbb{R}^m$ 的每个非零真子空间，条件 (1.3) 均以严格不等式成立。为验证这一点，考虑任意一个维数为 $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ 的子空间 $V \subset \mathbb{R}^d$。

对于任意指标 j，$\dim(B_j(V)) = 1$，除非 $v_j \in V^\perp$。线性无关假设保证此类指标 j 的数量不超过 $\dim(V^\perp) = d-k$。因此

$$\sum_j p_j^{-1} \dim(B_j(V)) \geq dm^{-1} \cdot (m-(d-k)).$$

对于 $k<d$，该量为 $>k$，因为当 $k=d$ 时它等于 k，且其关于 k 的导数等于 $d/m<1$。

取一个高斯极值函数 $\mathbf{g} = (g_j)$，其中每个 $g_j > 0$。令 $a_j \in \mathbb{R}$ 为待定量，并对每个 j 定义

$$f_j(y) = g_j(y)\, e^{ia_j y^n} \quad \text{for all } y \in \mathbb{R}^1.$$

当且仅当 $\sum_j a_j \langle x, v_j\rangle^n = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^d$ 时，$\mathbf{BL(B, p; f)} = \mathbf{BL(B, p)}$。

现在选取 $n=2$。映射

$$\mathbf{a} = (a_j : j \in \{1,2,\dots,m\}) \mapsto \sum_j a_j \langle x, v_j\rangle^2$$

是一个从维数为 m 的实向量空间到所有实值齐次多项式构成的向量空间的实线性映射，$P:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 次二次多项式（在本讨论中，将 0 视为二次多项式）。后一个向量空间的维数为 $d(d+1)/2$。因此，若 $m > d(d+1)/2$，则存在一个 $\neq 0$ 满足 $\sum_j a_j \langle x, v_j\rangle^2 = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^d$。那么 $\mathbf{f}$ 是相应 Brascamp–Lieb 泛函的极值元，但不是复值情形下定理 1.2 意义上的复高斯函数元组。

当 $d=2$ 且对于所有 j 都有 $m=4$, $p_j = m/d = 2$ 时，该例恰好处于定理 1.2 所适用范围的边界上。通过取直和，可以得到对任意 $d \in 2\mathbb{N}$ 都满足 $m=2d$ 和 $p_j = 2$ 的例子。

同样的推理也适用于任意 $n \geq 3$，但对于每个 d，都需要相应更大的m。

4. Stability for tuples; proof of Theorem 1.4

根据定理 1.2，只需在函数 f_j 全部为正高斯函数的特殊情形下证明定理 1.4。下面的引理断言了更强的结论：对于正高斯输入，稳定性结论对任意指数 $p_j \in (1,\infty)$ 都成立，而不仅仅对 (1,2) 中的指数成立。

引理 *4.1.* 假设 *BL(B, p)* 有限，*(B, p)* 是简单的，并且对于每个指标 $j \in \{1,2,\dots,m\}$ 都有 $p_j \in (1,\infty)$。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于任何满足 *BL(B, p; f)* $\geq (1-\delta)$ *BL(B, p)* 的正高斯函数元组 $f = (f_j :\ 1 \leq j \leq m)$，都存在一个实现最优常数 *BL(B, p)* 的正高斯函数元组 $g = (g_j :\ 1 \leq j \leq m)$，并且满足

$$\|f_j - g_j\|_{L^{p_j}} \leq \varepsilon \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})} \ \forall\, j \in \{1,2,\dots,m\}.$$

证明。设 $(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 是简单的。正如 [6], 所示，可以通过对 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{R}^{d_j}$ 作线性变量变换，将问题化归为几何情形；在该情形下，对于每个指标 j，$B_j B_j^*$ 等于 $\mathbb{R}^{d_j}$ 上的恒等算子，而 $\sum_j p_j^{-1} B_j^* B_j$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的恒等算子。

