arXiv:2601.05585v1 [math.NT] 9 Jan 2026

代数数域上 ADC二次格的局部信息

ZILONG HE

Abstract. 本文主要确定任意非阿基米德局部域上二元和三元 ADC二次格的结构、计数公式以及表示的密度集。

在二元情形下，我们证明，在某些条件下，本原正定 ADC 格只有有限多个，而非本原 ADC 格有无限多个。我们还利用 BONG 理论中的不变量给出局部密度和质量的简洁公式，并证明这些不变量完全决定任意非阿基米德局部域上的局部密度。此外，我们计算了代数数域上 ADC 格所对应的局部量。

在三元情形下，我们刻画了任意非阿基米德局部域上 ADC 格的旋量例外的余行列式集以及整数旋量范数群。基于这些结果，我们进一步建立了代数数域上不定 ADC 格的一些充分条件。

1. 引言

受 Clark 的 ADC 二次型概念启发， [8], 我们针对二次型的高维表示引入了 n-ADC 性质，并研究了其在非阿基米德局部域和代数数域上的分类，其中 $n \geq 2$ 在 [17]。当 $n = 1$时，这一概念与 Clark 的定义一致。具体而言，设 Q 是 $\mathbb{Z}$上的一个 m元正定二次型。那么， Q 称为ADC，如果对于 $\mathbb{Z}$ 上的每个正整数 a，只要 Q 在 $\mathbb{Q}$上表示 a， Q 就表示 a。这一概念最初源自 Aubry、Davenport 和 Cassels 分别独立得到的一项结果，该结果可表述如下：若二次型 Q 具有整 Gram 矩阵并满足欧几里得性质，即对所有 $x \in \mathbb{Q}^m$，都存在 $y \in \mathbb{Z}^m$ 使得 $Q(x - y) < 1$，则它是 ADC。ADC 性质与另外两个著名且广受研究的主题密切相关：普适型和正则型，这两个术语由 Dickson [11, 12]提出。回顾一下，$\mathbb{Z}$ 上的正定二次型若表示所有正整数，则称为全局表示；若表示每个局部可表示的正整数，则称为正则。事实上，普适型是 ADC 型，而 ADC 型是正则型（参见 (1.1)）。因此，ADC 性质可视为普适性与正则性之间的过渡概念。在一篇后续论文中，Clark 和 Jagy [9]进一步探讨了 ADC 二次型在多个域上的分类问题，尤其是非二进局部域、2-adic局部域以及有理数域上的情形。更多历史背景和细节见 [8, 9, 17]。

日期：2026年1月12日。2020 年数学主题分类。11E08、11E12、11E95。
关键词和短语。ADC 二次型、局部密度、质量公式。

本文主要研究此前工作尚未涉及的非阿基米德局部域和代数数域上的 ADC 二次格分类问题。具体而言，我们刻画了任意非阿基米德局部域上的 ADC 格，尤其是其中的一元、二元和三元情形。在非二进情形中，我们给出一个必要且充分条件，该条件不同于 [9], 中的条件，旨在突出 ADC 格与极大格之间的联系（定理1.2(i)、(ii)和1.9(i)）。事实上，所有极大格已在 [18, 19]中列举；更多讨论见第 3 节。在二进情形中，我们利用经典 Jordan分裂表述分类结果（定理1.2(i)、(iii)和1.9(ii)），同时采用 Beli 的 BONG 理论，该理论已有效应用于 [3, 16, 17, 18]中的二次格表示问题。然而，不同于 [17], 研究的高维表示情形，非极大 ADC 格似乎有更多类型。为描述这一点，我们还给出了这些 ADC 格的计数公式（定理 1.18）。在 [10], 中，Clark、Pollack、Rouse 和 Thompson 研究了二次型表示集的密度。基于他们的结果，我们给出了任意非阿基米德局部域上 ADC 格的此类表示密度的显式公式（定理 3.15）。

在整体情形下，我们建立了代数数域上关于一元和二元 ADC 格的等价条件（定理 1.4），并给出了关于二元 ADC 格的若干有限性与无限性结果（定理 1.7、推论 1.6 和 1.8）。

在第 7 节中，我们研究局部密度和质量公式，以分析定理 1.4(iii) 中给出的二元 ADC 格的类数为一条件。在非二进域中，Ikeda 和 Katsurada [21] 证明，局部密度完全由 Gross 和 Keating [14]引入的 GK 不变量决定。在 [7], Cho 证明，对于非分歧二进局部域，局部密度可由扩展GK数据决定。然而，正如 Ikeda 和 Katsurada 在 [7, 例 A1] 中指出的，这些不变量不适用于分歧二进局部域上的二元二次型。

受上述工作的启发，并以 Pfeuffer 在 [31, 32], 中的结果为基础，我们推导出一个紧凑公式，用 a不变量和 BONG 理论中的 R_i不变量表示任意非阿基米德局部域上二元格的局部密度（定理 7.8）。这表明，对于非二进或二进局部域上的二元格，这些不变量可以完全决定其局部密度（参见注 7.9）。我们还研究了 BONG 不变量与 [7, 附录 A], 中提及的不变量（例如 GK不变量和 EGK不变量）之间的关系（参见命题 7.6 和注 7.7）。利用不变量 (7.1) 和 (7.2)，我们重新诠释了 K¨orner 的适当类数公式[27] 和 Pfeuffer 的质量公式 [32], 的局部部分，由此推导出这些公式的 BONG 版本，分别用于质量 m（L）及其倒数 $1/m$（L）（定理 7.4 和 7.10）。作为应用，我们确定了二元 ADC 格的所有相应局部量，尤其是局部密度；见定理 7.11 中的表 1–5。基于这些数据，对于每个分歧的二进局部域，我们构造了一系列显式反例，它们与 [7, 例 A1],类似，具有相同的扩展GK数据，但局部密度不同。我们还利用局部密度公式 (7.8) 解释了这一现象。详情见例 7.13。

为研究三元二次格的表示，Beli [4]引入了旋量例外的余行列式集这一概念，并给出了相应的等价条件。基于他的工作，我们刻画了旋量例外的余行列式集和旋量

范数群在非阿基米德局部域上的三元 ADC 格中的情形（参见定理 4.6 和 5.5，以及引理 4.9、5.26 和 5.27），进而推导出其在代数数域上的相应全局信息（定理 1.12 和 1.14）。凭借这些结果，我们为不定三元格全局 ADC 建立了两个充分条件（定理 1.13 和推论 1.17）。

在继续讨论之前，我们先介绍本文中使用的记号和定义，并简要概述二次型的算术理论。任何未作解释的记号或定义均可参见 [17, 29]。

一般设定。

设 F 是一个代数数域或特征为 $F \neq 2$ 的非阿基米德局部域，$F^\times$ 是 F 的非零元素集合，$\mathcal{O}_F$ 是 F 的整数环，$\mathcal{O}_F^\times$ 是其单位群。设 V 是 F 上与二次型 $Q: V \to F$ 相关联的非退化二次空间。我们用 $\det V$ 表示行列式，用 dV 表示 V 的判别式。对于 V 中的一个 $\mathcal{O}_F$-格 L，记 FL 为由 L 在 F 上张成的 V 的子空间。照常，我们还用 $\mathfrak{s}(L)$ 表示标度，用 $\mathfrak{n}(L)$ 表示范数，用 $\mathfrak{v}(L)$ 表示体积，用 dL 表示 L 的判别式。若 $\mathfrak{n}(L) \subseteq \mathcal{O}_F$，则称 L 为整的；若 $\mathfrak{n}(L) = \mathcal{O}_F$，则称其为本原的。若不存在定义在 FL 上且满足 $L \subsetneq L'$ 的整 $\mathcal{O}_F$-格 L'，则称 L $\mathcal{O}_F$-极大的。

当 $V = FL$ 时，我们用 $O(V)$ 表示 V 的正交群，用 $O^+(V)$ 表示 V 的特殊正交群。令 $O(L) := \{\sigma \in O(V) \mid \sigma(L) = L\}$，以及 $O^+(L) := O^+(V) \cap O(L)$。为避免混淆，我们滥用 θ 表示局部/全局自旋范数映射，并用 $N(E/F)$ 表示扩域 E/F 的范数群。

全局设定。

当 F 是一个代数数域时，设 L 为一个 $\mathcal{O}_F$-格。我们用 $\mathrm{gen}(L)$ 表示 L 的属，用 $\mathrm{spn}(L)$ 表示 L 的旋量属，并用 $\mathrm{cls}(L)$ 表示 L 的类。分别用 $h(F)$ 和 $h(L)$ 表示 F 和 L 的类数。此外，用 $g(L)$ 表示属 L 中旋量属的数量。

我们用 F^+ 表示 F 中所有全正元素的集合；即所有满足以下条件的元素 $c \in F$：对于从 F 到 $\mathbb{R}$ 的所有实嵌入 σ，均有 $\sigma(c) > 0$。令 $\mathcal{O}_F^+ := F^+ \cap \mathcal{O}_F$。**局部设定**。

当 F 是非阿基米德局部域时，记 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathcal{O}_F$ 的极大理想，$\pi \in \mathfrak{p}$ 为一个均匀化元，$N\mathfrak{p}$ 为 F 的剩余类域中的元素个数。对于 $c \in F^\times$，我们用 $\mathrm{ord}(c)$ 表示 c 的赋值，并令 $e := \mathrm{ord}(2)$。对于 F 的分式理想或零理想 $\mathfrak{a}$，令 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a}) = \min\{\mathrm{ord}(c) \mid c \in \mathfrak{a}\}$。设 Δ 是一个固定单位，使得 $F(\sqrt{\Delta})/F$ 是一个非分歧二次扩张。若 F 是非二进的，则 Δ 是任意非平方单位；若 F 是二进的，则 Δ 是形如 $\Delta = 1 - 4\rho$ 的非平方单位，其中 $\rho \in \mathcal{O}_F^\times$。

若 F 是二进的，我们通过映射 d 从 $F^\times/F^{\times 2}$ 到 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 定义 c 的缺陷赋值：$d(c) := \mathrm{ord}(c^{-1}\mathfrak{d}(c))$，其中 $\mathfrak{d}(c)$ 表示 c 的二次缺陷。此外，我们用 $\mathcal{U}$ 表示 $\mathcal{O}_F^\times/\mathcal{O}_F^{\times 2}$ 的一个完备代表系，使得对于所有 $\delta \in \mathcal{U}$，$d(\delta) = \mathrm{ord}(\delta - 1)$；并用 $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cup \pi\mathcal{U}$ 表示 $F^\times/F^{\times 2}$ 的一个代表集。若 F 是非二进的，则令 $\mathcal{U} = \{1, \Delta\}$ 和 $\mathcal{V} = \{1, \Delta, \pi, \Delta\pi\}$。显然，$|\mathcal{U}| = 2(N\mathfrak{p})^e$ 且 $|\mathcal{V}| = 2|\mathcal{U}| = 4(N\mathfrak{p})^e$。对于 $c \in \mathcal{V}$ 和子集 $S \subseteq \mathcal{V}$，为方便起见，我们也用 $c = S$（分别用 $c \neq S$）表示 $c \in S$（分别表示 $c \notin S$）。

令 $x_1, \ldots\ldots, x_n \in V$，其中 $Q(x_i) = a_i$。若 $V = Fx_1 \perp \ldots \perp Fx_n$，记作 $V \cong [a_1, \ldots, a_n]$；若 $L = \mathcal{O}_F x_1 \perp \ldots \perp \mathcal{O}_F x_n$，则记作 $L \cong \langle a_1, \ldots\ldots, a_n\rangle$。对于 $c \in F^\times$ 和 $a, b \in F$，我们记

$cA(a,\ b)$ 为与格拉姆矩阵 $c\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ 对应的二元 $\mathcal{O}_F$-格。照常用法，以 $\mathbb{H}$ 表示双曲平面，并记作 $\mathbf{H} = 2^{-1}A(0,\ 0)$。

定义 1.1。设 M 是域 F 上的一个整 $\mathcal{O}_F$-格。

当 F 是非阿基米德局部域时，(i) 如果 M 表示 $\mathcal{O}_F$ 中的所有元素 a，则称 M 为全局全能的。(ii) 如果对于 $\mathcal{O}_F$ 中满足 FM 表示 a 的每个元素 a，M 都能表示，则称 M 为 ADC。当 F 是代数数域时，(iii) 如果 M 表示 $\mathcal{O}_F$ 中满足在所有实素位 $\mathfrak{p} \in \infty_F$ 上具有 $a \rightarrowtail M_{\mathfrak{p}}$ 的所有元素 a，则称 M 为全局全能的，或简称全能的。(iv) 如果对于 $\mathcal{O}_F$ 中满足 FM 表示 a 的每个元素 a，M 都能表示，则称 M 为全局 ADC，或简称 ADC。

在本节余下部分，我们假设 F 是一个代数数域，V 是 F 上的非退化二次空间，而 M 是 V 上的一个整 $\mathcal{O}_F$-格。设 Ω_F 为 F 的所有素位组成的集合，∞_F 为所有阿基米德素位组成的集合。对于 Ω_F 中的 $\mathfrak{p} \in$，设 $F_{\mathfrak{p}}$ 为 F 在 $\mathfrak{p}$ 处的完备化。于是，当 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$ 时，我们记 $M_{\mathfrak{p}} := \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}} \otimes M$，否则记 $M_{\mathfrak{p}} := F_{\mathfrak{p}} \otimes M = V_{\mathfrak{p}}$。显然，对于所有 $\mathfrak{p} \in \infty_F$，$M_{\mathfrak{p}}$ 都是 ADC（分别为全局全能的），因此，如果对于所有 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$，$M_{\mathfrak{p}}$ 都是 ADC（分别为全局全能的），我们称 M 为 局部 *ADC*（分别为 局部全能的）。

在 [8, 定理 25], 中，Clark 证明了全局表示、ADC 性质与正则性之间的关系：

$$M \text{ is universal} \implies M \text{ is globally ADC} \iff \begin{cases} M \text{ is locally ADC}, \\ M \text{ is regular}. \end{cases} \tag{1.1}$$

（另见 [17, 定理 1.3] ，其中讨论了高维表示。）对于 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$，全局表示、ADC 性质与极大性之间也存在如下联系：

$$M_{\mathfrak{p}} \text{ is universal} \implies M_{\mathfrak{p}} \text{ is ADC} \impliedby M_{\mathfrak{p}} \text{ is } \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}\text{-maximal}$$

（参见 [8, 定理 8 和 19] 或引理 3.10），但反向蕴含并非对每个蕴含都成立。对于第一个蕴含，若秩为 $M_{\mathfrak{p}} = 2$ 或 3，则在附加条件下反向蕴含成立（参见推论 3.9）。若秩为 $M_{\mathfrak{p}} \geq 4$，则反向蕴含无条件成立。事实上，由 [17,定理 1.4] 及 $n = 1$，可得

$$M_{\mathfrak{p}} \text{ is ADC} \iff M_{\mathfrak{p}} \text{ is universal;} \tag{1.2}$$

类似地，若秩为 $M \geq 4$，则

$$M \text{ is ADC} \iff M \text{ is universal.} \tag{1.3}$$

Xu 和 Zhang 利用经典不变量给出了全局表示$\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-格的等价条件：适用于非二进情形，并部分适用于二进情形（命题 2.3、2.16 和 2.17], ）；Beli 则利用 BONG 不变量给出了适用于一般二进情形的等价条件（定理 2.1]）。因此，尚待确定秩为 $M_{\mathfrak{p}} \leq 3$的 ADC 格 $M_{\mathfrak{p}}$。

定理 1.2。假设秩为 $M \in \{1, 2\}$。令 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$。

(i) 若秩 $M = 1$，则 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 *ADC*，当且仅当它是 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格。(ii) 若秩 $M = 2$ 且 $\mathfrak{p}$ 是非二进的，则 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 *ADC*，当且仅当它是 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格。

(iii) 若秩 $M=2$ 且 $\mathfrak{p}$ 是二进的，则 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 *ADC*，当且仅当它是 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格，或与非 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格等距

$$2^{-1}\pi_{\mathfrak{p}}^{\nu_{\mathfrak{p}}}A(2\pi_{\mathfrak{p}}^{-1},2\rho_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}),$$

与 $\nu_{\mathfrak{p}}\in\{0,1\}$。

注记 1.3。秩为 1 或 2 的所有 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格都列于命题 3.4 中。

我们还使用记号 $\mathbf{H}$ 表示二元 $\mathcal{O}_F$-格 $\mathcal{O}_Fx+\mathcal{O}_Fy$，其中 $Q(x)=Q(y)=0$且 $B(x,y)=1/2$。

定理 1.4。设秩为 $M\in\{1,2\}$。则 M 是全局 *ADC*，当且仅当满足以下条件：

(i) 若秩为 $M=1$，则 M 是 $\mathcal{O}_F$-极大格。(ii) 若秩为 $M=2$ 且 FM 是各向同性的，则 M 是 $\mathcal{O}_F$-极大格且 $M\cong\mathbf{H}$。(iii) 若秩为 $M=2$ 且 FM 是各向异性的，则 M 是局部 *ADC* 且 $h(M)=1$。

注记 1.5。注意，对于每个 $\mathfrak{p}\in\Omega_F\backslash\infty_F$，$M$ 是本原的当且仅当 $M_{\mathfrak{p}}$ 是本原的。由定理 4.5(i) 和 5.4(i) 可轻易得到二元 ADC $\mathcal{O}_F$- 格为本原或非本原时的等价条件。

接下来，我们讨论关于二元 ADC 格有限性的一些结果。根据定义，将一个 $\mathcal{O}_F$-格乘以 $F^{\times}$ 中的元素进行缩放后，其正则性保持不变。依照 [6],，设 L 是 V 上另一个 $\mathcal{O}_F$-格。若存在某个 $c\in F^{+}$，使得 M 与 $L^{(c)}$ 等距，其中 $L^{(c)}$ 表示将格 L 乘以 c 后得到的格，则称 M 与 L 相似。

在 [30], 中，Peters 证明，在某些条件下，类数为一的正定二元 $\mathcal{O}_F$-格只有有限多个，由此可得以下推论。

推论 1.6。在相似意义下，

（i）当 F 固定时，本原正定二元 *ADC* $\mathcal{O}_F$-格只有有限多个。（ii）固定一个正整数 n，当 F 遍历所有满足 $[F:\mathbb{Q}]=n$ 的全实数域时，本原正定二元 *ADC* $\mathcal{O}_F$-格只有有限多个。（iii）在广义黎曼猜想成立的假设下，当 F 遍历所有全实数域时，本原正定二元 *ADC* $\mathcal{O}_F$-格只有有限多个。

下面的定理是 [9, 定理 3.4], 的推广，它提供了一种从给定的本原二元 ADC $\mathcal{O}_F$-格构造非本原二元 ADC 格的方法。因此，可能存在无穷多个非本原正定或不定二元 ADC 格（推论 1.8）。

定理 1.7。设 $a\in\mathcal{O}_F^{+}$。若秩 $M=2$，则 $M^{(a)}$ 是 *ADC*，当且仅当 M 是 *ADC*，且对每个 $\mathfrak{p}\mid a\mathcal{O}_F$，赋值 $\mathfrak{p}(a)=1$，$FM_{\mathfrak{p}}\cong[1,-\Delta_{\mathfrak{p}}]$，

$$\mathfrak{n}(M_{\mathfrak{p}})=\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}\quad and\quad \mathfrak{v}(M_{\mathfrak{p}})=\begin{cases}\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}} & if\ \mathfrak{p}\ is\ non\text{-}dyadic,\\ \mathfrak{p}^{-2e_{\mathfrak{p}}}\ or\ \mathfrak{p}^{2-2e_{\mathfrak{p}}} & if\ \mathfrak{p}\ is\ dyadic.\end{cases}$$

推论 1.8. 假设 $h(F)=1$，且存在一个本原各向异性二元 *ADC*$\mathcal{O}_F$-格。那么，在等距意义下，存在无穷多个非本原二元 *ADC* $\mathcal{O}_F$-格。

定理 1.9. 假设秩为 $M=3$。令 $\mathfrak{p}\in\Omega_F\backslash\infty_F$。

(i) 如果 $\mathfrak{p}$ 是非二进的，那么 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 *ADC*，当且仅当它是 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格，或与非 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格等距

$$\mathbf{H}\perp\langle\varepsilon_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}^{h_{\mathfrak{p}}}\rangle,$$

且 $\varepsilon_{\mathfrak{p}}\in\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ 和 $h_{\mathfrak{p}}\geq 2$。

(ii) 如果 $\mathfrak{p}$ 是二进的，那么 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 *ADC*，当且仅当以下情况之一成立：*(a)* 它是 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格；*(b)* 它与非 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格等距

$$\mathbf{H}\perp\langle\varepsilon_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}^{h_{\mathfrak{p}}}\rangle,$$

且 $\varepsilon_{\mathfrak{p}}\in\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ 和 $h_{\mathfrak{p}}\geq 2$;

(c) 它与非 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格等距

$$\langle\Delta^{\nu_{\mathfrak{p}}-1},-\Delta^{\nu_{\mathfrak{p}}-1}\delta_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}},\varepsilon_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}^{k_{\mathfrak{p}}}\rangle,$$

其中 $\nu_{\mathfrak{p}},k_{\mathfrak{p}}\in\{1,2\}$ 和 $\delta_{\mathfrak{p}},\varepsilon_{\mathfrak{p}}\in\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$;

(d) 它与.....等距

$$(\delta_{\mathfrak{p}}^{\#})^{\nu_{\mathfrak{p}}-1}\pi_{\mathfrak{p}}^{-l_{\mathfrak{p}}}A(\pi_{\mathfrak{p}}^{l_{\mathfrak{p}}},-(\delta_{\mathfrak{p}}-1)\pi_{\mathfrak{p}}^{-l_{\mathfrak{p}}})\perp\langle\varepsilon_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}^{k_{\mathfrak{p}}}\rangle,$$

其中 $\not{p}\in\{1,2\}$, $2l_{\mathfrak{p}}=d_{\mathfrak{p}}(\delta_{\mathfrak{p}})-1\leq 2e_{\mathfrak{p}}-2$, $\delta_{\mathfrak{p}}\in\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}\backslash\{1,\Delta_{\mathfrak{p}}\}$, $\varepsilon_{\mathfrak{p}}\in\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ *and* $k_{\mathfrak{p}}\in\{0,1\}$，其中 $\delta_{\mathfrak{p}}^{\#}=1+4\rho_{\mathfrak{p}}$ $(\delta_{\mathfrak{p}}-1)^{-1}$。

此外，当且仅当它与下列对象等距时，它是 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格

$$2^{-1}\pi_{\mathfrak{p}}A(2,2\rho_{\mathfrak{p}})\perp\langle\Delta_{\mathfrak{p}}\varepsilon_{\mathfrak{p}}\rangle,$$

其中 $\xi_{\mathfrak{p}}\in\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$.

