XUV光电子的相位控制的拉姆齐干涉

Nehakukreti[1] 和 Amol R. Holkundkar[1,*]

[1] 比尔拉理工学院 史拉尼校区物理系，印度拉贾斯坦邦史拉尼，邮编333031。(日期: 2026年1月12日)

我们研究了由两个具有时间延迟、线性偏振的极紫外（XUV）激光脉冲产生的光电子动量分布中的拉姆齐型量子干涉。对于初始制备在携流$2p+$ 态的氖原子，我们在单活性电子近似下求解全维含时薛定谔方程，研究电子动力学。两个脉冲释放的电子波包相干叠加，在能量分辨光谱和角分辨动量分布中均产生显著的干涉条纹。我们证明，条纹位置由脉冲间延迟期间积累的Ramsey相位决定，因此随相对载波包络相位线性变化，且条纹间距与延迟时间成反比。通过系统地改变激光强度，我们确认观测到的调制源于时间量子干涉，而非奥特勒–汤斯分裂。对含时束缚态布居动力学的分析表明，载波包络相位依赖的束缚态间耦合由向$2s$ 态的瞬态布居转移主导，并控制干涉对比度。我们还将积累的相位解释为缀饰束缚态的动态斯塔克位移，并用约化两能级模型对其进行定量再现。

arXiv:2601.05561v1 [physics.atom-ph] 9 Jan 2026

I. 引言

阿秒科学 [1] 的兴起为探测和控制原子及分子中的超快电子动力学开辟了新的前沿 [2]。尤其是，基于高次谐波产生（HHG）和自由电子激光器（FEL）的极紫外（XUV）及软X射线光源的发展，深刻改变了对原子、分子和固体中超快电子动力学的研究 [3–7]。极紫外脉冲使人们能够直接观测电子在其本征时间尺度上的运动，从而得以高精度地研究超快光电离 [8, 9], 、量子相干性和波包演化 [10–12]。

当前超快科学的一个重要趋势，是利用光偏振和相位作为控制参数来编码和获取动力学信息 [13, 14]。尤其是圆偏振和椭圆偏振，使人们能够深入研究光电子圆二色性[15–17], ，揭示其对轨道角动量、电子手性 [18–20], 以及非手性纳米结构产生的圆二色性的敏感性 [21, 22]。这些现象源于光螺旋度 [23, 24] 与电子波函数内禀角动量之间的相互作用，因此，相位和偏振控制的光电离是探测对称性与超快动力学的有力手段 [25, 26]。因此，理解驱动场的相位、偏振和时间结构如何影响光电子发射，已成为备受关注的课题 [27–32]。

长期以来，光电离一直是原子、分子与光学物理中探测电子结构和动力学的基石。早期的角分辨光电子能谱确立了光电子角分布与初始束缚态对称性之间的联系。随着超快激光光源的出现，时间分辨光电子能谱得以直接追踪激光–物质相互作用过程中的波包演化、相干性和布居转移 [8, 12, 14]。在泵浦–探测方案中，电离起到投影测量的作用，将瞬态量子相干性转化为可测量的动量和能量分辨观测量 [33]。因此，光电子动量分布（PMD）已成为一种灵敏的工具，可用于区分相互竞争的电离路径、探测相位积累，并识别中间束缚态和连续态的作用 [34–36]。

在光电离中的各种基于干涉的现象中，拉姆齐型干涉占据着独特的地位 [37–39]。拉姆齐干涉最初是在原子钟和精密光谱学领域发展起来的，它源于两个在时间上分离的激发事件所产生的量子振幅的相干叠加 [40]。在光电离中，这表现为依赖能量和角度的干涉条纹；其间距由脉冲间延迟决定，相位则由脉冲间的相对光学相位控制。这一机制与奥特勒–汤斯分裂有着本质区别；后者源于束缚态的强场缀饰，并导致与拉比振荡相关、依赖强度的光谱双峰[41, 42]。奥特勒–汤斯光谱反映的是准稳态的缀饰态形成，而拉姆齐干涉则是一种纯粹的时间效应，由不同电离路径之间的相位积累 [43] 所支配。因此，区分这两种机制对于正确解释超快光电子光谱中观测到的干涉结构至关重要。

在极紫外区，拉姆齐干涉受到的关注相对有限，尤其是在单光子电离极限下，此时有质动力势移和多光子耦合等强场效应可以忽略不计。此外，载波包络相位（CEP）在控制极紫外光电离中的拉姆齐干涉方面所起的作用仍鲜有研究。在极紫外频率下，人们通常认为载波包络相位对单脉冲电离的影响较弱，这是由于

* amol@holkundkar.in

光学周期较短。然而，当电离路径在时间上彼此分离时，载波包络相位会直接影响累积相位，从而显著改变干涉对比度和条纹结构。与此同时，激光诱导的相位偏移也引发了一个重要问题：动态斯塔克效应是否会 [44]影响连续态中的拉姆齐干涉。

在本研究中，我们通过对两个具有时间延迟的线偏振脉冲驱动的极紫外光电离开展全维含时薛定谔方程（TDSE）研究，探讨这些问题。我们聚焦于初始制备在携带电流的 $2p_+$ 态的氖原子；该态天然对角动量和相位敏感。通过系统地改变载波包络相位（CEP）、脉冲间延迟、波长和激光强度，我们证明，光电子动量和能量分布中观察到的干涉图样源于拉姆齐型时间干涉，而非奥特勒–汤斯分裂。时间分辨布居分析表明，在单活性电子近似下，以向 $2s$态的瞬态布居转移为主的、依赖 CEP 的束缚态间耦合，在控制累积相位方面发挥着核心作用。我们进一步表明，束缚态的含时能移可由约化两能级模型定量描述，从而为完整 TDSE 结果提供了清晰的物理解释。

从实验角度来看，本研究与当前超快光谱学领域的研究工作直接相关[45]。基于高次谐波产生的极紫外光源和自由电子激光器的发展，使得产生相位稳定、具有可控偏振和相对相位的延迟极紫外脉冲对成为可能 [3]。载波包络相位标记和稳定技术，结合速度映射成像 [46] 和冷靶反冲离子动量谱 [47–49], 等动量分辨电子探测方法, 使得在实验上观测载波包络相位控制的拉姆齐干涉成为可能。因此，我们的结果为未来旨在利用时间干涉作为相位敏感探针、研究极紫外区电子动力学的实验提供了明确的理论基准和物理指导。

本文结构安排如下。第II节介绍基于单活性电子近似求解含时薛定谔方程的理论框架和数值方法。第III节展示并讨论研究结果，分为五个小节。最后，第IV节总结主要结论并展望未来研究方向。此外，附录A中讨论了与缀饰能级相关的计算。

II. 理论与数值考量

我们采用含时广义伪谱（TDGPS）方法，在单活性电子近似（SAE）下，开发了一种全维含时薛定谔方程（TDSE）求解器 [50–53]。

长度规范下的含时薛定谔方程（TDSE）写作：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(\mathbf{r},t)\right\rangle = \left[H_0 + H_{\rm L}(t)\right]\left|\psi(\mathbf{r},t)\right\rangle, \tag{1}$$

