arXiv:2601.05559v1 [math.DG] 9 Jan 2026

奇数维中的二变量椭圆属

Yong Wang

Abstract. Ping Li 引入了一种几乎复流形上的双变量椭圆属，并确立了它的各种性质。本文定义了奇数维自旋流形上的一种双变量椭圆属，它是某个 Toeplitz算子的指标，也是一种全纯的 $SL(2,\ Z)$-Jacobi形式。我们还定义了几乎复流形和奇数维自旋流形上的若干双变量椭圆属，它们是全纯的 $\Gamma_0(2)$、 $\Gamma^0(2)$、 Γ_θ-Jacobi形式。借助这些 Jacobi 形式，我们可以得到一些 $SL(2,\ \mathbf{Z})$ 和 $\Gamma^0(2)$ 模形式。利用这些 $SL(2,\ \mathbf{Z})$ 和 $\Gamma^0(2)$ 模形式，我们为几乎复流形和奇数维自旋流形得到了一些有趣的反常抵消公式。作为推论，我们得到全纯欧拉特征数和 Toeplitz算子的指标的一些整除性结果。此外，我们还定义了偶数维（分别为奇数维）流形上的其他一些双变量椭圆属，它们是亚纯的 $\Gamma_0(2)$、 $\Gamma^0(2)$、 Γ_θ-Jacobi形式。

1. Introduction

对于任意紧自旋流形，都可以定义其椭圆属。它是关于一个变量、相对于 2 级同余子群的模形式。对于紧复流形，可以将其椭圆属定义为关于两个复变量的函数。在后一种情况下，椭圆属是一个带有向量丛系数的形式幂级数的全纯欧拉示性数。如果复流形的第一陈类等于零，那么椭圆属就是弱 Jacobi 形式。在 [7], Li 将几乎复流形的椭圆属扩展为一个扭曲版本，其中涉及一个额外的复向量丛。在某些条件下，Li 证明了这个椭圆属是弱 Jacobi 形式。在 [12], 我们扩展了 Li 的椭圆属，并证明这种广义椭圆属不是弱 Jacobi 形式，而将其称为广义 Jacobi 形式。此外，借助这种广义 Jacobi 形式，我们得到了若干新的 $SL(2,\mathbb{Z})$ 模形式。在 [3], Gritsenko 定义了任意紧复流形上全纯向量丛的修正 Witten 属，或椭圆属的自守修正，并构造了一个新对象 $\hat{}A_2^{(2)}$ -属。此外，Gritsenko 证明，在一定条件下，这个 $\hat{}A_2^{(2)}$ -属是弱 Jacobian 形式。在 [4], 我们扩展了 Gritsenko 的 $\hat{}A_2^{(2)}$ -属，并证明这种广义 $\hat{}A_2^{(2)}$ -属不是弱 Jacobian 形式，而是一种广义

2010 Mathematics Subject Classification: 58C20; 57R20;53C80.*Key words and phrases:* Toeplitz算子；双变量椭圆属；Jacobi形式；模形式；反常抵消公式。

Jacobian 形式。借助这种广义 Jacobi 形式，我们可以像 [12] 中那样得到若干新的 $SL(2,\mathbb{Z})$ 模形式。

另一方面，在 [8], 中，Liu 引入了一个 4k 维自旋流形的权为 2k 的模形式。在 [2], 中，Chen、Han 和 Zhang 为一个 $4k$维自旋流形定义了权为 $2k$ 的整模形式，并为一个 $4k+2$维自旋流形定义了权为 $2k$ 的整模形式。在 [10] 和 [11], 中，Liu和Wang通过研究某些特征形式的模不变性，得到了关于（$4k-1$）维流形的一些新的反常抵消公式。他们还推导出关于（$4k-1$）维自旋流形的若干整除性结果，以及关于（$4k-1$）维自旋^c 流形的同余关系。在 [5], 中，Guan、Wang和Liu分别通过 [9] 和 [2]中引入的 $SL(2,\mathbf{Z})$模形式，在奇数维情形下引入了定义在 $SL_2(\mathbf{Z})$上的权为 $2k$ 的一些模形式，以及定义在 $\Gamma^0(2)$和 $\Gamma_0(2)$上的权为 $2k$ 的一些模形式。与此同时，我们推导出了一些新的反常抵消公式，并在奇数维自旋流形和自旋^c 流形上得到了一些整除性结果。

因此，一个自然的问题是：如何为奇数维流形定义双变量椭圆属，并利用这一双变量椭圆属推导出一些新的反常抵消公式。在本文中，我们解决了这一问题，并为奇数维自旋流形定义了一个双变量椭圆属，它是 Toeplitz 算子的指标以及一个全纯的 $SL(2,Z)$-Jacobi形式。我们还为几乎复流形和奇数维自旋流形定义了一些双变量椭圆属，它们是全纯的 $\Gamma_0(2)$、 $\Gamma^0(2)$、 Γ_θ-Jacobi形式。通过这些 Jacobi形式，我们可以得到一些 $SL(2,\mathbf{Z})$ 和$\Gamma^0(2)$ 模形式。利用这些 $SL(2,\mathbf{Z})$ 和 $\Gamma^0(2)$ 模形式，我们为几乎复流形和奇数维自旋流形得到了若干有趣的反常抵消公式。作为推论，我们得到了全纯欧拉特征数和 Toeplitz 算子的指标的一些整除性结果。此外，我们还为偶数维（分别为奇数维）流形定义了其他一些双变量椭圆属，它们是亚纯的 $\Gamma_0(2)$、$\Gamma^0(2)$、 Γ_θ-Jacobi形式。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍本文将用到的一些定义和基本概念。第 3 节为奇数维自旋流形定义一种双变量椭圆属。利用这一 Jacobi 形式，我们可以得到奇数维自旋流形的一些有趣的反常抵消公式。第 4 节为几乎复流形和奇数维自旋流形定义一些双变量椭圆属，它们是全纯的 $\Gamma_0(2)$、 $\Gamma^0(2)$、 Γ_θ-Jacobi 形式。利用这些 Jacobi 形式，我们可以得到几乎复流形和奇数维自旋流形的一些有趣的反常抵消公式。第 5 节为偶数维（分别为奇数维）流形定义另外一些双变量椭圆属，它们是亚纯的 $\Gamma_0(2)$、$\Gamma^0(2)$、 Γ_θ-Jacobi 形式。

2. Characteristic Forms and Modular Forms

本节旨在回顾我们将要用到的特征形式和模形式方面的必要知识。

2.1 特征形式

设 M 是一个黎曼流形。设 ∇^{TM} 是 TM 上相应的 Levi-Civita联络，而 $R^{TM} = (\nabla^{TM})^2$ 是 ∇^{TM} 的曲率。令 $\widehat{A}(TM, \nabla^{TM})$ 由（参见 [13]）定义

$$\widehat{A}(TM, \nabla^{TM}) = \det{}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{\sqrt{-1}}{4\pi} R^{TM}}{\sinh(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi} R^{TM})} \right). \tag{2.1}$$

设 E、 F 是 M 上的两个厄米向量丛，分别带有厄米联络 ∇^E， ∇^F。设 $R^E = (\nabla^E)^2$（分别地， $R^F = (\nabla^F)^2$）是 ∇^E（分别地， ∇^F）的曲率。若令形式差为 $G = E - F$，则 G 以显然的方式带有诱导的厄米联络 ∇^G。我们将相应的陈特征形式定义为

$$\mathrm{ch}(G, \nabla^G) = \mathrm{tr}\left[\exp(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^E)\right] - \mathrm{tr}\left[\exp(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^F)\right]. \tag{2.2}$$

对于任意复数 t，令

$$\wedge_t(E) = \mathbf{C}|_M + tE + t^2 \wedge^2 (E) + \cdots, \ S_t(E) = \mathbf{C}|_M + tE + t^2 S^2(E) + \cdots$$

分别表示 E 的全外幂和对称幂，它们属于 $K(M)[[t]]$。这些运算满足以下关系，

$$S_t(E) = \frac{1}{\wedge_{-t}(E)}, \ \wedge_t(E - F) = \frac{\wedge_t(E)}{\wedge_t(F)}. \tag{2.3}$$

