arXiv:2601.05571v1 [math.AG] 9 Jan 2026

“混合霍奇结构的无穷小不变量”中的技术结果的新证明（arXiv:2406.17118v1）

ZHENJIAN WANG

Abstract. 三次型 C 由 R. Aguilar、M. Green 和 P. Griffiths 的工作构造，用以确立 Fano-K3 对的X, Y一般全局托雷利定理，其中 $X:\ F = 0$是 $\mathbb{P}^4$中的一个三次三维簇，而 $Y \in |-K_X|$是由二次型 Q定义的 X 的反典范光滑截面。本文证明以下两个此前借助 Macaulay2 计算机辅助验证的结果：对于一般的对 (X, Y)，(i) 三次型 C光滑；(2) $(J_{F,3}: Q) = 0$，从而对这一语境中“ 一般的”一词给出精确含义。

1. Statements of main results

在最近的一篇论文 [1], 中，作者研究了对偶（X， Y）的无穷小不变量，其中 X 是一个三次三维簇， Y 是一个光滑的反典范 K3 截面。他们为这类对偶建立了一般全局托雷利定理，其中某个三次型在证明中起着核心作用。

沿用 [1, 第 4], 节的记号，设 V为一个五维复向量空间， $X \subset \mathbb{P}V^* \cong \mathbb{P}^4$ 为由 $F = 0$定义的三次三维簇。取 $Y = \{F = 0, Q = 0\}$ ，并假设 X 和 Y 均光滑。记 J_F 为$S^\bullet V = \mathrm{Sym}^\bullet V$中由 F的一阶偏导数生成的理想，并令 $J_{F,k} = J_F \cap S^k V$。三次型 C 在 [1,第 3 节.2]中通过以下复合构造

$$H^1(\Omega_X^2) \otimes H^0(-K_X) \to H^1(T_X)$$

以及周期映射的导数

$$H^1(T_X) \to S^2 H^1(\Omega_X^2)^*$$

（参见 [5,第 5 节5]），接着

$$H^1(\Omega_X^2)^* \otimes S^2 H^1(\Omega_X^2)^* \to S^3 H^1(\Omega_X^2)^*,$$

从而得到映射 $H^0(-K_X) \to S^3 H^1(\Omega_X^2)^*$。等价地，三次型 C可由关系 $\mathbb{C}C = (J_{F,5}: Q)^\perp$ 刻画（见 [1, 引理 4.8]）。

以下技术性陈述借助 Macaulay2 计算机软件在 [1] 中得到证明。

定理 1.1 ([1, 定理1.1, 定理4.7])。 对于 X 一个三次三维簇和 Y 一个反典范光滑截面，若二者均为一般的，则该三次三维簇 C 是光滑的。

2020 数学主题分类。 主要分类号 13F20；次要分类号 13D40、13E10。关键词与短语。 光滑多项式、线性系的缺陷、Lefschetz 性质。

命题 1.2 ([1, 命题 4.17])。 对于一般的 $F \in S^3V, Q \in S^2V$， 有$(J_{F,3} : Q) = 0$, 其中

$$(J_{F,3} : Q) = \{a \in V : aQ \in J_{F,3})\}.$$

这些结果的证明在很大程度上依赖于显式的计算机代数，这使得难以将 [1] 中的讨论推广到更高次数或更多变量的一般配对（F， Q）。这限制了其中所发展的一般理论的适用性。此外，各陈述中“ 一般的”一词的确切含义仍不清楚。

受 [13], 中工作成果的启发，该成果对 [4,第 4 节 (b)], 中的“一般的”给出了精确解释，我们证明了类似的结果，从而对定理 1.1 和命题 1.2 起到相同的作用。

我们固定以下记号， S^3V 与 S^3V^* 之间的对偶配对简单记为 $\langle\ ,\ \rangle$: $S^3V \times S^3V^* \to \mathbb{C}$。对于任意子集 $E \subset S^3V$，令

$$E^\perp = \{a \in S^3V^* : \langle b, a\rangle = 0, \forall b \in E\rangle\}.$$

