arXiv:2601.05568v1 [math.CV] 9 Jan 2026

复结构的不可延拓性

ZIZHOU TANG 和 WENJIAO YAN

Abstract. 在 S^6 的连通开子集 $S^3_\delta \times S^3$ 上存在复结构 J。本文证明：（1） J 可以延拓为 S^6 上的全局近复结构 $\widetilde{J}$；（2）延拓到 S^6 的任意延拓都必然是不可积的。因此，在固定 $S^3_\delta \times S^3$ 上的结构不变的情况下，不可能将 J 变形为 S^6 上的可积几乎复结构。这一现象表明，丘成桐在其问题 52 中提出的变形策略无法以这种方式实现。

1. 引言

如果一个实光滑流形具有带全纯坐标图的复结构，则称其为复流形。现代纯数学中最重要的问题之一是复结构的存在性或不存在性。虽然每个可定向曲面都具有复结构，但高维情形中的明确例子仍然相对少见。经典例子包括 Hopf 流形，其底层光滑流形为 $S^1 \times S^{2n+1}$；Calabi-Eckmann 流形（[CE53]），其底层光滑流形为 $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ $(p,\ q \geq 1)$；奇数维 Brieskorn 同伦球面的乘积 $\Sigma^{2p+1} \times \Sigma^{2q+1}$（$p$, $q \geq 1$）（[BV68]）；Taubes 自对偶四维流形的扭量空间；以及复射影流形等。

每个复流形都带有由局部全纯坐标诱导的典范几乎复结构，因此也是几乎复流形。回顾一下，在光滑流形 M 上，近复结构是切丛 $TM \to TM$ 的一个自同态 J，满足 $J^2 = -\mathrm{Id}$。这种结构迫使 M 为偶数维且可定向。光滑流形 M^{2n} 存在近复结构，当且仅当其切丛的结构群可从 $O(2n)$ 约化为 $U(n)$。若一个近复结构是某个复流形的典范几乎复结构，则称其为可积的（或简称复结构）。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 32G05, 32Q60, 53C15。*Key words and phrases.* 近复结构、可积性、Yau问题52。本项目得到国家自然科学基金委员会（项目批准号：12271038、12371048）和南开至德基金会的部分资助。

反过来，每个几乎复流形是否都存在可积近复结构，这个问题要微妙得多。1951 年，Steenrod 在其开创性专著 [Ste51]中提出猜想：“似乎极不可能每个几乎复流形都具有复解析结构。”这一判断在维数 4 的情形得到了证实：1966 年，Van de Ven [VdV66]利用陈数和 Milnor 的结果，构造了第一个不存在复结构的紧致几乎复四维流形。后来，Yau [Yau76] 借助 Massey乘积，构造了第一个不带任何复结构的紧致可平行化四维流形。从历史上看，几乎所有关于复结构存在性的经典障碍都出现在实维数 4 的情形，而紧致复曲面的分类已相当成熟。

在高维中，确定近复结构能否变形为可积结构仍然极具挑战。然而，对于开流形，已有强有力的结果。Gromov 的一个定理 [Gro73], 经 Landweber [Lan74],改进后指出：

定理（Gromov-Landweber）。设 V^{2n} 是一个 $2n$维开流形，满足$H^i(V,\mathbb{Z}) = 0$ 对任意 $i > n$均成立。那么， V 上的每个近复结构都同伦于（可变形为）一个可积结构。

结合 Gromov 在 4 维情形下的工作与 Adachi [Ada79] 在 6 维情形下的一个结果，可得：

定理（Gromov-Adachi）。设 V^{2n} 是一个 *6* 维开流形。那么， V 上的每个近复结构都同伦于（可变形为）一个可积结构。

对于紧流形，目前尚无类似的判据。一个著名的公开问题是 Hopf问题，它询问 S^6 是否存在复结构。六维球面 S^6 具有一种典范几乎复结构，该结构源于将其实现为虚八元数 Im(𝕆)中的单位球面（[Kir47]）。然而，这种近复结构不可积（[EF51, EL51]）。

解决这一问题最引人入胜的设想之一，是丘成桐在 [SY94] 中提出的问题 52（此后又多次提出），并将其视为几何学中最深刻的公开问题之一：

Yau问题52。 证明每个维数为 ≥ 6 的紧致几乎复流形都承认一个可积几乎复结构。这个问题对于6维球面仍未解决。一种思路是在几乎复结构空间中构造抛物流，将一个几乎复结构变形为可积结构。

等距超曲面理论带来了最新进展：作者 [TY22] 明确构造了任意高维球面中某些等距超曲面上的复结构，其中包括 $S^1\times S^3\times S^2$（不同于复结构的乘积）和 $S^1\times S^7\times S^6$ 等明确实例。更近以来， [QTY25]发现了更多源自单位球面中等距叶状结构的复流形族，进一步丰富了高维复流形的研究图景。

回顾一下，卡拉比和埃克曼 [CE53]构造了一族与 $S^{2p+1}\times S^{2q+1}\,(p,q\geq 1)$ 同胚的复流形。本文关注的情形是 $S^3\times S^3$。令 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 和 $\{e_4,e_5,e_6\}$ 分别为第一个和第二个 S^3 因子上的整体正交切标架。此外，我们分别选取 e_1 和 e_4，使其与每个因子上的标准霍普夫纤维化 $S^1\hookrightarrow S^3\to S^2$ 的纤维相切。考虑由卡拉比和埃克曼基本定义的近复结构 J，它将竖直方向 e_1 与 e_4配对：

$$\begin{aligned} &Je_1=e_4, \quad Je_2=e_3, \quad Je_5=e_6\\ &Je_4=-e_1, \quad Je_3=-e_2, \quad Je_6=-e_5. \end{aligned}$$

也就是说，

$$J(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6)=(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6)J_0, \tag{1.1}$$