此外，若 $\{\omega_i\}, \{\omega'_j\}$ 分别是厄米向量丛 E, F的形式陈根，则

$$\mathrm{ch}(\wedge_t(E)) = \prod_i (1 + e^{\omega_i} t) \tag{2.4}$$

那么陈特征形式满足以下公式，

$$\mathrm{ch}(S_t(E)) = \frac{1}{\prod_i (1 - e^{\omega_i} t)}, \ \mathrm{ch}(\wedge_t(E - F)) = \frac{\prod_i (1 + e^{\omega_i} t)}{\prod_j (1 + e^{\omega'_j} t)}. \tag{2.5}$$

若 W是 M上的实欧几里得向量丛，且带有欧几里得联络 ∇^W，那么其复化 $W_{\mathbf{C}} = W \otimes \mathbf{C}$ 是 M 上的复向量丛，并带有由 W的度量自然诱导的厄米度量，以及由 ∇^W诱导的厄米联络 $\nabla^{W_{\mathbf{C}}}$。若 E是 M上的向量丛（复或实），则令 $E = E - \mathrm{dim} E$in $K(M)$ 或 $KO(M)$。

2.2 若干性质 ies ab出 t he Jacobi theta functi ons an d modular forms

我们首先回顾，四个雅可比 theta 函数定义如下（参见 [1]）：

$$\theta(v,\tau)=2q^{\frac{1}{8}}\sin(\pi v)\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1-e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^j)(1-e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^j)], \tag{2.6}$$

$$\theta_1(v,\tau)=2q^{\frac{1}{8}}\cos(\pi v)\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1+e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^j)(1+e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^j)], \tag{2.7}$$

$$\theta_2(v,\tau)=\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1-e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})(1-e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})], \tag{2.8}$$

$$\theta_3(v,\tau)=\prod_{j=1}^{\infty}[(1-q^j)(1+e^{2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})(1+e^{-2\pi\sqrt{-1}v}q^{j-\frac{1}{2}})], \tag{2.9}$$

其中 $q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$， $\tau\in\mathbf{H}$ 为上半复平面。令

$$\theta'(0,\tau)=\frac{\partial\theta(v,\tau)}{\partial v}|_{v=0}. \tag{2.10}$$

则成立以下雅可比恒等式（参见 [1]）：

$$\theta'(0,\tau)=\pi\theta_1(0,\tau)\theta_2(0,\tau)\theta_3(0,\tau). \tag{2.11}$$

记 $SL_2(\mathbf{Z})=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mid a,b,c,d\in\mathbf{Z},\ ad-bc=1\right\}$ 模群。令 $S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$、$T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 为SL_2(**Z**)的两个生成元。它们通过 $S\tau=-\frac{1}{\tau}$、 $T\tau=\tau+1$作用于 $\mathbf{H}$。在 S 和 T 的作用下，theta 函数满足以下变换律（参见 [1]）：

$$\theta(v,\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta(v,\tau),\ \theta(v,-\frac{1}{\tau})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta(\tau v,\tau); \tag{2.12}$$

$$\theta_1(v,\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta_1(v,\tau),\ \theta_1(v,-\frac{1}{\tau})=\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_2(\tau v,\tau); \tag{2.13}$$

$$\theta_2(v,\tau+1)=\theta_3(v,\tau),\ \theta_2(v,-\frac{1}{\tau})=\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_1(\tau v,\tau); \tag{2.14}$$

$$\theta_3(v,\tau+1)=\theta_2(v,\tau),\ \theta_3(v,-\frac{1}{\tau})=\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}\theta_3(\tau v,\tau). \tag{2.15}$$

$$\theta'(0,-\frac{1}{\tau})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\tau\theta'(0,\tau), \tag{2.16}$$

$$\theta'(v,\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta'(v,\tau), \tag{2.17}$$

$$\theta'(v,-\frac{1}{\tau})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}(2\pi\sqrt{-1}\tau\theta(\tau v,\tau)+\tau\theta'(\tau v,\tau)); \tag{2.18}$$

$$\theta_1'(v,\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta_1'(v,\tau), \tag{2.19}$$

$$\theta_1'(v,-\frac{1}{\tau})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}(2\pi\sqrt{-1}\tau\theta_2(\tau v,\tau)+\tau\theta_2'(\tau v,\tau)); \tag{2.20}$$

$$\theta_2'(v,\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta_3'(v,\tau), \tag{2.21}$$

$$\theta_2'(v,-\frac{1}{\tau})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}(2\pi\sqrt{-1}\tau\theta_1(\tau v,\tau)+\tau\theta_1'(\tau v,\tau)); \tag{2.22}$$

$$\theta_3'(v,\tau+1)=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\theta_2'(v,\tau), \tag{2.23}$$

$$\theta_3'(v,-\frac{1}{\tau})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\pi\sqrt{-1}\tau v^2}(2\pi\sqrt{-1}\tau\theta_3(\tau v,\tau)+\tau\theta_3'(\tau v,\tau)); \tag{2.24}$$

定义 2.1 设 Γ是 $SL_2(\mathbf{Z})$的一个子群。其上的模形式是指 $\mathbf{H}$ 上的全纯函数$f(\tau)$，满足

$$f(g\tau):=f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\chi(g)(c\tau+d)^k f(\tau),\ \forall g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma, \tag{2.25}$$

其中 $\chi:\Gamma\to\mathbf{C}^\star$ 是 Γ的特征。 k 称为 f的权。令

$$\Gamma_0(2)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})\mid c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\},$$
$$\Gamma^0(2)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})\mid b\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\right\},$$

设为 $SL_2(\mathbf{Z})$的两个模子群。已知 $\Gamma_0(2)$的生成元为$T,\ ST^2ST$， $\Gamma^0(2)$的生成元为 $STS,\ T^2STS$(参见 [1])。

若 Γ 是一个模子群，记 $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}(\Gamma)$ 为 Γ 上实傅里叶系数构成的模形式环。令 $\theta_j=\theta_j(0,\ \tau)\ \ 1\le j\le 3$，我们引入六个显式模形式（参见 [8]），

$$\delta_1(\tau)=\frac{1}{8}(\theta_2^4+\theta_3^4),\ \varepsilon_1(\tau)=\frac{1}{16}\theta_2^4\theta_3^4,$$

$$8\delta_2(\tau) = -\frac{1}{8}(\theta_1^4 + \theta_3^4),\ \varepsilon_2(\tau) = \frac{1}{16}\theta_1^4\theta_3^4,$$

它们在 $q^{\frac{1}{2}}$ 上的傅里叶展开如下：

$$\delta_1(\tau) = \frac{1}{4} + 6q + \cdots,\ \varepsilon_1(\tau) = \frac{1}{16} - q + \cdots,$$

$$8\delta_2(\tau) = -1 - 24q^{\frac{1}{2}} - 24q + \cdots,\ \varepsilon_2(\tau) = q^{\frac{1}{2}} + 8q + \cdots,$$

其中“$\cdots$”项是高次项，且其系数均为整数。它们还满足变换律，

$$\delta_2(-\frac{1}{\tau}) = \tau^2\delta_1(\tau),\ \varepsilon_2(-\frac{1}{\tau}) = \tau^4\varepsilon_1(\tau), \tag{2.26}$$

引理 *2.2 ([8])* $\delta_1(\tau)$（分别为 $\varepsilon_1(\tau)$）是权为 *2*（分别为 *4*）的模形式，定义在 $\Gamma_0(2)$ 上； $\delta_2(\tau)$（分别为 $\varepsilon_2(\tau)$）是权为 *2*（分别为 *4*）的模形式，定义在 $\Gamma^0(2)$ 上；而 $\delta_3(\tau)$（分别为 $\varepsilon_3(\tau)$）是权为 *2*（分别为 *4*）的模形式，定义在 $\Gamma_\theta(2)$ 上，并且 $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}(\Gamma^0(2)) = R[\delta_2(\tau)\ \varepsilon_2(\tau)]$。

回顾一下，艾森斯坦级数 $G_{2k}(\tau)$ 定义为

$$E_{2k}(\tau) := 1 - \frac{4k}{B_{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)\cdot q^n,\ G_{2k}(\tau) = -\frac{B_{2k}}{4k}\cdot E_{2k}(\tau) \tag{2.27}$$