其中，$H_0 = -\nabla^2/2 + V(r)$ 为无场哈密顿量，$H_{\rm L}(t) = -\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(t)$ 是长度规范下的相互作用哈密顿量，其中 $\mathbf{E}(t)$ 是偶极近似下驱动激光场的时间轮廓，由两个存在时间延迟的线偏振脉冲叠加而成：$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E_1}(t\ \phi_1) + \mathbf{E_2}(t - \tau, \phi_2)$，其中，

$$\mathbf{E_j}(t,\phi_j) = E_0 \sin^2(\pi t/T)\sin(\omega_0 t + \phi_j)\ \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \tag{2}$$

这里，E_0 [a.u.] $\simeq 5.342\times10^{-9}\sqrt{I_0}$为场振幅，峰值强度 I_0 以 W/cm^2, 为单位表示， $\omega_0 \simeq 1.14$ a.u. 是对应于 XUV波长 $\lambda = 40$ nm 的激光载波频率。每个脉冲仅在时间窗口 $0 \le t \le T$ 内非零，第二个脉冲的脉冲包络则按延迟 τ 在时间上平移。两个脉冲均沿 x 轴偏振，即 $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{x}}$。 ϕ_j 表示两个脉冲的载波包络相位（CEP）；不过，全文均考虑 $\phi_1 = 0$，此后将 $\phi = \phi_2 - \phi_1$ 称为该脉冲的 CEP（两个脉冲之间的相对相位）。每个脉冲的脉冲持续时间设为 $T = 5\tau_0$，其中 τ_0[a.u.] $= 2\pi/\omega_0$ 为对应波长的一个周期的持续时间。本文所考虑的所有激光参数均可通过当前激光技术在实验上实现 [54, 55]。除非另有说明，全文均采用原子单位（$|e| = m_e = \hbar = 1$）。

在单活性电子近似（SAE）下，H_0 中的原子库仑势 $V(r)$采用由 [56]给出的经验表达式进行建模：

$$V(r) = -\frac{1 + a_1\,\mathrm{e}^{-a_2 r} + a_3\,r\,\mathrm{e}^{-a_4 r} + a_5\,\mathrm{e}^{-a_6 r}}{r} \tag{3}$$

原子种类氢、氦、氖和氩所对应的系数a_i'的数值列于文献 [56]中。该$V(r)$的经验表达式基于单活性电子近似下的无自相互作用密度泛函理论。将 TDGPS 方法与该原子势结合的一个优点是无需进行软核正则化，这与笛卡尔网格实现不同。

在 TDGPS 方法中，径向区域$r = [0, R_{max}]$ 被映射到范围 $s = [-1, 1]$，随后使用勒让德多项式的根进行离散化。因此，无论我们在$s \equiv [-1, 1]$ 与径向点$r = 0$ 之间考虑多少个径向点，与$s = -1$ 相对应的点都不会被纳入模拟区域 [50, 51, 57]。对模型势的这种精确处理使我们能够高精度地计算电离势及其他物理量。例如，在本文中，我们采用了 $R_{\rm max} = 500$ 原子单位（a.u.）的径向模拟区域，并将最后 50 个原子单位用作掩膜区域，以吸收出射波函数。

场自由哈密顿量H_0 每个分波的本征能量$E_{n\ell}$ 及其对应的径向本征函数$R_{n\ell}(r)$，在传播前使用分裂算符方法 [51]进行计算。由于径向本征态

与球谐函数 $\{R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\}$ 一起在有限模拟盒内构成完备基组，因此，含时波函数在H_0的能量基中展开为：

$$\psi(\mathbf{r},t) = \sum_{n,\ell,m} C_{n,\ell,m}(t)\, R_{n\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi). \tag{4}$$

其中，$C_{n\ell m}(t)$ 是相应态的时间依赖概率振幅。这些系数使我们能够追踪相互作用期间随时间变化的布居动力学。由于动力学主要由单光子电离主导，因此结果在 $\ell_{\max} = 15$ 时已收敛。此外，TDGPS 方法允许使用较粗的时间步长而不影响结果；在本例中，当模拟时间步长为$\delta t = 0.2$ a.u. 时，结果已收敛。

为了获得收敛的电子能量分布，我们在第二个脉冲结束后（$T_{end,II}$），即 $T_{final} = T_{end,II} + 50\tau_0$，继续传播波函数 50 个光学周期。最终波函数，例如 $\psi_{final}(r, T_{final})$，在 $r \leq r_0$ 处进行掩膜，其中 $r_0 = 100$ a.u.，以提取波函数的连续态部分：$\psi_{cont}(r) = M(r, r_0)\psi_{final}(r, T_{final})$，其中 $M(r, r_0) = [1 + e^{-3(r-r_0)}]^{-1}$。该掩膜可避免束缚态分量的污染，也可避免来自单活性电子势偏离类氢库仑势区域的污染。随后，将 ψ_{cont} 投影到解析已知的氢原子库仑散射态 [58]上，从而得到光电子动量分布。尽管 Ne 的单活性电子势在内区不同于纯库仑形式，但其渐近行为与 $-1/r$ 相同。当电子波包到达 $r \gtrsim 100$ a.u.、进行投影的位置时，精确的单活性电子连续态与解析的氢原子库仑散射态之间的差异仅表现为短程相位，不会影响渐近动量分布 [58]。因此，投影到库仑散射态上，是计算渐近动量 k 对应的微分电离概率 dP/dk 的理论可靠且计算高效的近似方法，

$$\frac{dP}{d\mathbf{k}} = |\langle \psi_k^{-,C} | \psi_{cont}(\mathbf{r}) \rangle|^2, \tag{5}$$

其中，$|\psi^{-,C}_k\rangle$是解析已知的库仑波[58]。如参考文献 [59, 60], 所述，这些光电子动量分布也通过另一种方法进行了基准验证，尽管该方法计算开销较大：每个时间步都需要滤出波函数，模拟结束后还需将所有贡献相干叠加，随后通过投影到沃尔科夫态上得到光电子动量分布。

III. 结果与讨论

A. 理解光电子动量分布

首先，我们考察两个存在时间延迟、沿x轴偏振的线偏振 XUV脉冲与氖原子的相互作用。每个脉冲持续5个光学周期，两脉冲之间的延迟为 $\tau = 6\tau_0$，峰值强度为$I_0 = 10^{14}$ W/cm^2, 。