注 1.10。 (i) 所有秩 3 的 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格均已列于命题 3.4 中。

(ii) 根据 [8, 定理 19]， $M_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格，当且仅当按照 [8, §4.2] 的含义，它是欧几里得的。因此，定理 1.2 和 1.9 中的“$\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-极大格”一词可以毫无障碍地替换为“欧几里得”。

与二元情形不同，正如定理 4.5(ii) 和定理 5.4(ii) 所示，对于三元 ADC $\mathcal{O}_F$格，只需考虑本原情形。在正定情形下，Clark和Jagy基于Jagy、Kaplansky和Schiemann给出的三元正则二次型候选列表 [20]，确定了 $\mathbb{Z}$ 上的所有三元 ADC 二次型 [9, （参见表 2]）。然而，当 $F\neq\mathbb{Q}$ 为全实时，ADC $\mathcal{O}_F$格的分类颇具挑战，因为除Chan和Icaza证明的有限性结果 [6], 外，关于正则 $\mathcal{O}_F$格的分类鲜有成果；该结果指出，三元正则$\mathcal{O}_F$格在相似意义下只有有限多个。因此，由(1.1)可立即推出三元 ADC 格的类似有限性结果（命题 1.11(i)）。注意，任何三元 2-ADC $\mathcal{O}_F$格都必定是 ADC。事实上，所有这类格都是 $\mathcal{O}_F$ 极大的，且类数为一；它们已由 [17,定理 1.7], 和Hanke [15]、Kirschmer [25], 确定，从而部分解决了全实数域上三元 ADC $\mathcal{O}_F$格的存在性问题。总之，我们看到

命题 1.11. 在相似意义下，

(i) 给定一个全实数域 F，正定三元 *ADC* $\mathcal{O}_F$-格只有有限多个。(ii) 当 F 遍历所有全实数域时，至少存在468 个正定三元 *2-ADC*（因而也是 *ADC*） $\mathcal{O}_F$-格。

可以猜想命题 1.11(i)的一个更强版本：当 F 遍历所有全实数域时，正定三元 ADC $\mathcal{O}_F$-格只有有限多个。然而，根据 (1.1)，这将推出 Kitaoka猜想，而该猜想目前仍未解决；历史背景见 [22]，近期进展见 [23, 24]。因此，目前看来，建立这一更强的结论似乎遥不可及。

在不定情形下，确定正则性的充分条件，从而确定全局 ADC 性质，要相对容易一些。我们首先回顾正定或不定三元 ADC 格的旋量属的性质。设秩 $M = 3$ 和 $b \in \mathcal{O}_F$ 由 gen(M)表示。令 $a = -b$行列式 FM和 $b = Q(x)$，其中 $x \in M$。依照 Kneser [26] 和 Schulze-Pillot [35], 的工作，我们称 a 为 gen(M)的一个旋量例外，如果 b 恰好由 gen(M)中的一半旋量属表示。已知，当且仅当 $b \notin F^{\times 2}$时， b 是 gen(M)的一个旋量例外，并且

$$\theta(O^+_{\mathbb{A}}(M)) \subseteq N(F(\sqrt{a})/F) = \theta(X_{\mathbb{A}}(M, b)), \tag{1.4}$$

其中我们记 $X_{\mathbb{A}}(M, b) := \{\sigma \in O^+_{\mathbb{A}}(V) \mid x \in \sigma(M)\}$，因为所考虑的群$\theta(X_{\mathbb{A}}(M, b))$ 与向量 x 的选取无关；参见 [35, 定义 1]。回顾[35, 定理 2]，条件 (1.4) 可化为相应的非阿基米德局部域上的条件，这些条件由 Schulze-Pillot [35, §3] 针对非二进情形和 2-进情形确定，由 Xu [36, §2] 针对一般二进情形确定。Beli [4],最近采用新术语 Ex(M, N) 和 Co(M)，给出了包括高维表示情形在内的等价条件。依照其术语，对于一元$\mathcal{O}_F$-格 $N \subseteq M$，我们定义集合

$$X_{\mathbb{A}}(M/N) := \{\sigma \in O^+_{\mathbb{A}}(V) \mid N \subseteq \sigma(M)\}.$$

对于每个满足 $a \neq 1$ 的 $a \in F^\times/F^{\times 2}$，我们进一步定义集合

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(M, a) :=& \{N \mid N \rightarrowtail \mathrm{gen}(M),\ -\det FM \det FN = a,\ \theta(X_{\mathbb{A}}(M/N)) = N(F(\sqrt{a})/F)\},\\ \mathrm{Co}(M) :=& \{a \in F^\times/F^{\times 2} \mid a \neq 1,\ \mathrm{Ex}(M, a) \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

注意，对于每个带有 $x \in M$ 的 $b = Q(x)$，可以取 $N_b := \mathcal{O}_F x$。于是， N_b 是包含于 M 中的一元格，因此由 gen(M) 表示。此外， $X(M, b) = X(M/N_b)$。因此，如果 Co(M) $= \emptyset$，则不存在一元格 N 使得 $\theta(X_{\mathbb{A}}(M/N)) = N(F(\sqrt{a})/F)$。所以

$$\theta(X_{\mathbb{A}}(M, b)) \neq N(F(\sqrt{a})/F)$$

对于所有这样的 b，均成立。这意味着，只要 Co(M) $=\emptyset$，gen(M) 中就不存在旋量例外。

对于每个非阿基米德素数 $\mathfrak{p}$，我们刻画了三元 ADC 格 M 的余行列式集 Co($M_\mathfrak{p}$)（定理 4.6 和 5.5），从而确定了关于 Co(M) 的等价条件。

定理 1.12。设 $a \in F^{\times}/F^{\times 2}$ 和 $a \neq 1$。假设 M 是局部 *ADC* 三元。那么，$a \in Co(M)$ 当且仅当满足以下条件：

（i）当 $\mathfrak{p}$ 是阿基米德且为实时，（a）若 $FM_{\mathfrak{p}}$ 是各向同性的，则 $a_{\mathfrak{p}} \in F_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$；（b）若 $FM_{\mathfrak{p}}$ 是各向异性的，则 $a_{\mathfrak{p}} \in -F_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$。（ii）当 $\mathfrak{p}$ 是非二进时，若 $FM_{\mathfrak{p}}$ 是各向同性的且 $\mathfrak{v}(M_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}} \subseteq \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$，则 $a_{\mathfrak{p}} \in F_{\mathfrak{p}}^{\times 2} \cup \Delta_{\mathfrak{p}}^{k_{\mathfrak{p}}+1} F_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$。（iii）当 $\mathfrak{p}$ 是二进时，（a）若 $FM_{\mathfrak{p}}$ 是各向同性的且 $\mathfrak{v}(M_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}} \subseteq \mathfrak{p}^2$，则 $a_{\mathfrak{p}} \in F_{\mathfrak{p}}^{\times 2} \cup \Delta_{\mathfrak{p}}^{k_{\mathfrak{p}}+1} F_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$；（b）若 $FM_{\mathfrak{p}}$ 是各向同性的且 $2\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}} \subseteq 2\mathfrak{s}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$，则 $a_{\mathfrak{p}} \in F_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$。

根据定理 1.12，我们推导出 $\mathrm{Co}(M) = \emptyset$ 的一个充分条件，从而也得到不定三元 ADC 格的一个充分条件。

定理 1.13。设 M 是局部 *ADC* 三元。若存在某个 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$ 使得 $FM_{\mathfrak{p}}$ 是各向异性的，则 $Co(M) = \emptyset$；因此，$gen(M)$ 中不存在旋量例外。

此外，若 M 是不定的，则 M 是全局 *ADC*。

对于每个非阿基米德素数 $\mathfrak{p}$，我们还刻画了三元 ADC 格 M 的整自旋范数群 $\theta(O^+(M_{\mathfrak{p}}))$（引理 4.9、5.26 和 5.27），从而得到以下定理。

定理 1.14。设 M 是局部 *ADC* 三元。则对于所有 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$，均有 $\theta(O^+(M_{\mathfrak{p}})) \supseteq \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{\times} F_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$。

注 1.15。由 (1.2) 可知，ADC $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-格 $M_{\mathfrak{p}}$ 的秩为 ≥ 4 时是全局表示的，因此 $\theta(O^+(M_{\mathfrak{p}})) \supseteq \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{\times} F_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$。所以，定理 1.14 对秩 $M \geq 4$ 成立，这将 [29, 91] 推广到了 ADC 格。

根据定理 1.14，我们给出了正则性的一个充分条件。

定理 1.16。设 M 是局部 *ADC* 三元。若 $h(F)$ 为奇数，则 $g(M) = 1$；因此 $gen(M)$ 中只有一个旋量属。

此外，若 M 是不定的，则 $h(M) = 1$；因此 M 是正则的。

结合定理 1.16 与等价条件 (1.1)，我们得到了不定三元 ADC 格的另一个充分条件。

推论 1.17。设 M 是一个不定三元 $\mathcal{O}_F$-格。假设 $h(F)$ 为奇数。若 M 是局部 *ADC*，则 M 是全局 *ADC*。

由等价关系 (1.2)、[37, 命题 2.3(1)], 和 [3, 定理 2.1 II], 可知，在非阿基米德局部域上，四元或更高维 ADC 格在等距意义下有无穷多个。对于其余情形，我们给出了明确的计数公式。

定理 1.18。用 $B(m)$ 表示非阿基米德局部域 F 上秩为 $m \in \{1, 2, 3\}$ 的 *ADC* $\mathcal{O}_F$-格 M 的数量。

（i）若 $m = 1$，则 $B(1) = 4(N\mathfrak{p})^e$。

（ii）若 $m=2$，则

$$B(2)=\begin{cases}8(N\mathfrak{p})^e-1+0 & if\ e=0,\\ 8(N\mathfrak{p})^e-1+2 & if\ e\geq 1.\end{cases}$$

(iii) 若 $m=3$，则 $B(3)=\infty$。此外，该数还可细化如下，

$$\begin{cases}4(N\mathfrak{p})^e+\infty & if\ e=0\ and\ FM\ is\ isotropic,\\ 4(N\mathfrak{p})^e+0 & if\ e=0\ and\ FM\ is\ anisotropic,\\ 4(N\mathfrak{p})^e+\infty & if\ e\geq 1\ and\ FM\ is\ isotropic,\\ 4(N\mathfrak{p})^e+(4e+2)(N\mathfrak{p})^e & if\ e\geq 1\ and\ FM\ is\ anisotropic.\end{cases}$$

这里，第二个加数统计的是那些属于 *ADC* 格、但并非 $\mathcal{O}_F$-极大的格的数量。

本文其余部分安排如下。第 2 节简要回顾 Beli的BONG理论中与二进局部域上二次格的表示和旋量范数相关的内容。第 3 节讨论非阿基米德局部域上二次空间与格的一些结果，尤其是二元和三元情形。随后，我们将在第 4 节刻画二元和三元 ADC 格，并确定非二进局部域上三元 ADC 格的整旋量范数群和余行列式集；第 5 节则讨论二进局部域上的情形。第 6 节将证明上文提及的主要结果（定理 1.2、1.4、1.7、1.9、1.12、1.13、1.14、1.16 和 1.18，以及推论 1.6 和 1.8）。最后，我们将讨论代数数域上二元格的局部密度和质量。

以下讨论中所考虑的所有格均假定为整的。

2. A brief overview of BONGs theory

本节中，我们始终假设 F 是二进的，因而 $e\geq 1$。记 $[h,k]^E$ 为满足 $h\leq i\leq k$的所有偶整数 i 所组成的集合。对于 $c_i\in F^\times$，我们也简记为$c_{i,\ j}=c_i\cdots c_j$，并令$c_{i,\ i-1}=1$。

FM的向量 $x_1,\dots,x_m$称为 $\mathcal{O}_F$-格 M的一个$BONG$，如果 $\mathfrak{n}(M)=Q(x_1)\mathcal{O}_F$且 $x_2,\dots,x_m$是 $\mathrm{pr}_{x_1^\perp}M$的一个 BONG；若对 $1\leq i\leq m-2$有 $\mathrm{ord}(Q(x_i))\leq\mathrm{ord}(Q(x_{i+2}))$，则称其为良好的。若 $x_1,\dots,x_m$是 M的一个 BONG，且$Q(x_i)=a_i$，则记为 $M\cong\prec a_1,\dots,a_m\succ$。

引理 2.1 ([18, 引理 2.2]). 设 $x_1,\dots,x_m$ 是二次空间中的两两正交向量，且满足 $Q(x_i)=a_i$ 和 $R_i=$赋值(a_i)。那么，对于某个格而言，$x_1,\dots,x_m$ 构成良好 *BONG*，当且仅当满足以下条件

$$R_i\leq R_{i+2}\quad for\ all\ 1\leq i\leq m-2 \tag{2.1}$$

and

$$R_{i+1}-R_i+d(-a_ia_{i+1})\geq 0\quad and\quad R_{i+1}-R_i+2e\geq 0\quad for\ all\ 1\leq i\leq m-1. \tag{2.2}$$

注记 2.2。根据 [1, 引理 3.5]，$a_{i+1}/a_i\in\mathscr{A}$ 当且仅当 a_{i+1}/a_i 满足（2.2）。因此，若 $M\cong\prec a_1,\dots,a_m\succ$相对于良好 BONG，则 $a_{i+1}/a_i\in\mathscr{A}$对所有 $1\leq i\leq m-1$都成立。

设 $M \cong \prec a_1, \ldots, a_m \succ$ 是相对于某个良好 BONG 的 $\mathcal{O}_F$-格。定义R_i-不变量 为 $R_i(M) := \mathrm{ord}(a_i)$，其中 $1 \le i \le m$，并定义 α_i-不变量 为 $\alpha_i(M) := \min_{1\le j\le m-1}\{T_j^{(i)}\}$，其中 $1 \le i \le m-1$，这里

$$T_j^{(i)} := \begin{cases} (R_{i+1} - R_i)/2 + e & \text{if } j = 0, \\ R_{i+1} - R_j + d(-a_j a_{j+1}) & \text{if } 1 \le j \le i, \\ R_{j+1} - R_i + d(-a_j a_{j+1}) & \text{if } i \le j \le m-1. \end{cases}$$

对于 $0 \le i-1 \le j \le m$ 和 $c \in F^\times$，我们定义

$$d[ca_{i,j}] := \min\{d(ca_{i,j}), \alpha_{i-1}, \alpha_j\}.$$

这里，在取最小值时，我们忽略项 α_0 和 α_m （若存在），因为它们未定义。特别地，若 $m = 2$, 则有 $d[-a_{1,2}] = d(-a_1a_2)$。

这些不变量具有以下性质（参见 [18, §2]）。

命题 2.3. 设 $1 \le i \le m-1$。

(i) $R_{i+1} - R_i > 2e$ （分别为 $= 2e$、$< 2e$）当且仅当 $\alpha_i > 2e$ （分别为 $= 2e$、$< 2e$）。(ii) 若 $R_{i+1} - R_i \ge 2e$ 或 $R_{i+1} - R_i \in \{-2e, 2-2e, 2e-2\}$，则 $\alpha_i = (R_{i+1} - R_i)/2 + e$。(iii) 若 $R_{i+1} - R_i \le 2e$，则 $\alpha_i \ge R_{i+1} - R_i$。此外，等号成立当且仅当$R_{i+1} - R_i = 2e$ 或 $R_{i+1} - R_i$ 为奇数。(iv) 若 $R_{i+1} - R_i$ 为奇数，则 $R_{i+1} - R_i > 0$。

命题 2.4. 假设 $1 \le i \le m-1$。

(i) $0 \le \alpha_i \le 2e$ 和 $\alpha_i \in \mathbb{Z}$，或 $2e < \alpha_i < \infty$ 和 $2\alpha_i \in \mathbb{Z}$；因此 $\alpha_i \ge 0$。(ii) $\alpha_i =$ 最小值$\{(R_{i+1} - R_i)/2 + e, R_{i+1} - R_i + d[-a_{i,i+1}]\}$。(iii) $\alpha_i = 0$ 当且仅当 $R_{i+1} - R_i = -2e$。(iv) $\alpha_i = 1$ 当且仅当 $R_{i+1} - R_i \in \{2-2e, 1\}$，或 $R_{i+1} - R_i \in [4-2e, 0]^E$ 且 $d[-a_{i,i+1}] = R_i - R_{i+1} + 1$。(v) 若 $\alpha_i = 0$，即 $R_{i+1} - R_i = -2e$，则 $d[-a_{i,i+1}] \ge 2e$。(vi)若 $\alpha_i = 1$，则 $d[-a_{i,i+1}] \ge R_i - R_{i+1} + 1$。此外，当 $R_{i+1} - R_i \ne 2-2e$ 时等式成立。

利用性质 A 或 B（依照定义 7 和 10], 的意义），可以有效地计算整自旋范数群 $\theta(O^+(M))$。这里汇集一些与这些性质相关的结果（参见 [1, 推论 4.2、引理 4.11、注 4.12、§7]）。

命题 2.5. 以下关于 M 的陈述成立：

(i) M 具有性质 *A*，当且仅当对所有 $1 \le i \le m-2$，$R_i < R_{i+2}$。(ii) 若 M 具有性质 *B*，则对所有 $1 \le i \le m-2$，$R_i + 2 < R_{i+2}$。(iii) 若 M不具有性质 *A*，则 $\theta(O^+(M)) = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$ 或 $F^\times$。(iv) 若 M 具有性质 *A* 但不具有性质 *B*，则 $\theta(O^+(M)) = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$ 或 $F^\times$。

设 $N \cong \prec b_1, \ldots, b_n \succ$ 是相对于某个良好 BONG 的另一个 $\mathcal{O}_F$-格。记 $S_i = R_i(N)$ 和 $\beta_i = \alpha_i(N)$。假设 $m \in \{2, 3\}$ 和 $n = 1$。令

$$d[a_1b_1] := \min\{d(a_1b_1), \alpha_1\},$$
$$A_1 = A_1(M, N) := \min\{(R_2 - S_1)/2 + e, R_2 - S_1 + d[-a_{1,2}]\}.$$