其中 $\sigma_k(n) := \sum_{m>0,\ m|n} m^k$，而 B_{2k} 是伯努利数。众所周知，$SL(2,\ Z)$ 上的整个模形式分次环由 $E_4(\tau)$ 和 $E_6(\tau)$ 生成，并且

$$E_4(\tau) := 1 + 240q + 2160q^2 + \cdots,\ E_6(\tau) = 1 - 504q - 16632q^2 + \cdots. \tag{2.28}$$

定义 2.3 在 $L \times \Gamma$ 上，指标为 m、权为 l 的亚纯雅可比形式，其中 L 是复平面 $\mathbb{C}$ 中由模子群 $\Gamma \subset SL(2,\ Z)$ 保持不变的整数格，是定义在 $C \times H$ 上的一个（亚纯）函数 $F(z,\ \tau)$，满足

$$F(\frac{z}{c\tau + d_0}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d_0}) = (c\tau + d_0)^l \exp(2\pi\sqrt{-1}m\frac{cz^2}{c\tau + d_0})F(z,\tau), \tag{2.29}$$

$$F(z + \lambda\tau + \mu, \tau) = (-1)^{m(\mu+\lambda)}\exp(-2\pi\sqrt{-1}m(2\lambda z + \lambda^2\tau))F(z,\tau), \tag{2.30}$$

其中 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ 和 $\lambda,\ \mu \in L$。

3. The two variable elliptic genus in odd dimensions

设 M 为一个（$2d+1$）维闭自旋流形。令 W 表示定义在 M上的复 l 维向量丛。用 $c_1(W)$表示 W的第一陈类。我们分别用 $\pm 2\pi\sqrt{-1}x_i$ $(1 \le i \le d)$，0 和 $2\pi\sqrt{-1}w_j$ $(1 \le j \le l)$表示 $TM \otimes C$和 W的形式陈根。形式上， M的 Todd形式写作（可能定义不良）

$$\mathrm{Td}(M) := \prod_{i=1}^{d} \frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{1 - e^{-2\pi\sqrt{-1}x_i}}. \tag{3.1}$$

令（τ， z） $\in \mathcal{H} \times \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{H}$ 是上半平面， $\mathcal{C}$ 是复平面。令$y = e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ 和 $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ 以及 $c :=\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)$。

Let

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(M, W, \tau, z) :=& c^{2(d-l)+1} y^{-\frac{l}{2}} \bigotimes_{n=1}^{\infty} (\wedge_{-yq^{n-1}}(W^*) \otimes \wedge_{-y^{-1}q^n}(W)) \\ & \bigotimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n}(TM \otimes C) \right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

现在令 $g:\ M \to SO(N)$，并假设 N 为偶数且足够大。令 E表示 M上的秩为 N 的平凡实向量丛。我们赋予 E 典范平凡度量和平凡联络 d。置

$$\nabla_u = d + ug^{-1}dg, \quad u \in [0,1].$$

令 R_u 为 ∇_u的曲率，则

$$R_u = (u^2 - u)(g^{-1}dg)^2. \tag{3.3}$$

我们还考虑 E 的复化，并且 g 延拓为$E_{\mathbf{C}}$的酉自同构。联络 ∇_u 延拓为 $E_{\mathbf{C}}$ 上的厄米联络，其曲率仍由（3.3）给出。令 $\Delta(E)$ 为 E的旋量丛，它是一个秩为 $2^{\frac{N}{2}}$的平凡厄米向量丛。我们假设 g可提升到Spin群 Spin（N）： g^{Δ}： $M \to$Spin（N）。因此， g^{Δ} 可视为 $\Delta(E)$ 的保持厄米度量的自同构。我们将 d 在 E 上的提升取为 $\Delta(E)$ 上的平凡厄米联络 d^{Δ}，于是

$$\nabla_u^{\Delta} = (1-u)d^{\Delta} + u(g^{\Delta})^{-1} \cdot d^{\Delta} \cdot g^{\Delta}, \quad u \in [0,1] \tag{3.4}$$

提升 ∇_u 在 E到 $\Delta(E)$。令 $Q_j(E)$ $j = 1, 2, 3$ 为如下定义的虚丛:

$$Q_1(E) = \triangle(E) \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \wedge_{q^n}(\widetilde{E_C}); \tag{3.5}$$

$$Q_2(E) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \wedge_{-q^{n-\frac{1}{2}}}(\widetilde{E_C}); \tag{3.6}$$

$$Q_3(E)=\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{q^{n-\frac{1}{2}}}(\widetilde{E_C}). \tag{3.7}$$

设 g 在 E 上有一个提升 $g^{Q(E)}$，定义在 $Q(E)$ 上；且 ∇_u 有一个提升 $\nabla_u^{Q(E)}$，定义在 $Q(E)$ 上。按照 [6]，我们将 $\mathrm{ch}(Q(E)\ g^{Q(E)},d,\tau)$ 定义如下:

$$\mathrm{ch}(Q(E),\nabla_0^{Q(E)},\tau)-\mathrm{ch}(Q(E),\nabla_1^{Q(E)},\tau)=-d\mathrm{ch}(Q(E),g^{Q(E)},d,\tau), \tag{3.8}$$

其中

$$Q(E)=Q_1(E)\otimes Q_2(E)\otimes Q_3(E),$$

and

$$\mathrm{ch}(Q(E),g^{Q(E)},d,\tau)=-\frac{2^{\frac{N}{2}}}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{Tr}\left[g^{-1}dg\,(A)\right]du, \tag{3.9}$$

with

$$A=\frac{\theta_1'(R_u/(4\pi^2),\tau)}{\theta_1(R_u/(4\pi^2),\tau)}+\frac{\theta_2'(R_u/(4\pi^2),\tau)}{\theta_2(R_u/(4\pi^2),\tau)}+\frac{\theta_3'(R_u/(4\pi^2),\tau)}{\theta_3(R_u/(4\pi^2),\tau)}.$$

根据 [6], 中的命题 2.2，若 $c_3(E_C,g,d)=0$，则对任意整数 $r\geq 1.$，有 $\mathrm{ch}(Q(E)\ g^{Q(E)},d,\tau+1)^{(4r-1)}=\mathrm{ch}(Q(E)\ g^{Q(E)},d,\tau)^{(4r-1)}$，且 $\mathrm{ch}(Q(E)\ g^{Q(E)},d,-\frac{1}{\tau})^{(4r-1)}=\tau^{2r}\mathrm{ch}(Q(E)\ g^{Q(E)},d,\tau)^{(4r-1)}$，因此 $\mathrm{ch}(Q(E)\ g^{Q(E)},d,\tau)^{(4r-1)}$ 是权为 $2r$ 的 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上的模形式。

定义 3.1。 M^{2d+1} 关于 W 的二变量椭圆属，记作 $\mathrm{Ell}(M,W,g,\tau,z)$，定义为

$$\mathrm{Ell}(M,W,g,\tau,z):=\int_M\widehat{A}(M)\mathrm{ch}(E(M,W,\tau,z))\mathrm{ch}(Q(E),g^{Q(E)},d,\tau), \tag{3.10}$$

它是与 *Dirac* 算子经 $E(M,W,\tau,z)$ 和 $g^{Q(E)}$ 扭曲后所关联的 *Toeplitz* 算子的指标。

使用与 [7]和中的引理 3.4 相同的计算

$$\widehat{A}(M)=\prod_{i=1}^{d}\frac{\pi\sqrt{-1}x_i}{\sinh\pi\sqrt{-1}x_i}=\prod_{i=1}^{d}\frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{1-e^{-2\pi\sqrt{-1}x_i}}e^{-\sum_{i=1}^{n}\pi\sqrt{-1}x_i}, \tag{3.11}$$

我们得到

引理 3.2。

(3.12)

$$\mathrm{Ell}(M,W,g,\tau,z)=\int_M e^{-\frac{c_1(W)}{2}}\eta(\tau)^{3(d-l)}\prod_{i=1}^{d}\frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{\theta(\tau,x_i)}\prod_{j=1}^{l}\theta(\tau,w_j-z)\mathrm{ch}(Q(E),g^{Q(E)},d,\tau),$$