记 $\mathcal{U} \subset S^3V$ 为满足以下条件的光滑三次型 F 所构成的集合：$(J_{F,\ 3})^\perp \subset S^3V^*$包含一个光滑三次型。

定理 1.3。 在上述记号下， $\mathcal{U}$ 是S^3V的非空扎里斯基开子集。此外，对于每个 $F \in \mathcal{U}$, 存在 $Q \in S^2V$，使得曲面$Y = \{F = Q = 0\} \subset \mathbb{P}V^*$ 光滑，且关联三次曲线 C 光滑。

定理 1.4。 在上述记号下，对于每个光滑的 $F \in S^3V$，存在$Q \in S^2V$，使得 $Y = \{F = Q = 0\} \subset \mathbb{P}V^*$ 光滑且 $(J_{F,\ 3} :\ \ Q) = 0$。

这些结果给出了 [1 中技术性陈述的一个更精确版本].

推论 1.5。 在上述记号下，给定任意 $F \in \mathcal{U}$，对于一般的$Q \in S^2V$，

(i) 对 (F, Q) 而言，它是一个 *Fano-K3* 对；*(ii)* 与 (F, Q) 关联的三次型 C 光滑；*(iii)* $(J_{F,\ 3} :\ \ Q) = 0$。

若能对集合 $\mathcal{U}$ 给出更具体的描述，并将其与 [12, 13]中的 Sebastiani-Thom 型多项式联系起来，将会很有意思。

我们感谢 A. Dimca教授提醒我们关注这项工作 [1]。本研究得到 NSFC-12301100 资助。

2. Defects of linear systems and strong Lefschetz property

设 V 是一个维数为 $n+1 \geq 3$ 的复向量空间。经过识别 $\mathbb{P}V^* \cong \mathbb{P}^n$ 后， $\mathbb{P}V^*$ 的齐次坐标环 $S^\bullet V$ 可识别为带有自然分次 $S = \oplus_{d=0}^\infty S_d$ 的 $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$; 并将 $S^\bullet V^*$ 识别为 $\mathbb{C}[y_0, \ldots, y_n]$。完美配对 $\langle\ ,\ \rangle$: $S^kV \times S^kV^* \to \mathbb{C}$ 与极化配对相同

$$(F, G) \mapsto G\left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) F.$$

给定一个齐次多项式 $F \in S_d$， F 的雅可比理想记作 J_F，它是由一阶偏导数 $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 0, \ldots, n$ 在 S 中生成的分次理想，而 Milnor 代数为 $M(F) = S/J_F$。

2.1. 线性系的缺陷。 我们将确定 $F \in S_d$ 的 dim $M(F)_k$。显然，对于 $k \leq d-2$, dim $M(F)_k =$dim $S_k = \binom{n+k}{k}$。若超曲面 $\{F = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ 光滑，则 dim $M(F)_k$ 可由 Hilbert-Poincar´e 级数明确给出

$$\mathrm{HP}\,(M(F), t) = \sum_{k \geq 0} \dim M(F)_k t^k = \frac{(1-t^{d-1})^{n+1}}{(1-t)^{n+1}};$$

参见 [6, 命题 7.22]。特别地，可得对于 $k > T = (n+1)(d-2)$, $M(F)_k = 0$，且对于 $0 \leq k \leq T$，dim $M(F)_k =$dim $M(f_s)_{T-k}$。另一方面，当 $\{F = 0\}$ 是仅具有孤立奇点的超曲面时，记其奇点轨迹子概形为 Σ_F，则 dim $M(F)_k$ 与线性系统 $S_k(\Sigma_F)$ 的亏损 def$S_k(\Sigma_F)$ 密切相关，

$$\mathrm{def}_k\, \Sigma_F = \dim H^0(\Sigma_F, \mathcal{O}_{\Sigma_F}) - \dim \frac{S_k}{(\widehat{J_F})_k},$$

其中， $\widehat{J_F}$ 是 J_F的饱和理想，

$$\widehat{J_F} = \{s \in S : \forall i = 0, \ldots, n, \exists m_i \geq 0 \text{ s.t. } x_i^{m_i} \in J_F\}.$$