于是，在 $d[-a_{1,3}b_1]$ 中忽略项 α_3 和 β_1，因此 $d[-a_{1,3}b_1] = d$ $(-a_{1,\ 3}b_1)$。由此，依照[3,备注， 1], [3,定理 1.2] 可重新表述如下。

定理 2.6。 $N \rightarrowtail M$ 当且仅当 $FN \rightarrowtail FM$，并且满足以下条件：

(i) $R_1 \leq S_1$。(ii) $d[a_1 b_1] \geq A_1$。(iii) 若 $m = 3$， $R_3 > S_1$ 且 $d[-a_{1,2}] + d(-a_{1,3} b_1) > 2e + S_1 - R_3$，则 $[b_1] \rightarrowtail [a_1, a_2]$。

3. Representations of quadratic lattices over non-archimedean localfields

本节简要回顾非阿基米德局部域上二次空间与格的设定，相关讨论见 [17, §4], ，并陈述二元或三元情形所需的结果。所有未加说明的记号或结果均可在其中找到。除非另有说明，我们始终假设 F 是一个非阿基米德局部域，且 M 是一个与二次型 Q相关联的秩为 m 的 $\mathcal{O}_F$-格。

定义 3。 **1.** 设 $n \geq 1$。对于 $c \in \mathcal{V}$，定义 F 上的 n 维二次空间 :

$$W_1^n(c) := \begin{cases} \mathbb{H}^{\frac{n-2}{2}} \perp [1, -c] & \text{if } n \text{ is even}, \\ \mathbb{H}^{\frac{n-1}{2}} \perp [c] & \text{if } n \text{ is odd}, \end{cases}$$

且若 $n \neq 1$ 且 $(n,\ c) \neq (2,\ 1)$，定义具有行列式 $W_2^n(c)$ =行列式 $W_1^n(c)$ 且 $W_2^n(c) \ncong W_1^n(c)$ 的 n 维二次空间 $W_2^n(c)$。若 $W_\nu^n(c)$ 有定义，我们进一步将 $\mathcal{O}_F$-极大格定义为 $W_\nu^n(c)$ 上的 $N_\nu^n(c)$。

注3.2。讨论二次空间 $W_\nu^n(c)$ 或 $\mathcal{O}_F$-极大格 $N_\nu^n(c)$ 时，我们总是假设 $(n,\ \nu) \neq (1,\ 2)$ 且 $(n,\ \nu,\ c) \neq (2,\ 2,\ 1)$。

当 F 是二进时，令 $c \in \mathcal{V} \backslash \{1, \Delta\}$，当 $\mathrm{ord}(c)$ 为偶数时，我们将 $c\pi^{-\mathrm{ord}(c)} = a^2(1 + b\pi^{d(c)})$ 记作 $a,\ b \in \mathcal{O}_F^\times$，然后令

$$c^\# := \begin{cases} \Delta & \text{if } \mathrm{ord}(c) \text{ is odd}, \\ 1 + 4\rho b^{-1} \pi^{-d(c)} & \text{if } \mathrm{ord}(c) \text{ is even}. \end{cases}$$

由命题 3.2], 可知,

$$c^\# \in \mathcal{O}_F^\times, \quad d(c^\#) = 2e - d(c) \quad \text{and} \quad (c^\#, c)_{\mathfrak{p}} = -1. \tag{3.1}$$

二次空间 $W_\nu^n(c)$ 和格 $N_\nu^n(c)$ 已在 [18, 19] 中确定（详情参见 [17,命题 4.2(i) 和引理 4.7 和 4.9]）。我们将列举 $W_\nu^n(c)$ 和$N_\nu^n(c)$，其中 $n \in \{1, 2, 3\}$ 的情形实际上涵盖了所有维数为 n 的二次空间以及来自 [17, 备注 4.3] 的秩为n $\mathcal{O}_F$-极大格。

命题 3.3。 设 $n \in \{1, 2, 3\}$、 $\nu \in \{1, 2\}$ 和 $c \in \mathcal{V}$。二次空间 $W_\nu^n(c)$ 由下表给出，

	c	$W_1^n(c)$	$W_2^n(c)$
$n=1$	$\delta, \delta \in \mathcal{U}$	$[\delta]$	
	$\delta\pi, \delta \in \mathcal{U}$	$[\delta\pi]$	
$n=2$	1	$\mathbb{H}$	
	Δ	$[1, -\Delta]$	$[\pi, -\Delta\pi]$
	$\delta, \delta \in \mathcal{U}\backslash\{1, \Delta\}$	$[1, -\delta]$	$[\delta^{\#}, -\delta^{\#}\delta]$
	$\delta\pi, \delta \in \mathcal{U}$	$[1, -\delta\pi]$	$[\Delta, -\Delta\delta\pi]$
$n=3$	$\delta, \delta \in \mathcal{U}$	$\mathbb{H} \perp [\delta]$	$[\pi, -\Delta\pi, \Delta\delta]$
	$\delta\pi, \delta \in \mathcal{U}$	$\mathbb{H} \perp [\delta\pi]$	$[1, -\Delta, \Delta\delta\pi]$

其中，当 $e=0$ 和 $n=2$ 时，忽略第三种情形。

命题 3.4. 设 $n \in \{1,2,3\}$、$\nu \in \{1,2\}$ 和 $c \in \mathcal{V}$。(i) 若 F 是非二进的，则 $\mathcal{O}_F$-极大格 $N_\nu^n(c)$ 由下表给出，

	c	$N_1^n(c)$	$N_2^n(c)$
$n=1$	$\delta, \ \delta \in \mathcal{U} = \{1, \Delta\}$	$\langle \delta \rangle$	
	$\delta\pi, \ \delta \in \mathcal{U} = \{1, \Delta\}$	$\langle \delta\pi \rangle$	
$n=2$	1	$\mathbf{H}$	
	Δ	$\langle 1, \ -\Delta \rangle$	$\langle \pi, \ -\Delta\pi \rangle$
	$\delta\pi, \ \delta \in \mathcal{U} = \{1, \Delta\}$	$\langle 1, \ -\delta\pi \rangle$	$\langle \Delta, -\Delta\delta\pi \rangle$
$n=3$	$\delta, \delta \in \mathcal{U} = \{1, \Delta\}$	$\mathbf{H} \perp \langle \delta \rangle$	$\langle \pi, -\Delta\pi, \Delta\delta \rangle$
	$\delta\pi, \delta \in \mathcal{U} = \{1, \Delta\}$	$\mathbf{H} \perp \langle \delta\pi \rangle$	$\langle 1, \ -\Delta, \ \Delta\delta\pi \rangle$

(ii) 如果 F是二进的，则 $\mathcal{O}_F$-极大格 $N_\nu^n(c)$ 由下表给出，

	c	$N_1^n(c)$	$N_2^n(c)$
$n=1$	$\delta, \delta \in \mathcal{U}$	$\prec \delta \succ$	
	$\delta\pi, \delta \in \mathcal{U}$	$\prec \delta\pi \succ$	
$n=2$	1	$\mathbf{H}$	
	Δ	$\prec 1, -\Delta\pi^{-2e} \succ$	$\prec \pi, -\Delta\pi^{1-2e} \succ$
	$\delta,\ \ \delta \in \mathcal{U}\backslash\{1,\Delta\}$	$\prec 1,\ \ -\delta\pi^{1-d(\delta)} \succ$	$\prec \delta^{\#},\ \ -\delta^{\#}\delta\pi^{1-d(\delta)} \succ$
	$\delta\pi, \delta \in \mathcal{U}$	$\prec 1, -\delta\pi \succ$	$\prec \Delta, -\Delta\delta\pi \succ$
$n=3$	$\delta, \delta \in \mathcal{U}$	$\mathbf{H} \perp \prec \delta \succ$	$\prec \delta\kappa^{\#}, -\delta\kappa^{\#}\kappa\pi^{2-2e}, \delta\kappa \succ$
	$\delta\pi, \delta \in \mathcal{U}$	$\mathbf{H} \perp \prec \delta\pi \succ$	$\prec 1, -\Delta\pi^{-2e}, \Delta\delta\pi \succ$

其中，κ 是一个固定的单位，满足 $d(\kappa) = 2e-1$。

命题 3.5。设 a、b、$c \in F^{\times}$。以下陈述等价：

(i) $[a,b]$ 表示 $[c]$。(ii) $[a,b,-c]$ 是各向同性的。

(iii) $(-ab, ac)_{\mathfrak{p}} = 1$。(iv) $(-ba, bc)_{\mathfrak{p}} = 1$。

证明。这可由 [29, 58:6]直接得出。 □

引理 3.6。设 $\nu \in \{1,2\}$、$\varepsilon \in \mathcal{U}$、$\delta \in \mathcal{U}\backslash\{1,\Delta\}$ 和 $c \in \mathcal{V}$。假设 M 是 *ADC*。

(i) 若 $FM \cong W_1^2(1)$，则 M 是全局表示。*(ii)* 若 $FM \cong W_1^2(\Delta)$，则 M 表示 $\langle\varepsilon\rangle$，但不表示 $\langle\varepsilon\pi\rangle$*(iii)* 若 $FM \cong W_2^2(\Delta)$，则 M 表示 $\langle\varepsilon\pi\rangle$，但不表示 $\langle\varepsilon\rangle$。*(iv)* 若 $FM \cong W_\nu^2(\varepsilon\pi)$，则 M 表示 $\langle\Delta^{\nu-1}\rangle$ 和 $\langle-\Delta^{\nu-1}\varepsilon\pi\rangle$，但不表示$\langle\Delta^{\nu}\rangle$ 和 $\langle-\Delta^{\nu}\varepsilon\pi\rangle$。*(v)* 若 F 是二进的，且 $FM \cong W_\nu^2(\delta)$，则 M 表示 $\prec (\delta^{\#})^{\nu-1} \succ$ 和 $\prec -(\delta^{\#})^{\nu-1}\delta \succ$，但不表示 $\prec (\delta^{\#})^{\nu} \succ$ 和 $\prec -(\delta^{\#})^{\nu}\delta \succ$。*(vi)* 若 F 是二进的，且 $FM \cong W_\nu^2(\delta)$，则 M 恰好表示 $\prec -\delta\pi \succ$ 和$\prec -\delta^{\#}\delta\pi \succ$中的一个。*(vii)* 若$FM \cong W_1^3(c)$，则 M 是全局表示。*(viii)* 若$FM \cong W_2^3(c)$，则对于所有满足 $c' \neq c$的 $c' \in \mathcal{V}$，M都表示 $\langle c'\rangle$。

证明。由于 M是 ADC，当且仅当 FM表示 $W_1^1(c)$时，M表示 $N_1^1(c)$。因此，只需验证 $FM \cong W_{\nu'}^m(c')$ ($m=2$，3)是否表示$W_1^1(c)$。这是应用 [17, 引理 4.4(ii)和(iii)]直接计算希尔伯特符号即可得到的。□

注记 3.7。当 F 是二进时，(i)-(iv)和(vii)-(viii)中的结论也成立。在这种情况下，记号 $\langle c\rangle$ 表示相对于某个良好 BONG 的一元格 $\prec c \succ$。

依照命题 3.3和3.5以及引理 3.6，我们有以下命题。

命题 3.8。设 $c \in \mathcal{V}$。假设 M 是 *ADC*。

(i) 若 $FM \cong W_1^3(c)$ 或 $W_1^2(1)$，则 FM 是各向同性的，且 M 是全局表示 .

(ii) 若 $FM \cong W_2^3(c)$ 或 $W_1^2(c)$ 且满足 $c \neq 1$，则 FM 是各向异性的，但 M 不是全局表示。

回顾 [37, 命题 2.3 和推论 2.9]，二元 $\mathcal{O}_F$-格 M 是全局表示的，当且仅当 $M \cong \mathbf{H}$。因此，依照命题 3.3 和 3.8，可以得到以下推论。

推论 3.9。设 $m \in \{2, 3\}$。假设 M 是 *ADC*。那么 M 是全局表示的，当且仅当 FM 是各向同性的。在此情形下，若 $m = 2$，则 $M \cong \mathbf{H}$。

引理 3.10。设 $m \geq 1$。

(i) 若 M 是 $\mathcal{O}_F$-极大格，则 M 是 *ADC*。(ii) M 是 *ADC*，当且仅当 M 表示每个满足 FM 表示 FN 的一元 $\mathcal{O}_F$-极大格 N。

证明。这两个断言可直接由 [17, 引理 4.14 和 2.1] 得出。 □

推论 3.11. </style}共有 4($N\mathfrak{p})^e$ 个三元各向同性（分别地，各向异性）*ADC* 格，在等距意义下是 $\mathcal{O}_F$-极大格。

证明。由引理 3.10(i)，$\mathcal{O}_F$-极大格必为 ADC 格。因此，根据 [17, 备注 4.3] 和命题 3.8，存在 $|\mathcal{V}| = 4($ $N\mathfrak{p})^e$ $\mathcal{O}_F$-极大格 M，其中 $FM \cong W_1^3(c)$ 或 $W_2^3(c)$，分别对应于 FM 是各向同性或各向异性的情形。□

依照 [4],，对于 $c \in F^\times$，我们定义集合

$$\mathrm{Ex}(M, a) := \{N \mid N \rightarrowtail M,\ -\det FM \det FN = a,\ \theta(X(M/N)) = N(F(\sqrt{a})/F)\},$$
$$\mathrm{Co}(M) := \{a \in F^\times/F^{\times 2} \mid \mathrm{Ex}(M, a) \neq \emptyset\},$$

然后利用 $m = 3$，重新表述了 [4] 中的一些关于 $\mathsf{Co}(M)$ 的引理。

引理 3.12. 设 F 是非二进的，且 M 有 *Jordan* 分解 $M = M_1 \perp \cdots \perp M_t$。假设 $\theta(O^+(M)) \subseteq N(F(\sqrt{a})/F)$。

(i) 若 $a = \Delta$，则 $a \in \mathsf{Co}(M)$。(ii) 若 $a \in \pi\mathcal{U}$，则 $a \in \mathsf{Co}(M)$ 当且仅当对所有 $1 \leq i,\ j \leq t$，$\mathrm{ord}(\mathfrak{s}(M_i)) \not\equiv \mathrm{ord}(\mathfrak{s}(M_j)) \pmod 2$。

注记 3.13。我们还有

(i) 若 F 是非阿基米德的，则 $1 \in \mathsf{Co}(M)$ 当且仅当 FM 是各向同性的 c.

(ii) 若 F 是阿基米德的，则

$$\mathrm{Co}(M) = \begin{cases} \{1\} & \text{if } F \text{ is complex,} \\ \{1\} & \text{if } F \text{ is real and } FM \text{ is isotropic,} \\ \{-1\} & \text{if } F \text{ is real and } FM \text{ is anisotropic.} \end{cases}$$

引理 3.14。设 $a \in \mathcal{V}\backslash\{1\}$。假设 F 是二进的，且 $M \cong \prec a_1$、a_2、$a_3 \succ$ 相对于一个良好 *BONG*。令 $R_i = R_i(M)$。假设 $\theta(O^+(M)) \subseteq N(F(\sqrt{a})/F)$。

(i) 若 $R_1 < R_3$，则 $a \in \mathsf{Co}(M)$ 当且仅当 $d(-a_1a_2a) + d(-a_2a_3a) + d(a) > 4e$(ii) 若 $R_1 = R_3$，则 $\mathsf{Co}(M) \subseteq \{1, \Delta\}$。此外，$\Delta \in \mathsf{Co}(M)$ 当且仅当 $\theta(O^+(M)) = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$ 且 $R_2 - R_1 = 2e$。

本节余下部分讨论 ADC 格的表示密度。依照 $[10, §2]$,关于 $c \in \mathcal{V}$ 的内容，我们记 $Q_c(M) := Q(M) \bigcap cF^{\times 2}$，并定义 M 的局部表示测度 $\delta(M)$

$$\delta(M) := \mu\left(\bigcup_{c\in\mathcal{V}} Q_c(M)\right), \tag{3.2}$$

其中， μ 表示 $\mathcal{O}_F$ 上的 Haar 测度，且总质量为 1。依照 $[10,$ 定理 2.2$]$, ，我们得到 $\delta(M)$的如下公式:

$$\delta(M) = \sum_{c\in\mathcal{V}} \frac{1}{|\mathcal{U}|(N\mathfrak{p})^{v_c-1}(N\mathfrak{p}+1)}, \tag{3.3}$$

其中， v_c:=min{赋值$(a) \mid a \in Q_c(M)\}$，或者 ∞，若 $Q_c(M) = \emptyset$。

当 M 为 ADC 时， $\delta(M)$的值已在特定条件下于[10]中确定。这里，我们给出任意非阿基米德局部域上 $\delta(M)$的统一显式公式，该公式仅取决于二次空间 $W_\nu^m(c)$的结构。

定理 3.15。 设 $FM \cong W_\nu^m(c)$ 满足 $\nu \in \{1, 2\}$ 和 $c \in \mathcal{V}$。假设 M 为 *ADC*。(i) 若 $m = 1$， 则

$$\delta(M) = \begin{cases} \dfrac{N\mathfrak{p}}{2(N\mathfrak{p})^e(N\mathfrak{p}+1)} & \text{if } \operatorname{ord}(c) = 0, \\ \dfrac{1}{2(N\mathfrak{p})^e(N\mathfrak{p}+1)} & \text{if } \operatorname{ord}(c) = 1. \end{cases}$$

(ii) 若 $m = 2$， 则

$$\delta(M) = \begin{cases} 1 & \text{if } c = 1, \\ \dfrac{1}{(N\mathfrak{p})^{\nu-2}(N\mathfrak{p}+1)} & \text{if } c = \Delta, \\ 1/2 & \text{if } c \in \mathcal{V}\backslash\{1, \Delta\}. \end{cases}$$

(iii) 若 $m = 3$， 则

$$\delta(M) = \begin{cases} 1 & \text{if } \nu = 1, \\ \dfrac{(2(N\mathfrak{p})^e - 1)N\mathfrak{p} + 2(N\mathfrak{p})^e}{2(N\mathfrak{p})^e(N\mathfrak{p}+1)} & \text{if } \nu = 2 \text{ and } \operatorname{ord}(c) = 0, \\ \dfrac{2(N\mathfrak{p})^e N\mathfrak{p} + 2(N\mathfrak{p})^e - 1}{2(N\mathfrak{p})^e(N\mathfrak{p}+1)} & \text{if } \nu = 2 \text{ and } \operatorname{ord}(c) = 1. \end{cases}$$

(iv) 若 $m \geq 4$， 则 $\delta(M) = 1$。

证明。 由于 M是 ADC，当且仅当 FM表示 $W_1^1(a) = [a]$时， M表示 $N_1^1(a)$。由 $[17,$ 引理 4.4(i)-(iii)$]$可验证这一点。此外，根据命题 3.3， $v_a \in \{0, 1\}$ 对于 $a \in \mathcal{V}$。

若 $FM \cong W_1^2(1)$ 或 $W_1^3(c)$ 或 $m \geq 4$，则由命题 3.8 和 (1.2)， M是全局表示，因此$\delta(M) = 1$。

若 $m=1$，则由 [17, 引理 4.4(i)]， FM 表示 a 当且仅当 $FM\cong[a]$。因此， c 是 $\mathcal{V}$中唯一被 FM表示的元素。于是，由 (3.3),

$$\delta(M)=\frac{1}{|\mathcal{U}|(N\mathfrak{p})^{-1}(N\mathfrak{p}+1)} \quad \text{or} \quad \frac{1}{|\mathcal{U}|(N\mathfrak{p})^{0}(N\mathfrak{p}+1)},$$

根据赋值$(c)=0$ 或 1。

设 $FM\cong W_\nu^2(\Delta)$。对于 $a\in\mathcal{V}$，由于 $(\Delta,a)_\mathfrak{p}=(-1)^{\mathrm{ord}(a)}$，根据 [17, 引理 4.4(ii)],， $\mathcal{V}$中满足 $v_a=0$（分别为 $v_a=1$）的元素恰有一半可由 $W_1^2(\Delta)$（分别由$W_2^2(\Delta)$）表示。因此， $v_a=\nu-1$。于是，根据 (3.3)，我们有

$$\delta(M)=\frac{|\mathcal{V}|}{2}\frac{1}{|\mathcal{U}|(N\mathfrak{p})^{v_a-1}(N\mathfrak{p}+1)}=\frac{|\mathcal{V}|}{2}\frac{1}{|\mathcal{U}|(N\mathfrak{p})^{\nu-2}(N\mathfrak{p}+1)}.$$