其中

$$\eta(\tau):=q^{\frac{1}{24}}\cdot c=q^{\frac{1}{24}}\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j). \tag{3.13}$$

与 [7], 中的定理 3.2 类似，我们有

定理 3.3。 若 $c_1(W) = 0$，且第一庞特里亚金类 $p_1(M) = p_1(W)$，第三上同调群 $H^3(M, R) = 0$，并且 M 是单连通自旋流形，那么椭圆属 $\mathrm{Ell}(M, W, g, \tau, z)$ 是权为 $(d+1)-l$ 、指标为 $\frac{l}{2}$ 的弱 *Jacobi* 形式，其满足

(1)Ell$(N, W, g, \tau, z) = 0$ 当 N 是边界时；***(2) Ell***$(M_1 \amalg M_2, W, g, \tau, z) =$ ***Ell***$(M_1, W, g, \tau, z) +$ ***Ell***(M_2, W, g, τ, z)；***(3) Ell***$(M_1^{2n} \times M_2^{2m+1}, g, \tau, z) =$ ***Ell***(M_1^{2n}, τ, z)***Ell***(M_2^{2m+1}, g, τ, z)，其中 ***Ell***(M_1^{2n}, τ, z) 是偶数维流形的二变量椭圆属，且 $g: M_2 \to GL(N, C)$。

我们回顾 [7] 中的命题 3.5。

命题 3.4。 *(*[7]*)* 设函数 $\varphi(\tau, z) : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 满足

(3.14)

$$\varphi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d_0}, \frac{z}{c\tau+d_0}) = (c\tau+d_0)^k \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}mcz^2}{c\tau+d_0})\varphi(\tau, z);\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d_0 \end{pmatrix} \in SL(2, Z).$$

我们定义

$$\Phi(\tau, z) := \exp(-8\pi^2 m G_2(\tau) z^2)\varphi(\tau, z) := \sum_{n\geq 0} a_n(\tau) \cdot z^n, \tag{3.15}$$

那么这些 $a_n(\tau)$ 是权为 $k+n$、定义在 $SL(2, Z)$上的模形式。

命题 3.5。 若 $c_1(W) = 0$，且第一庞特里亚金类 $p_1(M) = p_1(W)$ 以及第三上同调群 $H^3(M, R) = 0$，并且 M 是单连通自旋流形，那么由下式确定的级数 $a_n(M, W, g, \tau)$

$$\exp(-4\pi^2 l G_2(\tau) z^2)\mathrm{Ell}(M, W, g, \tau, z) = \sum_{n\geq 0} a_n(M, W, g, \tau) \cdot z^n, \tag{3.16}$$

是权为 $d+1-l+n$、定义在 $SL(2, Z)$ 上的模形式。此外， $a_n(M, W, g, \tau)$ 的前五个级数具有以下形式:

(3.17)

$$\begin{aligned} a_0(M, W, g, \tau) &= \int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E), g, d) \\ &+ q\left\{\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*) \otimes [-2(d-l) - 1 - W - W^* + TM \otimes C])\mathrm{ch}(\triangle(E), g, d)\right. \\ &\left. + \int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E) \otimes (\widetilde{E_C} + 2 \wedge^2 \widetilde{E_C} - \widetilde{E_C} \otimes \widetilde{E_C}), g, d)\right\} + O(q^2), \end{aligned}$$

(3.18)

$$a_1(M, W, g, \tau) = \sum_{p=0}^{l} (-1)^p 2\pi\sqrt{-1}(p - \frac{l}{2}) \int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E), g, d) + a_1^1 q + O(q^2),$$

其中

$$
\begin{aligned}
(3.19)\qquad a_1^1 &= -2\pi\sqrt{-1}\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*)\otimes W\otimes W^*)\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)\\
&+\pi\sqrt{-1}\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}([2\sum_{j=1}^{l}(-1)^j j\wedge^j W^* - l\wedge_{-1} W^*]\\
&\otimes[-2(d-l)-1-W-W^*+TM\otimes C])\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)\\
&+\pi\sqrt{-1}\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}([2\sum_{j=1}^{l}(-1)^j j\wedge^j W^* - l\wedge_{-1} W^*])\\
&\cdot\mathrm{ch}(\triangle(E)\otimes(\widetilde{E_C}+2\wedge^2\widetilde{E_C}-\widetilde{E_C}\otimes\widetilde{E_C}),g,d).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3.20)\quad a_2(M,W,g,\tau) &= -\sum_{p=0}^{l}(-1)^p 2\pi^2(p-\frac{l}{2})^2\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)\\
&+\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\frac{l}{6}\pi^2\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)+O(q),
\end{aligned}
$$

(3.21)

$$
\begin{aligned}
a_3(M,W,g,\tau) &= \sum_{p=0}^{l}(-1)^p\frac{1}{6}(2\pi\sqrt{-1})^3(p-\frac{l}{2})^3\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)\\
&-\sum_{p=0}^{l}(-1)^p l\frac{2}{3}\pi^4(p-\frac{l}{2})\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)+O(q),
\end{aligned}
$$

(3.22)

$$
\begin{aligned}
a_4(M,W,g,\tau) &= \sum_{p=0}^{l}(-1)^p\frac{1}{24}(2\pi\sqrt{-1})^4(p-\frac{l}{2})^4\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)\\
&-\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\frac{l}{3}\pi^4(p-\frac{l}{2})^2\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)\\
&+\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\frac{\pi^4 l^2}{12}\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)+O(q),
\end{aligned}
$$

证明。 我们知道 $\mathrm{Ell}(M,W,g,\tau,0) = a_0(M,W,g,\tau)$, 并且

$$
(3.23)\qquad \mathrm{Ell}(M,W,g,\tau,0)=\int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(E(M,W,g,\tau,0))\mathrm{ch}(Q(E),g^{Q(E)},d),
$$

where
(3.24)

$$\mathrm{E}(M,W,\tau,0):=c^{2(d-l)+1}\wedge_{-1}(W^*)\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{-q^n}(W^*)\bigotimes\wedge_{-q^n}(W)\bigotimes\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(TM\otimes C)\right).$$

因此得到 (3.17)。我们知道
(3.25)

$$\mathrm{ch}(Q(E),g^{Q(E)},d)=\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)+\mathrm{ch}(\triangle(E)\otimes(\widetilde{E_C}+2\wedge^2\widetilde{E_C}-\widetilde{E_C}\otimes\widetilde{E_C}),g,d)q+O(q^2).$$

类似于命题 3.2 中的论证，利用 (3.23) 和 (3.25) 可得命题 3.5。 □

由于不存在权为奇数或非零权的 $SL(2,Z)$ 模形式，因此我们有

命题 3.6. 若 $c_1(W)=0$，且第一庞特里亚金类 $p_1(M)=p_1(W)$ 以及第三上同调群 $H^3(M,R)=0$，并且 M 是一个单连通自旋 $(2d+1)$ 流形，则

1) 若 $d+1-l$ 为奇数，或 $d+1-l\leq 2$ 但 $d+1-l\neq 0$，则

(3.26)

$$\begin{aligned}a_0^0&=\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)=0\\ a_0^1&=\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*)\otimes[-2(d-l)-1-W-W^*+TM\otimes C])\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)\\&+\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E)\otimes(\widetilde{E_C}+2\wedge^2\widetilde{E_C}-\widetilde{E_C}\otimes\widetilde{E_C}),g,d)=0.\end{aligned}$$

且相应 *Toeplitz* 算子的指标均为零。
2）若 $d+1-l$ 为偶数，或 $d+1-l\leq 1$ 但 $d+1-l\neq -1$，则

$$a_1^0=\sum_{p=0}^{l}(-1)^p2\pi\sqrt{-1}(p-\frac{l}{2})\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)=0,\ a_1^1=0. \tag{3.27}$$

3）如果 $d+1-l$ 为奇数，或者 $d+1-l\leq 0$ 但 $d+1-l\neq -2$，那么

$$\begin{aligned}&-\sum_{p=0}^{l}(-1)^p2\pi^2(p-\frac{l}{2})^2\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)\\&+\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\frac{l}{6}\pi^2\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)=0.\end{aligned} \tag{3.28}$$