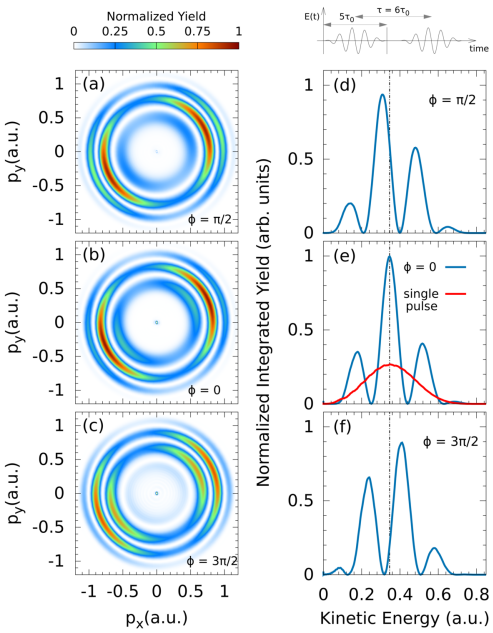

图 1. 展示了x–y 平面内的光电子动量分布，载波包络相位为 $\phi = \pi/2$（a）、 $\phi = 0$（b）和 $\phi = 3\pi/2$（c）。对应情况的总角度积分能量分布分别如（d）、（e）和（f）所示，同时还展示了仅使用单脉冲时的情况 [（面板（e）中的红色曲线）]。本图所有结果的产额均以$\phi = 0$ 情况为基准进行归一化。图中还示意了两个五周期脉冲，它们之间的延迟为 $\tau = 6\tau_0$。 （d）、（e）和（f）中的竖直虚线表示$E_{kin} \simeq 0.346$ 原子单位 [方程（6）]。

氖原子处于具有概率流的$2p_+$ 束缚态。该态对应于$2p$ 态流形中的磁子能级$m = +1$，并具有与其轨道角动量相关的明确方位概率流。在我们的单活性电子近似（SAE）势中，该态的无场能量为$E_0 = -0.7933$ 原子单位。

图中展示了三种不同相对载波包络相位下的光电子动量分布1 (a)–(c)，相应的角度积分能谱见图 1 (d)–(f)。动量分布呈现出一系列同心环，其径向强度调制对载波包络相位十分敏感。这些结构源于第一和第二个脉冲分别释放的电子波包之间的相干叠加。时间延迟 $\tau = 6\tau_0$ 使第一个脉冲发射的波包在第二个脉冲到达之前积累依赖载波包络相位的相位，而这一相位差直接映射到光电子动量分布的角向结构上。

对于参考情况 $\phi = 0$ [图 1(b)], , 产额分布在多个同心环上，与中心峰相比呈现特定的强度平衡。将载波包络相位改为 $\phi = \pi/2$ 或 $\phi = 3\pi/2$，不会改变光电子动量分布的角向结构；相反，它会重新分配这些环的相对亮度 [图 1(a) 和 1(c)]。这一现象反映了载波包络相位的变化会改变每个脉冲中的电场相位

，从而改变与两个时间上分离的脉冲相关的电离振幅之间的干涉。

（d）–（f）面板中的角度积分能谱进一步说明了时间量子干涉的作用。每个能谱都呈现出多个峰，这些峰源于不同时刻发射的电子波包之间的干涉，包括两个脉冲内以及两个脉冲之间的干涉。载波包络相位会改变这些电离路径之间累积的相位，因此能够调控光谱峰的对比度和相对高度。相比之下，单脉冲能谱[图 1（e）] 中的红色曲线呈现平滑且宽广的能量分布，没有此类调制，表明多峰结构是双脉冲干涉的直接结果。

单脉冲情形为理解双脉冲结果提供了一个自然的参照。对于单个极紫外脉冲，能谱中的主峰源于初始 $2p_+$ 态的单光子电离，其位置为

$$E_{\mathrm{kin}} = \hbar\omega_0 - I_p - U_p.$$

在此处采用的极紫外光子能量下，平均振动能可以忽略不计（$U_p \sim 5.5\times10^{-4}$ 原子单位，$I_0 = 10^{14}$ 瓦/厘米^2），因此可将其忽略。峰值位置由此可近似表示为

$$E_{\mathrm{kin}} \approx \hbar\omega_0 - I_p \approx 0.346\ \text{a.u.}, \tag{6}$$

如图中的红色曲线所示1(e)。

值得注意的是，对于 CEP $\phi = 0$这一特定情况，双脉冲能谱中的中心峰与单脉冲结果出现在相同的动能处。因此，$\phi = 0$ 情况可作为便于归一化和比较的参考，从而能够相对于未发生变化的峰位，识别 CEP 引起的光电子产额重新分布。

我们注意到，从 $2p_-$ $(m=-1)$ 初始态得到的光电子动量分布，是 $2p_+$ $(m=+1)$ 态对应分布的镜像。这直接源于初始束缚态的方位相位结构，$Y_{1m}(\theta,\varphi) \propto e^{im\varphi}$，其中 φ表示方位角。反转 m 的符号相当于复共轭角依赖性，这等价于在偏振平面内进行空间变换 $\varphi \to -\varphi$，或等价地进行 $p_y \to -p_y$ 变换。由于线偏振驱动场保持反射对称性，光电子动量分布的所有干涉特征在这种变换下均得以保留，只是手性发生反转。因此，$m = \pm1$ 对应的动量分布互为镜像反射，包含相同的物理信息。

如图 1所示，载波包络相位的变化会通过两个延迟脉冲释放的波包之间的量子干涉改变能谱。为进一步阐明载波包络相位与脉冲间延迟的综合作用，图2给出了这些参数取不同值时的积分能谱。

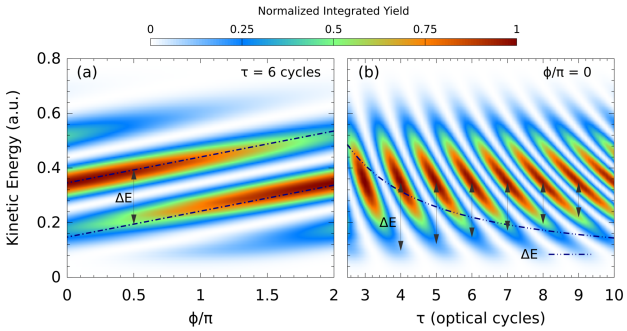

图2. 对于两个线偏振XUV脉冲，角度积分光电子能量产额随以下参数的变化：(a) 固定脉冲间延迟为 $\tau = 6$ 个光学周期时的载波包络相位 ϕ；(b) 固定载波包络相位为 $\phi = 0$时的脉冲间延迟 τ。明亮的脊线对应于两个脉冲释放的电子波包之间的相长干涉。箭头标示相邻干涉条纹之间的能量间距 ΔE。(a)中固定延迟时载波包络相位的线性依赖关系，以及(b)中条纹间距与延迟的反比关系 $\Delta E \propto 1/\tau$，均以虚线表示。

B. 载波包络相位和脉冲间延迟对光电子动量分布的影响

图 2展示了角度积分光电子能量产额随相对载波包络相位和脉冲间延迟的变化。在单光子XUV区域，电离过程遵循微扰规律，给定动能 E 对应的总光电子振幅可写成两个时间上分离的脉冲各自贡献的相干叠加：

$$A(E) = A_1(E)e^{-i\phi_1} + A_2(E)e^{-i\phi_2}e^{iE\tau}, \tag{7}$$

然而，在我们的情形中，$\phi_1 = 0$ 和 $\phi = \phi_2 - \phi_1 = \phi_2$ 是两个脉冲的相对载波包络相位。因此，上述方程修改为：

$$A(E) = A_1(E) + A_2(E)e^{i(E\tau-\phi)}, \tag{8}$$

其中，$A_1(E)$和$A_2(E)$分别是与第一和第二个脉冲相关的复电离振幅。相应的光电子产额为

$$|A(E)|^2 = |A_1(E)|^2 + |A_2(E)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[A_1^*(E)A_2(E)\,e^{i(E\tau-\phi)}\right]. \tag{9}$$