设 $FM_\nu\cong W_\nu^2(c)$，其中 $c\in\mathcal{V}\backslash\{1,\Delta\}$。对于 $a\in\mathcal{V}$，由 (3.1) 注意到，赋值$(c^\#a)$ =赋值(a)，且 $(c,c^\#a)_\mathfrak{p}=-(c,a)_\mathfrak{p}$。因此，根据 [17, 引理 4.4(ii)],， $\mathcal{V}$中满足 $v_a=0$（分别为 $v_a=1$）的元素恰有一半可由 FM_ν表示，其中 $\nu=1,2$。所以 $\delta(M_1)=\delta(M_2)$，且$\delta(M_1)+\delta(M_2)=1$。因此 $\delta(M_1)=\delta(M_2)=1/2$。

设 $FM\cong W_2^3(c)$，且满足 $c\in\mathcal{V}$。则 ord$(c)\in\{0,1\}$。根据 [17, 引理 4.4(iii)]， FM表示 $\mathcal{V}$ 中满足 $a\neq c$ 的所有 a。因此在 $\mathcal{V}$ 中，有 $|\mathcal{U}|-1+$ 个 ord(c) 的元素 a 满足 $v_a=0$，以及 $|\mathcal{U}|-$ 个 ord(c) 的元素 a 满足 $v_a=1$，它们均由 FM 表示。于是

$$\delta(M)=\frac{|\mathcal{U}|-1+\mathrm{ord}(c)}{|\mathcal{U}|(N\mathfrak{p})^{-1}(N\mathfrak{p}+1)}+\frac{|\mathcal{U}|-\mathrm{ord}(c)}{|\mathcal{U}|(N\mathfrak{p}+1)}.$$

在所有情况下，该公式都源于以下事实： $|\mathcal{V}|=2|\mathcal{U}|=4(N\mathfrak{p})^e$。 □

4. ADC lattices over non-dyadic local fields

本节中，我们假设 F 是非二进的，且 M 是一个秩为 m 的 $\mathcal{O}_F$-格。我们还将 $J_k(M)$ 记作 M 的 Jordan 分量，其秩可以为零、标度为 $\mathfrak{p}^k$，并对整数 $i\le j$ 写作 $J_{i,j}(M):=J_i(M)\perp J_{i+1}(M)\perp\cdots\perp J_j(M)$。

定理 4.1. 若 $m=2$，则 M 是 *ADC*，当且仅当 M 是 $\mathcal{O}_F$-极大的。

对于 $h\ge0$ 和 $c\in\mathcal{V}$，我们定义三元 $\mathcal{O}_F$-格 $H^3_{1,\,h}(c):=\mathbf{H}\perp\langle c\pi^{2h}\rangle$。依照命题 3.4(i)， $H^3_{1,\,h}(c)$ 是 $\mathcal{O}_F$-极大的，当且仅当 $h=0$。显然， $FH^3_{1,\,h}(c)\cong W_1^3(c)$ 是各向同性的。

定理 4.2. 若 $m=3$，则 M 是 *ADC*，当且仅当满足以下条件：

(i) 若 FM 是各向同性的，则以下情形之一成立：***(a)*** M 是 $\mathcal{O}_F$- 极大的；***(b)*** $M\cong H^3_{1,\,h}(c)$，其中 $h\ge1$ 和 $c\in\mathcal{V}$。

(ii) 若 FM 是各向异性的，则 M 是 $\mathcal{O}_F$-极大的。

注记 4.3。(i) 在定理 4.2 的 (i)(b) 情形下， M 不是 $\mathcal{O}_F$-极大的。(ii) 由定理 4.2 可知，若 M是三元 ADC，则 M要么具有 $N_\nu^3(c)$ 的形式，其中$\nu\in\{1,2\}$ 且 $c\in\mathcal{V}$；要么具有 $H^3_{1,\,h}(c)$ 的形式，其中 $h\ge1$ 且 $c\in\mathcal{V}$。

由定理 4.2 和推论 3.11，我们立即得到以下推论。

推论 4.4。在等距意义下，

(i) 存在无穷多个三元各向同性 *ADC* 格，其中$4(N\mathfrak{p})^e$个是 $\mathcal{O}_F$-极大的。(ii) 存在$4(N\mathfrak{p})^e$个三元各向异性 *ADC* 格，且它们全都是 $\mathcal{O}_F$-极大的。

定理 4.5. 设 $m \in \{2,3\}$。

(i) 若 $m=2$，则 M是非本原 *ADC*，当且仅当 $FM \cong [\pi, -\Delta\pi]$，$\mathfrak{n}(M) = \mathfrak{p}$且 $\mathfrak{v}(M) = \mathfrak{p}^2$.(ii) 若 $m=3$，则 M 是本原 *ADC*，当且仅当 M 是 *ADC*。

定理 4.6. 设 $\nu \in \{1,2\}$, $h \geq 1$ 和 $c \in \mathcal{V}$。假设 M 是三元 *ADC*。(i) 当 $M = N_\nu^3(c)$时，我们有

$$Co(M) = \begin{cases} \{1, \Delta\} & if\ (\nu, c) = (1, \mathcal{U}), \\ \{1\} & if\ (\nu, c) = (1, \pi\mathcal{U}), \\ \emptyset & if\ \nu = 2. \end{cases}$$

(ii) 当 $M = H_{1,h}^3(c)$时，我们有

$$Co(M) = \begin{cases} \{1, \Delta\} & if\ c \in \mathcal{U}, \\ \{1\} & if\ c \in \pi\mathcal{U}. \end{cases}$$

我们先处理定理 4.1 和定理 4.2，然后证明定理 4.5 和定理 4.6。对于定理 4.1 和定理 4.2 的充分性，若出现定理 4.2(i)(b) 的情形，则由 [37, 命题 2.3(1)] 可知，M 是全局表示，因此是 ADC。对于其余情形，由引理 3.10(i)可立即得出 M 具有 ADC 性质。为证明必要性，我们需要一些引理。

引理 4.7. 设 $N = \langle \varepsilon\pi^k \rangle$，其中 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 且 $k \in \{0,1\}$。那么，M 表示 N，当且仅当 $FJ_0(M)$表示 $FJ_0(N)$，并且 $FJ_{0,1}(M)$表示 FN。

证明。 这是引理 4.8] ，其中 $n=1$。 □

引理 4.8. 设 $m \in \{2,3\}$。

(i) 若 M 对某个 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 表示 $\langle \varepsilon \rangle$，则 *rank* $J_0(M) \geq 1$。*(ii)* 若对所有 $\varepsilon \in \mathcal{U}$，$M$ 表示 $\langle \varepsilon \rangle$，则 *rank* $J_0(M) \geq 2$。*(iii)* 若对所有 $\varepsilon \in \mathcal{U}$，$M$ 表示 $\langle \varepsilon\pi \rangle$，则 *rank* $J_{0,1}(M) \geq 2$。
(iv) 若 $m=2$，*rank* $J_0(M) = 1$，且 M 对某个 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 表示 $\langle \varepsilon\pi \rangle$，则 *rank* $J_1(M) = 1$。
(v) 若 $m=3$，*rank* $J_0(M) = 1$，且对所有 $\varepsilon \in \mathcal{U}$，$M$ 表示 $\langle \varepsilon\pi \rangle$，则 *rank* $J_1(M) = 2$。
(vi) 若 $J_0(M) \cong \langle 1, -\Delta \rangle$，且 M 对某个 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 表示 $\langle \varepsilon\pi \rangle$，则 *rank* $J_1(M) \geq 1$。

证明。 (i) 根据引理 4.7， $FJ_0(M)$ 表示某个 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 的 $[\varepsilon]$，这意味着

$$\operatorname{rank} J_0(M) = \dim FJ_0(M) \geq 1.$$

(ii) 根据引理 4.7， $FJ_0(M)$ 对 $\varepsilon = 1$ 表示 $[\varepsilon]$， Δ。由于 $[1] \not\cong [\Delta]$，这意味着

$$\operatorname{rank} J_0(M) = \dim FJ_0(M) \geq 2.$$

(iii) 根据引理 4.7， $FJ_{0,\ 1}(M)$ 表示 $[\varepsilon\pi]$，其中 $\varepsilon = 1$， Δ。由于 $[\pi] \not\cong [\Delta\pi]$，这意味着

$$\operatorname{rank} J_{0,1}(M) = \dim FJ_{0,1}(M) \geq 2.$$

(iv) 根据引理 4.7, $FJ_{0,\ 1}(M)$ 表示 $[\varepsilon\pi]$，其中某个 $\varepsilon\in\mathcal{U}$。若 $J_1(M)$ 的秩为 $=0$，则$FJ_{0,\ 1}(M)=FJ_0(M)=[\delta]$，其中某个 $\delta\in\mathcal{U}$，而它不能表示 $[\varepsilon\pi]$。因此，$J_1(M)$ 的秩为 $\geq$1，从而 $J_1(M)$ 的秩为 $=1$。

(v) 与 (iv) 类似，我们有 rank $J_1(M)\geq 1$。若 rank $J_1(M)=1$，则对某个 $\eta\in\mathcal{U}$，FJ_0,1$(M)\cong W_\nu^2(\eta\pi)$。由于 $(\eta\pi,-\Delta^\nu\eta\pi)_\mathfrak{p}=(\delta\pi,\Delta)_\mathfrak{p}^\nu=(-1)^\nu\neq(-1)^{\nu+1}$，根据引理 4.4(ii)],$FJ_0$，$[17,FJ_0$,1$(M)$ 无法表示 $[-\Delta^\nu\eta\pi]$。但根据假设和引理 4.7，FJ_0,1(M) 对所有 $\varepsilon\in\mathcal{U}$ 都表示 $[\varepsilon\pi]$，矛盾。因此 rank $J_1(M)=2$。

(vi) 根据引理 4.7，$FJ_{0,1}(M)$ 对某个 $\varepsilon\in\mathcal{U}$ 表示 $[\varepsilon\pi]$。若 rank $J_1(M)=0$，则 $FJ_0(M)=FJ_{0,1}(M)\cong[1,-\Delta]$ 表示 $[\varepsilon\pi]$。根据命题 3.5，$(\Delta,\varepsilon\pi)_\mathfrak{p}=1$，矛盾。因此 rank $J_1(M)\geq 1$。□

定理 *4.1* 必要性的证明。若 $FM\cong W_1^2$(1)，由命题 3.8(i) 和推论 3.9，$M\cong\mathbf{H}=N_1^2$(1)。

若 $FM\cong W_1^2(\Delta)$，由引理 3.6(ii)，M表示 $\langle 1\rangle$ 和 $\langle\Delta\rangle$。因此，由引理 4.8(ii)，秩 $J_0(M)\geq 2$。故 $M=J_0(M)$ 是幺模的。由于 $dM=dN_1^2(\Delta)=-\Delta$，根据 [29,92:2], $M\cong\langle 1,\ -\Delta\rangle=N_1^2(\Delta)$。

若 $FM\cong W_2^2(\Delta)$，由引理 3.6(iii)，M表示 $\langle\pi\rangle$ 和 $\langle\Delta\pi\rangle$。因此，由引理 4.8(iii)，秩 $J_{0,1}(M)\geq 2$。但 M不表示 $\langle 1\rangle$ 和 $\langle\Delta\rangle$，所以秩 $J_0(M)=0$。因此 $M=J_1(M)$ 是 $\mathfrak{p}$-模的。由于 $dM=dN_2^2(\Delta)=-\Delta\pi^2$，再次根据 $[29,\ 92{:}2]$,$M\cong\langle\pi,\ -\Delta\pi\rangle=N_2^2(\Delta)$。

若 $FM\cong W_\nu^2(\varepsilon\pi)$，根据引理 3.6(iv)，$M$ 表示 $\langle\Delta^{\nu-1}\rangle$ 和 $\langle-\Delta^{\nu-1}\varepsilon\pi\rangle$。因此，根据引理 4.8(i)，秩 $J_0(M)\geq 1$。由于行列式 $FM=-\varepsilon\pi$，秩 $J_0(M)=1$。所以，根据引理 4.8(iv)，秩 $J_1(M)=1$。我们可以令 $M\cong\langle\eta,\ -\eta\varepsilon\pi\rangle$，其中 $\eta\in\{1,\Delta\}$，且 $(\eta,\ \varepsilon\pi)_\mathfrak{p}=(-1)^{\nu-1}$。由 $[29,\ 92{:}2]$，$M\cong\langle 1,\ -\varepsilon\pi\rangle=N_1^2(\varepsilon\pi)$ 或 $\cong\langle\Delta,\ -\Delta\varepsilon\pi\rangle=N_2^2(\varepsilon\pi)$，分别对应 $\nu=1$ 或 2 □

定理 *4.2* 必要性的证明。若 FM 各向同性，由命题 3.8，$FM\cong W_1^3(c)$ 在 $c\in\mathcal{V}$ 且 M 时是全局表示。由 [37, 命题 2.3(i)]，$M\cong\mathbf{H}\perp\langle c\pi^{2h}\rangle$ 在 $h\geq 0$ 时成立。此外，由命题 3.4(i)，当 $h=0$ 时，$M\cong N_1^3(c)$ 是 $\mathcal{O}_F$-极大格。

若 FM 各向异性，由命题 3.8，我们不妨设 $FM\cong W_2^3(\varepsilon)$ 或 $W_2^3(\varepsilon\pi)$，其中 $\varepsilon\in\mathcal{U}$。

(i) 设 $FM\cong W_2^3(\varepsilon)$。由引理 3.6(viii)，对所有 $\eta\in\mathcal{U}$，M 表示 $\langle\eta\pi\rangle$。因此，由引理 4.8(i)，rank $J_0(M)\geq 1$。若 rank $J_0(M)\geq 2$，则 $J_0(M)$ 被 $\mathbf{H}$ 或 $\langle 1,-\Delta\rangle$ 分裂。因此，$J_0(M)$（从而 M）对所有 $\eta\in\mathcal{U}$ 表示 $\langle\eta\rangle$。这与引理 3.6(viii) 矛盾。因此 rank $J_0(M)=1$。于是，由引理 4.8(v)，rank $J_1(M)=2$。

设 $J_1(M)\cong\langle\eta\pi,-\eta'\Delta\pi\rangle$，其中 $\eta,\eta'\in\{1,\Delta\}$。由于 FM 是各向异性的，det $FJ_1(M)\neq-1$。因此 det $FJ_1(M)=-\Delta\eta\eta'=-\Delta$，从而 $\eta=\eta'$。所以，根据 $[29,\ 92{:}2]$, $J_1(M)\cong\langle\eta\pi,-\eta\Delta\pi\rangle\cong\langle\pi,-\Delta\pi\rangle$。设 $M\cong\langle\delta,\pi,-\Delta\pi\rangle$，其中 $\delta\in\{1,\Delta\}$。由于 det $FM=$det $W_2^3(\varepsilon)=-\varepsilon$, $J_0(M)\cong\langle\Delta\varepsilon\rangle$。因此，根据 $[29,\ 92{:}2]$, $M\cong N_2^3(\varepsilon)$。

(ii) 设 $FM\cong W_2^3(\varepsilon\pi)$。由于 1，$\Delta\neq\varepsilon\pi$，由引理 3.6(viii)，$M$表示 $\langle 1\rangle$ 和 $\langle\Delta\rangle$。因此，由引理 4.8(ii)，$J_0(M)$ 的秩为 ≥ 2。但 M不是幺模的，所以 $J_0(M)$ 的秩为 $=2$。

由 $[29,\ 92{:}1],$，可设 $J_0(M)\cong\langle 1,\ -\eta\rangle$，其中 $\eta\in\{1,\Delta\}$。由于 FM是各向异性的，$J_0(M)\cong\langle 1,\ -\Delta\rangle$。由于 $\Delta\varepsilon\pi\neq\varepsilon\pi$，由引理 3.6(viii)，$M$表示 $\langle\Delta\varepsilon\pi\rangle$。因此，由引理 4.8(vi)，$J_1(M)$ 的秩为 ≥ 1，从而 $J_1(M)$ 的秩为 $=1$。

令 $M\cong\langle 1,\ -\Delta,\ \delta\pi\rangle$ 且 $\delta\in\{1,\Delta\}$。由于 行列式 $FM=$行列式 $W_2^3(\varepsilon\pi)=-\varepsilon\pi$，$J_1(M)\cong\langle\Delta\varepsilon\pi\rangle$。因此，由 $[29,\ 92{:}\ 2]$，$M\cong N_2^3(\varepsilon\pi)$。□

定理 *4.5* 的证明。(i) 对于必要性，由于 M是非本原的， $\mathfrak{n}(M) \subsetneq \mathcal{O}_F$。由定理 4.1 和命题 3.4(i), $M \cong N_2^2(\Delta) = \langle \pi, -\Delta\pi \rangle$。显然， $FM \cong W_2^2(\Delta) = [\pi, -\Delta\pi]$, $\mathfrak{n}(M) = \mathfrak{p}$ 且 $\mathfrak{v}(M) = \mathfrak{p}^2$。

对于充分性，由 [29, 92:2], $M \cong N_2^2(\Delta) = \langle \pi, -\Delta\pi \rangle$ 是 $\mathcal{O}_F$-极大的，因此根据引理 3.10(i)， M 是 ADC。

(ii) 必要性显然。对于充分性，由定理 4.2 和命题 3.4(i)可知，每个三元 ADC $\mathcal{O}_F$-格 M都有 $\mathfrak{n}(M) = \mathcal{O}_F$，因此是本原的。□

Le引理 4.9。 (i) 设 $M = N_\nu^3(c)$ 具有 $\nu \in \{1, 2\}$ 和 $c \in \mathcal{V}$。那么

$$\theta(O^+(M)) = \begin{cases} \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2} & \text{if } (\nu, c) = (1, \mathcal{U}), \\ F^\times & \text{if } (\nu, c) \neq (1, \mathcal{U}). \end{cases}$$

(ii) 设 $M = H_{1,\ h}^3(c)$ 具有 $h \geq 1$ 和 $c \in \mathcal{V}$。那么

$$\theta(O^+(M)) = \begin{cases} \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2} & \text{if } c \in \mathcal{U}, \\ F^\times & \text{if } c \in \pi\mathcal{U}. \end{cases}$$

(iii) 设 M 是三元 *ADC*。那么

(a) $\theta(O^+(M)) \supseteq \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$.

(b) If $\theta(O^+(M)) \subseteq N(F(\sqrt{a})/F)$, *then* $a \in \{1, \Delta\}$; *if moreover,* $\theta(O^+(M)) = F^\times$, *then* $a = 1$.