4）如果 $d+1-l$ 为偶数，或者 $d+1-l\leq -1$ 但 $d+1-l\neq -3$，那么

$$\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\frac{1}{6}(2\pi\sqrt{-1})^3(p-\frac{l}{2})^3\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)$$
$$-\sum_{p=0}^{l}(-1)^p l\frac{2}{3}\pi^4(p-\frac{l}{2})\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)=0. \tag{3.29}$$

5）若 $d+1-l$ 为奇数或 $d+1-l\leq -2$ 但 $d+1-l\neq -4$，则

$$\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\frac{1}{24}(2\pi\sqrt{-1})^4(p-\frac{l}{2})^4\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)$$
$$-\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\frac{l}{3}\pi^4(p-\frac{l}{2})^2\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)$$
$$+\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\frac{\pi^4l^2}{12}\int_M\widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\triangle(E),g,d)=0. \tag{3.30}$$

同样，我们可以利用扭曲托普利茨算子的指标得到表达式。

定理 3.7。 如果 $c_1（W）=0$ 且第一庞特里亚金类 $p_1（M）=p_1（W）$ 以及第三上同调群 $H^3（M、R）=0$，并且 M 是一个单连通自旋 $（2d+1）$-流形，则

1）如果 $d+1-l=4$，则 $a_0^1=240a_0^0$，且 a_0^1 是 240 的整数倍。*2*）如果 $d+1-l=6$，则 $a_0^1=-504a_0^0$，且 a_0^1 是 504 的整数倍。*3*）如果 $d+1-l=8$，则 $a_0^1=480a_0^0$，且 a_0^1 是 480 的整数倍。*4*）如果 $d+1-l=10$，则 $a_0^1=-264a_0^0$，且 a_0^1 是 264 的整数倍。*5*）如果 $d+1-l=3$，则 $a_1^1=240a_1^0$，且 a_1^1 是 240 的整数倍。*6*）如果 $d+1-l=5$，则 $a_1^1=-504a_1^0$，且 a_1^1 是 504 的整数倍。*7*）如果 $d+1-l=7$，则 $a_1^1=480a_1^0$，且 a_1^1 是 480 的整数倍。*8*）如果 $d+1-l=9$，则 $a_1^1=-264a_1^0$，且 a_1^1 是 264 的整数倍。

证明。 由（2.28）和命题 3.5，我们可以证明定理 3.7。 □

4. Two-variable elliptic genera which are $\Gamma_0(2)$ $\Gamma^0(2)$ Γ_θ-Jacobi forms

4.1. 偶数维情形。 设 V 是几乎复 $（2d）$ 维流形 M 上的 $（2r）$ 维自旋实向量丛，$\triangle（V）$ 为其关联的旋量丛。我们用 $\pm 2\pi\sqrt{-1}v_s$ $（1\leq s\leq r）$ 表示 $V\otimes C$ 的形式陈根。令 $Q_j（V）$、$j=1$，2，3 为如下定义的虚丛：

$$Q_1(V)=\triangle(V)\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{q^n}(\widetilde{V_C}),Q_2(V)=\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{-q^{n-\frac{1}{2}}}(\widetilde{V_C});\ Q_3(V)=\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{q^{n-\frac{1}{2}}}(\widetilde{V_C}). \tag{4.1}$$

定义 4.1。 关于 W 和 V 的椭圆属，记作 $\mathrm{Ell}_a(M,\ W,\ V,\ \tau,\ z)$，对于 $1 \leq a \leq 3$，定义如下:

$$\mathrm{Ell}_1(M,W,V,\tau,z) := \int_M Td(M)\mathrm{ch}(E'(M,W,\tau,z)\otimes Q_1(V)), \tag{4.2}$$

$$\mathrm{Ell}_2(M,W,V,\tau,z) := 2^r\int_M Td(M)\mathrm{ch}(E'(M,W,\tau,z)\otimes Q_2(V)), \tag{4.3}$$

$$\mathrm{Ell}_3(M,W,V,\tau,z) := 2^r\int_M Td(M)\mathrm{ch}(E'(M,W,\tau,z)\otimes Q_3(V)), \tag{4.4}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{E}'(M,W,\tau,z) :=& c^{2(d-l)}y^{-\frac{l}{2}}\bigotimes_{n=1}^{\infty}(\wedge_{-yq^{n-1}}(W^*)\wedge_{-y^{-1}q^n}(W)) \\ &\bigotimes\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(TM\otimes C)\right).\end{aligned} \tag{4.5}$$

与引理 3.4 类似，在 [7], 中我们有

引理 4.2。 成立以下等式

$$\begin{aligned}\mathrm{Ell}_a(M,W,V,\tau,z) &= 2^r\int_M \exp(\frac{c_1(M)-c_1(W)}{2})\eta(\tau)^{3(d-l)} \\ &\cdot\prod_{i=1}^{d}\frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{\theta(\tau,x_i)}\prod_{j=1}^{l}\theta(\tau,w_j-z)\prod_{s=1}^{r}\frac{\theta_a(w_s,\tau)}{\theta_a(0,\tau)},\ 1\leq a\leq 3.\end{aligned} \tag{4.6}$$

定理 *4.3.* 若 $c_1(M) = c_1(W) = 0$ 且 $p_1(V) = 0$，并且第一庞特里亚金类 $p_1(M) = p_1(W)$，则椭圆属 $Ell_1(M,W,V,\tau,z)$、$Ell_2(M,W,V,\tau,z)$、$Ell_3(M,W,V,\tau,z)$ 分别是弱 $\Gamma_0(2)$、 $\Gamma^0(2)$、 Γ_θ-*Jacobi*形式，权为 $d-l$，指标为 $\frac{l}{2}$。

证明。 由 (2.12)-(2.24)，我们得到 $\mathrm{Ell}_a(M,W,V,\tau,z)$ 满足以下变换律：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ell}_1(M,W,\tau+1,z)=\mathrm{Ell}_1(M,W,V,\tau,z),\\
&\mathrm{Ell}_2(M,W,\tau+1,z)=\mathrm{Ell}_3(M,W,V,\tau,z),\\
&\mathrm{Ell}_3(M,W,\tau+1,z)=\mathrm{Ell}_2(M,W,V,\tau,z),\\
&\mathrm{Ell}_a(M,W,V,\tau,z+1)=(-1)^l\mathrm{Ell}_a(M,W,V,\tau,z),\\
&\mathrm{Ell}_a(M,W,V,\tau,z+\tau)=(-1)^l\exp(-\pi\sqrt{-1}l(\tau+2z))\mathrm{Ell}_a(M,W,V,\tau,z),\\
&\mathrm{Ell}_1(M,W,V,-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau})=\tau^{d-l}\exp(\pi\sqrt{-1}l\frac{z^2}{\tau})\mathrm{Ell}_2(M,W,V,\tau,z),\\
&\mathrm{Ell}_2(M,W,V,-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau})=\tau^{d-l}\exp(\pi\sqrt{-1}l\frac{z^2}{\tau})\mathrm{Ell}_1(M,W,V,\tau,z),\\
&\mathrm{Ell}_3(M,W,V,-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau})=\tau^{d-l}\exp(\pi\sqrt{-1}l\frac{z^2}{\tau})\mathrm{Ell}_3(M,W,V,\tau,z).
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

由 (4.7)，我们可以证明定理 4.3。 □

与命题 3.5 类似，我们有

命题 *4.4*。若 $c_1(M)=c_1(W)=0$ 且 $p_1(V)=0$ 且第一庞特里亚金类 $p_1(M)=p_1(W)$，则由下式确定的级数 $a_{n,1}(M,W,V,\tau),a_{n,2}(M,W,V,\tau),a_{n,3}(M,W,V,\tau)$

$$
\exp(-4\pi^2lG_2(\tau)z^2)\mathrm{Ell}_\alpha(M,W,\tau,z)=\sum_{n\geq 0}a_{n,\alpha}(M,W,V,\tau)\cdot z^n,\ 1\leq\alpha\leq 3 \tag{4.8}
$$

分别是权为 $d-l+n$、定义在 $\Gamma_0(2)$、$\Gamma^0(2)$ 和 Γ_θ 上的模形式。令

$$
a_{n,2}(M,W,V,\tau)=a_{n,2}^0+a_{n,2}^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}+a_{n,2}^1q+a_{n,2}^{\frac{3}{2}}q^{\frac{3}{2}}+\cdots+a_{n,2}^m+\cdots. \tag{4.9}
$$