由于各个贡献 $|A_1(E)|^2$ 和 $|A_2(E)|^2$ 均独立于相对载波包络相位，且仅随能量缓慢变化，因此构成平滑的背景。因此，图2 中观察到的所有载波包络相位和延迟相关调制都源于干涉项。

干涉项随累积的拉姆齐相位$E\tau - \phi$振荡，该相位决定了光电子能谱中极大值和极小值的位置。干涉条件可写为

$$E\tau - \phi = n\pi, \tag{10}$$

其中整数n。n 的偶数值（$n = 2k$）对应相长干涉，使光电子

产额，而奇数值（$n = 2k + 1$）对应相消干涉，使光电子产额受到抑制。这些相位匹配条件定义了图2中观察到的明暗条纹。

图 2(a) 中，脉冲间延迟固定为 $\tau = 6$ 个光学周期，并改变载波包络相位。根据上述条件，干涉极大值的能量与 ϕ 呈线性关系，$E_n(\phi) = (2\pi n + \phi)/\tau$，因此图中出现了倾斜的直线状脊线。虚线表示根据这一线性关系进行的拟合，与数值数据吻合良好。

图 2(b) 中，载波包络相位固定为 $\phi = 0$，并改变脉冲间延迟 τ。在这种情况下，同一拉姆齐条件预言，相邻干涉极大值之间的间距按

$$\Delta E = \frac{2\pi}{\tau}. \tag{11}$$

图中标示条纹间距的箭头直观地凸显了这种反比关系。2(b) 中，随着延迟增加，ΔE 系统性减小，这证实能量域调制源于时间上分离的两条电离路径之间的相位积累，与拉姆齐光谱学框架完全一致。

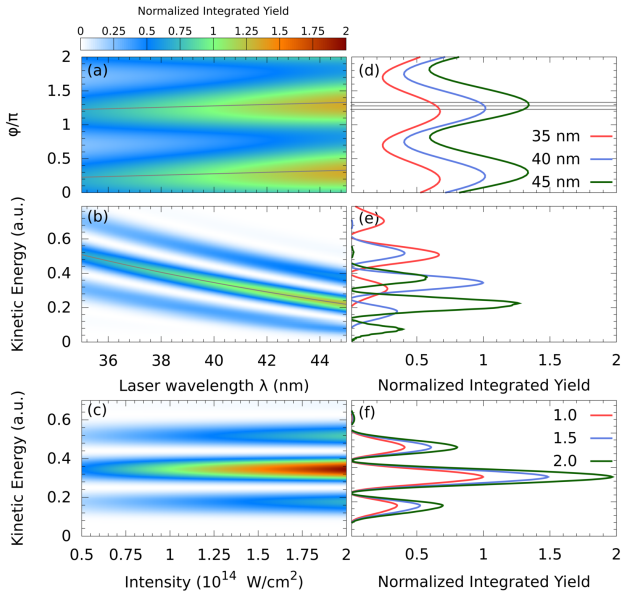

图 3. 固定载波包络相位 $\phi = 0$ 和脉冲间延迟 $\tau = 6$ 个光学周期时，激光波长和强度对光电子能谱的影响。(a) 能量积分角分布随激光波长 λ 的变化。(b) 对应的角度积分能量–波长图，显示干涉条纹随光子能量发生系统性偏移。(c) 其他激光参数均固定时的能量–强度图。(d)–(f) 分别展示从面板(a)–(c)中提取的代表性光谱。在面板(f)中，强度以 10^{14} W/cm^{2}为单位表示。

C. 其他激光参数的影响

为进一步考察干涉图样的稳健性，我们研究光电子能谱对其他激光参数的依赖性，即激光波长和峰值强度。波长在 35 至 45 nm 之间变化，强度则从 0.5×10^{14} 到 2×10^{14} W/cm^{2}进行扫描。在整个分析过程中，载波包络相位固定为 $\phi = 0$，脉冲持续时间保持为 $5\tau_0$，脉冲间延迟固定为 $6\tau_0$，其中 $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ 表示与相应波长对应的光学周期。结果汇总于图3。

能量积分角分布随波长的变化如图 3(a) 所示，强度固定为10^{14} W/cm^2。可以观察到，随着波长增加，角分布出现微弱但系统性的偏移。这种行为可以通过运动学关系 $\tan\varphi = p_\perp/p'_\parallel$来理解，其中 $p_\perp$ 和 $p'_\parallel$ 分别是渐近光电子动量的横向分量和经过缩放的纵向分量。由于光学周期数保持不变，脉冲持续时间随波长线性变化，即 $T = 2\pi N/\omega_0 \propto \lambda$，使纵向动量尺度随 λ的增加而有效扩展。因此，为了在统一基准下比较不同波长，纵向动量按 $p'_\parallel = p_\parallel(\lambda_0/\lambda)$重新缩放，其中 $\lambda_0 = 40$ nm 选作参考波长。采用这一缩放后的动量，图 3(a) 中的脊线遵循简单的正切定律

$$\varphi \approx \arctan\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathrm{kin},\lambda}}}\right). \tag{12}$$

在单光子XUV区域，动能为

$$E_{\mathrm{kin},\lambda} \approx E_{\mathrm{ph}}(\lambda) - I_p, \tag{13}$$

其中，$E_{\mathrm{ph}}(\lambda)$表示与波长 λ相关的光子能量。在此处所考虑的强度下，有质动力能U_p 可以忽略，因此将其省略。

相应的角度积分能量–波长图如图3（b）所示。干涉条纹随波长系统性地发生移动，反映出光子能量的变化。对于单光子XUV电离而言，这种行为是预期的：绝对条纹位置由方程（13）决定，而条纹间距则由Ramsey相位条件通过脉冲间延迟固定，即 [方程（11）]。图3（e）中的代表性光谱进一步表明，尽管峰位置随波长发生移动，但整体干涉结构得以保持。

相比之下，图 3(c) 展示了在波长固定时改变激光强度的影响。随着强度增加，干涉条纹依然存在，且能量间隔基本保持不变，这一点在图 3(f) 的谱图中尤为明显。虽然总产额随强度成比例增加——这反映了电离过程中涉及的光子数更多——但条纹间距保持不变。这种行为与奥特勒–汤斯分裂不相符