证明。 (i) 由命题 3.4(i)， M 有一个秩至少为 2 的 Jordan 分量。因此 $\theta(O^+(M)) \supseteq \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$。此外，如果 M有一个奇标度的 Jordan 分量，即 $(\nu, c) \neq (1, \mathcal{U})$，那么 $\theta(O^+(M)) = F^\times$。

(ii) 由于 $\theta(O^+(M)) \supseteq \theta(O^+(\mathbf{H})) = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$， $\theta(O^+(M)) = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$或 $F^\times$。与 (i) 类似，后一种情况发生当且仅当 M 有一个奇标度 Jordan 分量，即 $c \in \pi\mathcal{U}$。

(iii) 根据注 4.3， M要么具有 $N_\nu^3(c)$ 的形式，其中 $\nu \in \{1, 2\}$ 且 $c \in \mathcal{V}$；要么具有 $H_{1,h}^3(c) = \mathbf{H} \perp \langle c\pi^{2h} \rangle$ 的形式，其中 $h \geq 1$ 且 $c \in \mathcal{V}$。结合 (i) 和 (ii)，即可得出断言 (iii)。□

定理 *4.6* 的证明。 由引理 4.9(iii)(b)， $\mathrm{Co}(M) \subseteq \{1, \Delta\}$；而且若 $\theta(O^+(M)) = F^\times$，则 $\mathrm{Co}(M) \subseteq \{1\}$。

由注记 3.13 可知， $1 \in \mathrm{Co}(M)$ 当且仅当 FM是各向同性的，即 $\nu = 1$。此外，若 $\theta(O^+(M)) = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$，则由引理 3.12(i) 可得 $\Delta \in \mathrm{Co}(M)$。通过逐案检验即可完成证明。□

5. ADC lattices over dyadic local fields

本节假设 F是二进的。设 $M \cong \prec a_1, \ldots, a_m \succ$为相对于某个良好 BONG 的秩为 m 的 $\mathcal{O}_F$- 格。令 $R_i = R_i(M)$ 和 $\alpha_i = \alpha_i(M)$。当考虑一个 $\mathcal{O}_F$- 格 N 时，我们也假设 $N = \prec b_1, \ldots, b_n \succ$相对于某个良好 BONG，并以 $S_i = R_i(N)$ 和 $\beta_i = \alpha_i(N)$ 表示。

定义相对于某个良好 BONG 的二元 $\mathcal{O}_F$-格 $M_\nu^2(\Delta) := \prec \pi^{\nu-1}, -\Delta\pi^{\nu+1-2e} \succ$。根据引理 2.1，这样的格确实存在。显然， $FM_\nu^2(\Delta) \cong W_\nu^2(\Delta)$。

定理 5.1. 若 $m=2$，则 M 是 *ADC*，当且仅当 M 是 $\mathcal{O}_F$-极大的，或者

$$M \cong M_\nu^2(\Delta) \cong 2^{-1}\pi^\nu A(2\pi^{-1}, 2\rho\pi),$$

其中 $\nu \in \{1,2\}$ 不是 $\mathcal{O}_F$-极大的。

我们沿用上一节的记号 $H_{1,\ h}^3(c) := \mathbf{H} \perp \langle c\pi^{2h}\rangle$，其中 $c \in \mathcal{V}$ 和 $h \geq 0$。类似地，根据命题 3.4(ii)，$H_{1,\ h}^3(c)$ 是 $\mathcal{O}_F$-极大的当且仅当 $h=0$，并且 $FH_{1,\ h}^3(c) \cong W_1^3(c)$ 是各向同性的。

定理 5.2。如果 $m=3$，那么 M 是 *ADC*，当且仅当满足以下条件：

(i) 如果 FM *is isotropic, then one of the following* 情况 h 发生：*(a)* M 是 $\mathcal{O}_F$-极大的；*(b)* $M \cong H_{1,\ h}^3(c)$ 满足 $h \geq 1$ 和 $c \in \mathcal{V}$；*(c)* $M \cong N_\nu^2(\delta) \perp \langle \varepsilon\pi^k\rangle$，满足 $\nu \in \{1,2\}$、$\delta \in \mathcal{U}\backslash\{1,\Delta\}$、$\varepsilon \in \mathcal{U}$和 $k \in \{0,1\}$。

(ii) 如果 FM 是各向异性的，则会出现以下情况之一：*(a)* M 是 $\mathcal{O}_F$-极大的；*(b)* $M \cong N_\nu^2(\delta\pi) \perp \langle \varepsilon\pi^k\rangle$，满足 $\nu \in \{1,2\}$、$\delta \in \mathcal{U}$、$\varepsilon \in \mathcal{U}$和 $k \in \{1,2\}$；*(c)* $M \cong N_\nu^2(\delta) \perp \langle \varepsilon\pi^k\rangle$，满足 $\nu \in \{1,2\}$、$\delta \in \mathcal{U}\backslash\{1,\Delta\}$、$\varepsilon \in \mathcal{U}$和 $k \in \{0,1\}$。此外，M是 $\mathcal{O}_F$-极大的，当且仅当 $M \cong N_2^3(\varepsilon)$ 满足 $\varepsilon \in \mathcal{U}$。

注 5.3。(i) 由命题 3.4(ii)可知，在定理 5.2 的 (i)(b)、(i)(c) 和 (ii)(b) 情形下，M 不是 $\mathcal{O}_F$-极大。

(ii) 对于 $\nu \in \{1,2\}$，由命题 3.4(ii)和 [1, 推论 3.4(ii)], 可得

$$N_\nu^2(\delta\pi) \cong\prec \Delta^{\nu-1}, -\Delta^{\nu-1}\delta\pi \succ\cong \langle \Delta^{\nu-1}, -\Delta^{\nu-1}\delta\pi\rangle,$$

其中 $\delta \in \mathcal{U}$。由命题 3.4(ii)、[18, 注 3.8 和引理 3.9], 还可知

$$N_\nu^2(\delta) \cong\prec (\delta^\#)^{\nu-1}, -(\delta^\#)^{\nu-1}\delta\pi^{1-d(\delta)} \succ\cong (\delta^\#)^{\nu-1}\pi^{-l}A(\pi^l, -(\delta-1)\pi^{-l}),$$

其中 $\delta \in \mathcal{U}\backslash\{1,\Delta\}$ 且 $2l = d(\delta) - 1 \leq 2e-2$；并且

$$N_2^3(\varepsilon) \cong\prec \varepsilon\kappa^\#, -\varepsilon\kappa^\#\kappa\pi^{2-2e}, \varepsilon\kappa \succ\cong 2^{-1}\pi A(2, 2\rho) \perp \langle \Delta\varepsilon\rangle,$$

其中 $\varepsilon \in \mathcal{U}$。

(iii) 结合定理 5.2、定义 5.20 和下文的引理 5.24 可知，若 M是三元 ADC，则 M要么具有 $M_{\nu,\ r}^3(c)$ 的形式，其中 $\nu \in \{1,2\}$、$r \in \{-1/2, 0, \ldots, e\}$ 和 $c \in \mathcal{V}$满足 $(\nu,\ r,\ c) \notin \{(2,\ e,\ \mathcal{U}), (1,\ -1/2,\ \mathcal{V})\}$；要么具有 $H_{1,\ h}^3(c)$ 的形式，其中 $h \geq 1$ 和 $c \in \mathcal{V}$。

定理 5.4。设 $m \in \{2,3\}$。

(i) 若 $m=2$，则 M是非本原 *ADC*，当且仅当 $FM \cong [\pi, -\Delta\pi]$，$\mathfrak{n}(M) = \mathfrak{p}$且 $\mathfrak{v}(M) = \mathfrak{p}^{2-2e}$ 或 $\mathfrak{p}^{4-2e}$。(ii) 若 $m=3$，则 M 是本原 *ADC*，当且仅当 M 是 *ADC*。

定理 5.5. 设 $\nu \in \{1,2\}$、$h \geq 1$、$r \in \{-1/2, 0, \ldots, e\}$ 和 $c \in \mathcal{V}$。假设 M 是三元 *ADC*。

(i) 当 $M = M^3_{\nu,\ r}(c)$ 时，我们有

$$Co(M) = \begin{cases} \{1\} & if\ (\nu, c) = (1, \mathcal{V})\ and\ 0 \le r \le e, \\ \emptyset & if\ \nu = 2, \end{cases}$$

(ii) 当 $M = H^3_{1,h}(c)$ 时，我们有

$$Co(M) = \begin{cases} \{1, \Delta\} & if\ c \in \mathcal{U}, \\ \{1\} & if\ c \in \pi\mathcal{U}. \end{cases}$$

注 5.6. 当 $M = M^3_{\nu,r}(c)$ 时，由引理 5.18 和定义 5.20，我们有 $R_1 = 0$ and$R_2 = -2r$。因此，若 $r \neq -1/2$，则 $-r \le 0$，于是由 [1, 推论 4.4(iv)], 可得$\mathfrak{s}(M) = \mathfrak{p}^{-r}$。

与上一节一样，我们先处理定理 5.1 和定理 5.2，然后证明定理 5.4 和定理 5.5。

引理 5.7. 设 $m \in \{2, 3\}$.

(i) 若 M 表示某个 $\delta \in \mathcal{U}$ 的 $\prec \delta a_1 \succ$，且 $d(\delta) = 1$，则 $\alpha_1 \in \{0, 1\}$ *and* $R_2 - R_1 \in [-2e, 0]^E \cup \{1\}$。(ii) 若 M 表示某个 ε_1、$\varepsilon_2 \in \mathcal{U}$ 的 $\prec \varepsilon_1 \succ$和 $\prec \varepsilon_2\pi \succ$，则 $R_1 = 0$，且$R_2 = -2e$ 或 $R_2 \le 1 - d[-a_{1,2}]$。因此， $R_2 \in [-2e, 0]^E \cup \{1\}$ 和 $\alpha_1 \in \{0, 1\}$。

证明。 由于 M 是整的，根据 [3, 引理 2.2], ，我们有 $R_1 \ge 0$。由（2.2）， $R_2 \ge R_1 - 2e \ge -2e$。对于(i)，令 $N = \prec \delta a_1 \succ$ 满足 $\delta \in \mathcal{U}$ 且 $d(\delta) = 1$。于是 $b_1 = \delta a_1$ ，从而 $S_1 = R_1$。因此， $d(a_1b_1) = d(\delta) = 1$。由于 M 表示 $\prec \delta a_1 \succ$，由命题 2.4(ii)和定理 2.6(ii)，可知

$$\alpha_1 = \min\{\frac{R_2 - S_1}{2} + e, R_2 - S_1 + d[-a_{1,2}]\} = A_1 \le d[a_1b_1] \le d(a_1b_1) = 1.$$

因此，由命题 2.4(i)， $\alpha_1 \in \{0, 1\}$。于是，由命题 2.4(iii)和(iv)， $R_2 - R_1 \in [-2e, 0]^E \cup \{1\}$。

对于(ii)，由于 M 表示 $\prec \varepsilon_1 \succ$，由定理 2.6(i)， $R_1 \le$ 赋值$(\varepsilon_1) = 0$ ，从而 $R_1 = 0$。令 $N = \prec \varepsilon_2\pi \succ$。则 $S_1 = 1$。因此，赋值(a_1b_1)为奇数，从而 $d[a_1b_1] = 0$。由于M 表示 N，由定理 2.6(ii)，可知

$$\min\{\frac{R_2 - 1}{2} + e, R_2 - 1 + d[-a_{1,2}]\} = A_1 \le d[a_1b_1] = 0.$$

因此 $R_2 \le 1 - 2e$ 或 $R_2 \le 1 - d[-a_{1,2}] \le 1$。所以，根据命题 2.3(iv)，若 $R_2 < 0$，则 $R_2 = R_2 - R_1$ 必为偶数。因此，在前一种情形下， $R_2 = -2e$。此外， $R_2 \in [-2e, 0]^E \cup \{1\}$。由于$R_2 - R_1 \le R_2 \le 1$，命题 2.3(i) 和命题 2.4(i) 推出 $\alpha_1 \in \{0, 1\}$。 □

二元情形。

W我们需要两个引理来刻画并非 $\mathcal{O}_F$-极大的 ADC 格。

引理 5.8. 设 $\nu \in \{1, 2\}$。则 $M^2_\nu(\Delta)$ 是 *ADC*，但不是 $\mathcal{O}_F$-极大的 .

证明。 设 $N_\nu = \prec \varepsilon\pi^{\nu-1} \succ$满足 $\varepsilon \in \mathcal{U}$。由于 $FM^2_\nu(\Delta) \cong W^2_\nu(\Delta)$ 对所有 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 都表示 $FN_\nu = [\varepsilon\pi^{\nu-1}]$，根据引理 3.10(ii)，只需证明 M_ν 表示所有相应的

格 N_ν。接下来，我们将验证 $M = M_\nu^2(\Delta)$ 和 $N = N_\nu$ 满足定理 2.6 中的条件 (i) 和 (ii)。

显然， $R_1 = S_1 = \nu - 1$ 和 $R_2 = \nu + 1 - 2e$；因此条件（i）成立。此外，我们有 $R_2 - R_1 = R_2 - S_1 = 2 - 2e$ 和 $d[-a_{1,2}] = d(-a_1a_2) = d(\Delta) = 2e$。所以，命题 2.4(iv)推出 $\alpha_1 = 1$。

由于 $\mathrm{ord}(a_1b_1) = R_1 + S_1$ 是偶数， $d(a_1b_1) \geq 1$。因此， $d[a_1b_1] = \min\{d(a_1b_1)\ \alpha_1\} = 1$。所以

$$A_1 = \min\{\frac{R_2 - S_1}{2} + e, R_2 - S_1 + d[-a_{1,2}]\} = \min\{1, 2\} = 1 = d[a_1b_1];$$

因此条件（ii）成立。所以， $M_\nu^2(\Delta)$是ADC。

由于$(R_1,\ R_2) = (\nu - 1,\ \nu + 1 - 2e) = (0,\ 2 - 2e)$或$(1,\ 3 - 2e)$，根据 $[17,$引理 4.11(i)$]$，其中 $n = 2$， $M_\nu^2(\Delta)$不是 $\mathcal{O}_F$-极大的。□

引理 5.9. 设 $\nu \in \{1, 2\}$和 M_ν是一个 $\mathcal{O}_F$-格。若 $FM_\nu \cong W_\nu^2(\Delta)$， $R_1(M_\nu) = \nu - 1$且 $R_2(M_\nu) = \nu + 1 - 2e$，则 $M_\nu \cong M_\nu^2(\Delta) = \prec \pi^{\nu-1}, -\Delta\pi^{\nu+1-2e} \succ$。

证明. 要证明 $M_\nu \cong M_\nu^2(\Delta)$，只需验证条件（i）至（iii）满足 $[2,$定理 3.2$]$对 $M = M_\nu$和 $N = M_\nu^2(\Delta)$ 成立。

显然， $R_1 = S_1 = \nu - 1$ 和 $R_2 = S_2 = \nu + 1 - 2e$；因此条件（i）成立。由于$R_2 - R_1 = 2 - 2e$，命题 2.4(iv)推出 $\alpha_1 = \beta_1 = 1$；因此条件（ii）成立。由于 $\mathrm{ord}(a_1b_1) = R_1 + S_1 = 2R_1$ 为偶数， $d(a_1b_1) \geq 1 = \alpha_1$；因此条件（iii）成立。□

定理 *5.1* 的证明。由引理 3.10(i) 和 5.8 可得充分性。为证明必要性，我们分五种情况讨论。

(i) If $FM \cong W_1^2(1)$，由命题 3.8(i) 和推论 3.9， $M \cong \mathbf{H} = N_1^2(1)$.

(ii) 若 $FM \cong W_\nu^2(\Delta)$，由引理 3.6(ii) 和 (iii)， M对所有 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 都表示 $\prec \varepsilon\pi^{\nu-1} \succ$，但不表示 $\prec \varepsilon\pi^{2-\nu} \succ$。因此，由定理 2.6(i)， $R_1 \leq \nu - 1$，从而 $R_1 \in \{0, 1\}$。由于 FM 表示 $[a_1]$，且 M是 ADC，故 M 表示 $\prec a_1 \succ$。因此， $R_1 = \mathrm{ord}(a_1) \equiv \nu - 1$(模 2)，从而 $R_1 = \nu - 1$。设 $a_1 = \eta\pi^{\nu-1}$满足 $\eta \in \mathcal{U}$。选取 $\delta \in \mathcal{U}$，使得 $d(\delta) = 1$（例如 $\delta = 1 + \pi$）。由于 $\delta\eta \in \mathcal{U}$， M 表示 $\prec \delta\eta\pi^{\nu-1} \succ = \prec \delta a_1 \succ$。因此，由引理 5.7(i)， $\alpha_1 = 0$ 或 1。

若 $\alpha_1 = 0$，则 $R_2 = R_1 - 2e = \nu - 1 - 2e$。因此，由 $[17,$引理 4.11(i) 和 (ii)$]$， $M \cong N_\nu^2(\Delta)$。若 $\alpha_1 = 1$，命题 2.4(ii) 意味着

$$\frac{R_2 - R_1}{2} + e = 1 \quad \text{or} \quad R_2 - R_1 + d(-a_1a_2) = 1.$$

注意到 $R_2 - R_1 = 1 - d(a_1a_2) = 1 - 2e < 0$ 为奇数，因此由命题 2.3(iv) 可排除后一种情形。所以前一种情形成立，从而得到 $R_2 = \nu + 1 - 2e$。因此，由引理 5.9， $M \cong M_\nu^2(\Delta)$，它与 $2^{-1}\pi^\nu A(2\pi^{-1},\ 2\rho\pi)$ 等距，这由 $[1,$推论 3.4(iii)$]$和 $[29,\ 93{:}17]$ 得出。

(iv) 如果 $FM \cong W_\nu^2(\varepsilon\pi)$ 且 $\varepsilon \in \mathcal{U}$，根据引理 3.6(iv)， M表示 $\prec \varepsilon_1 \succ$和 $\prec \varepsilon_2\pi \succ$。因此，根据引理 5.7(ii)， $R_1 = 0$和 $R_2 \in [-2e, 0]^E \cup \{1\}$。由于 $\det FM = -\varepsilon\pi$，$\mathrm{ord}(a_1a_2)$ 为奇数，因此 $R_2 = 1$。于是，根据 $[17,$引理 4.11(iii)$]$， $M \cong N_\nu^2(\varepsilon\pi)$。

（v）若 $FM \cong W_\nu^2(\delta)$，且 $\delta \in \mathcal{U}\backslash\{1, \Delta\}$。则 $1 \leq d(-a_1a_2) = d(\delta) < 2e$为奇数。由引理 3.6（v）和（vi）， M表示 $\prec \varepsilon_1 \succ$和 $\prec \varepsilon_2\pi \succ$，其中某个 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in \mathcal{U}$。因此，由引理 5.7（ii）， $R_1 = 0$，且 $R_2 = -2e$或 $R_2 \leq 1 - d[-a_{1,2}] = 1 - d(-a_1a_2)$。若 $R_2 = -2e$，则命题 2.4（v）意味着 $d(\delta) = d(-a_1a_2) \geq d[-a_{1,2}] \geq 2e$，矛盾。

因此 $R_2 \neq -2e$，从而 $R_2 \leq 1 - d(-a_1a_2)$。回顾（2.2），有 $R_2 + d(-a_1a_2) = R_2 - R_1 + d(-a_1a_2) \geq 0$。结合这两个不等式，得到

$$-d(-a_1a_2) \leq R_2 \leq 1 - d(-a_1a_2).$$

然而，$R_2 = R_1 + R_2 = \mathrm{ord}(a_1a_2)$ 为偶数，因此 $R_2 \neq -d(-a_1a_2)$。所以，$R_2 = 1 - d(-a_1a_2) = 1 - d(\delta)$。于是，依照 [17, 引理 4.11(iii)]，$M \cong N_\nu^2(\delta)$。□

三元情形。

假设 $m = 3$ 和 $M \cong \prec a_1,\ a_2,\ a_3 \succ$ 是相对于某个良好 BONG 而言的。为刻画三元 ADC 格，我们考虑两种情形：$FM \cong W_1^3(c)$ 或 $W_2^3(c)$。

引理 5.10。设 $FM \cong W_1^3(\varepsilon\pi^k)$ 满足 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 和 $k \in \{0,1\}$。那么，M 是 *ADC* 当且仅当 $R_1 = 0$ 且以下条件之一成立：

(i) $\alpha_1 = 0$，即 $R_2 = -2e$、$R_3 \geq 0$ 和 $-a_1a_2 \in F^{\times 2}$；等价地，$M \cong H^3_{1,\ h}(c)$ 满足 $c \in \mathcal{V}$ 且 $h \geq 0$。(ii) $\alpha_1 = 1$、$R_2 \in [2-2e, 0]^E$ 和 $R_3 = k$。

证明。由命题 3.8(i)，FM 是各向同性的，且 M 是全局表示的。因此，引理的条件 (i) 和 (ii) 由 [3, 定理 21] 在 $m = 3$ 时得出。

若 $\alpha_1 = 0$，则 $R_2 = R_1 - 2e = -2e$。由于 $-a_1a_2 \in F^{\times 2}$、$\prec a_1,\ a_2 \succ \cong \mathbf{H}$。由于 $R_2 < 0 \leq R_1 \leq R_3$，由 [1, 推论 4.4(i)]，

$$M \cong \prec a_1, a_2 \succ \perp \prec a_3 \succ \cong \mathbf{H} \perp \langle c\pi^{2h} \rangle = H^3_{1,h}(c),$$