由 [8], 中的定理 1 可得以下有用公式

引理 2.2。 设 $F \in S_d$ 满足： $\{F = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ 只有孤立奇点，且奇点轨迹子概形为 Σ_F。那么

$$\dim M(F)_{T-k} = \dim M(F_s)_k + \mathrm{def}_k\, \Sigma_F$$

对于 $0 \leq k \leq nd - 2n - 1$，其中 $T = T\,(n, d) = (n+1)\,(d-2)$，且 $F_s \in S_d$ 是一个齐次多项式，使得 $\{F_s = 0\}$ 是 $\mathbb{P}^n$中的光滑超曲面。

当 $\Sigma_F = \{a_1, \ldots, a_p\}$ 是由 p 个点组成的约化概形时，考虑求值映射

$$\theta_k : \ S_k \to \mathbb{C}^p, \qquad H \mapsto (H(a_1), \ldots, H(a_p)),$$

那么 def$_k\, \Sigma_F =$ dim(Coker θ_k); 参见 [7, 第 6 章，习题 4.4（i）]。

例 2.3。 设

$$Q(x_0, \ldots, x_n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k & \text{if } d = 3, \\ \displaystyle\sum_{0 \leq i < j \leq n} (x_i^{d-2} x_j^2 + x_i^2 x_j^{d-3}) & \text{if } d \geq 4. \end{cases}$$

于是， J_Q 包含在由所有乘积 $x_i x_j$ （对所有$0 \leq i < j \leq n$）生成的理想中。此外，在 [2], 中命题 4.3 的证明表明，$J_{Q,\ T-1}$ （回忆一下 $T = (n+1)(d-2)$）等于 $\mathcal{W}$，其中 $\mathcal{W}$ 是 S_{T-1}的子空间，由 x_0、.....、x_n中所有次数为 $T-1$ 且不同于 x_0^{T-1}、.....、x_n^{T-1}的单项式张成。

$\{Q=0\}$的奇点集显然是$J_{Q,\ T-1}$的零点轨迹，它由 $\mathbb{P}^n$ 中的 $n+1$ 个点 p_0、……、p_n组成，这些点由向量空间 $\mathbb{C}^{n+1}$的典范基e_0、……、 e_n 的等价类给出。

容易看出，所有 p_i 都是节点（也称 A_1 奇点），因此 $\{Q=0\}$ 是一个节点超曲面，其约化奇点轨迹为 $\Sigma_Q=\{p_0,\dots,p_n\}$。此外，对于集合 Σ_Q，上述映射 θ_k 对所有 $k\geq 1$ 都是满射。因此，对于所有 k，$\mathbf{def}_k\,\Sigma_Q=0$。于是，我们有

$$\dim M(Q)_k=\dim M(F_s)_k.$$

根据引理 2.2，对于 $k\leq T-1$ 。

2.4. Milnor 代数的 Lefschetz 性质。众所周知，一个猜想认为，光滑齐次多项式 F 的 Milnor 代数 $M(F)$ 具有强 Lefschetz 性质；简要综述见 [9]。

猜想 2.5。对于任意光滑的 $F\in S_d$、任意整数 $k\in[0,T/2)$($T=(n+1)(d-2)$，以及任意一般线性形式 $\ell\in S_1$，诱导的乘法映射

$$\ell^{T-2k}:\ M(F)_k\to M(F)_{T-k}$$

是一个同构。

为了证明我们的主定理，我们需要以下重要结果，该结果已在 [3, 定理 C]中得到证明。

引理 2.6。对于 $n=4$，若 $\{F=0\}$ 是光滑三次三维簇，则米尔诺代数 $M(F)$ 具有强 *Lefschetz* 性质。

3. Proofs of main results

设 $n=4$ 和 V 是五维向量空间。回顾一下，集合 $\mathcal{U}$ 是满足以下性质的三次型 $F\in S^3V\cong S_3$ 所构成的集合：

(i) F 是光滑的，即超曲面 $X=\{F=0\}\subset\mathbb{P}V^*$ 是光滑的；(ii) 存在一个光滑三次 $G\in S^3V^*$，使得$\langle J_{F,\ 3},\ G\rangle=0$，也就是说，$G\in(J_{F,\ 3})^{\perp}$。