其中 J_0 是分块矩阵：

$$J_0=\left(\begin{array}{cccc:cc} & & & -1 & & \\ & & -1 & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \\ \hdashline & & & & & -1 \\ & & & & 1 & \end{array}\right).$$

对于 $\delta\in(0,1)$，定义开子集 $S^3_\delta\subset S^3$ 如下：

$$S^3_\delta:=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3\mid x_1<\delta\}\subset S^3. \tag{1.2}$$

乘积 $S^3_\delta\times S^3$ 自然继承了式 (1.1) 中定义的卡拉比–埃克曼复结构，我们仍用同一符号 J表示。

值得注意的是， $S^3_\delta\times S^3$ 与 $\mathbb{R}^3\times S^3$同胚。下文中，我们将把 $\mathbb{R}^3\times S^3$ 嵌入 S^6，作为一个开子集。

作为本文的主要结果，我们证明：

定理 1.1。在 S^6 的连通开子集 $S^3_\delta\times S^3$ 上存在一个复结构 J。该结构 J 可以扩展为 S^6 上的全局近复结构 $\widetilde{J}$。然而，任何扩展都是不可积的。因此，在保持 $S^3_\delta\times S^3$ 上的结构不变的情况下，不可能将 $\widetilde{J}$ 变形为 S^6 上的可积几乎复结构。

注 1.1。 该定理表明，*S.- T. Yau* 在其问题 *52* 中提出的变形策略无法以这种方式实现。事实上，正如注 *3.1* 将详细说明的那样，可以用 S^6 的一个测度任意小的连通开子集替换 $S^3_\delta \times S^3$ ，同时仍使定理 *1.1* 成立。

关于变形理论，引理 *6.1.2* 在 [Huy05] 中将变形后的近复结构的可积条件与 *Maurer-Cartan* 方程对应起来。因此，定理 *1.1* 表明，相关的变形问题——由 *Maurer-Cartan* 方程控制，并满足 $S^3_\delta \times S^3$ 上的初始条件——不存在解。

我们强调，定理 1.1 中将 J 延拓为 S^6 上的全局近复结构依赖于障碍论证，而这种可延拓性极为罕见。例如，考虑带有标准复结构（诱导正向定向）的 $\mathbb{C}P^2$ 。设 $D^4 \subset \mathbb{C}P^2$ 是一个光滑嵌入的闭 4-圆盘，并令 $M := \mathbb{C}P^2 \backslash D^4$. 显然，开流形 M 从 $\mathbb{C}P^2$ 继承了正向定向。然而，我们将证明

命题 1.1. 开流形 $M = \mathbb{C}P^2 \setminus D^4$ 具有一种可积几乎复结构 J ，该结构诱导负向定向。尽管如此， J 无法延拓为 $\mathbb{C}P^2$上的全局近复结构。

本文安排如下。在第 2 节中，我们将 $S^3_\delta \times S^3$ 视为 S^6 的一个开子集，并证明 J 可延拓为S^6上的全局近复结构。在第 3 节中，我们证明 J 的任何延拓都不可能在 S^6 上可积。最后，第 4 节给出命题 1.1 的证明。

2. J 到 S^6上全局近复结构的可延拓性

我们首先将 S^6 分解为圆盘丛。这一思路源自单位球面中的等距超曲面理论。E. Cartan 于 20 世纪 30 年代开始研究等距超曲面，并将球面中的等距超曲面刻画为具有恒定主曲率的超曲面。随后，M¨unzner 证明，不同主曲率的数目 g只能是 1、2、3、4 或 6。此外，每个等距超曲面族都有两个焦子流形，它们是球面中的极小子流形。每个等距超曲面都将环境球面分成两个圆盘丛，其底空间分别为两个焦子流形，且半径恒定；该超曲面本身则是它们的公共边界（参见 [M¨un80]）。

对于 $g = 2$， S^{n+1} 中的一个等参超曲面与 $S^p \times S^q$ 微分同胚，且具有 $p+q = n$; 其两个焦子流形恰好是 S^p 和 S^q。此外，焦子流形的法丛是平凡的。当 $p = 2$ 和 $q = 3$ 时， S^6 中的每个等参超曲面都与 $S^2 \times S^3$ 微分同胚，焦子流形则分别为 S^2 和

S^3。相应的开圆盘丛分别与 $\mathbb{R}^4 \times S^2$ 和 $\mathbb{R}^3 \times S^3$ 微分同胚。因此，$S^3_\delta \times S^3 \cong \mathbb{R}^3 \times S^3$ 与 S^6 的一个开子集微分同胚。更确切地说，两个开圆盘丛 $\mathbb{R}^4 \times S^2$ 和 $\mathbb{R}^3 \times S^3$ 通过映射嵌入 S^6 中

$$\begin{aligned} S^2 \times \mathbb{R}^4 &\to S^6, & \mathbb{R}^3 \times S^3 &\to S^6 \\ (x,\ y) &\mapsto \frac{(x,y)}{\sqrt{1+|y|^2}}, & (z,\ w) &\mapsto \frac{(z,w)}{\sqrt{1+|z|^2}}. \end{aligned}$$

在两个像的交集中，我们有 $(z,\ w)\sqrt{1+|z|^2} = (x,\ y)\sqrt{1+|y|^2}$，直接比较可得 $z = \frac{x}{|y|}$ 和 $w = \frac{y}{|y|}$。因此，我们得到 S^6 分解为两个圆盘丛：

$$S^6 \cong S^2 \times \mathbb{R}^4 \sqcup_\varphi \mathbb{R}^3 \times S^3, \tag{2.1}$$

其中，粘合微分同胚 φ 在公共区域上的作用为

$$\begin{aligned} \varphi : S^2 \times \left(\mathbb{R}^4 \backslash \{0\}\right) &\to \left(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}\right) \times S^3 \\ (x,\ y) \quad &\mapsto \quad (\frac{x}{|y|},\ \frac{y}{|y|}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