其中 $h \geq 0$ 和 $c = \varepsilon\pi^k \in \mathcal{V}$，如要求。 □

引理 5.11。设 $FM \cong W_2^3(\varepsilon\pi^k)$ 满足 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 和 $k \in \{0,1\}$。则 M 是 *ADC*，当且仅当 $R_1 = 0$ 且以下条件之一成立：

(i) $\alpha_1 = 0$，即 $R_2 = -2e$，且 $R_3 = k$；
(ii) $\alpha_1 = 1$、$R_2 \in [2-2e, 0]^E$ 和 $R_3 = k$；(iii) $R_2 = 1$ 且 $R_3 = k + 1$。

首先，依照命题 2.4(iv)，若 $R_2 - R_1 = 1$，则 $\alpha_1 = 1$。结合引理 5.12，这表明引理 5.11 等价于引理 5.13。我们将改为证明引理 5.13。

引理 5.12. 若 $R_1 = 0$、$\alpha_1 = 1$ 和 $R_3 \in \{0,1\}$，则 $d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$。

证明. 由于 $R_1 = 0$，根据命题 2.4(vi)，$d[-a_{1,2}] \geq 1 - R_2$，并且若 $R_2 \neq 2 - 2e$，则 $d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$。因此，只需在假设 $R_2 = 2 - 2e$ 的条件下证明 $d[-a_{1,2}] \leq 1 - R_2 = 2e - 1$。由于 $R_3 - R_2 = 2e - 2$ 或 $2e - 1$，命题 2.3(ii) 和 (iii) 表明 $d[-a_{1,2}] \leq \alpha_2 = 2e - 1$，证毕。□

引理 5.13。令 $FM \cong W_2^3(\varepsilon\pi^k)$ 满足 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 和 $k \in \{0,1\}$。则 M 是 *ADC*，当且仅当 $R_1 = 0$ 且满足以下条件之一：

(i) $\alpha_1 = 0$，即 $R_2 = -2e$，且 $R_3 = k$；(ii) $\alpha_1 = 1$、$d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$、$R_2 \in [2-2e, 0]^E$ 和 $R_3 = k$；(iii) $\alpha_1 = 1$、$d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$、$R_2 = 1$ 和 $R_3 = k + 1$。

在下文中，我们假设 $FM \cong W_2^3(\varepsilon\pi^k)$ 满足 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 和 $k \in \{0,1\}$，且 $a_i = \varepsilon_i\pi^{R_i}$ 满足 $\varepsilon_i \in \mathcal{U}$。那么 $-\varepsilon\pi^k = a_{1,\ 3} \in \varepsilon_{1,\ 3}\pi^k F^{\times 2}$。此外，由命题 3.8(ii) 可知，$FM$ 是各向异性的。

命题 5.14。 假设 M 是 *n-ADC*。那么 $R_1 = 0$，并且要么 $\alpha_1 = 0$，要么 $\alpha_1 = 1$和 $d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$。

证明。 由引理 3.6(viii)， M 表示某些 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{U}$ 和$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \neq \varepsilon$的 $\prec \varepsilon_1 \succ$ 和 $\prec \varepsilon_2\pi \succ$。因此，由引理 5.7(ii)， $R_1 = 0$，且 $R_2 = -2e$ 或 $R_2 \leq 1 - d[-a_{1,2}]$; 并且$\alpha_1 \in \{0, 1\}$。若 $\alpha_1 \neq 0$，则由命题 2.4(iii)， $R_2 \neq -2e$，从而 $d[-a_{1,2}] \leq 1 - R_2$。由于 $\alpha_1 = 1$，由命题 2.4(vi)， $d[-a_{1,2}] \geq 1 - R_2$，从而 $d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$。 □

引理 5.15。 假设 $R_1 = 0$ 和 $R_2 = -2e$。若 $R_3 > 1$，则定理 *2.6(iii)*对 M 和 $N =\prec \eta\pi \succ$ （其中 $\eta \in \mathcal{U}$）不成立。

证明。 由于 $R_2 - R_1 = -2e$，根据命题 2.4(v)， $d(-a_1a_2) \geq d[-a_{1,2}] \geq 2e$，因此 $-a_1a_2 \in F^{\times 2} \cup \Delta F^{\times 2}$。然而，$FM$是各向异性的， $[a_1, a_2]$ 也如此，因此 $-a_1a_2 \in \Delta F^{\times 2}$。由于 $\mathrm{ord}(a_1) = R_1 = 0$， $[a_1, a_2] \cong [1, -\Delta]$。

设 $N =\prec \eta\pi \succ$。则 $R_3 > 1 = S_1$。由于 $d[-a_{1,2}] \geq 2e$ 且 $d(-a_{1,\ 3}b_1) \geq 0$，我们看到

$$d[-a_{1,2}] + d(-a_{1,3}b_1) \geq 2e + 0 = 2e > 2e + S_1 - R_3.$$

然而，根据命题 3.5， $[a_1, a_2] \cong [1, -\Delta]$ 不能表示 $[b_1] = [\eta\pi]$。 □

引理 5.16. 假设 $R_1 = 0$, $R_2 \in [2 - 2e, 0]^E \cup \{1\}$, $\alpha_1 = 1$ 和 $d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$。 (i) 若 $R_2 \in [2 - 2e, 0]^E$ 和 $R_3 > k$，则定理 *2.6(iii)* 对 M 和 $N =\prec -\Delta\varepsilon_{1,\ 3}\pi^k \succ$不成立。 (ii) 若 $R_2 = 1$ 和 $R_3 > k + 1$，则定理 *2.6(iii)* 对 M 和 $N =\prec -\kappa\varepsilon_{1,\ 3}\pi^k \succ$或 $\prec -\kappa\Delta\varepsilon_{1,\ 3}\pi^k \succ$不成立，其中 κ 是命题 *3.4(ii)* 中定义的单位。

证明。 回顾命题 3.4(ii)，有 $d(\kappa) = 2e - 1$，因此根据支配原理， $d(\kappa\Delta) = 2e - 1$。于是

$$d(-a_{1,3}b_1) = \begin{cases} d(\Delta) = 2e & \text{if } N =\prec -\Delta\varepsilon_{1,3}\pi^k \succ, \\ d(\kappa) = 2e - 1 & \text{if } N =\prec -\kappa\varepsilon_{1,3}\pi^k \succ, \\ d(\kappa\Delta) = 2e - 1 & \text{if } N =\prec -\kappa\Delta\varepsilon_{1,3}\pi^k \succ. \end{cases}$$

因此 $R_3 > k = S_1$ 和

$$\begin{aligned} & d[-a_{1,2}] + d(-a_{1,3}b_1) \\ &= \begin{cases} (1 - R_2) + 2e \geq 2e + 1 & \text{if } R_2 \in [2 - 2e, 0]^E \text{ and } N =\prec -\Delta\varepsilon_{1,3}\pi^k \succ, \\ (1 - R_2) + 2e - 1 \geq 2e - 1 & \text{if } R_2 = 1 \text{ and } N =\prec -\kappa\varepsilon_{1,3}\pi^k \succ \text{ or } \prec -\kappa\Delta\varepsilon_{1,3}\pi^k \succ, \end{cases} \\ &> 2e + S_1 - R_3. \end{aligned}$$

(i) 由于 $\mathrm{ord}(a_1a_2)$ 是偶数，$(-a_1a_2,\ \Delta)_{\mathfrak{p}} = 1$。此外，由于 FM是各向异性的，根据命题 3.5，$(-a_1a_2,\ -a_1a_3)_{\mathfrak{p}} = -1$。因此 $(-a_1a_2,\ -\Delta a_1a_3)_{\mathfrak{p}} = -1$。所以，再次根据命题 3.5，$[a_1, a_2]$ 不能表示$[b_1] \cong [-\Delta a_{1,3}]$。

(ii) 由于 $\mathrm{ord}(a_1a_2)$ 是奇数，根据 [29, 63:11]， $[a_1, a_2]$ 不能表示 $[b_1] \cong [-\kappa a_{1,3}]$ 或$[-\kappa\Delta a_{1,3}]$。 □

必要性引理 *5.13* 的证明。 根据命题 5.14， $R_1 = 0$ 且要么 $\alpha_1 = 0$，要么$\alpha_1 = 1$ 和 $d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$。此外， $R_3 \geq 0$。

若 $\alpha_1 = 0$，由命题 2.4(iii)， $R_2 = R_2 - R_1 = -2e$。假设 $R_3 > 1$。由引理 5.15，M 对所有 $\eta \in \mathcal{U}$都不能表示 $N =\prec \eta\pi \succ$。但由引理 3.6(viii)， M 表示 $\prec \eta\pi \succ$

对所有满足 $\eta \neq \varepsilon$ 的 $\eta \in \mathcal{U}$，这就产生矛盾。因此 $R_3 \in \{0,1\}$。注意， $R_3 \equiv$ 赋值($a_{1,\ 3}$) $\equiv k$(模 2)，故 $R_3 = k$。

假设 $\alpha_1 = 1$ 和 $d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$。那么 $R_2 \in [2-2e, 0]^E \cup \{1\}$。

若 $R_2 \in [2-2e,0]^E$ 和 $R_3 > k$，由引理 5.16(i)， M 不能表示 $N = \prec -\Delta\varepsilon_{1,\ 3}\pi^k \succ$。但由于 $-\Delta\varepsilon_{1,\ 3}\pi^k \neq \varepsilon\pi^k$，根据引理 3.6(viii)， M 表示 N，矛盾。因此$R_3 \leq k$，从而 $R_3 \in \{0,1\}$。与前一种情形类似，我们可推出 $R_3 = k$。

若 $R_2 = 1$ 和 $R_3 > k+1$，由引理 5.16(ii)， M 不能表示 $\prec -\kappa\varepsilon_{1,3}\pi^k \succ$或 $\prec -\kappa\Delta\varepsilon_{1,3}\pi^k \succ$。但是 $-\kappa\varepsilon_{1,3}\pi^k \neq \varepsilon\pi^k$ 和$-\kappa\Delta\varepsilon_{1,3}\pi^k \neq \varepsilon\pi^k$，根据引理 3.6(viii)， M同时表示 $\prec -\kappa\varepsilon_{1,3}\pi^k \succ$ 和 $\prec -\kappa\Delta\varepsilon_{1,3}\pi^k \succ$，矛盾。因此 $R_3 \leq k+1$。注意， $R_3 \equiv$赋值(a_1,3)$+1 \equiv k+1$ (模 2)，因此 $(k, R_3) \in$ {(0, 1), (1, 0), (1, 2)}。若 $(k, R_3) =$(1, 0)，则 $R_2 > R_3$，这与命题 2.3(iv)矛盾。因此， $R_3 = k+1$。□

引理 5.17. 设 $N = \prec b_1 \succ$。假设 $R_1 = 0$、 $R_2 = 1$ 和 FM 表示 $FN = [b_1]$。若 $d(-a_{1,3}b_1) \geq 2e$，则 $[a_1, a_2]$ 表示 $[b_1]$。

证明. 若 $d(-a_{1,3}b_1) \geq 2e$，则 $-a_{1,3}b_1 \in F^{\times 2} \cup \Delta F^{\times 2}$。注意到 $-a_{1,3} \in \varepsilon\pi^k F^{\times 2}$，因此$b_1 \in \varepsilon\pi^k F^{\times 2} \cup \Delta\varepsilon\pi^k F^{\times 2}$。根据引理 3.6(viii)， FM不表示 $[\varepsilon\pi^k]$，所以根据假设有 $b_1 \in \Delta\varepsilon\pi^k F^{\times 2}$。 FM的子空间 $[a_1, a_2]$ 也不表示 $[\varepsilon\pi^k]$。由于 ord(a_1a_2) 为奇数，根据 [29, 63:11]， $[a_1, a_2]$ 表示 $[b_1] = [\Delta\varepsilon\pi^k]$。□

引理 *5.13* 的充分性证明。由于 $FM \cong W_\nu^2(\varepsilon\pi^k)$ 对所有满足$c \neq \varepsilon\pi^k$的 $c \in \mathcal{V}$ 都表示 $[c]$。因此，由引理 3.10(ii)，只需证明 M 表示所有相应的格 $\prec c \succ$。令 $N = \prec c \succ$。则 $S_1 =$ 赋值(c) $\in \{0,1\}$。

显然， $R_1 = 0 \leq S_1$。因此，定理 2.6(i) 得证。

由于赋值(a_1b_1) $\equiv S_1$ (mod 2)，若 $S_1 = 0$，则 $d(a_1b_1) \geq 1 \geq \alpha_1$；若 $S_1 = 1$，则 $d(a_1b_1) =$0。因此

$$d[a_1b_1] = \min\{d(a_1b_1), \alpha_1\} = \begin{cases} \alpha_1 & \text{if } S_1 = 0, \\ 0 & \text{if } S_1 = 1. \end{cases}$$

若 $S_1 = 0$，则 $S_1 = R_1$。由命题 2.4(ii)，

$$A_1 = \min\{\frac{R_2 - S_1}{2} + e, R_2 - S_1 + d[-a_{1,2}]\} = \alpha_1 = d[a_1b_1].$$

若 $\alpha_1 = 0$，则由命题 2.4(iii)可得 $R_2 = R_2 - R_1 = -2e$。因此

$$A_1 \leq (R_2 - S_1)/2 + e = (-2e - S_1)/2 + e = -S_1/2 \leq 0 \leq d[a_1b_1].$$

假设 $S_1 = \alpha_1 = 1$ 且 $d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$。则

$$A_1 \leq R_2 - S_1 + d[-a_{1,2}] = R_2 - 1 + (1 - R_2) = 0 = d[a_1b_1].$$

由此，定理 2.6(ii)得证。

假设 $R_3 > S_1$。否则，定理 2.6(iii)显然成立。

若 $\alpha_1 = 0$，则 $R_3 \in \{0,1\}$，从而 $S_1 = 0$。由于 $R_2 - R_1 = -2e$ 且 $c \in \mathcal{U}$，根据 [18,推论 2.3(ii)]， $[a_1, a_2] \cong \mathbb{H}$ 或 $[1, -\Delta]$，两种情况下均表示 $[b_1] = [c]$。

假设 $\alpha_1 = 1$ 和 $d[-a_{1,2}] = 1 - R_2$。那么 $(k,\ R_3) \in$ {(0，0)，(0，1)，(1，1)，(1，2)}。根据假设 $R_3 > S_1$，我们只需考虑四种情形:

$$(k, R_3, S_1) = \{(0,1,0), (1,1,0), (1,2,0), (1,2,1)\}.$$

当 $(k,\ R_3,\ S_1) = (1,\ 1,\ 0)$ 或 $(1,\ 2,\ 0)$ 时，由于 $\mathrm{ord}(a_{1,\ 3})$ 为奇数且 $\mathrm{ord}(a_1) = \mathrm{ord}(b_1) = 0$，$\mathrm{ord}(a_{1,\ 3}b_1)$ 和 $\mathrm{ord}(a_2a_3)$ 均为奇数。因此 $d(-a_{1,\ 3}b_1) = 0$ 和

$$R_3 = \begin{cases} 2 & \text{if } R_2 = 1, \\ 1 & \text{if } R_2 \in [2-2e, 0]^E. \end{cases}$$

因此

$$d[-a_{1,2}] = 1 - R_2 \begin{cases} = 0 \le 2e-2 = 2e + S_1 - R_3 & \text{if } R_2 = 1, \\ \le 2e-1 = 2e + S_1 - R_3 & \text{if } R_2 \in [2-2e, 0]^E. \end{cases}$$

因此，在这两种情况下，$d[-a_{1,2}] + d(-a_{1,\ 3}b_1) \le 2e + S_1 - R_3$。

当 $(k,\ R_3,\ S_1) = (0,\ 1,\ 0)$ 或 $(1,\ 2,\ 1)$ 时，令 $N = \prec \eta\pi^k \succ$，其中 $\eta \in \mathcal{U}$ 且 $\eta \neq \varepsilon$。于是，$FM \cong W_2^3(\varepsilon\pi^k)$ 表示 $[b_1] = [\eta\pi^k]$。如果 $d(-a_{1,\ 3}b_1) \ge 2e$，根据引理 5.17，$[a_1, a_2]$ 表示 $[b_1]$。假设 $d(-a_{1,\ 3}b_1) \le 2e-1$。由于 $R_2 = 1$ 且 $(R_3,\ S_1) \in \{(1,\ 0),\ (2,\ 1)\}$，我们有

$$d[-a_{1,2}] + d(-a_{1,3}b_1) \le (1 - R_2) + (2e-1) = 2e - 1 = 2e + S_1 - R_3.$$

因此，在所有情况下，定理 2.6(iii) 均已得到验证。 □

为证明定理 5.2，我们需要根据引理 5.10 和 5.11 得到的不变量推导出显式结构。处理方式与 [17, §7], 中的相似，但还需要处理其他一些情形。

除非另有说明，我们假设

$$FM \cong W_\nu^3(c) \quad \text{and} \quad M \ncong H_{1,h}^3(c), \tag{5.1}$$

其中 $\nu \in \{1,2\}$,$c \in \mathcal{V}$ 且 $h \ge 1$。那么，引理 5.10 和 5.11 可改述如下 s.

引理 5.18。设 $\nu \in \{1,2\}$、$k \in \{0,1\}$ 和 $\varepsilon \in \mathcal{U}$。假设 M 是 *ADC*。那么 $R_1 = 0$、$R_2 \in [-2e, 0]^E \cup \{1\}$ 和 $\alpha_1 \in \{0,1\}$。此外，

(i) 若 $FM \cong W_\nu^3(\varepsilon\pi^k)$ 且 $R_2 \in [-2e, 0]^E$，则 $R_3 = k$;

(ii) 若 $FM \cong W_2^3(\varepsilon\pi^k)$ 且 $R_2 = 1$，则 $R_3 = k+1$。

引理 5.19. 设 M和 M'是两个 *ADC* $\mathcal{O}_F$-格。当且仅当$FM \cong FM'$和 $R_2(M) = R_2(M')$时，$M \cong M'$。

证明。必要性显然。为证明充分性，只需验证[2, 定理 3.1] 的条件 (i)-(iv) 对 M和 M'成立。设 $M' \cong \prec b_1, b_2, b_3 \succ$相对于某个良好 BONG。记作$S_i = R_i(M')$ 和 $\beta_i = \alpha_i(M')$。

首先，依照引理 5.18，我们有

$$R_1 = 0, \quad R_2 \in [-2e, 0]^E \cup \{1\}, \quad \text{and} \quad \alpha_1 \in \{0,1\}. \tag{5.2}$$

如果 $R_2 \in [-2e, 0]^E$，那么依照引理 5.18(i)，$R_3 \in \{0,1\}$。这与 (5.2) 结合后，符合条件 [17, (7.3)，第 1013] 页，且 $n = 1$。因此，依照 [17,引理 7.15] 的证明，结合 $n = 1$，即可得证。

设 $FM \cong W_2^3(\varepsilon\pi^k)$。假设 $R_2 = 1$。则根据假设，$S_2 = 1$。因此，依照引理 5.18(ii)，$R_1 = S_1$ 且 $R_3 = S_3 = k+1$。于是条件 (i) 得以满足。

由于 $R_2 - R_1 = 1$，命题 2.4(iv) 推出 $\alpha_1 = 1$。若 $k = 1$，则 $R_3 = R_2 + 1 = 2$。因此，命题 2.4(iv) 也推出 $\alpha_2 = 1$。若 $k = 0$，则 $R_3 = R_2 = 1$。由于 $\mathrm{ord}(a_2a_3)$

为偶数， $d(-a_2a_3) \geq 1 = \alpha_1$。因此 $d[-a_2a_3] = \min\{d(-a_2a_3)\ \alpha_1\} = 1$，由命题 2.4(ii) 可得，

$$\alpha_2 = \min\{\frac{R_3 - R_2}{2} + e, R_3 - R_2 + d[-a_{2,3}]\} = \min\{e, 1\} = 1.$$

同理， $\beta_1 = \beta_2 = 1$。因此，条件（ii）得到满足。

对于 $1 \leq i \leq 2$，由于 $R_i = S_i$，赋值 $\mathrm{ord}(a_{1,\ i}b_{1,\ i})$ 为偶数，因此 $d(a_{1,\ i}b_{1,\ i}) \geq 1 = \alpha_i$。因此，条件（iii）得到满足。对于 $k \in \{0, 1\}$，我们总有 $\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \leq 2e$。因此，条件（iv）显然得到满足。□

我们将定义 7.16、注 7.17 和引理 7.20]扩展到情形 $n = 1$，包括$R_2(M) = 1$。

定义 5.20。设 $\nu \in \{1, 2\}$、 $r \in \{-1/2, 0, \ldots, e\}$ 和 $c \in \mathcal{V}$。我们用 $M^3_{\nu,\ r}(c)$ 表示唯一的 ADC 格 M，其满足 $FM \cong W^3_\nu(c)$ 且 $R_2(M) = -2r$。

注记 5.21。 根据引理 5.19，若这样的三元格存在，则在等距意义下唯一 .