那么 $a^{0}_{n,\ 2}$ 与 a^{0}_{n} 在 [7] 或 [12], 中相同，并且

$$
\begin{aligned}
(4.10)\qquad a^{\frac{1}{2}}_{0,2} &= -\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\widetilde{V_C}),\\
a^{\frac{1}{2}}_{1,2} &= -\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\widetilde{V_C})(p-\frac{l}{2})2\pi\sqrt{-1},\\
a^{\frac{1}{2}}_{2,2} &= \int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\widetilde{V_C})(p-\frac{l}{2})^2 2\pi^2\\
&\quad -\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\widetilde{V_C})\frac{l}{6}\pi^2\\
a^{\frac{1}{2}}_{3,2} &= -\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\widetilde{V_C})(p-\frac{l}{2})^3\frac{4}{3}(\pi\sqrt{-1})^3\\
&\quad -\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\widetilde{V_C})\frac{l}{3}\pi^3(p-\frac{l}{2})\sqrt{-1}\pounds\neg\\
a^{\frac{1}{2}}_{4,2} &= -\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\widetilde{V_C})(p-\frac{l}{2})^4\frac{2}{3}\pi^4\\
&\quad +\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\widetilde{V_C})\frac{l^2}{3}\pi^4(p-\frac{l}{2})^2\\
&\quad -\frac{\pi^4 l^2}{72}\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\widetilde{V_C}).
\end{aligned}
$$

(4.11)

$$
\begin{aligned}
a^{1}_{1,2} &= \int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p \mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\wedge^2\widetilde{V_C})(p-\frac{l}{2})2\pi\sqrt{-1},\\
&+\int_M Td(M)\mathrm{ch}\Big\{[-2(d-l)+T+T^*-(W+W^*)]2\pi\sqrt{-1}\otimes\sum_{j=1}^{l}(-1)^j j\wedge^j W^*\\
&+(1+\wedge_{-1}W^*)[-2\pi\sqrt{-1}(W+W^*)-\pi\sqrt{-1}l[-2(d-l)+T+T^*-(W+W^*)]]\Big\}.
\end{aligned}
$$

证明。 如果我们令

$$
(4.12)\qquad \exp(-4\pi^2 l G_2(\tau)z^2) := A_0(Z)+A_1(z)q+O(q^2),
$$

and

$$\mathrm{Ell}(M,W,\tau,z) := \widetilde{B_0}(Z) + \widetilde{B_1(z)}q + O(q^2), \tag{4.13}$$

and

$$\mathrm{Ell}_2(M,W,V,\tau,z) := B_0(Z) + B_{\frac{1}{2}}(z)q^{\frac{1}{2}} + B_1(z)q + O(q^{\frac{3}{2}}), \tag{4.14}$$

By

$$Q_2(V) = 1 - \widetilde{V_C}q^{\frac{1}{2}} + \wedge^2\widetilde{V_C}q + O(q^{\frac{3}{2}}), \tag{4.15}$$

then

$$B_0(z) = \widetilde{B_0}(Z),\ B_{\frac{1}{2}}(z) = -\widetilde{B_0(z)}\otimes\widetilde{V_C},\ B_1(z) = \widetilde{B_0(z)}\otimes\wedge^2\widetilde{V_C} + \widetilde{B_1(z)}, \tag{4.16}$$

我们可以得到

(4.17)

$$\begin{aligned}
&A_0(z) = 1 + \frac{l}{6}\pi^2z^2 + \frac{l^2}{72}\pi^4z^4 + O(z^6),\\
&A_1(z) = -4l\pi^2z^2 - \frac{2l^2}{3}\pi^4z^4 + O(z^6),\\
&\widetilde{B_0}(z) = \int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\left[1 + (p-\frac{l}{2})2\pi\sqrt{-1}z\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}(p-\frac{l}{2})^2(2\pi\sqrt{-1})^2z^2 + \frac{1}{6}(p-\frac{l}{2})^3(2\pi\sqrt{-1})^3z^3 + O(z^4)\right],\\
&\widetilde{B}_1(z) = \int_M Td(M)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*)\otimes[-2(d-l) + T + T^* - (W+W^*)]\\
&-2\pi\sqrt{-1}\wedge_{-1}(W^*)\otimes(W+W^*)\\
&+\pi\sqrt{-1}[2\sum_{j=1}^{l} j\wedge^j W^* - l\wedge_{-1}W^*]\otimes[-2(d-l) + T + T^* - (W+W^*)]z + O(z^2).
\end{aligned}$$

我们知道

(4.18)

$$\sum_{n\geq 0}a^0_{n,2}z^n = A_0(z)B_0(z),\ \sum_{n\geq 0}a^{\frac{1}{2}}_{n,2}z^n = A_0(z)B_{\frac{1}{2}}(z),\ \sum_{n\geq 0}a^1_{n,2}z^n = A_0(z)B_1(z) + A_1(z)B_0(z),$$

于是由 (4.14)-(4.16) 可得命题 4.4。 □

命题 4.5. 若 $c_1(W) = c_1(M) = 0$ 且第一庞特里亚金类 $p_1(M) = p_1(W)$和 $p_1(V) = 0$，且 M 是一个几乎复的$(2d)$流形，则

*1)*若 $d-l$ 为奇数或 $d-l<0$，则

$$
\begin{aligned}
(4.19)\quad a_{0,2}^{0} &= \int_M Td(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*))=0,\\
a_{0,2}^{\frac{1}{2}} &= \int_M Td(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*)\otimes\widetilde{V_C})=0,\\
a_{0,2}^{1} &= \int_M Td\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*)\otimes[-2(d-l)-W-W^*+TM\otimes C+\wedge^2\widetilde{V_C}])=0,\\
a_{0,2}^{\frac{3}{2}} &= -\int_M Td(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*)\otimes(\widetilde{V_C}+\wedge^3\widetilde{V_C}))\\
&\quad -\int_M Td(TM)\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*)\otimes(-2(d-l)-W-W^*+TM\otimes C)\otimes\widetilde{V_C}])=0.
\end{aligned}
$$

以及相关的全纯欧拉数均为零。

*2)*若 $d-l$ 为偶数或 $d+1-l<0$，则 $a_{1,2}^{0}=a_{1,2}^{\frac{2}{2}}=a_{1,2}^{1}=0.$

*3)*若 $d-l$ 为奇数或 $d+2-l<0$，则 $a_{2,2}^{0}=a_{2,2}^{2}=0.$

*4)*若 $d-l$ 为偶数或 $d+3-l<0$，则 $a_{3,2}^{0}=a_{3,2}^{2}=0.$

*5)*若 $d-l$ 为奇数或 $d+4-l<0$，则 $a_{4,2}^{0}=a_{24,2}=\overset{1}{0}.$

类似地，我们可以得到使用全纯欧拉数的表达式。

定理 4.6。若 $c_1(W)=c_1(M)=0$，且第一庞特里亚金类 $p_1(M)=p_1(W)$和 $p_1(V)=0$，则 *1*）若 $d-l=2$，则

$$
\begin{aligned}
(4.20)\quad &-\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)\otimes\widetilde{V_C})=24\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\\
&\int_M Td\mathrm{ch}(\wedge_{-1}(W^*)\otimes[-2(d-l)-W-W^*+TM\otimes C+\wedge^2\widetilde{V_C}])\\
&=24\int_M Td(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*)).
\end{aligned}
$$

也就是说 $a_{0,2}^{2}=24a_{0,2}^{0}$和 $a_{0,2}^{1}=24a_{0,2}^{0}$以及 $a_{0,2}^{2}$, $a_{0,2}^{1}$是2的整数倍 4.