我们先讨论中心高斯情形。记 $\langle\cdot\rangle$ 为任意 n 上的欧几里得内积。称对称线性映射 $A:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足以下条件：$\langle A_j y,\ \ y'\rangle = \langle y,\ \ A_j y'\rangle$ 对所有 $y,\ y' \in \mathbb{R}^n$ 均成立。

对于每个指标 j，令 $A_j : \mathbb{R}^{d_j} \to \mathbb{R}^{d_j}$ 为一个正定对称线性变换。所有此类元组 $\mathbf{A} = (A_j :\ j \in \{1,2,\dots,m\})$ 的集合，都可以通过使用相对于 $\mathbb{R}^{d_j}$ 的任意固定正交规范基下的矩阵元素作为坐标，将其视为欧几里得空间的一个子集。我们将所有此类 $\mathbf{A}$ 视为一个拓扑空间，赋予其由该嵌入诱导的相对

拓扑。我们用 $\det(A)$ 表示相对于相关正交规范基表示 A 的矩阵的行列式。

考虑任意一个中心形式的输入元组 $\mathbf{f}=(f_j)$

$$f_j(y) = e^{-\langle A_j y, y\rangle} \ \forall\, y \in \mathbb{R}^{d_j} \ \forall\, j, \tag{4.1}$$

其中 A_j 对称且正定。将 Brascamp–Lieb 不等式写成等价形式 (1.15)，其中 $q_j = 1/p_j$。因此 $f_j(B_j)^{q_j}(x) = e^{-\langle q_j B_j^* A_j B_j x,\ x\rangle}$ 并且

$$\prod_{j=1}^m f_j^{q_j}(B_j(x)) = e^{-\langle M_{\mathbf{A}} x, x\rangle}$$

其中

$$M_{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^m q_j B_j^* A_j B_j \tag{4.2}$$

是一个半正定对称 $d\times d$ 矩阵。

$\mathrm{BL}(\mathbf{B},\ \mathbf{p})$ 的有限性意味着 $\bigcap_{j=1}^m \mathrm{nullspace}(B_j) = \{0\}$，因此在 (4.2) 中定义的矩阵 $M_{\mathbf{A}}$ 是正定的，而不只是半正定的。定义拓扑空间 $\mathcal{T}$为所有正定对称矩阵元组 $\mathbf{A} = (A_j:\ 1\le j\le m)$ 的集合，其中 $\det(M_{\mathbf{A}})=1$，并赋予其相对拓扑。

当 $\mathbf{f}$ 取中心正高斯形式 (4.1) 时，我们也用 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{f})$ 表示量 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{A})$。我们将利用如下表达式

$$\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{A}) = \det(M_{\mathbf{A}})^{-1/2}\prod_j \det(A_j)^{q_j/2}, \tag{4.3}$$

它可化简为 $\prod_j \det(A_j)^{q_j/2}$，其中 $\mathbf{A}\in\mathcal{T}$。

对于 $r\in(0,\infty)$，我们将 $r\mathbf{A}=(rA_j)$ 记作。量 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{A})$ 具有如下缩放对称性

$$\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{A}) = \mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};r\mathbf{A}) \ \text{ for all } r\in(0,\infty) \text{ and all } \mathbf{A}. \tag{4.4}$$

该关系由缩放条件 (4.3) 与 (1.2) 推出，而 (1.2) 是 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 有限性的必要条件。由于 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 是简单的，根据 [6] 的推论 9.2，存在一个中心高斯极大化函数，且除缩放对称性外它是唯一的。因此，存在唯一的中心高斯极大化函数 $\mathbf{A}_*$，满足 $\det(M_{\mathbf{A}_*})=1$。

断言。 对每个 $\eta>0$，所有满足 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{A})\ge\eta$ 的正定对称矩阵元组 $\mathbf{A}$ 构成的集合 $\mathcal{T}_\eta$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个紧子集。