如果一个三元 $\mathcal{O}_F$-格 M是 ADC，则有 $R_2(M) \in [-2e, 0]^E \cup \{1\}$，即对于某个 $r \in \{-1/2, 0, 1, \ldots, e\}$， $R_2(M) = -2r$。因此，在假设（5.1）下，每个与某个 $M^3_{\nu,\ r}(c)$ 等距的三元 ADC 格都是 $M \cong M^3_{\nu,\ r}(c)$，其中 $FM \cong W^3_\nu(c)$。

引理 5.22。假设 M 是 *ADC*。

(i) 如果对于某个 $c \in \mathcal{U}$，有 $FM \cong W^3_2(c)$，那么 $R_2 \neq -2e$，等价地，$M^3_{2,\ e}(c)$ 未定义。

(ii) 如果对于某个 $c \in \mathcal{V}$，有 $FM \cong W^3_1(c)$，那么 $R_2 \neq 1$，等价地，$M^3_{1,\ -1/2}(c)$ 未定义。

证明。这些结论由引理 5.11 和 5.10 可直接得出。 □

引理 5.23。设 $\nu \in \{1, 2\}$、 $c \in \mathcal{V}$ 和 $\omega \in \mathcal{V}$ 满足 $d(\omega) < 2e$。则 $M = N^2_\nu(\omega) \perp \langle \omega c \rangle$ 是 *ADC*，且 $R_2(M) = 1 - d(\omega) \in [2 - 2e, 0]^E \cup \{1\}$。此外，

$$M \cong \begin{cases} \prec (\omega^\#)^{\nu-1}, -(\omega^\#)^{\nu-1}\omega\pi^{1-d(\omega)}, \omega c \succ & \text{if } 1 \leq d(\omega) < 2e, \\ \prec \Delta^{\nu-1}, -\Delta^{\nu-1}\omega, \omega c \succ & \text{if } d(\omega) = 0. \end{cases}$$

证明。设 $N^2_\nu(\omega) \cong \prec a_1, a_2 \succ$ 是相对于一个良好 BONG 的。应用命题 3.4(ii)。若$1 \leq d(\omega) < 2e$，则 $(a_1, a_2) = (1, -\omega\pi^{1-d(\omega)})$ 或 $(\omega^\#, -\omega^\#\omega\pi^{1-d(\omega)})$，分别对应于 $\nu = 1$ 或 2；若 $d(\omega) = 0$，令 $\omega = \varepsilon\pi$ 满足 $\varepsilon \in \mathcal{U}$。则 $(a_1, a_2) = (1, -\varepsilon\pi)$ 或 $(\Delta, -\Delta\varepsilon\pi)$，分别对应于$\nu = 1$ 或 2。

令 $R_i := R_i(N^2_\nu(\omega))$。于是 $R_1 = 0$和 $R_2 = 1 - d(\omega)$。由于 $\omega,\ c \in \mathcal{V}$，$\mathrm{ord}(\omega)$ 和 $\mathrm{ord}(c)$ 的赋值都落在 $\{0, 1\}$ 内。因此，若 $a_3 := \omega c$ 且 $R_3 := \mathrm{ord}(a_3)$，则根据 $d(\omega)$ 是否成立， $R_3 = \mathrm{ord}(\omega) + \mathrm{ord}(c) \in \{0, 1\}$ 或 $\{1, 2\}$。前一种情况下， $R_3 \geq 0 \geq 1 - d(\omega)$；后一种情况下， $R_3 \geq 1 = 1 - d(\omega)$。所以，两种情况下都有 $R_3 \geq R_2$。回忆一下， $R_3 \geq 0 = R_1$。结合这些结果与 [1, 推论 4.4(v)]，，我们看到

$$M \cong \prec a_1, a_2 \succ \perp \prec a_3 \succ \cong \prec a_1, a_2, a_3 \succ$$

相对于良好 BONG 和 $R_i(M) = R_i$。注意，若 $1 \leq d(\omega) < 2e$，即 $\omega \in \mathcal{U}\backslash\{1, \Delta\}$，则 $d(\omega) \in [1, 2e - 1]^O$。因此 $R_2(M) = R_2 = 1 - d(\omega) \in [2 - 2e, 0]^E \cup \{1\}$。

记作 $\alpha_1 = \alpha_1(M)$。由于 $R_2 - R_1 = R_2 > -2e$，命题 2.4(iii) 蕴含 $\alpha_1 \geq 1$。在所有情况下，我们都有 $-a_1a_2 = \omega$ 并且

$$\alpha_1 \leq R_2 - R_1 + d(-a_1a_2) = (1 - d(\omega)) - 0 + d(\omega) = 1.$$

因此 $\alpha_1 = 1$。

根据上述讨论，由引理 5.10(ii) 和 5.11(ii)-(iii)，M 是 ADC。 □

引理 5.24。设 $\nu \in \{1,2\}$、$r \in \{-1/2, 0, \dots, e\}$ 和 $c \in \mathcal{V}$。则 $M^3_{\nu,\,r}(c)$ 除 $(\nu、\ r、\ c) \in \{(2、\ e、\ \mathcal{U})、(1、\ -1/2、\ \mathcal{V})\}$外均有定义。

(i) 如果 $r = e$ 且 $(\nu、\ c) \neq (2, \mathcal{U})$，则 $M^3_{\nu、\ e}(c) \cong N^3_\nu(c)$。*(ii)* 如果 $r = e-1$ 且 $(\nu、\ c) = (2, \mathcal{U})$，则 $M^3_{2、\ e-1}(c) \cong N^3_2(c)$。*(iii)* 如果 $0 \leq r \leq e-1$，或 $r = -1/2$ 且 $\nu = 2$，则 $M^3_{\nu、\ r}(c) \cong N^2_{\nu'}(\omega_r) \perp \langle \omega_r c \rangle$，其中 $\omega_r \in \mathcal{V}$ 为任意满足 $d(\omega_r) = 2r+1$ 且 $\nu' \in \{1,2\}$ 满足 $(-1)^{\nu'} = (-1)^{\nu}(\omega_r、\ c)_{\mathfrak{p}}$ 的对象。

证明。根据引理 5.22，$M^3_{2,e}(c)$ 对每个 $c \in \mathcal{U}$ 都未定义，而 $M^3_{1,-1/2}(c)$ 对每个 $c \in \mathcal{V}$ 都未定义。接下来，我们将证明格 $M^3_{\nu,r}(c)$ 在其余情形下有定义，从而证明该引理。

对于 (i) 和 (ii)，由于 $N^3_\nu(c)$ 是 $\mathcal{O}_F$-极大的，根据引理 3.10(i)，它是 ADC。我们还有 $FN^3_\nu(c) \cong W^3_\nu(c)$。若 $(\nu, c) \neq (2, \mathcal{U})$，根据 [17, 引理 4.12(i) 和 (iii)]，$R_2(N^3_\nu(c)) = -2e$。因此，根据定义 5.20，$N^3_\nu(c) \cong M^3_{\nu,e}(c)$；若 $(\nu, c) = (2, \mathcal{U})$，则根据 [17, 引理 4.12(ii)], $R_2(N^3_2(c)) = 2 - 2e$。因此，再次根据定义 5.20，$N^3_2(c) \cong M^3_{2,e-1}(c)$。

对于 (iii)，令 $M = N^2_{\nu'}(\omega_r) \perp \langle \omega_r c \rangle$，其中 $0 \leq r \leq e-1$，或 $r = -1/2$ 且 $(\nu, c) \neq (1, \mathcal{V})$。由于 $(c, \omega_r) = (-1)^{\nu+\nu'}$，由 [17, 引理 4.4(ii)] $W^3_\nu(c)$ 表示 $W^2_{\nu'}(\omega_r)$。由于行列式 $W^2_{\nu'}(\omega_r)$ 行列式 $W^3_\nu(c) = \omega_r c$，我们可知 $FM \cong W^2_{\nu'}(\omega_r) \perp [\omega_r c] \cong W^3_\nu(c)$。此外，由引理 5.23，$M$ 是 ADC，且 $R_2(M) = 1 - d(\omega_r) = -2r$。因此，根据定义 5.20，$M \cong M^{n+2}_{\nu\, r}$，$(c)$。□

推论 5.25. 在等距意义下，

(i) 存在无穷多个三元各向同性 *ADC* 格，其中 $4(N\mathfrak{p})^e$ 个是 $\mathcal{O}_F$-极大的。(ii) 存在 $(4e+6)(N\mathfrak{p})^e$ 个三元各向异性 *ADC* 格，其中 $4(N\mathfrak{p})^e$ 个是 $\mathcal{O}_F$-极大的。

证明。(i) 根据定理 5.2(i)(b)，存在无穷多个各向同性 ADC 格。

(ii) 假设 FM 是各向异性的。根据命题 3.8(ii)，我们有 $\nu = 2$。

如果 M 是引理 5.24 中的形式 (i)，那么 $c \in \pi\mathcal{U}$，因此这些格的数量为 $|\mathcal{U}| = 2(N\mathfrak{p})^e$。

如果 M 是形式 (iii)，那么 $r \in \{-1/2, 0, \dots, e-1\}$ 且 $c \in \mathcal{V}$。因此这些格的数量为

$$(e+1)|\mathcal{V}| = 4(e+1)(N\mathfrak{p})^e.$$

因此，总共有 $(4e+6)(N\mathfrak{p})^e$ 个各向异性 ADC 格。

(i) 和 (ii) 中的其余断言由推论 3.11 得出。 □

定理的证明　注 *5.2.* 这由定义 5.20、注 5.21 和引理 5.24 得出。 □

定理 *5.4* 的证明。(i) 对于必要性，由于 M 是非本原的，$\mathfrak{n}(M) \subsetneq \mathcal{O}_F$。根据定理 5.1 和命题 3.4(ii)，$M \cong N^2_2(\Delta) \prec \pi,\ -\Delta\pi^{1-2e} \succ$ 或 $\cong M^2_2(\Delta) \prec \pi,\ -\Delta\pi^{3-2e} \succ$。

于是 $R_1 = 1$ 和 $R_2 = 1 - 2e$ 或 $3 - 2e$。因此，根据引理 2.1]，，赋值(𝔫(M)) $= R_1 = 1$，且赋值(𝔳(M)) $= R_1 + R_2 = 2 - 2e$ 或 $4 - 2e$。显然， $FM \cong W_2^2(\Delta) = [\pi, -\Delta\pi]$。

关于充分性，我们有 $R_1 =$赋值(𝔫(M)) $= 1$ 且 $R_2 =$赋值(𝔳(M)) $- R_1 = 1 - 2e$ 或 $3 - 2e$。由于 $FM \cong [\pi, -\Delta\pi] = W_2^2(\Delta)$，根据 [17, 引理 4.11(ii)]， M 具有 ADC 性质；结合 $n = 2$ 以及引理 5.9（结合 $\nu = 2$）和定理 5.1即可。

(ii) 根据引理 5.10 和 5.11，我们有 $R_1 = 0$，因此 $\mathfrak{n}(M) = \mathfrak{p}^{R_1} = \mathcal{O}_F$。所以，$M$ 是本原的。

□

在本节的其余部分，我们将确定三元 ADC 格的余行列式集。为此，我们首先刻画它们的整自旋群。

引理 5.26。设 $\nu \in \{1, 2\}$、$r \in \{-1/2, 0, \ldots, e\}$ 和 $c \in \mathcal{V}$。假设 $M = M^3_{\nu,\, r}(c)$，其中 $(\nu、\ r、\ c) \notin \{(2、\ e、\ \mathcal{U})、(1、\ -1/2、\ \mathcal{V})\}$。

(i) 若 $r = e$ 且 $(\nu, c) = (1, \mathcal{U})$，则 $R_1 = R_3 = 0$、$R_2 = -2e$，并且 $\theta(O^+(M)) = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$。*(ii)* 若 $r = e$ 且 $c \in \pi\mathcal{U}$，则 $R_1 = 0 < R_3 = 1$，并且 $\theta(O^+(M)) = F^\times$。*(iii)* 若 $0 \le r \le e - 1$ 且 $c \in \mathcal{U}$，则 $R_1 = R_3 = 0$、$R_2 = -2r \in [2 - 2e, 0]^E$，并且$\theta(O^+(M)) = F^\times$。*(iv)* 若 $0 \le r \le e - 1$ 且 $c \in \pi\mathcal{U}$，则 $R_1 = 0 < R_3 = 1$，并且 $\theta(O^+(M)) = F^\times$。*(v)* 若 $r = -1/2$、$\nu = 2$ 且 $c \in \mathcal{U}$，则 $R_1 = 0 < R_3 = 1$、$R_2 = 1$，并且 $\theta(O^+(M)) = F^\times$。*(vi)* 若 $r = -1/2$、$\nu = 2$ 且 $c \in \pi\mathcal{U}$，则 $R_1 = 0 < R_3 = 2$、$R_2 = 1$，并且 $\theta(O^+(M)) = F^\times$。

证明。在所有情形下，由定义 5.20 可知，R_i-不变量 M 显然。剩下需要确定旋量范数群 $\theta(O^+(M))$。

对于 (ii)、(iv) 和 (v)，由命题 2.5，M 具有性质 A，但不具有性质 B。因此 $\theta(O^+(M)) = F^\times$。

对于 (i) 和 (iii)，由于 $R_1 = R_3 = 0$，命题 2.5 蕴含 $\theta(O^+(M)) = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$ 或 $F^\times$。此外，由注 2.2，$a_{i+1}/a_i \in \mathscr{A}$ 适用于 $1 \le i \le 2$。

对于 (i)，由引理 5.24(i)，$M = N_1^3(c) \cong \prec 1,\ -\pi^{-2e},\ c \succ$，其中 $c \in \mathcal{U}$。于是 $R_2 - R_1 = -2e$ 和 $R_3 - R_2 = 2e$ 均为偶数。此外，

$$d(-a_2/a_1) = d(1) = \infty > 2e = e - (R_2 - R_1)/2$$

and

$$d(-a_3/a_2) = d(c) \ge 1 > 0 = e - (R_3 - R_2)/2.$$

因此，由 [1, 引理 7.2(i)], $G(a_{i+1}/a_i) \subseteq \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$ 对于 $1 \le i \le 2$成立。此外，$(R_2 - R_1)/2 = -e \equiv e$（模 2）。应用 [1, 定理 3]，，我们推出 $\theta(O^+(M)) \subseteq \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$，如所需。

对于 (iii)，由 [1, 定理 3]，，只需证明对于某个 j，$G(a_{j+1}/a_j) \not\subseteq \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$ 成立。由引理 5.23 和 5.24(iii),

$$M = M^3_{\nu,r}(c) \cong \prec (\omega_r^\#)^{\nu'-1}, -(\omega_r^\#)^{\nu'-1}\omega_r\pi^{-2r}, \omega_r c \succ,$$

其中 $0 \le r \le e - 1$，并且 $\omega_r \in \mathcal{V}$ 使得 $d(\omega_r) = 2r + 1$，且 $\nu' \in \{1, 2\}$ 满足 $(-1)^{\nu'} = (-1)^\nu(\omega_r,\ c)_\mathfrak{p}$。. 然后

$$d(-a_2/a_1) = d(\omega_r) = 2r + 1 \le e + r = e - (-2r - 0)/2 = e - (R_2 - R_1)/2,$$

因此 [1, 引理 7.2(i)] 推出 $G(a_2/a_1) \not\subseteq \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$，正如所需。

对于 (vi)，由于 $R_1 = 0 < R_3 = 2$, M 具有性质 A，且 $R_3 - R_1 = 2$。因此，根据 [1, 定理 1], ，我们可得

$$\theta(O^+(M)) \supseteq (1+\mathfrak{p})F^{\times 2} = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2},$$

因此 $\theta(O^+(M)) = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$或 $F^\times$。然而， $R_2 - R_1 = R_3 - R_2 = 1$，所以 [1,引理 7.2(i)] 推出 $G(a_{i+1}/a_i) \not\subseteq \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$对于 $1 \le i \le 2$。因此 $\theta(O^+(M)) = F^\times$。□

引理 5.27。 假设 $M = H^3_{1,h}(c)$ 满足 $h \ge 1$ 和 $c \in \mathcal{V}$。那么 $R_1 = 0$, $R_2 = -2e$,$R_3 = 2h +$赋值 (c)，并且

$$\theta(O^+(M)) = \begin{cases} \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2} & if\ c \in \mathcal{U}, \\ F^\times & if\ c \in \pi\mathcal{U}. \end{cases}$$

证明。 令 $c = \varepsilon\pi^k$ 满足 $k \in \{0, 1\}$。由于 $2h + k > -2e$，根据定义和 [1, 推论 4.4(i)],，我们有

$$M = H^3_{1,h}(c) = \mathbf{H} \perp \langle \varepsilon\pi^{2h+k} \rangle \cong\prec 1, -\pi^{-2e} \succ\perp\prec \varepsilon\pi^{2h+k} \succ\cong\prec 1, -\pi^{-2e}, c\pi^{2h+k} \succ . \tag{5.3}$$

显然， $R_1 = 0$, $R_2 = -2e$ 和 $R_3 = 2h + k$。我们有

$$R_2 - R_1 = -2e \quad \text{and} \quad d(-a_2/a_1) = d(1) = \infty,$$

因此 [1,引理 7.2(i)] 表明 $G(a_3/a_2) \subseteq \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$。此外,

$$d(-a_3/a_2) = d(\varepsilon\pi^{2h+2e+k}) \ge 0 > -h - k/2 = e - (2h + k - (-2e)) = e - (R_3 - R_2)/2.$$

因此，根据 $R_3 - R_2 = 2h + k + 2e$ 是否为偶数，即 $k = 0$ 或 1， [1,引理 7.2(i)] 表明 $G(a_3/a_2) \subseteq \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$，无论是否如此。□

引理 5.28。 设 M 是三元 *ADC*。则

(i) $\theta(O^+(M)) \supseteq \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$。(ii)若 $\theta(O^+(M)) \subseteq N(F(\sqrt{a})/F)$，则 $a \in \{1, \Delta\}$；若进一步有 $\theta(O^+(M)) = F^\times$，则$a = 1$。

证明。 这两个陈述可由注5.3(iii)、引理 5.26 和 5.27 直接得到。 □

定理 *5.5* 的证明。 假设 $M = M^3_{\nu,r}(c)$ 且 $\nu \in \{1, 2\}$ 满足以下条件之一:

(a) $r = e$ 且 $c = \pi\mathcal{U}$; (b) $0 \le r \le e - 1$ 且 $c = \mathcal{V}$; (c) $r = -1/2$ 且 $c = \mathcal{V}$,

或者 $M = H^3_{1,h}(c)$ 且 $h \ge 1$和 $c \in \pi\mathcal{U}$，那么由引理 5.26(ii)-(vi) 和 5.27， $\theta(O^+(M)) = F^\times$，因此由引理 5.28(ii)， $\mathrm{Co}(M) \subseteq \{1\}$。由注记 3.13(i)， $1 \in \mathrm{Co}(M)$ 当且仅当 FM是各向同性的。因此， $\mathrm{Co}(M) = \{1\}$或 $\emptyset$，取决于 FM是否各向同性；根据命题 3.8，这等价于 $\nu = 1$ 或 2。

若 $M = M^3_{\nu,r}(c)$ 满足 $(\nu, r, c) = (1, e, \mathcal{U})$，或 $M = H^3_{1,h}(c)$ 满足 $h \ge 1$且 $c \in \mathcal{U}$，则由引理 5.26(i)、5.27 和 5.28(ii)， $\theta(O^+(M)) = \mathcal{O}_F^\times F^{\times 2}$，因此 $\mathrm{Co}(M) \subseteq \{1, \Delta\}$。由于$\nu = 1$, FM是各向同性的，根据注记 3.13(i)， $1 \in \mathrm{Co}(M)$。在前一种情况下， $R_1 = R_3 = 0$且 $R_2 - R_1 =$，因此由引理 3.14(ii)可得 $\Delta \notin \mathrm{Co}(M)$。于是 $\mathrm{Co}(M) = \{1\}$。在后一种情况下， $R_1 = 0 < R_3 = 2h$ 且

$$d(-a_1a_2\Delta) + d(-a_2a_3\Delta) + d(\Delta) = 2d(\Delta) + d(c\Delta) \ge 4e + 1 > 4e,$$