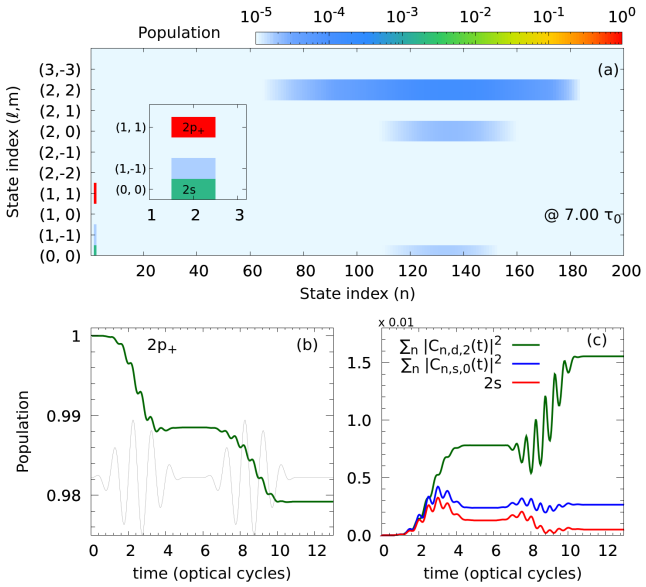

图 4. 时间分辨布居动力学，展示载波包络相位在干涉图样形成中的作用。(a) 在 $t = 7\tau_0$ 时，场自由本征态（n ℓ,m）上的布居分布快照，显示初始制备的 2p+ 态向邻近束缚态和连续态的布居转移。(b) 2p+ 态布居的时间演化，展示其在与两个延时激光脉冲相互作用期间的阶梯式耗减；图中同时给出了示意性的激光脉冲包络以供参考。(c) 对不同角动量通道求和得到的时间分辨布居，以及 2s 态的布居，突出了延迟区间内的瞬态布居俘获和重新分布。

机制 [41], ；该机制会导致分裂随强度变化，并与拉比频率成正比。因此，这种依赖关系的缺失排除了Autler–Townes物理。

相反，观测到的与强度无关的条纹间距为以下观点提供了有力证据：光谱调制源于两个延时脉冲释放的电子波包之间的 Ramsey型时间干涉。在这一图像中，条纹间距仅由脉冲间延迟 [式（11）] 决定，并且对激光波长（除平凡的能量位移外）和场强均不敏感。基于这些观察结果，除非另有说明，后续所有结果均采用波长 40 nm、脉冲持续时间为 $5\tau_0$、脉冲间延迟为 $6\tau_0$以及峰值强度为 10^{14} W/cm^2, 。

D. 布居动力学

为深入了解载波包络相位（CEP）如何控制光电子能谱中观测到的干涉图样，我们分析了与两个存在延迟的激光脉冲相互作用期间，随时间变化的布居动力学。

如前所述，由含时薛定谔方程传播得到的含时波函数按式（4）在场-自由本征基底中展开，因此，$|C_{n,\ell,m}(t)|^2$表示在给定时刻 t，波函数 $\psi(r,t)$ 处于态 (n ℓ,m) $\equiv R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ 的概率。显然，激光驱动的动力学过程涉及大量具有不同 (n ℓ,m) 量子数的束缚态和连续态之间的布居转移。因此，最终的演化体现了多种激发和电离路径之间复杂的相干相互作用。作为一个典型示例，我们在图 4(a) 中展示了 t $= 7\tau_0$ 时所有能级布居的一个瞬时快照。

从图中可以看出，从初始制备的携流 2p+ 态出发，布居不仅转移到连续态，也转移到邻近的束缚态，其中尤以 2s 态最为显著。这种布居再分配揭示了多个电离路径相互干涉的微观起源，从而产生了光电子动量分布中观测到的能量域条纹。

图4 （b）展示了 2p态布居随时间的耗尽情况。布居呈阶梯式减少，反映了体系与第一和第二个脉冲依次相互作用，这一点也由叠加显示的激光场示意图突显。重要的是，布居并非单调衰减，而是在延迟区间内呈现平台，这表明束缚态和连续态分量形成的相干叠加在脉冲间延迟期间持续存在。

从呈现角度来看，识别出单一且明确定义的电离路径既不切实际，也无助于深入理解，因为观测到的干涉效应源于许多此类通道的集体叠加。为获得更清晰的物理图像，图4(c)给出了所有（s,0）和（d,2）通道的布居总和，$\sum_n |C_{n,s,}0(t)|^2$ 和$\sum_n |C_{n,d,}2(t)|^2$，并同时给出了2s 态的布居。这表明，在相互作用期间及随后的延迟区间内，2s 能级对（s,0）通道的布居总和贡献最大。基于这一观察，下文将重点关注2s 态的时间分辨布居动力学，将其作为载波包络相位控制的束缚态参与干涉过程的代表性指标

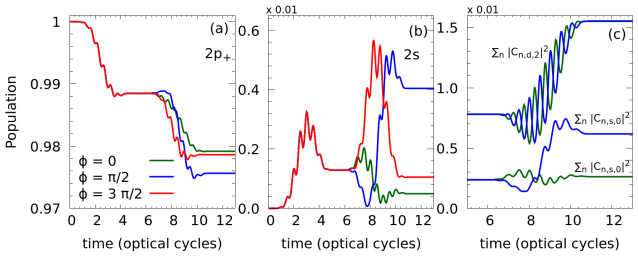

图5. 固定脉冲间延迟 $\tau = 6\tau_0$时，载波包络相位依赖的布居动力学。(a) 不同载波包络相位值下，初始布居的 2p+ 态的耗尽。(b) 2s 态的时间分辨布居，显示出对载波包络相位的强烈敏感性。(c) 对不同主量子数和角动量通道的布居求和，展示了载波包络相位控制的束缚态和连续态之间的布居重新分布。所有物理量均以光学周期为单位表示为时间的函数。

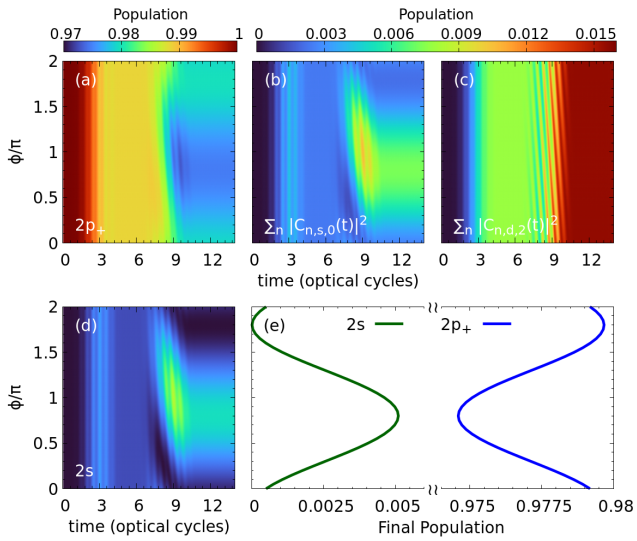

图6. 给出了初始态为 $2p+$ 时布居的载波包络相位-时间图(a)，以及求和后的 (s，0) (b) 和 (d，2) (c) 通道；而 (d) 则明确展示了 $2s$ 态的情况。(e) 还展示了 $2s$ 和 $2p+$ 在第二个脉冲之后的最终布居随载波包络相位的变化。

过程。可以看出，$2s$ 态布居呈现显著的时间调制，这表明瞬态布居俘获和束缚态间耦合在塑造第二个脉冲引发的后续电离过程中发挥着重要作用。

此外，图5着重展示了载波包络相位对这些动力学过程的影响，其中比较了不同载波包络相位值下的布居演化。初始 2p+ 态的耗尽 [图5(a)]仅受载波包络相位的微弱影响，而 2s态的布居 [图5(b)]则明显依赖于载波包络相位。这种敏感性表明，载波包络相位主要调控不同激发路径之间的相对相位，而非总电离概率。在图5(c)中，还比较了 $\phi = 0$ 和 $\pi/2$条件下 (d,2) 与 (s,0) 通道的总布居。可以看出，(d,2) 通道的布居动力学主要表现为相对相位偏移，而 (s,0) 通道则呈现出明显不同的时间演化。图5(c)所示的总布居证实，载波包络相位会在束缚通道和连续态通道之间重新分配布居，但不会显著改变整体耗尽程度。