证明该断言。任取$\mathbf{A}\in\mathcal{T}$，并将 $M_{\mathbf{A}}$ 的特征值按降序记为 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_d>0$。[6] 中命题 5.2 的证明表明，存在 $r>0$ 和 $C<\infty$，它们取决于（$\mathbf{B}$，$\mathbf{p}$），使得对任意$\mathbf{A}$，

$$\prod_{j=1}^m (\det(A_j))^{q_j} \le C\det(M_{\mathbf{A}})(\lambda_d/\lambda_1)^r.$$

因此，对任意 $\delta>0$，$\mathrm{BL}(\mathbf{B},\ \mathbf{p};\mathbf{A}) \le C^{1/2}\delta^{r/2}$，除非 $\lambda_d/\lambda_1\ge\delta$。结合这一结论与归一化条件 $\det(M_{\mathbf{A}})=1$，可知对每个 $\eta>0$，都存在$C'<\infty$，使得对于每个$\mathbf{A}\in\mathcal{T}_\eta$，$M_{\mathbf{A}}$ 的最大特征值满足 $\lambda_1\le C'$。

令 $\eta>0$ 任意，并考虑任意的 $\mathbf{A}\in\mathcal{T}_\eta$。由于每个 $B_jB_j^*$ 都等于恒等矩阵，$\mathrm{trace}(M_{\mathbf{A}}) = \sum_j q_j\mathrm{trace}(A_j)$。由于 A_j 的所有特征值均非负，因此 A_j 的每个特征值都被 $dq_j^{-1}\lambda_1\le dq_j^{-1}C'<\infty$ 控制。因此存在 $C''<\infty$，使得对于任意 $\mathbf{A}\in\mathcal{T}_\eta$ 和任意指标 j，A_j 的所有特征值都落在 $(0,C'']$ 内。因此 $\det(A_j)$ 同样被一个正常数控制。由 (4.3) 可知，对于所有 $\mathbf{A}\in\mathcal{T}_\eta$，$\mathrm{BL}(\mathbf{B},\ \mathbf{p};\mathbf{A}) = O(\max_j \det(A_j)^{q_j/2})$ 一致成立。这意味着存在一个严格

为正的一致下界，使得对于所有 $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_\eta$，$\det(A_j)$ 均不小于该下界；此外，结合 A_j 所有特征值的上界，可知 A_j 的所有特征值均有一个严格为正的一致下界。由 $\mathbb{R}^d$ 的所有可能正交归一标架构成的空间的紧性可知，$\mathcal{T}_\eta$ 是紧的。□

选取 $0 < \eta < \mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})$，使得满足 $\det(M_{\mathbf{A}}) = 1$且属于 $\mathcal{T}_\eta$ 的唯一最大化元 $\mathbf{A}_*$。由于 $\mathcal{T}_\eta$是紧的，函数 $\mathbf{A} \mapsto \mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p};\mathbf{A})$ 是连续的，并且 $\mathbf{A}_*$ 是 $\mathcal{T}_\eta$中的唯一最大化元，因此对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得任何满足 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{A}) > (1-\delta)\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})$ 的 $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_\eta$ 都满足 $|\mathbf{A} - \mathbf{A}_*| < \varepsilon$。如果选取 δ，使其还满足 $(1-\delta)\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}) > \eta$，那么不存在 $\mathbf{A} \in \mathcal{T}\backslash\mathcal{T}_\eta$ 满足 $\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p};\mathbf{A}) > (1-\delta)\mathrm{BL}(\mathbf{B},\mathbf{p})$。根据缩放对称性 (4.4)，这就完成了对中心高斯输入的分析。

接下来，考虑一般的非负高斯输入，不必以原点为中心。定义$V \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_m}$ 为由所有满足以下条件的线性子空间组成的集合：对于某个 $x \in \mathbb{R}^d$，有 $v_j = B_j(x) \ \forall j$，其中 $\mathbf{v} = (v_j : j \in \{1, 2, \ldots, m\})$。