回顾一下，对于 $\delta \in (0,\ 1)$，$S^3_\delta := \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in S^3 \mid x_1 < \delta\}$。由于 $S^3_\delta \subset S^3 \backslash \{N\}$，其中 $N = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$ 是北极，我们可以通过立体投影将 S^3_δ 与 $\mathbb{R}^3$ 中的一个半径为 $\sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}$ 的开圆盘 $\mathbb{R}^3_\delta$ 等同起来

$$\begin{aligned} \phi_N : \mathbb{R}^3 &\to S^3 \setminus \{N\} \\ z &\mapsto u = \frac{1}{1+|z|^2}(|z|^2 - 1, 2z). \end{aligned} \tag{2.3}$$

具体而言，

$$S^3_\delta \cong \mathbb{R}^3_\delta := \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |z|^2 < \frac{1+\delta}{1-\delta} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

利用 (2.2) 中的微分同胚 φ，我们将 $\left(\mathbb{R}^3_\delta \backslash \{0\}\right) \times S^3$ 与 $S^2 \times \mathbb{R}^4_\delta$ 等同，其中

$$\mathbb{R}^4_\delta = \left\{ y \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; |y|^2 > \frac{1-\delta}{1+\delta} \right\},$$

$\mathbb{R}^4$ 中半径为 $\sqrt{\frac{1-\delta}{1+\delta}}$ 的闭圆盘的补集。

通过微分同胚 φ，可将 $\left(S^3_\delta \backslash \{S\}\right) \times S^3$ 上的近复结构 J 转移到 $S^2 \times \mathbb{R}^4_\delta$ 上，其中 $S = (-1,\ 0,\ 0,\ 0)$ 是 S^3 的南极；我们仍用记号 J 表示转移后的结构。因此，将近复结构从 $S^3_\delta \times S^3$ 延拓到 S^6，可归结为将 J 从 $S^2 \times \mathbb{R}^4_\delta$ 延拓到 $S^2 \times \mathbb{R}^4$。

作为扩展式（1.1）中定义的近复结构 J 的第一步，我们明确构造 $S^3_\delta \times S^3$ 的整体正交切标架 $\{e_1, \ldots, e_6\}$ 及其局部坐标表示，正如引言中先前所述。

将 $S^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ 视为单位四元数。令 $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 为 $\mathbb{H}$的标准基。在点 $(u, v) \in S^3_\delta \times S^3$ 处，其中 $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$，我们如下选取$\{e_1, \ldots, e_6\}$（其中将 $\mathbb{R}^4$中的零向量记为 $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$）：

$$e_1 = (\mathbf{i}u, \mathbf{0}) = \Big((-u_2, u_1, -u_4, u_3), \mathbf{0}\Big), \quad e_2 = (\mathbf{j}u, \mathbf{0}) = \Big((-u_3, u_4, u_1, -u_2), \mathbf{0}\Big),$$
$$e_3 = (\mathbf{k}u, \mathbf{0}) = \Big((-u_4, -u_3, u_2, u_1), \mathbf{0}\Big), \quad e_4 = (\mathbf{0}, \mathbf{i}v) = \Big(\mathbf{0},\ (-v_2, v_1, -v_4, v_3)\Big),$$
$$e_5 = (\mathbf{0}, \mathbf{j}v) = \Big(\mathbf{0},\ (-v_3, v_4, v_1, -v_2)\Big), \quad e_6 = (\mathbf{0}, \mathbf{k}v) = \Big(\mathbf{0},\ (-v_4, -v_3, v_2, v_1)\Big).$$

现在我们用合适的局部坐标表示 $\{e_1, \ldots, e_6\}$。结合 φ与 ϕ_N，得到一个参数化

$$\begin{aligned} (2.4) \qquad S^2 \times \mathbb{R}^4_\delta &\xrightarrow{\varphi} \big(\mathbb{R}^3_\delta \backslash \{0\}\big) \times S^3 \xrightarrow{(\phi_N, Id)} \big(S^3_\delta \backslash \{S\}\big) \times S^3 \\ (x,\ y) \quad &\mapsto \quad \left(\frac{x}{|y|},\ \frac{y}{|y|}\right) \quad \mapsto \quad (u, v) := \left(\Big(\frac{1-|y|^2}{1+|y|^2},\ \frac{2|y|x}{1+|y|^2}\Big),\ \frac{y}{|y|}\right) \end{aligned}$$

我们进一步通过从南极出发的立体投影对 S^2 进行参数化，

$$\begin{aligned} &\phi_S :\ \mathbb{R}^2 \quad \to \quad S^2 \backslash \{S\} \\ &t = (t_1, t_2) \ \mapsto\ x = (x_1, x_2, x_3) := \left(\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2},\ \frac{2t}{1+|t|^2}\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

结合（2.4），我们得到一个参数化：

$$\begin{aligned} \psi :\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4_\delta &\longrightarrow S^3_\delta \times S^3 \\ (t,\ y) &\mapsto (u, v), \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中

$$u = \left(\frac{1-|y|^2}{1+|y|^2},\ \frac{2|y|}{1+|y|^2}\Big(\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}, \frac{2t}{1+|t|^2}\Big)\right) \quad \text{and} \quad v = \frac{y}{|y|}.$$

在这些局部坐标中，标准正交基 $\{e_1, \ldots, e_6\}$ 表示如下：

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(\frac{1}{1+|y|^2}\left(-2|y|x_1,\ 1-|y|^2,\ -2|y|x_3,\ 2|y|x_2\right),\ \mathbf{0}\right), \\ e_2 &= \left(\frac{1}{1+|y|^2}\left(-2|y|x_2,\ 2|y|x_3,\ 1-|y|^2,\ -2|y|x_1\right),\ \mathbf{0}\right), \\ e_3 &= \left(\frac{1}{1+|y|^2}\left(-2|y|x_3,\ -2|y|x_2,\ 2|y|x_1,\ 1-|y|^2\right),\ \mathbf{0}\right), \\ e_4 &= \left(\mathbf{0},\ \frac{1}{|y|}(-y_2, y_1, -y_4, y_3)\right), \\ e_5 &= \left(\mathbf{0},\ \frac{1}{|y|}(-y_3, y_4, y_1, -y_2)\right), \\ e_6 &= \left(\mathbf{0},\ \frac{1}{|y|}(-y_4, -y_3, y_2, y_1)\right), \end{aligned}$$