虽然这类线图清晰地展示了特定相位下的动力学，但无法全面反映布居再分配对相位的整体依赖性。为获得全面的认识，图6 展示了初始 $2p+$ 态及选定束缚态流形的时间分辨布居动力学载波包络相位–时间图。这种表示揭示了布居随载波包络相位的连续演变，并突显了第二个脉冲所引起的布居调制的系统性相移。尤其是，载波包络相位–时间图直观展现了两个脉冲激发的激发路径之间的拉姆齐型干涉，从而建立了载波包络相位控制的束缚态动力学与光电子能谱。

图6 的(a)面板显示了初始携流$2p+$ 态中剩余布居的载波包络相位–时间图，展现了在与两个具有时间延迟的极紫外脉冲相互作用期间，布居平滑但具有相位敏感性的耗减。转移到s波（$\ell = 0$，$m = 0$）和d波（$\ell = 2$，$m = 2$）流形中的相应布居，对主量子数n求和后，分别显示在(b)和(c)面板中。这些图呈现出显著的载波包络相位依赖调制，并与第二个脉冲的时间重叠同步，表明由两个脉冲启动的激发路径之间存在干涉。

为突出特定束缚态的作用，(d)面板明确显示了$2s$态布居的载波包络相位–时间图。与(b)面板中求和后的s波道布居相比，$2s$态体现了占主导地位的载波包络相位依赖调制，证实在当前参数范围内，它对低位束缚态动力学作出了主要贡献。在第二个脉冲作用期间观察到的强相位敏感性，反映了与两个脉冲相关的激发振幅之间相对相位的积累，这与拉姆齐型干涉直接类似。

最后，面板 (e) 展示了第二个脉冲结束后，$2s$ 和 $2p+$ 态的最终布居随载波包络相位的变化。这些布居呈现反相关的载波包络相位依赖性，表明载波包络相位不仅影响瞬态动力学，还提供了一个稳健的控制旋钮，用于引导束缚态之间的布居再分布。总之，图 6 清晰地确立了载波包络相位控制的相位积累、时间分辨的束缚态动力学，以及在光电子动量和能量分布中观察到的干涉结构之间的联系。

这些观察结果为载波包络相位如何控制前文讨论的干涉图样提供了清晰的物理图像。载波包络相位通过改变第一个脉冲产生的布居分量与第二个脉冲驱动的布居分量之间积累的相对相位，控制电离路径的相干叠加。这种依赖于载波包络相位的布居再分布，尤其是涉及 $2s$ 态的再分布，最终表现为光电子动量和能量分布中干涉条纹的调制。

E. 载波包络相位驱动的动态斯塔克位移

正如我们观察到的，载波包络相位通过占主导地位的 $2s$ 通道控制束缚态间耦合动力学。这种载波包络相位控制可以从第二个脉冲相互作用后积累的相位来理解。这种相位积累可归因于 $2s$ 态的动态斯塔克位移，即着装场中 $2s$ 态的能量位移。由于含时薛定谔方程波函数是在无场哈密顿量的能量本征基底上展开的，每个展开系数都会自然获得一个由相应本征能量决定的时间相关相位。因此，系数 $C^{2,0,0}(t) \equiv C_{2s}(t) = |C_{2s}(t)|e^{-i\int^t E_{2s}(t')dt'}$，同样，$C^{2,1,1}(t) \equiv C^{2p_+}(t)$ 也可以用带有适当相位的极坐标形式表示。$2s$ 和 $2p+$态的着装能量

可写为：

$$E_{nlm}(t) = -\frac{d}{dt}\arg\left[C_{n,\ell,m}(t)\right]. \qquad (14)$$

图7（实线）展示了不同载波包络相位值下，公式（14）给出的2s态含时缀饰能级，以及2p+ 态的能级（其随时间的变化可以忽略不计）。需要注意的是，公式（14）中的$C_{2s}(t)$是通过完整的含时薛定谔方程求解器获得的，没有采用任何近似，其中波函数由公式（4）给出。简化的双能级模型很好地再现了能级随载波包络相位的这些变化。可以理解，载波包络相位控制着两个束缚态$2p_+ \leftrightarrow 2s$之间的相互作用，这一点也显见于图6(e)：2p+态和2s态的最终布居呈负相关，即一个减少时，另一个增加，反之亦然。我们可以将波函数近似为双能级系统，$|\psi(r,t)\rangle \approx C_{2s}(t)\ |2s\rangle + C_{2p_+}(t)\ |2p_+\rangle$，并根据公式（A6）得到2s能级的缀饰能量：

$$E_{2s}(t) = E^0_{2s} - \frac{|d_x|\,E_x(t)}{|C_{2s}(t)|^2}\Re\left[C^*_{2s}(t)C_{2p_+}(t)\right], \qquad (15)$$

其中，$|d_x| \approx 0.37$ 是通过基于该单活性电子近似的计算得到的偶极矩阵跃迁元，而$E^0_{2s} = -1.629$ a.u. 是无场哈密顿量的本征值，即$H_0|2s\rangle = E^0_{2s}|2s\rangle$，而$E_x(t)$ 是含时激光场。图7还展示了由式（15）给出的 2s 态的含时着装能量，以及由完整含时薛定谔方程直接得到的结果［式（14）］。该约化两能级模型定量地捕捉了载波包络相位引起的动态斯塔克位移；它最终通过所积累的相位影响电离路径，并体现在两个脉冲产生的电离路径之间的拉姆齐干涉中。

直接从含时薛定谔方程提取的着装能量 [式（14）] 与约化两能级表达式 [式（15）] 之间的定量一致性，可从相位演化的结构得到解释。正如时间分辨布居分析所示，相互作用期间的束缚态动力学主要由 $2p_+$ 和 $2s$ 态主导，其他束缚态的布居则可以忽略不计。此外，对于所选偏振，激光场直接耦合 $2p_+$ 和 $2s$态，而与其他束缚态的偶极耦合要么被禁止，要么在动力学过程中受到抑制。

尽管与连续态的耦合会导致束缚态振幅耗减，但它不会对相位导数 $-d\arg[C_{2s}(t)]/dt$产生相干贡献，因为连续态分量会迅速退相干，无法与束缚态保持固定的相位关系。因此，$2s$ 概率振幅的相位变化率完全由其与 $2p_+$ 态的相干相互作用决定。在这种情况下，将含时薛定谔方程投影到 $\{2s, 2p_+\}$ 子空间，就能捕捉与相位演化相关的所有贡献，这也解释了为何约化双能级模型能够再现由含时薛定谔方程得出的 $2s$ 能级的着装能量。