3.1. 定理 1.3 的证明。我们首先证明 $\mathcal{U}$ 的非空性。沿用证明 [2, 命题 4.3][10, 定理 1.3], 中的思路，我们通过构造一些具有孤立奇点的显式超曲面，证明 $\mathcal{U}$ 非空。

对于多项式 $Q=\sum_{0\leq i<j<k\leq 4}x_ix_jx_k$，我们已在例 2.3 中证明 $\dim\ M(Q)_3=\dim\ M(F_s)_3=10$。因此 $\dim\,(J_{Q,3})^{\perp}=10$。此外，显然费马三次曲线 $\sum_{i=0}^4y_i^3$ 包含于 $(J_{Q,3})^{\perp}$。

由于光滑多项式的集合在 S^3中稠密，我们可以选取一列光滑三次多项式 F_i，$i=1,\ 2,\ \dots\dots$，使其在 S^3V中收敛到 Q。由于对于所有 i，$\dim(J_{F_i,\ 3})^{\perp}=10$，必要时取子序列，可知 S^3V^*的向量子空间$(J_{F_i,\ 3})^{\perp}$ 收敛到 S^3V^*的一个10维子空间 E。由于$\dim\,(J_{Q,\ 3})^{\perp}=10$ 也成立，因此 $E=(J_{Q,\ 3})^{\perp}$，从而 E 包含一个光滑多项式$\sum_{i=0}^4y_i^3$。因此，当 i 充分大时，$\dim(J_{F_i,\ 3})^{\perp}$ 也包含一个光滑多项式，因为光滑多项式的集合构成一个开稠密子集；那么这个 F_i 属于

$\mathcal{U}$。由此可知， $\mathcal{U}$是 S^3V的一个非空扎里斯基开子集，因为 $\mathcal{U}$显然是一个扎里斯基开子集。

现给定 $F \in \mathcal{U}$，以及一个光滑的 $G \in (J_{F,3})^{\perp}$。向量空间

$$G^{\perp} = \{b \in S^3V : \langle b, G\rangle = 0\}$$

是 S^3V 中包含 $J_{F,3}$ 的一个超平面，因此给出了 $S^3V/J_{F,3}$ 的一个超平面。由 Macaulay 定理 $[5, \text{定理 } 7.4.1]$，，可得由乘法诱导的非退化配对 $S^2V/J_{F,2} \times S^3V/J_{F,3} \to S^5V/J_{F,5} \cong \mathbb{C}$，因此，由 $G^{\perp}$ 在 $S^2V/J_{F,2}$ 中诱导的超平面的湮灭子是一维的，记作 $\mathbb{C}Q'$ 模 $J_{F,2}$，其中 $Q' \in S^2V$。显然，$(J_{F,5} : Q') = G^{\perp}$。

若 $\{F = Q' = 0\} \subset \mathbb{P}V^*$ 光滑，则由 $[1, \text{引理 } 4.8]$，，与 (F, Q') 相关联的三次型为 $(J_{F,5} : Q')^{\perp}$，它等于 G，因而是光滑的。否则，只需找到一个 $q \in J_{F,2}$，使得 $Q = Q' + q$ 满足

(i) $\{F = Q = 0\} \subset \mathbb{P}V^*$ 是光滑的；(ii) 与 (F, Q) 相关联的三次型是光滑的。

事实上，由 Q' 和 $J_{F,2}$ 张成的线性空间在 $X = \{F = 0\}$ 上诱导出一个无基点线性系，因为 F 是光滑的，且 $J_{F,2}$ 已经是无基点的。因此，对于 $Q' + J_{F,3}$ 中的一般元素 $Q = Q' + q$，由贝尔蒂尼定理 $[11]$ 可知，曲面 $\{F = Q = 0\}$ 是光滑的。此外，由于 $q \in J_{F,2}$，我们有

$$(J_{F,5} : Q) = (J_{F,5} : Q'),$$

因此，由 $[1, \text{引理 } 4.8]$，可知，与 (F, Q) 相关联的三次型为 G，它是光滑的。定理 1.3 的证明完成。

3.2. 定理 1.4 的证明。回顾一下， $X = \{F = 0\}$ 是一个光滑的三次三维簇。由引理 2.6 可知，它具有强 Lefschetz 性质，即对于一般线性形式 $\ell \in V$，乘法映射

$$\ell^3 : V \to S^4V/J_{F,4} \qquad \text{and} \qquad \ell : S^2V/J_{F,2} \to S^3V/J_{F,3}$$