其中 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 由式 (2.5) 给出，$y=(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)\in\mathbb{R}^4_\delta$。

另一方面，$\{\frac{\partial}{\partial t_1},\frac{\partial}{\partial t_2},\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_3},\frac{\partial}{\partial y_4}\}$ $\big(S^3_\delta\backslash\{S\}\big)\times S^3$ 在 $(u,\ v)$ 处的自然坐标向量场 $=\psi\ (t,\ y)$ 可以显式计算：

$$\frac{\partial}{\partial t_1}=\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)=\left(\Big(0,\frac{4|y|}{(1+|y|^2)(1+|t|^2)^2}\left(-2t_1,1+t_2^2-t_1^2,-2t_1t_2\right)\Big),\ \mathbf{0}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}=\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right)=\left(\Big(0,\frac{4|y|}{(1+|y|^2)(1+|t|^2)^2}\left(-2t_2,\ -2t_1t_2,\ 1+t_1^2-t_1^2\right)\Big),\ \mathbf{0}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}=\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)=\left(\frac{2y_1}{(1+|y|^2)^2}\Big(-2,\frac{1-|y|^2}{|y|}x\Big),\ \frac{1}{|y|^3}\Big(|y|^2-y_1^2,-y_1y_2,-y_1y_3,-y_1y_4\Big)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2}=\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)=\left(\frac{2y_2}{(1+|y|^2)^2}\Big(-2,\frac{1-|y|^2}{|y|}x\Big),\ \frac{1}{|y|^3}\Big(-y_1y_2,|y|^2-y_2^2,-y_2y_3,-y_2y_4\Big)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_3}=\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right)=\left(\frac{2y_3}{(1+|y|^2)^2}\Big(-2,\frac{1-|y|^2}{|y|}x\Big),\ \frac{1}{|y|^3}\Big(-y_1y_3,-y_2y_3,|y|^2-y_3^2,-y_3y_4\Big)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_4}=\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial y_4}\right)=\left(\frac{2y_4}{(1+|y|^2)^2}\Big(-2,\frac{1-|y|^2}{|y|}x\Big),\ \frac{1}{|y|^3}\Big(-y_1y_4,-y_2y_4,-y_3y_4,|y|^2-y_4^2\Big)\right),$$

其中，x 仍按（2.5）理解。

将坐标向量场$\{\frac{\partial}{\partial t_1},\frac{\partial}{\partial t_2},\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_4}\}$用正交标架 $\{e_1,\dots,e_6\}$表示，我们写作

$$(\frac{\partial}{\partial t_1},\frac{\partial}{\partial t_2},\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial y_3},\frac{\partial}{\partial y_4})=(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6)G, \tag{2.7}$$

其中，G 是一个非奇异的分块形式矩阵，其元素为函数：

$$G=\begin{pmatrix}A_{3\times2} & B_{3\times4}\\ \mathbf{0}_{3\times2} & C_{3\times4}\end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

$A,\ B,\ C$的元素显式给出为

$$A=\frac{4|y|}{(1+|y|^2)^2(1+|t|^2)^2}\left((1-|y|^2)\begin{pmatrix}-2t_1 & -2t_2\\ 1-t_1^2+t_2^2 & -2t_1t_2\\ -2t_1t_2 & 1+t_1^2-t_2^2\end{pmatrix}+2|y|\begin{pmatrix}-2t_2 & 2t_1\\ -2t_1t_2 & -1+t_1^2-t_2^2\\ 1+t_1^2-t_2^2 & 2t_1t_2\end{pmatrix}\right),$$

$$B=\frac{2}{|y|(1+|y|^2)(1+|t|^2)}\begin{pmatrix}1-|t|^2\\ 2t_1\\ 2t_2\end{pmatrix}\Big(y_1,y_2,y_3,y_4\Big),$$

$$C=\frac{1}{|y|^2}\begin{pmatrix}\mathbf{i}y\\ \mathbf{j}y\\ \mathbf{k}y\end{pmatrix}=\frac{1}{|y|^2}\begin{pmatrix}-y_2 & y_1 & -y_4 & y_3\\ -y_3 & y_4 & y_1 & -y_2\\ -y_4 & -y_3 & y_2 & y_1\end{pmatrix}.$$

经过直接计算可得

$$G^tG=\begin{pmatrix}A^tA & 0\\ 0 & B^tB+C^tC\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{16|y|^2}{(1+|y|^2)^2(1+|t|^2)^2}I_2 & 0\\ 0 & \frac{1}{|y|^4}\left(|y|^2I_4-\frac{(1-|y|^2)^2}{(1+|y|^2)^2}y^ty\right)\end{pmatrix},$$

其中， G^t 表示 G的转置， I_2 和 I_4 分别为 2 阶和 4 阶单位矩阵。因此，

$$\det(G^tG) = \frac{32^2}{|y|^2(1+|y|^2)^6(1+|t|^2)^4} > 0 \quad \text{whenever } |y| > 0.$$

在点 $p = \psi(0,\ (1,\ 0,\ 0,\ 0))$ 处求值可得 $\det G|_p = 4$。由定义域的连通性可知，$\det\ G > 0$ 在 $S^3_\delta \times S^3$ 上处处成立。因此，标架 $\{\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_4}\}$和$\{e_1, \ldots, e_6\}$定义了相同的定向。