*2)*若 $d-l=4$，则 $240a_{0,2}^{0}+8a_{0,2}^{2}-a_{0,2}^{1}=0$。

*3)*若 $d-l=6$，则 $504a_{0,2}^{0}-32a_{0,2}^{2}+a_{0,2}^{1}=0$。

*4)*若 $d-l=1$，则 $a_{1,2}^{2}=24a_{1,2}^{0}$ 和 $a_{1,2}^{1}=24a_{1,2}^{0}$

*5)*若 $d-l=3$，则 $240a_{1,2}^{0}+8a_{1,2}^{2}-a_{1,2}^{1}=0$。

*6)*若 $d-l=5$，则 $504a_{1,2}^{0}-32a_{1,2}^{2}+a_{1,2}^{1}=0$。

证明。 当 $d-l=2$ 时，$a_{0,2}$ 是 $\Gamma^0(2)$ 上权为 2 的模形式。由引理 2.2 可得 (1)。

当 $d-l=4$ 时，$a_{0,\ 2}$ 是 $\Gamma^0(2)$ 上权为 4 的模形式。由引理 2.2 可得 $a_{0,\ 2}=\lambda_1\varepsilon_2(\tau)+\lambda_2(8\delta_2)^2$. 然后比较此等式两边 $1\pounds\neg\ q^{\frac{1}{2}},\ \ q$ 的系数，即可得到 (2)。类似地，还可以得到其他等式。□

4.2. 奇数维情形。在本小节中，我们采用第 3 节中的基本设定。令

$$\mathrm{ch}(Q_1(E),g^{Q_1(E)},d,\tau)=-\frac{2^{\frac{N}{2}}}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{Tr}\left[g^{-1}dg\left(\frac{\theta_1'(R_u/(4\pi^2),\tau)}{\theta_1(R_u/(4\pi^2),\tau)}\right)\right]du, \tag{4.21}$$

$$\mathrm{ch}(Q_j(E),g^{Q_1(E)},d,\tau)=-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{Tr}\left[g^{-1}dg\left(\frac{\theta_j'(R_u/(4\pi^2),\tau)}{\theta_j(R_u/(4\pi^2),\tau)}\right)\right]du,\ j=2,3 \tag{4.22}$$

由 [6], 中的命题 2.2 可知，若 $c_3(E_C,\ g,\ d)=0$，则对任意整数 $r\geq 1.$，有 $\mathrm{ch}(Q_j(E)\ g^{Q_j\ (E)}\ d,\ \tau+1)^{(4r-1)}$ 分别是 $\Gamma_0(2)$、$\Gamma^0(2)$、Γ_θ 上权为 $2r$ 的模形式。

定义 4.7. 关于 W 的 M^{2d+1} 二变量椭圆属，记为 $\mathrm{Ell}_\alpha(M,W,g,\tau,z)$，其中 $\alpha=1$、2、3，定义为

$$\mathrm{Ell}_\alpha(M,W,g,\tau,z):=\int_M\widehat{A}(M)\mathrm{ch}(E(M,W,\tau,z))\mathrm{ch}(Q_\alpha(E),g^{Q_\alpha(E)},d,\tau), \tag{4.23}$$

它是由 *Dirac* 算子经$E(M,W,\tau,z)$和 $g^{Q_\alpha(E)}$扭曲后所对应的 *Toeplitz* 算子的指标。

使用引理 3.4 中相同的计算，在 [7], 中可得

引理 4.8。

(4.24)

$$\mathrm{Ell}_\alpha(M,W,g,\tau,z)=\int_M e^{-\frac{c_1(W)}{2}}\eta(\tau)^{3(d-l)}\prod_{i=1}^d\frac{2\pi\sqrt{-1}x_i}{\theta(\tau,x_i)}\prod_{j=1}^l\theta(\tau,w_j-z)\mathrm{ch}(Q_\alpha(E),g^{Q_\alpha(E)},d,\tau),$$

类似于命题 4.4，可得

命题 *4.9*。若 $c_1(W)=0$，且第一庞特里亚金类 $p_1(M)=p_1(W)$，第三上同调群 $H^3(M,R)=0$，并且 M 是一个单连通自旋流形，则椭圆属 $Ell_\alpha(M,W,g,\tau,z)$ 是权为 $(\frac{d}{}+1)-l$、指标为$\frac{l}{2}$的弱 *Jacobi* 形式，分别定义在 $\Gamma_0(2)$、$\Gamma^0(2)$、Γ_θ 上。于是，由下式确定的级数 $a_{n,1,g}(M,W,V,\tau),a_{n,2,g}(M,W,V,\tau),a_{n,3,g}(M,W,V,\tau)$

$$\exp(-4\pi^2lG_2(\tau)z^2)\mathrm{Ell}_\alpha(M,W,V,g,\tau,z)=\sum_{n\geq 0}a_{n,\alpha,g}(M,W,V,\tau)\cdot z^n,\ 1\leq\alpha\leq 3 \tag{4.25}$$

分别是权为 $d+1-l+n$、定义在 $\Gamma_0(2)$、$\Gamma^0(2)$ 上的模形式，以及 Γ_θ。令

$$a_{n,2,g}(M,W,V,\tau)=a^0_{n,2,g}+a^{\frac{1}{2}}_{n,2,g}q^{\frac{1}{2}}+a^1_{n,2,g}q+a^{\frac{3}{2}}_{n,2,g}q^{\frac{3}{2}}+\cdots+a^m_{n,2,g}+\cdots. \tag{4.26}$$

于是 $a^{0}_{n,\ 2,\ g}=0$，并且

$$a^{\frac{1}{2}}_{0,2,g}=-\int_M \widehat{A}(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\widetilde{E_C},g,d), \tag{4.27}$$

$$a^{\frac{1}{2}}_{1,2,g}=-\int_M \widehat{A}(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\widetilde{E_C},g,d)(p-\frac{l}{2})2\pi\sqrt{-1},$$

$$a^{\frac{1}{2}}_{2,2,g}=\int_M \widehat{A}(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\widetilde{E_C},g,d)(p-\frac{l}{2})^2 2\pi^2$$

$$-\int_M \widehat{A}(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\widetilde{E_C},g,d)\frac{l}{6}\pi^2$$

$$a^{1}_{1,2,g}=\int_M \widehat{A}(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\wedge^2\widetilde{V_C},g,d)(p-\frac{l}{2})2\pi\sqrt{-1}, \tag{4.28}$$

$$a^{1}_{2,2,g}=\frac{l}{6}\pi^2\int_M \widehat{A}(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\wedge^2\widetilde{V_C},g,d)$$

$$+\int_M \widehat{A}(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\wedge^2\widetilde{V_C},g,d)\frac{1}{2}(p-\frac{l}{2})^2(2\pi\sqrt{-1})^2.$$

与命题 4.5 类似，我们有

命题 4.10. 若 $c_1(W)=0$，且第一庞特里亚金类 $p_1(M)=p_1(W)$ 以及第三上同调群 $H^3(M,R)=0$，并且 M 是单连通自旋流形，则

*1)*若 $d-l$ 为偶数或 $d-l+1<0$，则

$$a^{\frac{1}{2}}_{0,2,g}=-\int_M \widehat{A}(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\widetilde{E_C},g,d)=0, \tag{4.29}$$

$$a^{1}_{0,2,g}=\int_M \widehat{A}(M)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\mathrm{ch}(\wedge^p(W^*))\mathrm{ch}(\wedge^2\widetilde{E_C},g,d)=0,$$

相应的 *Toeplitz* 算子的指标为零。

*2)*若 $d-l$ 为奇数或 $d+2-l<0$，则 $a^{\frac{1}{2}}_{2,1,2,g}=a^{1}_{1,2,g}=0$.

*3)*若 $d-l$ 为偶数或 $d+3-l<0$，则 $a^{2}_{2,2,g}=a^{1}_{2,2,g}=0$.

与定理 4.6 类似，我们有

定理 4.11。 如果 $c_1(W)=0$，且第一庞特里亚金类 $p_1(M)=p_1(W)$ 以及第三上同调群 $H^3(M,R)=0$，并且 M 是单连通自旋流形，那么

1)if $d-l=1$, *then* $a^{\frac{1}{2}}_{0,2,g}=a^{1}_{0,2,g}=a^{\frac{3}{2}}_{0,2,g}=0$.

2)if $d-l=3$, *then* $a^{1}_{0,2,g}=8a^{\frac{1}{2}}_{0,2,g}$.

3)if $d-l=5$, *then* $a^{1}_{0,2,g}=32a^{\frac{1}{2}}_{0,2,g}$.