任意非负高斯输入都可以表示为以下形式

$$f_j(y) = c_j e^{-\langle A_j(y-v_j),\, y-v_j\rangle} \tag{4.5}$$

其中 $c_j > 0$、$v_j \in \mathbb{R}^{d_j}$ 和 A_j 均为对称正定的。$\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{f})$ 以及不等式中的射影距离，在将 f_j 乘以取决于 j 的正常数时均保持不变，因此不失一般性，可假设对于每个 j 都有 $c_j = 1$。通过配方，$F(x) = \prod_{j=1}^m f_j(B_j x)^{q_j}$随后可以表示为以下形式

$$F(x) = ce^{-\langle M_{\mathbf{A}}(x-\overline{x}),(x-\overline{x})\rangle} \tag{4.6}$$

其中

$$\overline{x} = M_{\mathbf{A}}^{-1} \sum_{j=1}^m q_j B_j^* A_j v_j \quad \text{and} \quad c = \prod_{j=1}^m e^{-q_j\langle A_j(B_j(\overline{x})-v_j),\, B_j(\overline{x})-v_j\rangle} \le 1.$$

定义 $g_j(y) = e^{-\langle A_j y,\ y\rangle}$ 后，我们得到

$$\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{f}) = c\,\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{g}). \tag{4.7}$$

因此，如果$\mathbf{f}$ 是极值元，那么 $c = 1$。当且仅当 c 的乘积表达式中的每个因子都等于 1 时，这一条件成立；也就是说，当且仅当对于每个 j都有 $v_j = B_j(x)$，从而$\mathbf{v} \in V$。

此外，根据（4.7），$\mathbf{f}$ 是极值元，当且仅当 $c = 1$ 且$\mathbf{g}$ 是极值元。因此，形如（4.5）的非负高斯输入$\mathbf{f}$ 是极值元，当且仅当$\mathbf{A}$是$\mathbf{A}_*$ 的标量倍数，并且$\mathbf{v} \in V$。

现在令 $\varepsilon > 0$ 为任意值，并考虑任意一个形如（4.5）的正高斯数据$\mathbf{f}$，其满足 $\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{f}) \ge (1-\varepsilon)\,\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p})$。令$\mathbf{g}$为如上与$\mathbf{f}$相关联的中心高斯数据。再令$\mathbf{g}_*$ 为满足 $\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p};\mathbf{g}_*) = \mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p})$的非负中心高斯输入，并令其相关的$A_{*,j}$ 以及$\mathbf{A}_*$。根据缩放对称性，不妨设 $\det(M_{\mathbf{A}}) = \det(M_{\mathbf{A}_*}) = 1$。

由（4.7），

$$\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{g}) \ge \mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{f}) \ge (1-\varepsilon)\,\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}).$$

因此，将上文证明的中心高斯数据结果应用于$\mathbf{g}$，我们可以得出结论：对于每个指标 j，$\|A_j - A_{*,j}\| < \delta_1(\varepsilon)$，其中 $\delta_1(\varepsilon) \to 0$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时。

特别地，如果 ε 足够小（我们可以作此假设），那么对每个 $y \in \mathbb{R}^{d_j}$，以及每个指标 j，都有 $\langle A_j y, y\rangle \ge \frac{1}{2}\langle A_{*,j} y, y\rangle$。现在

$$\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{f}) \le c\,\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}; \mathbf{g}) \le c\,\mathrm{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{p}),$$

其中 c 由某个元素 $x \in \mathbb{R}^d$ 通过 (4.6) 定义，因此满足

$$\ln(c) \leq -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} q_j \langle A_{*,j}(B_j(\overline{x}) - v_j),\, B_j(\overline{x}) - v_j\rangle.$$

正量 $\sum_{j=1}^{m} q_j \langle A_{*,j}(B_j(x) - v_j)\ \ B_j(x)\ \ - v_j\rangle$ 有一个下界，该下界是到 $\mathbf{v}$ 与 V 之间距离平方的常数倍，其中常数因子仅取决于 $(A_{*,j}\ \ v\ \ c\ \ \mapsto)$。剩下的只需利用映射 $(A_{*,j}) : \mathrm{Symm}_+(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 的连续性。 □