接下来，利用上文引入的矩阵 G，我们相对于坐标标架 $\{\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_4}\}$，将式 (1.1) 中的近复结构 J 表示为

$$J(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \frac{\partial}{\partial y_4}) = (\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \frac{\partial}{\partial y_4})G^{-1}J_0G. \tag{2.9}$$

因此，将近复结构 J 从 $S^2\times\mathbb{R}^4_\delta$ 延拓到 $S^2\times\mathbb{R}^4$，等价于延拓函数矩阵 $G^{-1}J_0G$。为此，我们先准备以下几个引理。

G 的分块形式使直接计算变得复杂。为简化分析，我们首先将 J_0 替换为一种形式更便于处理的同伦的几乎复结构。

Lemma 2.1. *J_0 is homotopic to $K := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & & & -1 & 0 \\ & & & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & & \end{pmatrix}$ as almost complex* 上的结构。 $\mathbb{R}^6$

证明。对于 $s \in [0,1]$，定义如下矩阵路径:

$$E(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \cos(\frac{\pi}{2}s) & \sin(\frac{\pi}{2}s) & 0 & 0 & \\ & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}s) & 0 & \sin(\frac{\pi}{2}s) & \\ & -\sin(\frac{\pi}{2}s) & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}s) & 0 & \\ & 0 & 0 & \sin(\frac{\pi}{2}s) & \cos(\frac{\pi}{2}s) & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

显然， $E(0) = I_6$，并且

$$E(1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

由于对于每个 s，$\det E(s) = \cos^4(\frac{\pi}{2}s) + \sin^4(\frac{\pi}{2}s) > 0$，因此每个 $E(s)$ 都是可逆的。直接计算可得

$$E(0)^{-1}J_0E(0) = J_0, \quad E(1)^{-1}J_0E(1) = K.$$

因此，$s \mapsto E(s)^{-1}J_0E(s)$ 是一个连接J_0 与 K的近复结构光滑族，即 $J_0 \simeq K$。□

我们指出，K 的左上 2×2 块不能乘以 -1，因为这样做会相对于 J_0反转定向，因此所得结构不能与 J_0同伦。

推论 2.1. $G^{-1}J_0G$ 与 $G^{-1}KG$ 作为$S^2 \times \mathbb{R}^4_\delta$ 上的近复结构是同伦的，定义见 (2.9)。

下面关于同伦群交换性的引理是一个标准结果，源自 [Ste51] (15.3,16.7,16.9)。

引理 2.2. 设 Q 是一个连通拓扑群。对于 $f, g : S^n \to Q$，定义$f * g : S^n \to Q$ 为 $x \mapsto f(x)g(x)$。则 $f * g \simeq g * f : S^n \to Q$。

特别地，取 $Q = GL_+(m, \mathbb{R})$，即正行列式矩阵构成的一般线性群，我们得到

推论 2.2。$AB \simeq BA$ 对于 $A, B : S^n \to GL_+(m, \mathbb{R})$。

由于矩阵 $P = \mathrm{diag}(1, -1, 1, 1)$ 的行列式为 $\det P = -1 < 0$，我们无法直接应用推论 2.2。不过，我们仍有

引理 *2.3*。设 $f : S^3 \to SO(4)$ 由 $y \mapsto (y^t,(iy)^t,(jy)^t,(ky)^t)$ 定义，并令$P = diag(1, -1, 1, 1)$。那么，同伦类 $[P^{-1}fP]$在 $\pi_3SO(6)$ 中等于 $[f]$；这里我们采用由标准嵌入 $SO(4) \hookrightarrow SO(6)$ 诱导的同态 $\pi_3SO(4) \to \pi_3SO(6)$。

证明。众所周知，特殊正交群 $SO(4)$ 在 S^3 上具有纤维丛结构，其结构群和典型纤维为 $SO(3)$。此丛同构于平凡丛 $S^3 \times SO(3)$。因此，我们得到如下同伦群同构：

$$\pi_3SO(4) \cong \pi_3S^3 \oplus \pi_3SO(3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

注意，同态 $\rho : S^3 \to SO(3)$ 生成无限循环群 $\pi_3SO(3) \cong \mathbb{Z}$，其中 $\rho(y)$ 定义为

$$\begin{aligned} \rho(y) : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto \rho(y)(x) := yx\overline{y}, \end{aligned}$$

对于 $x \in \mathbb{R}^3 \cong \mathrm{Im}\mathbb{H}$。事实上， ρ 实现了从 S^3 到$\mathbb{R}P^3 \cong SO(3)$ 的标准二重覆盖映射。显然，映射 $\rho(y)$ 自然延拓为 $\mathbb{R}^4$ 的自同构，因为对所有 $y \in S^3 \subset \mathbb{H}$ 都有 $y\mathbf{1}\overline{y} = \mathbf{1}$ 。我们沿用记号 $\rho(y)$ 表示此延拓。

设 $\sigma : S^3 \to SO(4)$ 由左乘定义

$$\begin{aligned} \sigma(y): \ \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ x &\mapsto \sigma(y)x := yx \end{aligned}$$

对于 $x \in \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$。则同态 σ 诱导 $\pi_3 S^3$ 到 $\pi_3 SO(4)$ 的一个子群上的同构。

设 $\alpha_0 \in \pi_0 O(4) \cong \mathbb{Z}_2$ 表示非平凡元素。 α_0 在 $\pi_3 SO(4)$ 上的作用由 $\alpha_0([\phi]) := [P^{-1}\phi P]$给出，其中对 ϕ: $S^3 \to SO(4)$ 有 $P = \mathrm{diag}(1, -1, 1, 1)$。根据 [Ste51], 中的 §22.5，该作用在 $\pi_3 SO(3)$ 于 $\pi_3 SO(4)$ 中的像上平凡地作用，从而$\alpha_0([\rho]) = [\rho]$。此外，§22.7 中的公式（15）给出恒等式

$$\alpha_0([\sigma]) = [P^{-1}\sigma P] = \alpha_0([\rho]) - [\sigma] = [\rho] - [\sigma] \quad \text{in } \pi_3 SO(4).$$