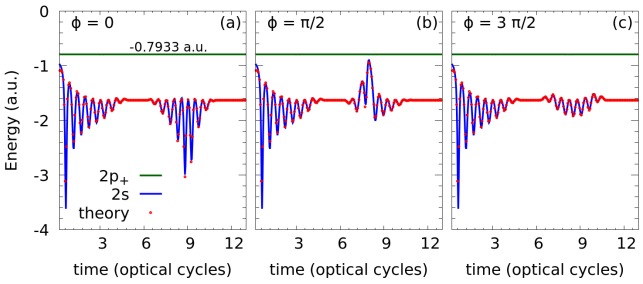

图7. 载波包络相位$\phi = 0$ （a）、 $\phi = \pi/2$ （b）和 $\phi = 3\pi/2$ （c）对应的$2s$ 态缀饰能级，随时间的演化如式（14）所示。$2p_+$ 态的能级也作为参考给出；其时间依赖性可以忽略，对于不同的载波包络相位值，在图示尺度上实际上保持不变。式（15）给出了约化双能级模型的理论估算结果，所有载波包络相位情况下的结果均以红点表示。

IV. 结论

我们已经证明，两个具有时间延迟的极紫外脉冲能够在单光子电离中引发光电子动量和能量分布中的拉姆齐型量子干涉。针对初始制备为携带电流的 $2p_+$ 态氖原子进行的全维度含时薛定谔方程模拟表明，观测到的干涉条纹源于两个脉冲释放的电子波包的相干叠加。条纹位置遵循一个简单的相位匹配条件，该条件由脉冲间延迟和相对载波包络相位决定，因此条纹位置与载波包络相位呈线性关系，而条纹间距则与脉冲间延迟成反比。

通过改变激光波长和强度，我们证实条纹间距不受场强影响，从而排除了奥特勒–汤斯分裂作为其内在机制。相反，这种干涉由不同电离路径之间的时间相位积累所支配，这与拉姆齐干涉图像一致。时间分辨的布居动力学表明，载波包络相位主要控制低能束缚态的相对相位和瞬态布居，其中$2s$态对束缚态动力学的贡献最大。依赖载波包络相位的相位积累可解释为缀饰束缚态的动态斯塔克位移，并可由约化双能级描述准确捕捉。

这些结果统一描述了极紫外光电离中的载波包络相位控制时间干涉，并阐明了束缚态动力学在塑造连续态干涉图样中的作用。

致谢

作者感谢科学技术部（DST）通过 FIST计划提供计算资源（项目编号：SR/FST/PS- 1/2017/30）。作者还感谢BITS - Pilani、皮拉尼。

感谢该校提供高性能计算设施。

数据可用性

支持本文研究结果的数据未公开。合理请求后，可向作者获取这些数据。

附录 A：2s 态的着装能量

为阐明正文中所使用的 $2s$ 态的瞬时缀饰能的起源，我们简要概述在简化双能级描述下的推导。将波函数限制在主要的束缚态子空间内，可写为

$$|\psi(\mathbf{r},t)\rangle = C_{2s}(t)\,|2s\rangle + C_{2p_+}(t)\,|2p_+\rangle\,. \tag{A1}$$

在长度规范下求解含时薛定谔方程，并投影到 $2s$ 态上，得到

$$i\dot{C}_{2s}(t) = E^0_{2s}C_{2s}(t) - d_x E(t)\,C_{2p_+}(t), \tag{A2}$$

其中

$$d_x \equiv \langle 2s|r\sin\theta\cos\phi|2p_+\rangle \tag{A3}$$

它表示沿激光偏振方向的偶极跃迁矩阵元；对于我们的单活性电子势，计算得到 $|d_x| \sim 0.37$。我们可以将复振幅表示为极坐标形式：$C_{2s}(t) = |C_{2s}(t)|e^{-i\int^t E_{2s}(t')dt'}$，与 $2s$分量相关的瞬时能量定义为：

$$E_{2s}(t) \equiv -\frac{d}{dt}\arg[C_{2s}(t)] = \Re\left[\frac{i\dot{C}_{2s}(t)}{C_{2s}(t)}\right]. \tag{A4}$$

代入 $\dot{C}_{2s}(t)$ 的运动方程，并注意到E_{2s} 为实数，我们得到

$$E_{2s}(t) = E^0_{2s} - |d_x|\,E_x(t)\,\Re\left[\frac{C_{2p_+}(t)}{C_{2s}(t)}\right]. \tag{A5}$$

最后，将实部明确改写为

$$E_{2s}(t) = E^0_{2s} - \frac{|d_x|\,E_x(t)}{|C_{2s}(t)|^2}\,\Re\left[C^*_{2s}(t)C_{2p_+}(t)\right], \tag{A6}$$

该量表示 $2s$ 概率振幅相位的瞬时变化率，并捕捉了由与 $2p_+$ 态发生相干偶极耦合而产生的载波包络相位依赖的激光缀饰。

[1] P. B. Corkum 和 F. Krausz, 《自然·物理》3，381（2007）。[2] M. Nisoli、P. Decleva、F. Calegari、A. Palacios 和 F. Martín, 《化学评论》117，10760（2017）。[3] C. Callegari、M. Di Fraia 等, 《物理评论快报》127，113201（2021）。[4] P. Emma、K. Bane、M. Cornacchia、Z. Huang、H. Schlarb、G. Stupakov 和 D. Walz, 《物理评论快报》92，074801（2004）。[5] J. Heslar、D. A. Telnov 和 S.-I. Chu, 《物理评论A》96，063404（2017）。[6] A. Mandal、J. M. Rost、T. Pfeifer 和 K. P. Singh, 《光学快报》30，45020（2022）。[7] V. Nefedova、M. Albrecht、M. Kozlová 和 J. Nejdl, 《电子能谱学与相关现象杂志》220，9（2017）, 《第39届真空紫外与X射线物理国际会议（VUVX-2016）》论文集。[8] M. Reuner 和 D. Popova-Gorelova, 《物理评论A》107，023101（2023）。[9] J. Benda、Z. c. v. Mašín、S. Palakkal、F. Lépine、S. Nandi 和 V. Loriot, 《物理评论A》111，013110（2025）。[10] F. Calegari、G. Sansone、S. Stagira、C. Vozzi 和 M. Nisoli, 《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》49，062001（2016）。[11] P. B. Corkum, 《物理评论快报》71，1994（1993）。[12] G. A. Stewart、P. Hoerner、D. A. Debrah、S. K. Lee、H. B. Schlegel 和 W. Li, 《物理评论快报》130，083202（2023）。[13] M. Berkane、R. Taïeb、G. Granveau、P. Salières、C. Bourassin-Bouchet、C. Lévêque 和 J. Caillat, 《物理评论A》111，L041101（2025）。[14] A. de las Heras、C. Hernández-García、J. Serrano、A. Prodanov、D. Popmintchev、T. Popmintchev 和 L. Plaja, 《物理评论研究》7，023268（2025）。[15] S. R. McKay、D. Ambalampitiya、L.-Y. Peng、A. Saenz 和 J. M. Ngoko Djiokap, 《物理评论A》111，053116（2025年）。[16] A. K. Kazansky、A. V. Grigorieva 和 N. M. Kabachnik, 《物理评论快报》107，253002（2011年）。[17] D. B. Miloševi´c, 《物理评论A》92，043827（2015年）。[18] S. Beaulieu、A. Comby、A. Clergerie、J. Caillat、D. Descamps、N. Dudovich、B. Fabre、R. Géneaux、F. Légaré、S. Petit、B. Pons、G. Porat、T. Ruchon、R. Taïeb、V. Blanchet 和 Y. Mairesse, 《科学》358，1288（2017年）。[19] O. Neufeld、O. Wengrowicz、O. Peleg、A. Rubio 和 O. Cohen, 《光学快报》30，3729（2022年）。[20] Y. Liu、W. Liu、Y. Qin、P. Ge、M. Li 和 P. Lu, 《物理评论A》111，033118（2025年）。[21] X. Zambrana-Puyalto、X. Vidal 和 G. Molina-Terriza, 《自然·通讯》5，4922（2014年）。[22] P. C. Sercel、Z. V. Vardeny 和 A. L. Efros, 《纳米尺度》12，18067 2020( )。[23] Q.-H. Ke、Y.-M. Zhou、Y.-J. Liao、J.-T. Liang、Y. Zhao、J. Tan、M. Li 和 P.-X. Lu, 《物理学前沿》16，52503（2021年）。[24] C. Zhai、X. Zhu、Y. Li、Q. Tang、B. Yu、P. Lan 和 P. Lu, 《物理评论A》111，043519（2025年）。[25] Álvaro Jiménez-Galán、N. Zhavoronkov、M. Schloz、F. Morales 和 M. Ivanov, 《光学快报》25，22880（2017年）。[26] D. M. Reich 和 L. B. Madsen, 《物理评论快报》117，133902（2016年）。[27] Y. Tamura、K. Yamazaki、K. Ueda 和 K. Hatada, 《物理评论A》111，023112（2025年）。[28] E. Orunesajo、S. Abubakar、B. Oguh、Y. Ranathunga、J. Dubois、L. Rico、R. Taïeb、S. K. Lee 和 W. Li, 《物理评论快报》134，203201 2025( )。