是同构。

对于一般的 $Q \in S^2V$，曲面 $\{F = Q = 0\}$ 是光滑的，这可由定理 1.3 的证明得出。我们断言，对于一般的 Q，$(J_{F,3} : Q) = 0$，即

$$V \xrightarrow{Q} S^3V/J_{F,3}$$

对于一般的 Q 是单射。事实上，由 Milnor 代数 $S^{\bullet}V/J_F$ 的强 Lefschetz 性质可知，

$$V \xrightarrow{\ell^2} S^3V/J_{F,3}$$

对于一般的 $\ell \in V$ 是单射；因此，由于单射同态具有开性，对于一般的 $Q \in S^2V$，单射性仍然成立。定理 1.4 的证明至此完成。

References

[1] R. Aguilar、M. Green 和 P. Griffiths, 《混合霍奇结构的无穷小不变量》, arXiv:2406.17118v1 1, 1.1, 1.2, 1, 1, 1, 3.1, 3.1[2] J. Alper、A. Isaev, 《经典不变量理论中的伴随形式及其在超曲面奇点中的应用》, Math. Ann. 360 (2014), 799–823. https://doi.org/10.1007/s00208- 014-1054-2 2.3, 3.1[3] D. Bricalli、F. F. Favale、G.P. Pirola, 《Gordan–Noether 定理与 Gorenstein 环》, Sel. Math. New Ser. 29:74 (2023). https://doi.org/10.1007/s00029-023-00882-7. 2.4[4] J. Carlson 和 P. Griffiths, 《霍奇结构的无穷小变分与整体托雷利问题》, 载于《昂热代数几何日》, 由 A. Beauville 编, Sijthoff and Noordhoff (1980), 第 51–76 页。1[5] J. Carlson、S. M¨uller-Stach 和 C. Peters, 《周期映射与周期域》, 第二版, 剑桥高等数学研究丛书, 第 168 卷, 剑桥大学出版社, Cam- bridge, 2017。1, 3.1[6] A. Dimca, 《实奇点与复奇点专题：导论》, 高等数学讲座, Friedrich Vieweg & Sohn, 布伦瑞克/威斯巴登, 1987。2.1[7] A. Dimca, 《奇点与超曲面的拓扑》, Universitext, 施普林格出版社, 1992。2.1[8] A. Dimca, 《雅可比理想的合冲与线性系的亏损》, Bull. Math. Soc. Sci.Math. Roumanie 56(104), no. 2 (2013), 191–203。2.1[9]A. Dimca、G. Ilardi, 《雅可比代数与雅可比模的 Lefschetz 性质》, AN- NALI SCUOLA NORMALE SUPERIORE–CLASSE DI SCIENZE, 26(3)(2025), 1603–1616. https://doi.org/10.2422/2036-2145.202301 014. 2.4[10] A. Dimca、G. Ilardi、A.N. Nejad, 《零维完全交与 Veronese 簇的强 Lefschetz 性质》, arXiv:2504.14999v2 3.1[11] J.-P. Jouanolou, 《Bertini 定理及其应用》, 数学进展丛书, 第 42 卷, Birkh¨auser Boston, Inc., 马萨诸塞州波士顿, 1983。3.1[12] K. Ueda、M. Yoshinaga, 《射影空间中沿光滑除子的对数向量场》, 北海道数学杂志 38(2009), 409–415. https://doi.org/10.14492/hokmj/1258553970 1 [13] Z. Wang, 《由雅可比理想确定的齐次多项式》, 数学手稿 146 (2015), 559–574. https://doi.org/10.1007/s00229-014-0703-9 1, 1

Zhenjian Wang, Hefei National Laboratory, Hefei 230088, China电子
邮箱地址：wzhj@ustc.edu.cn