根据 [Ste51], 中的 §23.6，包含诱导的同态 $\pi_3 SO(4) \to \pi_3 SO(6)$ 满足 $\pi_3 SO(6)$ 中的关系 $[\rho] = 2[\sigma]$ 。因此，我们得到

$$\alpha_0([\sigma]) = [\sigma] \quad \text{in } \pi_3 SO(6).$$

注意到，引理 2.3 中的映射 f: $S^3 \to SO(4)$ 实际上是由右乘定义的同态:

$$\begin{aligned} f(y): \ \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ x &\mapsto f(y)x := x\overline{y} \end{aligned}$$

for $y \in S^3 \subset \mathbb{H}$ 和 $x \in \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$。不难看出， $\rho(y) = \sigma(y) \circ f(y)$，因此

$$[\rho] = [\sigma] + [f] \quad \text{in } \pi_3 SO(4).$$

对等式两边作用 α_0 ，得到

$$[P^{-1}fP] = \alpha_0([f]) = \alpha_0([\rho] - [\sigma]) = [\sigma] = [f] \quad \text{in } \pi_3 SO(6).$$

□

令 $\widetilde{D} = \left(y^t, (\mathbf{i}y)^t, (\mathbf{j}y)^t, (\mathbf{k}y)^t\right)$ 如引理 2.3 所示。由引理 2.3 可得， $\widetilde{D} \simeq P^{-1}\widetilde{D}P$ 作为从 S^3 到 $SO(4)$ 的映射，满足

$$D := P^{-1}\widetilde{D}P = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & -y_3 & -y_4 \\ -y_2 & y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & y_1 & y_2 \\ y_4 & -y_3 & -y_2 & y_1 \end{pmatrix}.$$

注意， D 是复矩阵的实表示

$$D' := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 \end{pmatrix} + \sqrt{-1} \begin{pmatrix} y_3 & y_4 \\ y_4 & -y_3 \end{pmatrix}.$$

因此，若 $|y| > 0$，则 $\det \widetilde{D} = \det D = |\det D'|^2 = |y|^4 > 0$ 。此外，我们注意到引理 2.1 中的矩阵 K 满足

$$\begin{pmatrix} I_2 & \\ & D \end{pmatrix} K = K \begin{pmatrix} I_2 & \\ & D \end{pmatrix}.$$

现在，我们准备证明 $G^{-1}J_0G$ 从 $S^2 \times \mathbb{R}^4_\delta$ 到 $S^2 \times \mathbb{R}^4$的可延拓性。结合推论 2.1、2.2和引理 2.3，以及 $\det G > 0$ 和 $\widetilde{\det} D > 0$ （当 $|y| > 0$ 时）这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} G^{-1}J_0G &\simeq G^{-1}KG = G^{-1}\begin{pmatrix} I_2 & \\ & D \end{pmatrix}^{-1} K \begin{pmatrix} I_2 & \\ & D \end{pmatrix} G \\ &= \left(\begin{pmatrix} I_2 & \\ & D \end{pmatrix} G\right)^{-1} K \left(\begin{pmatrix} I_2 & \\ & D \end{pmatrix} G\right) \\ &\simeq \left(\begin{pmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{D} \end{pmatrix} G\right)^{-1} K \left(\begin{pmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{D} \end{pmatrix} G\right) \\ &\simeq \left(G\begin{pmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{D} \end{pmatrix}\right)^{-1} K \left(G\begin{pmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{D} \end{pmatrix}\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

对于式 (2.8) 中出现的矩阵 G，可直接验证

$$G\begin{pmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & \\ & I_3 \end{pmatrix},$$

其中 $H = (h_1,\ h_2,\ h_3)$ 是一个 3×3 矩阵，其列向量为 $h_1,\ h_2,\ h_3$，其中 $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}$ 如 (2.8) 所示。具体而言，

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{4|y|}{(1+|y|^2)^2(1+|t|^2)^2}\left((1-|y|^2)\begin{pmatrix} -2t_1 \\ 1-t_1^2+t_2^2 \\ -2t_1t_2 \end{pmatrix} + 2|y|\begin{pmatrix} -2t_2 \\ -2t_1t_2 \\ 1+t_1^2-t_2^2 \end{pmatrix}\right), \\ h_2 &= \frac{4|y|}{(1+|y|^2)^2(1+|t|^2)^2}\left((1-|y|^2)\begin{pmatrix} -2t_2 \\ -2t_1t_2 \\ 1+t_1^2-t_2^2 \end{pmatrix} - 2|y|\begin{pmatrix} -2t_1 \\ 1-t_1^2+t_2^2 \\ -2t_1t_2 \end{pmatrix}\right), \\ h_3 &= \frac{2|y|}{(1+|y|^2)(1+|t|^2)}\begin{pmatrix} 1-|t|^2 \\ 2t_1 \\ 2t_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意，三个向量 h_1，h_2，h_3 两两正交，并且

$$|h_1|^2 = |h_2|^2 = \frac{16|y|^2}{(1+|y|^2)^2(1+|t|^2)^2}, \quad |h_3|^2 = \frac{4|y|^2}{(1+|y|^2)^2}.$$

将 H 表示为 $H = |y|\widetilde{H}$，其中 $\det \widetilde{H} = \frac{32}{(1+|y|^2)^3(1+|t|^2)^3}$。显然，$\widetilde{H}$ 处处非奇异，即使在 $y=0$处也是如此。因此，以 $|y|$ 为同伦参数，当 $|y|>0$充分小时，我们得到一个同伦 $H \simeq I_3$。由此，$G^{-1}J_0G$可以延拓到 $\left(S^2\backslash\{S\}\right)\times\mathbb{R}^4$。