[29] X. Zhang、Y. Li、M. Yu、M. He、W.-C. Jiang、Y. Zhou 和 P. Lu，《物理评论A》111，053115（2025年）。[30] A. J. Piper、Q. Liu、A. Camacho Garibay、D. Kiesewetter、V. Leshchenko、J. E. Bækhøj、P. Agostini、K. J. Schafer、L. F. DiMauro 和 Y. Tang，《物理评论快报》134，073201（2025年）。[31] R. Wang、Q. Zhang 和 Y. Qian，《物理评论A》111，013106（2025年）。[32] M. Moioli、M. M. Popova、K. R. Hamilton、D. Ertel、D. Busto、I. Makos、M. D. Kiselev、S. N. Yudin、H. Ahmadi、C. D. Schröter、T. Pfeifer、R. Moshammer、E. V. Gryzlova、A. N. Grum-Grzhimailo、K. Bartschat 和 G. Sansone，《物理评论研究》7，023034（2025年）。[33] K. Ramasesha、S. R. Leone 和 D. M. Neumark，《物理化学年度评论》67，41（2016年）。[34] P.-L. He、Z.-H. Zhang、K. Z. Hatsagortsyan 和 C. H. Keitel，《物理评论快报》134，163201（2025年）。[35] A. Schimmoller、S. Walker、H. Pasquinilli 和 A. S. Landsman，《物理评论A》111，L041102（2025年）。[36] Y. Gebre、S. Walker 和 A. Becker，《物理评论A》109，023120（2024年）。[37] N. F. Ramsey，《物理评论》78，695（1950年）。[38] R. Fang、C. Quan、Z. Hu 等，《物理评论A》108，043721（2023年）。[39] M. Y. Basalaev、V. I. Yudin、D. V. Kovalenko、T. Zanon- Willette 和 A. V. Taichenachev，《物理评论A》102，013511（2020年）。[40] Y. Ma、H. Ni 和 J. Wu，《中国物理B》33，013201（2024年）。[41] A. Yang、W.-Q. Jing、B.-S. Zhang、L.-B. Fan、L. Jia 和 C.-C. Shu，《物理评论A》112，053116（2025年）。[42] T. Bayer、K. Eickhoff 和 M. Wollenhaupt，《物理评论A》108，033111 2023( )。[43] C. Buth 和 K. J. Schafer，《物理评论A》91，023419（2015年）。[44] P. Winter 和 M. Lein，《物理评论A》109，L020801（2024年）。[45] P. Peng、C. Marceau 和 D. M. Villeneuve，《自然评论物理学》1，144 2019( )。[46] A. S. Kheifets 和 I. A. Ivanov，《物理评论A》103，033110（2021年）。[47] M. Weger、J. Maurer、A. Ludwig、L. Gallmann 和 U. Keller，《光学快报》21，21981（2013）。[48] M. Kunitski、H. Sann、S. Eckart 等，《物理评论快报》123，123201（2019年）。[49] D. D. Hickstein、P. Ranitovic 等，《物理评论快报》109，073004（2012年）。[50] X.-M. Tong 和 S.-I. Chu，《化学物理》217，119（1997）。[51] X.-M. Tong，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》50，144004（2017年）。[52] A. R. Holkundkar、R. Rajpoot 和 J. N. Bandyopadhyay，《物理学快报A》461，128645（2023）。[53] R. Rajpoot 和 A. R. Holkundkar，《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》56，105402（2023）。[54] G. Perosa、J. Wätzel、D. Garzella、E. Allaria、M. Bonanomi、M. B. Danailov、A. Brynes、C. Callegari、G. De Ninno、A. Demidovich、M. Di Fraia、S. Di Mitri、L. Giannessi、M. Man- fredda、L. Novinec、N. Pal、G. Penco、O. Plekan、K. C. Prince、A. Simoncig、S. Spampinati、C. Spezzani、M. Zangrando、J. Be- rakdar、R. Feifel、R. J. Squibb、R. Coffee、E. Hemsing、E. Rous- sel、G. Sansone、B. W. J. McNeil 和 P. R. Ribi˘c，《物理评论快报》131，045001（2023）。[55] P.-C. Huang、C. Hernández-García、J.-T. Huang、P.-Y. Huang、C.-H. Lu、L. Rego、D. D. Hickstein、J. L. Ellis、A. Jaron-Becker、A. Becker、S.-D. Yang、C. G. Durfee、L. Plaja、H. C. Kapteyn、M. M. Murnane、A. H. Kung 和 M.-C. Chen，《自然·光子学》12，349（2018）。[56] X. M. Tong 和 C. D. Lin，《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》38，2593（2005年）。[57] J. Wang、S.-I. Chu 和 C. Laughlin，《物理评论A》50，3208（1994）。[58] L. B. Madsen、L. A. A. Nikolopoulos、T. K. Kjeldsen 和 J. Fernández，《物理评论A》76，063407（2007）。[59] M. Murakami、O. Korobkin 和 M. Horbatsch，《物理评论A》88，063419（2013）。[60] M. Murakami 和 G.-P. Zhang，《物理评论A》101，053439（2020年）。