References

[1] K. M. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, 《泛函分析的几何方面》，J. Lindenstrauss 和 V. D. Milman 编，《数学讲义》1376，Springer，海德堡，1989 年，第 251–260 页。[2] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp–Lieb inequality*, 《数学发明》134（1998），335–361。[3] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis on* $\mathbb{R}^n$, 《美国国家科学院院刊》72（1975）638–641。[4] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, 《数学年刊》102（1975）159–182。[5] J. Bennett、N. Bez、S. Buschenhenke、M. G. Cowling、T. C. Flock, *On the nonlinear Brascamp–Lieb inequality*, 《杜克数学杂志》**169** 2020 17, 3291 3338（），第 – 期。[6] J. Bennett、A. Carbery、M. Christ、T. Tao, *The Brascamp–Lieb inequality: finiteness and extremals structure*, 《几何与泛函分析》**17** 2008 1343 1415（），–。[7] J. Bennett、A. Carbery、M. Christ、T. Tao, *Finite bounds for Hölder–Brascamp–Lieb multilinear inequalities*, 《数学研究快报》**17** 2005 647 666（），–。[8] J. Bennett、M. G. Cowling, *Brascamp–Lieb inequalities on locally compact abelian groups*, arXiv:2412.11514。[9] J. Bennett、E. Jeong, *Fourier duality in the Brascamp–Lieb inequality*, 《剑桥哲学学会数学会刊》173（2022），387–409。[10] J. Bennett、T. Tao, *Adjoint Brascamp–Lieb inequalities*, 《伦敦数学学会会刊》129（2024），e12633。[11] K. J. B ¨ ¨ oroczy、F. Fodor、D. Hug, *Strengthened volume inequalities for* L_p *zonoids of even isotropic measures*, 《美国数学会汇刊》**371** 2019 1, 505 548（），第 – 期。[12] H. Brascamp、E. Lieb, *Best constants in Young's inequality its converse and its generalization to more than three functions*, 《数学进展》**20** 1976 151 173（），–。[13] M. Christ, *A sharpened Riesz-Sobolev inequality*, arXiv:1706.02007。[14] M. Christ, *Near equality in the Riesz-Sobolev inequality*, 《数学学报》（英文版）35（2019 6, 783 814），第 – 期。M. Christ, *Subsets of Euclidean space with nearly maximal Gowers norms*[15] 《数学学报》（英文版）35 2019 6, 771 782（），第 – 期。M. Christ, *Near-extremizers of Young's inequality for Euclidean groups*, 《伊比利亚美洲数学评论》35（2019），第 7 期，1925–1972。[17] M. Christ, *Young's inequality sharpened*。《调和分析的几何方面》，261–298。Springer INdAM 丛书，第 45 卷，2021。[18] M. Christ, *A sharpened Hausdorff–Young inequality*, arXiv:1406.1210。[19] M. Christ 和 M. Iliopoulou, *Inequalities of Riesz-Sobolev type for compact connected Abelian groups*, 《美国数学杂志》144 2022 5, 1367 1435（），第 – 期。[20] M. Christ、D. Maldague, *A symmetrization inequality shorn of symmetry*, 《美国数学会汇刊》373（2020），第 8 期，5997–6028。[21] M. Christ、K. O'Neill, *Maximizers of Rogers–Brascamp–Lieb–Luttinger functionals in higher dimensions*, arXiv: . 。[22] D. Ellis、E. Friedgut、G. Kindler、A. Yehudayoff, *Geometric stability via information theory*, 《离散分析》，2016:10。[23] E. H. Lieb, *Gaussian kernels have only Gaussian maximizers*, 《数学发明》102（1990），179–208。[24] A. M. Neuman, *Functions of nearly maximal Gowers–Host–Kra norms on Euclidean spaces*, 《几何分析杂志》30（2020），第 1 期，1042–1099。

Jonathan Bennett, School of Mathematics, University of Birmingham, Edgbaston, B152TT, UK*Email address*: j.bennett@bham.ac.uk

Michael Christ, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA94720-3840*Email address*: mchrist@berkeley.edu