从以上论证可知，可延拓性不依赖于 t，因此在 (2.5) 中用 ϕ_N 替换 ϕ_S 不会影响结果。因此，$G^{-1}J_0G$ 可以延拓到 $S^2\times\mathbb{R}^4$。由此，近复结构 J 可以平滑地延拓到整个 S^6，正如我们所希望的那样。□

注 2.1。映射 G 无法延拓到 $S^2\times\mathbb{R}^4$，因为它不是零伦的。更准确地说，这一结论源于以下关键观察：修改后的映射 $\begin{pmatrix} I_2 & \\ & D \end{pmatrix} G$ 是零伦的（如上面的证明所示），而映射 D 本身不是零伦的。事实上，D 是映射 D'：$S^3\to SU(2)$ 的实表示，该映射由 $D'(z,w)=\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ 定义，其中 $z=y_1+\sqrt{-1}y_3, w=y_2+\sqrt{-1}y_4$。值得注意的是，映射 D' 表示同伦群$\pi_3SU(2)\cong\mathbb{Z}$的一个生成元。

3。 J 在 S上不可延拓为可积几乎复结构 6

本节旨在证明复结构J 在 $S^3_\delta\times S^3$ 上无法延拓为 S^6上的可积几乎复结构。

众所周知，紧复流形上不存在非常值全纯函数。因此，我们只考虑亚纯函数。回顾一下，紧复流形 X 的代数维数 $a(X)$定义为其亚纯函数域在 $\mathbb{C}$上的超越次数。因此，当且仅当 X 上的每个亚纯函数都是常数时，$a(X)=0$。Campana、Demailly 和 Peternell 的一项令人惊讶的结果（[CDP98，CDP20]）指出：

定理（Campana-Demailly-Peternell）。设 X 是一个与 S^6同胚的紧复流形。那么 $a(X)=0$。

因此，假设的复流形 S^6 上的每个亚纯函数都必须是常数。对于没有非常数亚纯函数的紧复流形，Krasnov [Kra75] 给出了一个强有力的估计：

定理（Krasnov）。设 X 是一个复维数为 n 、没有非常数亚纯函数的连通紧复流形。那么， X 中不可约超曲面的数量有限，且不超过 $n + h^{1,1} - h^{1,0}$，其中$h^{p,q}$ =维数 $H^q(X, \Omega^p_X)$ 是复流形 X 的霍奇数，而Ω^p_X是全纯 p-形式的层。

现在假设我们在 $S^3_\delta \times S^3$ 上定义的复结构 J 可以光滑地延拓为 S^6 上的复结构。将由此得到的紧致复流形记为 S^6_J。根据 Krasnov 定理，S^6_J 只能包含有限多个闭复超曲面。

然而，$S^3_\delta \times S^3 \subset S^6_J$ 已经包含无穷多个彼此不同的闭复超曲面。为此，考虑 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ 上的自由 S^1 作用：

$$S^1 \times S^3 \to S^3$$
$$e^{i\theta}, (z, w) \mapsto e^{i\theta}(z, w) := (e^{i\theta}z, e^{i\theta}w).$$

其轨道空间为 $S^3/S^1 \cong \mathbb{C}P^1 \cong S^2$。对于基点 $(z_0, w_0) \in S^3$，我们将其轨道 $\{e^{i\theta}(z_0, w_0) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ 称为 S^3 中的一个标准圆 。由此，霍普夫流形

$$S^1 \times S^3 := \left\{ \left(e^{i\theta}(z_0, w_0),\ v \right) \mid \theta \in \mathbb{R}, v \in S^3 \right\} \tag{3.1}$$

是 $S^3 \times S^3$ 中的一个复超曲面。

注意，对于每个 φ 且 $\cos\varphi \in (0, \delta)$，点 $p_\varphi = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi, 0)$ 都属于 S^3_δ，其整个轨道

$$C_{p_\varphi} = \left\{ e^{i\theta} p_\varphi \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

是包含在 S^3_δ 中的标准圆。由于这样的标准圆有无穷多个，我们得到无穷多个不同的闭复超曲面 $C_{p_\varphi} \times S^3$ in$S^3_\delta \times S^3 \subset S^6_J$。这与 Krasnov 的有限性定理矛盾。

因此，复结构 J on $S^3_\delta \times S^3$ 不能延拓为 S^6 上的可积几乎复结构，正如我们所声称的那样。□

注 3.1。对于 $\delta \in (0,1)$，定义 $B^3_\delta := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid -\delta < x_1 < \delta\}$。注意，先前构造的 $C_{p_\varphi} \times S^3$ 实际上包含于 $B^3_\delta \times S^3$ 中。当 δ 趋近于 0 时， B^3_δ （因而 $B^3_\delta \times S^3$）的测度会变得任意小，而 $B^3_\delta \times S^3$ 仍是 S^6 的连通开子集。因此，即使我们将 $S^3_\delta \times S^3$ 替换为这样一个测度任意小的开子集 $B^3_\delta \times S^3$，定理 *1.1* 的结论仍然成立，正如注 *1.1* 中所述。

4. 命题 1.1 的证明

我们首先证明， M 存在我们所需的近复结构。回顾一下，对于定向光滑流形 M^{2n}，存在一种

al诱导给定定向的近复结构，其所有障碍都位于上同调群中 ps

$$H^{k+1}(M, \pi_k(\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n))), \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{4.1}$$

在我们的情形中， $n = 2$ 和 SO(4)/U(2) $\cong S^2$。由于 $\pi_1(S^2) = 0$，只需考察群 $H^{k+1}(M, \pi_k(S^2))$，其中 $k = 2, 3$。已知 $\mathbb{C}P^n$ 上存在一种等距超曲面叶状结构，其焦子流形为两个子流形——$\mathbb{C}P^{n-1}$和一个点 $\{p\}$（例如，参见 [GTY15]）。因此， $\mathbb{C}P^2$ 具有一种等距超曲面叶状结构，其焦子流形为S^2 和一个点 $\{p\}$。根据 [GT13, GT14], 与球面的情形类似，也存在将一个黎曼流形分解为以两个焦子流形为底空间的两个圆盘丛的分解。取 D^4 为 p的一个闭圆盘邻域，可见$M = \mathbb{C}P^2 \setminus D^4$ 同胚于一个以S^2为底空间的实秩 2 向量丛的全空间。因此， $M \simeq S^2$。于是，所有相关的上同调群均消失，并且M 具有与任意给定定向相容的近复结构。