4)if $d-l=0$, *then* $a^{\frac{1}{2}}_{1,2,g}=a^{1}_{1,2,g}=0$.

5)if $d-l=2$, *then* $a^{1}_{1,2,g}=8a^{\frac{1}{2}}_{1,2,g}$.

6)if $d-l=4$, *then* $a^{1}_{1,2,g}=32a^{\frac{1}{2}}_{1,2,g}$.

5. Two-variable meromorphic elliptic genera which are $\Gamma_0(2)$ $\Gamma^0(2)$, Γ_θ-Jacobi forms

5.1. 偶数维情形。 设 M^{2d} 为紧致光滑近复流形，且$(\partial+\partial^*)\otimes E$作用于 $\wedge^{0,*}(T^*M)\to\wedge^{0,*}(T^*M)$为扭曲狄拉克算子。设

$$
\begin{aligned}
(5.1)\qquad P_q^z(TM)=&\bigotimes_{n=0}^{\infty}\wedge_{y^{-1}q^n}(T^{0,1}(M)-C^d)\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{yq^n}(T^{1,0}(M)-C^d)\\
&\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T^{1,0}M-C^d)\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T^{0,1}M-C^d),\\
Q_q^z(TM)=&\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{-y^{-1}q^{n-\frac{1}{2}}}(T^{0,1}(M)-C^d)\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{-yq^{n-\frac{1}{2}}}(T^{1,0}(M)-C^d)\\
&\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T^{1,0}M-C^d)\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T^{0,1}M-C^d),\\
R_q^z(TM)=&\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{y^{-1}q^{n-\frac{1}{2}}}(T^{0,1}(M)-C^d)\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}\wedge_{yq^{n-\frac{1}{2}}}(T^{1,0}(M)-C^d)\\
&\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T^{1,0}M-C^d)\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}S_{q^n}(T^{0,1}M-C^d).
\end{aligned}
$$

设 $2\pi\sqrt{-1}x_j$, $1\le j\le d$ 是 $T^{1,0}M$ 的陈根，则

$$
(5.2)\qquad \mathrm{Ind}((\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)\otimes P_q^z(TM))=\int_M\prod_{j=1}^{d}x_j\frac{\theta'(0,\tau)}{\theta_1(z,\tau)}\frac{\theta_1(x_j+z,\tau)}{\theta(x_j,\tau)}:=\Phi_L.
$$

如果我们假设 M 是自旋的，那么

$$\text{Ind}(D\otimes Q_q^z(TM))=\int_M\prod_{j=1}^d x_j\frac{\theta'(0,\tau)}{\theta_2(z,\tau)}\frac{\theta_2(x_j+z,\tau)}{\theta(x_j,\tau)}:=\Phi_W, \tag{5.3}$$

$$\text{Ind}(D\otimes R_q^z(TM))=\int_M\prod_{j=1}^d x_j\frac{\theta'(0,\tau)}{\theta_3(z,\tau)}\frac{\theta_3(x_j+z,\tau)}{\theta(x_j,\tau)}:=\Phi_W^*.$$

命题 5.1. 若 $c_1(M)=0$，则椭圆属 Φ_L，Φ_W，Φ_W^* 是权为 d 、指标为0 的弱亚纯雅可比形式，分别定义在 $\Gamma_0(2)$、 $\Gamma^0(2)$、 Γ_θ 上。

证明。 这可由以下等式得出：

$$\begin{aligned}&\Phi_L(z,\tau+1)=\Phi_L(z,\tau),\ \Phi_L(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau})=\tau^d\Phi_W(z,\tau),\\&\Phi_W(z,\tau+1)=\Phi_W^*(z,\tau),\ \Phi_W(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau})=\tau^d\Phi_L(z,\tau),\\&\Phi_W^*(z,\tau+1)=\Phi_W(z,\tau),\ \Phi_W^*(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau})=\tau^d\Phi_W^*(z,\tau).\end{aligned} \tag{5.4}$$

□

5.2. 奇数维情形。 设 M 是一个自旋（$2d+1$）流形，且 $TM\otimes C=T^{1,0}M\oplus T^{0,1}M\oplus C$ 和 $c_1\left(T^{1,0}M\right)=0$。考虑以下 Toeplitz 算子的指标

$$\text{Ind}(T_{D\otimes P_q^z(TM),g^{Q_1(E)}})=2^{\frac{N}{2}}\int_M\prod_{j=1}^d x_j\frac{\theta'(0,\tau)}{\theta_1(z,\tau)}\frac{\theta_1(x_j+z,\tau)}{\theta(x_j,\tau)}\text{ch}(Q_1(E),g^{Q_1(E)}\pounds\neg d,\tau):=\Phi_{L,g}. \tag{5.5}$$

$$2^{\frac{N}{2}}\text{Ind}(T_{D\otimes Q_q^z(TM),g^{Q_2(E)}})=2^{\frac{N}{2}}\int_M\prod_{j=1}^d x_j\frac{\theta'(0,\tau)}{\theta_2(z,\tau)}\frac{\theta_2(x_j+z,\tau)}{\theta(x_j,\tau)}\text{ch}(Q_2(E),g^{Q_2(E)}\pounds\neg d,\tau):=\Phi_{W,g}, \tag{5.6}$$

$$2^{\frac{N}{2}}\text{Ind}(T_{D\otimes R_q^z(TM),g^{Q_3(E)}})=2^{\frac{N}{2}}\int_M\prod_{j=1}^d x_j\frac{\theta'(0,\tau)}{\theta_3(z,\tau)}\frac{\theta_3(x_j+z,\tau)}{\theta(x_j,\tau)}\text{ch}(Q_3(E),g^{Q_3(E)}\pounds\neg d,\tau):=\Phi_{W,g}^*.$$

命题 5.2. 若 $c_1(T^{1,0}M)=0$，则椭圆属 $\Phi_{L,g}$，$\Phi_{W,g}$，$\Phi_{W,g}^*$ 是权为 $d+1$ 、指标为 0 的弱亚纯雅可比形式，分别定义在 $\Gamma_0(2)$、 $\Gamma^0(2)$、 Γ_θ 上。

6. Acknowledgements

作者受到中国吉林省科技发展计划项目（编号：20260102245JC）和国家自然科学基金（编号：11771070）的资助。

数据可用性：本文没有相关数据。声明 利益冲突：本文不存在利益冲突。

References

[1] K. Chandrasekharan，《椭圆函数》，Spinger-Verlag，1985年。[2] Q. Chen、F. Han、W. Zhang，广义Witten亏格与消灭定理。《微分几何杂志》88(2011)，第1期，1-40。[3] V. Gritsenko，复向量丛与Jacobi形式，arXiv。arXiv:math/9906191，（1999年）。[4] J. Guan、K. Liu 和 Y. Wang，$\hat{}A_2^{(2)}-$亏格与几乎复流形的反常抵消公式，预印本。[5] J. Guan、Y. Wang 和 H. Liu，$SL(2,\mathbf{Z})$模形式与奇数维中的Witten亏格，即将在《非交换几何》发表。[6] F. Han、J. Yu，关于奇维流形的Witten刚性定理，arXiv:1504.03007，2015年。[7] P. Li，复数 -1现象与多重 χ_y亏格和椭圆属，《太平洋数学杂志》273（2015年）331-351。[8] K. Liu，模不变性与特征数。《通讯数学物理》174（1995年），29-42。[9] K. Liu，关于椭圆亏格与θ函数。《拓扑学》35（1996年），第3期，617–640。[10] K. Liu、Y. Wang，奇数维中的模不变性与反常抵消公式，《几何物理杂志》99（2016年），190-200。[11] K. Liu、Y. Wang，奇数维中的模不变性与反常抵消公式 II，《数学学报（英文版）》33（2017年），第4期，455-469。[12] Y. Wang，$SL(2,\mathbf{Z})$模形式与几乎复流形的反常抵消公式，《太平洋数学杂志》333（2024年），第1期，181–196。[13] W. Zhang，《Chern-Weil理论与Witten变形讲义》。南开数学丛书第4卷，World Scientific，新加坡，2001年。

数学与统计学院，东北师范大学，中国吉林省长春市，邮编：130024，电子邮箱：*wangy581@nenu.edu.cn*