现在固定 M 上的一个诱导负向定向的近复结构 J_0 。根据 Gromov-Landweber 定理， J_0 可以变形为 M上的一个同样诱导负向定向的复结构 J 。假设 J 可以光滑地延拓为 $\mathbb{C}P^2$上的一个近复结构。此延拓将赋予 $\mathbb{C}P^2$ 负向定向，使其成为 CP^2。然而，Kahn [Kah69] 和 Tang-Zhang [TZ02] 得出的反直觉结果表明， CP^{2n} 不允许存在近复结构，矛盾。□

注 4.1. 虽然(4.1) 讨论的是存在性，但 S^6 上近复结构的唯一性由 $H^k(S^6; \pi_k(\mathbb{C}P^3))$中的差类决定，这些差类将纤维$SO(6)/U(3)$ 识别为 $\mathbb{C}P^3$。对于所有 $1 \leq k \leq 6$，这些类都消失：对于 $k < 6$，这是由底空间的上同调直接得出的；对于 $k = 6$，则是因为 $\pi_6(\mathbb{C}P^3) = 0$。因此，与给定定向相容的几乎复结构空间是连通的。

致谢。作者谨向 *Yum-Tong Siu*、*Fangyang Zheng* 和 *Kefeng Liu* 教授致以诚挚的谢意，感谢他们提出的深刻见解和宝贵建议。

References

[Ada79] Adachi M., *Construction of complex structures on open manifolds*, 《日本学士院学报》A辑, **55**（1979）, 222–224。[BV68] Brieskorn E., Van deVenA., *Some complex structures on products of homotopy spheres*, 《Topology》, **7**（1968）, 389–393。[CDP98] Campana F., Demailly J.-P., Peternell T., *The algebraic dimension of compact complex threefolds with vanishing second Betti number*, 《Compositio Mathematica》**112**（1998）, 77–91。[CDP20] Campana F., Demailly J.-P., Peternell T., *The algebraic dimension of compact complex threefolds with vanishing second Betti number*, 《Compositio Mathematica》, **156**（2020）, 679–696。[CE53] Calabi E., Eckmann B., *A class of compact, complex manifolds which are not algebraic*, 《数学年刊》, **58**（1953）, 494–500。

[EF51] Eckmann B., Fr¨olicher A., *Sur l'intégrabilité des structures presque complexes*, 《巴黎科学院学报》232（1951），2284–2286。[EL51] Ehresmann C., Libermann P., *Sur les structures presque hermitiennes isotropes*, 《巴黎科学院学报》232（1951）1281–1283。[Gro73] Gromov M. L., *Degenerate smooth mappings*。《苏联数学札记》14（1973），849–853。[GT13] Ge J. Q., Tang Z. Z., *Isoparametric functions and exotic spheres*, 《纯粹与应用数学杂志》683（2013），161–180。[GT14] Ge J. Q., Tang Z. Z., *Geometry of isoparametric hypersurfaces in Riemannian manifolds*。《亚洲数学杂志》18（2014），117–126。[GTY15] Ge J. Q., Tang Z. Z., Yan W. J., *A filtration for isoparametric hypersurfaces in RiemannianManifolds*, 《日本数学会杂志》67（2015），1179–1212。[Huy05] Huybrechts D., *Complex geometry*, Universitext, 施普林格出版社, 柏林, 2005, xii+309 页。[Kah69] Kahn P. J., *Obstructions to extending almost X-structures*, 《伊利诺伊数学杂志》13（1969），336–357。[Kir47] Kirchhoff A., *Sur l'existence des certains champs tensoriels sur les sphères à n dimensions*, 《巴黎科学院学报》225（1947）1258–1260。[Kra75] Krasnov V. A., *Compact complex manifolds without meromorphic functions*（俄文），《数学札记》17（1975）119–122；英文译文见《数学札记》17（1975），69–71。[Lan74] Landweber P. S., *Complex structures on open manifolds*, 《Topology》13（1974），69–75。[M¨un80] M¨unzner H.F., *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären, I, II*, 《数学年刊》251（1980），57–71。256（1981），215–232。[QTY25]Qian C., Tang Z. Z., Yan W. J., *Isoparametric foliations and complex structures*, arXiv:2502.09041。[Ste51] Steenrod N., *The Topology of Fibre Bundles*, 普林斯顿数学丛书, 第14卷。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1951, viii+224 页。[SY94] Schoen R., Yau S.-T., *Open problems in geometry*, *Lectures on differential geometry*, 《几何与拓扑会议论文集及讲义》, 第 1 卷, 国际出版社, 马萨诸塞州剑桥, 1994, v+235页。[TY22] TangZ. Z., Yan W. J., *Isoparametric hypersurfaces and complex structures*, 《Acta Mathematica Scientia》B辑, 42（2022），2223–2229。[TZ02] Tang Z. Z., Zhang W. P., *A generalization of the Atiyah-Dupont vector fields theory*, 《当代数学通讯》4（2002），777–796。[VdV66] Van de Ven A., *On the Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds*, 《美国国家科学院院刊》55（1966），1624–1627。[Yau76] Yau S.-T., 没有复结构的可平行化流形, 《Topology》15（1976），51–53。

Chern Institute of Mathematics & LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P. R.China*Email address*: zztang@nankai.edu.cn
School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Beijing Normal University, Beijing, 100875, P. R. China*Email address*: wjyan@bnu.edu.cn