因此由引理 3.14(i)可得 $\Delta \in \mathrm{Co}(M)$。于是 $\mathrm{Co}(M) = \{1, \Delta\}$。 □

6. Proof of Main Results

定理 *1.2* 和 *1.9* 的证明。 若秩 $M = 1$, 则由命题 4.15] 的证明 [17, （其中 $n = 1$）可知这一点显然。

若秩 $M = 2$, 则当 $\mathfrak{p}$ 是非二进时，由定理 4.1 可得该定理；当 $\mathfrak{p}$ 是二进时，由定理 5.1 可得该定理。

若秩 $M = 3$, 则当 $\mathfrak{p}$ 是非二进时，由定理 4.2 和注 4.3 可得该定理；当 $\mathfrak{p}$ 是二进时，由定理 5.2 和注 5.3 可得该定理。□

定理 *1.4* 的证明。 (i) 若 M 是一元的，根据 [29, 65:15], $h(M) = 1$ ，它是正则的。因此，由定理 1.2(i) 和 [29, §82K], 等价条件成立。

(ii) 充分性显然。对于必要性，若 M 是二元格且 FM 各向同性，那么对每个 $\mathfrak{p} \in \Omega_F$， $FM_{\mathfrak{p}}$ 都是各向同性的，因而是全局全能的。因此 M 局部全能。于是由正则性， M 全局全能，因此由 [37, 推论 3.6], $M \cong \mathbf{H}$。

(iii) 由于 M 是二元格且 FM 各向异性，由 [6, 定理 A3], M 正则当且仅当 $h(M) = 1$。由 (1.1) 即得所述结论。□

推论 *1.6* 的证明。若二元 $\mathcal{O}_F$-格 M 是本原 ADC，则由定理 1.4(iii)，$h(M) = 1$。注意到 $m(M) \leq h(M)/2$ ，因此 [30] 中的论证仍然适用。所以该推论由 [30, 定理] 得出。□

定理 *1.7* 的证明。对于必要性，由 [9, 引理 2.1(b)], M 是 ADC。由定理 1.2(ii) 和 (iii) 可知，对于任意 ADC $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$-格 L， $\mathfrak{n}(L) \subseteq \mathfrak{p}$ 。设对某个 $\mathfrak{q} \mid a\mathcal{O}_F$，有 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{q}}(a) > 1$。那么 $\mathfrak{q}^2\mathfrak{n}(M_{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{n}(M_{\mathfrak{q}}^{(a)}) \subseteq \mathfrak{q}$。因此 $\mathfrak{n}(M_{\mathfrak{q}}) \subseteq \mathfrak{q}^{-1}$，这与 M 是整的矛盾。所以对所有 $\mathfrak{p} \mid a\mathcal{O}_F$，$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(a) = 1$。显然， $M_{\mathfrak{p}}^{(a)}$ 是非本原的。将定理 4.5(i) 和 5.4(i) 应用于 $M_{\mathfrak{p}}^{(a)}$ ，并结合缩放 [29, §82J], 的性质，即可得到其余条件。

对于充分性，由于 M 是 ADC，因此对所有 $\mathfrak{p}$， $M_{\mathfrak{p}}$ 也是 ADC。若 $\mathfrak{p} \nmid a\mathcal{O}_F$，则 $M_{\mathfrak{p}}^{(a)} = M_{\mathfrak{p}}$ 是 ADC。假设 $\mathfrak{p} \mid a\mathcal{O}_F$。由于 $\mathfrak{p}(a)$ 的赋值 $= 1$，若 $M_{\mathfrak{p}}$ 满足假设，则 $M_{\mathfrak{p}}^{(a)}$ 满足定理 4.5(i) 和 5.4(i) 的条件。因此 $M_{\mathfrak{p}}^{(a)}$ 是 ADC。回顾一下，格的正则性在缩放下保持不变。因此，由 (1.1)， $M^{(a)}$ 是 ADC。□

推论 *1.8* 的证明。假设 M 是一个本原二元 ADC $\mathcal{O}_F$-格，且 $c =-$ 行列式 $FM \neq 1$。根据全局平方定理，存在无穷多个非二进素数 $\mathfrak{q} \nmid c\mathcal{O}_F$ ，使得 $c_{\mathfrak{q}}$ 不是平方，即 $c_{\mathfrak{q}} \in \Delta_{\mathfrak{q}} F_{\mathfrak{q}}^{\times 2}$。取这样的一个素数 $\mathfrak{q}_i$ 。由于 $\mathcal{O}_F$ 是主理想整环，我们可以取 $a_i \in \mathcal{O}_F^+$，使得 $a_i\mathcal{O}_F = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_i$, 其中 $i = 1$, 2, ...。对于每个 i，显然，$\mathfrak{q}_i(a_i)$ 的赋值 $= 1$。由于 $M_{\mathfrak{q}_i}$ 是本原的，且 $c_{\mathfrak{q}_i} \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{q}_i}}^{\times}$， $\mathfrak{n}(M_{\mathfrak{q}_i}) = \mathfrak{v}(M_{\mathfrak{q}_i}) = \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{q}_i}}$。结合 $c_{\mathfrak{q}_i} \in \Delta_{\mathfrak{q}_i} F_{\mathfrak{q}_i}^{\times 2}$，可得 $FM_{\mathfrak{q}_i} \cong [1, -\Delta_{\mathfrak{q}_i}]$。因此，根据定理 1.7， $M^{(a_i)}$ 对 $i = 1$, 2, ... 是非本原 ADC，证毕。□

定理 6.1 ([4])。 设 M 是代数数域 F 上的一个三元 $\mathcal{O}_F$-格。令$a \in F^{\times}/F^{\times 2}$且 $a \neq 1$。那么，对于所有 $\mathfrak{p} \in \Omega_F$， $a \in Co(M)$ 当且仅当 $a_{\mathfrak{p}} \in Co(M_{\mathfrak{p}})$。

定理 *1.12* 的证明。 根据定理 6.1， $a \in \mathrm{Co}(M)$ 当且仅当 $a_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Co}(M_{\mathfrak{p}})$。

假设 $\mathfrak{p}$ 是阿基米德的。若 $\mathfrak{p}$ 是复数，则 $a_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Co}(M_{\mathfrak{p}})$ 显然成立。若 $\mathfrak{p}$ 是实数，则根据注记 3.13(ii)， $a_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Co}(M_{\mathfrak{p}})$ 等价于条件 (i)。

对于非阿基米德素数 $\mathfrak{p}$，为应用定理 4.6 和 5.5，只需确定 $M_{\mathfrak{p}}$ 的形式。

假设 $\mathfrak{p}$ 是非二进的。设 $FM_{\mathfrak{p}}$ 是各向同性的，且 $\mathfrak{v}(M_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}} \subseteq \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$。由注4.3(ii)和命题 3.4(i)，若 $k_{\mathfrak{p}}$ 为偶数，则 $M_{\mathfrak{p}} \cong N_1^3(c_{\mathfrak{p}})$ 或 $H_{1,\ h_{\mathfrak{p}}}^3(c_{\mathfrak{p}})$，其中 $h_{\mathfrak{p}} \geq 1$ 且 $c_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$，因此 $\mathrm{Co}(M_{\mathfrak{p}}) = \{1, \Delta_{\mathfrak{p}}\}$；若 $k_{\mathfrak{p}}$ 为奇数，则 $M_{\mathfrak{p}} \cong N_1^3(c_{\mathfrak{p}})$ 或 $H_{1,\ h_{\mathfrak{p}}}^3(c_{\mathfrak{p}})$，其中 $h_{\mathfrak{p}} \geq 1$ 且 $c_{\mathfrak{p}} \in \pi_{\mathfrak{p}}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$。因此 $\mathrm{Co}(M_{\mathfrak{p}}) = \{1\}$，如所需。

假设 $\mathfrak{p}$ 是二进的，且 $FM_{\mathfrak{p}}$ 是各向同性的。设 $\mathfrak{v}(M_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}} \subseteq \mathfrak{p}^2$。由注5.3(ii)，若 $k_{\mathfrak{p}}$ 为偶数，则 $M_{\mathfrak{p}} \cong H_{1,\ h_{\mathfrak{p}}}^3(c_{\mathfrak{p}})$，其中 $h_{\mathfrak{p}} \geq 1$ 且 $c_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$，因此 $\mathrm{Co}(M_{\mathfrak{p}}) = \{1, \Delta_{\mathfrak{p}}\}$；若 $k_{\mathfrak{p}}$ 为奇数，则 $M_{\mathfrak{p}} \cong H_{1,\ h_{\mathfrak{p}}}^3(c_{\mathfrak{p}})$，其中 $h_{\mathfrak{p}} \geq 1$ 且 $c_{\mathfrak{p}} \in \pi_{\mathfrak{p}}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$，因此 $\mathrm{Co}(M_{\mathfrak{p}}) = \{1\}$。

假设 $2\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}} \subseteq 2\mathfrak{s}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$。那么根据注5.6， $M_{\mathfrak{p}} \cong M_{1,\ r_{\mathfrak{p}}}^3(c_{\mathfrak{p}})$，其中 $0 \leq r_{\mathfrak{p}} \leq e_{\mathfrak{p}}$ 且 $c_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{V}$。因此 $\mathrm{Co}(M_{\mathfrak{p}}) = \{1\}$。□

定理 *1.13* 的证明。假设存在 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$，使得 $FM_{\mathfrak{p}}$ 是各向异性的。若 $\mathfrak{p}$ 是非二进的，则根据注4.3(ii)，对某个 $c \in \mathcal{V}_{\mathfrak{p}}$，有 $M_{\mathfrak{p}} = N_2^3(c)$；若 $\mathfrak{p}$ 是二进的，则根据注5.3(iii)，对某个 $r \in \{-1/2, 0, \ldots, e\}$ 和 $c \in \mathcal{V}_{\mathfrak{p}}$，有 $M_{\mathfrak{p}} = M_{2,\ r}^3(c)$。由引理3.12和3.14可知，在这两种情况下均有 $\mathrm{Co}(M_{\mathfrak{p}}) = \emptyset$。因此 $\mathrm{Co}(M) = \emptyset$。

现在，$\mathrm{spn}(M)$ 表示所有满足 $\mathrm{gen}(M)$ 表示 b 的 $b \in \mathcal{O}_F$。由于 M 是不定的，根据 [29, 104:5]， M 表示所有这些 b。因此， M 是正则的。所以，根据 (1.1)，若 M 是局部 ADC，则其为全局 ADC。□

定理 *1.14* 的证明。该定理由引理 4.9(iii)(a) 和 5.28(i) 得出。 □

引理 6.2。设 M 是代数数域 F 上奇类数 $h(F)$的三元 $\mathcal{O}_F$-格。若对所有 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$，都有 $\theta(O^+(M_{\mathfrak{p}})) \supseteq \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{\times} F_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$，则 $g(M) = 1$。

证明。由于秩 $M = 3$， M 的真旋量属与其旋量属一致。证明可由 [37, 命题 3.2] 中的论证直接得到。□

定理 *1.16* 的证明。 由定理 1.14， 对所有 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$，我们有 $\theta(O^+(M_{\mathfrak{p}})) \supseteq \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{\times} F_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$。于是由引理 6.2 和 [29, 104:5]即可得出该定理。 □

定理 *1.18* 的证明。 (i) 由定理 1.2 和备注 4.3] 中的 [17,(4.4) 可得。(ii) 由推论 4.4 和 5.25 可得。 □

7. Reformulation of the formulas for local densities and masses

本节中，我们假设 F 是非阿基米德局部域或代数数域，并令 L 为一个 $\mathcal{O}_F$-格，且 $V = FL$。

与 [27, 32], 中一样，为便于讨论，我们统一处理非二进和二进情形下的不变量。首先回顾一下，每个非二进域 F 上的二元格总有一个 Jordan 分解$\mathcal{O}_F x_1 \perp \mathcal{O}_F x_2 \cong \langle a_1,\ a_2 \rangle$，其中 $a_1 = \mathrm{ord}(Q(x_1))$， $a_2 = \mathrm{ord}(Q(x_2))$，且 $\mathrm{ord}(a_1) \leq \mathrm{ord}(a_2)$。

定义 7.1. 设 F 是一个非二进局部域。若二元 $\mathcal{O}_F$-格 L 满足 $L \cong \langle a_1, a_2 \rangle$，且 $\mathrm{ord}(a_1) \leq \mathrm{ord}(a_2)$，则称其具有良好 BONG，记作 $L \cong \prec a_1, a_2 \succ$。

对于二进情形，我们定义函数 d，它从 $F^\times/F^{\times 2}$ 到 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，定义为 $d(c) := \mathrm{ord}(c^{-1}\mathfrak{d}(c))$，其中 $c \in F^\times$。根据 [29, §63A], $d(F^\times) = \{0, \infty\}$。此外，当且仅当 $c \in F^{\times 2}$ 时， $d(c) = \infty$。

现在，假设 F 是一个非阿基米德局部域，且 $L \cong \prec a_1,\ a_2 \succ$ 相对于良好 BONG，我们定义 L 的不变量 $a(L)$、 $R_1(L)$、 $R_2(L)$、 $R(L)$ 和 $\alpha(L)$如下:

$$\begin{aligned} a(L) &:= c^{-2}dL \in F^\times/\mathcal{O}_F^{\times 2}, \quad \text{with} \quad \mathfrak{n}(L) = c\mathcal{O}_F, \\ R_1(L) &:= \mathrm{ord}(a_1), \quad R_2(L) = \mathrm{ord}(a_2), \end{aligned} \tag{7.1}$$

and

$$\begin{aligned} R(L) &:= \mathrm{ord}(a(L)) = \mathrm{ord}(\mathfrak{v}(L)) - 2\mathrm{ord}(\mathfrak{n}(L)), \\ \alpha(L) &:= \min\{R(L)/2 + e, R(L) + d(-a(L))\}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

命题 7.2. 假设 F 是非二进或二进的，且 $L \cong \prec a_1, a_2 \succ$ 相对于良好 *BONG*。令 $a = a(L)$、 $R_i = R_i(L)$ =赋值(a_i)、 $R = R(L)$ 和 $\alpha = \alpha(L)$。则有

(i) $a = a_2/a_1$， $R = R_2 - R_1$， $\alpha = \min\{(R_2 - R_1)/2 + e,\ R_2 - R_1 + d(-a)\}$。

(ii) $dV \in aF^{\times 2}$，赋值$(dV) \equiv R$ (模 2)，赋值$(\mathfrak{d}(-dV)/dV) = d(-a)$ 以及

$$\mathrm{ord}(\mathfrak{d}(-dL)) = \mathrm{ord}(\mathfrak{v}(L)) + d(-a).$$

(iii) 赋值$(\mathfrak{n}(L)) = R_1$，赋值$(\mathfrak{v}(L)) = R_1 + R_2$，赋值$(\mathfrak{s}(L)) = \min\{(R_1 + R_2)/2,\ R_1\}$，且如果 F是二进的，那么赋值$(\mathfrak{w}(L)) = \min\{R_2 - R_1 + e, R_2 - R_1 + \alpha\}$。

备注7.3。当 F 是二进的且 L是二元的时，不变量 $R(L)$ 和 $\alpha(L)$ 也分别与 $R_2(L) - R_1(L)$ 和 $\alpha_1(L)$ 一致，后两者见 [2, §2], 。因此，第 2 节中所述的性质适用于二进情形下的 $R(L)$ 和 $\alpha(L)$。

证明。(i) 根据定义和 [1, §3.1], $\mathfrak{n}(L) = a_1\mathcal{O}_F$ 和 $dL = a_1a_2$。由此可得$a = a_2/a_1$，因此最后两个等式显然成立。

(ii) 注意， $dV = a_1a_2 = a$ 属于 $F^{\times 2}$，因此赋值(dV) 和 $R =$ 赋值(a) 具有相同的奇偶性。其余等式由函数 d 的定义以及二次缺陷 [29,§63A]的性质得出。

(iii) 当 F 为非二进，即 $e = 0$时，我们有 $R_2 \geq R_1$，因而 $(R_1 + R_2)/2 \geq R_1$。因此 $\mathfrak{n}(L) = \mathfrak{s}(L) = \mathfrak{p}^{R_1}$。显然， $\mathfrak{v}(L) = \mathfrak{p}^{R_1+R_2}$。

当 F 为二进时，这些等式由 BONG 的定义、 [1, 引理 2.1 和推论 4.4(iv)] 以及 [2,引理 2.14] 得出。□

在本节的其余部分，我们假设 F 是一个代数数域。对于有限扩张 K/F，记其判别式为 $D_{K/F}$，并在 $K = F$时令 $D_F := D_{F/F}$。此外，对于 F的任意分式理想 $\mathfrak{a}$，我们用 $N(\mathfrak{a})$ 表示 $\mathfrak{a}$的绝对范数。定义 L 的质量$m(L)$ 为

$$m(L) := \sum_{i=1}^{h(L)} \frac{1}{|O(L_i)|},$$

其中， L_i 的形式是 gen(L) 中各等距类的代表。显然，当且仅当 $m(L)|O(L)| = 1$ 时， $h(L) = 1$。因此，可以利用质量公式进一步细化类数为一条件。

依照 [27],, 我们假设 $\dim V = 2$，并令 $F' = F(\sqrt{-dV})$。注意，当且仅当 $-dV \in F^{\times 2}$ 时，$V \neq F'$。对于 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$，若 $-dV \notin F^{\times 2}$，我们令 $\chi(\mathfrak{p}) = 1$；否则，

$$\chi(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathfrak{p} \text{ splits in } F', \\ 0 & \text{if } \mathfrak{p} \text{ ramifies in } F', \\ -1 & \text{if } \mathfrak{p} \text{ is inert in } F'. \end{cases}$$

我们也用 $r(F)$ 表示满足 $\chi(\mathfrak{p}) = 0$ 的素位 $\mathfrak{p} \in \Omega_F \backslash \infty_F$ 的数量。

如 [27, §1], 所述，二次空间 V 可视为一个 F-代数，它具有一组 F-基 $\mathbf{1}$，v，其中 $\mathbf{1}$ 是 F 和 $v^2 = -dV$ 的单位元，而 F 在嵌入后也是 V 的子代数。我们将 F-代数 V 的非平凡自同构 σ 记为 $(a + bv)^\sigma = a - bv$。于是，从 V 到 F 的范数映射和迹映射分别为 $Q(x) = xx^\sigma$ 和 $\mathrm{Tr}(x) = x + x^\sigma$, $x \in V$。我们将代数 V 的极大序 $\mathcal{O}_V$ 定义为集合 $\{x \in V \mid Q(x) \in \mathcal{O}_F \text{ 和 } \mathrm{Tr}(x) \in \mathcal{O}_F\}$。于是

$$V = \begin{cases} F' & \text{if } -dV \notin F^{\times 2}, \\ F \oplus F & \text{if } -dV \in F^{\times 2}, \end{cases} \quad \text{and} \quad \mathcal{O}_V = \begin{cases} \mathcal{O}_{F'} & \text{if } -dV \notin F^{\times 2}, \\ \mathcal{O}_F \oplus \mathcal{O}_F & \text{if } -dV \in F^{\times 2}. \end{cases}$$

（参见 [27, §2]）。若一个 $\mathcal{O}_F$-格 M 是 $\mathcal{O}_F$-序，则称其为 $\mathcal{O}_V$ 的子环，且满足$1 \in M$。对于 V 上的任意 $\mathcal{O}_F$- 格 L，我们定义集合 M_L 为

$$M_L := \{x \in V \mid xL \subseteq L\}.$$

事实上，它是一个 $\mathcal{O}_F$-阶。我们称 L 为 $\mathcal{O}_F$-阶 M 的理想，如果 $M_L \supseteq M$；若 $M_L = M$，则称其为真理想。注意，当 $-dV \in F^{\times 2}$ 时，$D_{F'/F}\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_F$。因此，无论 $-dV \in F^{\times 2}$ 与否，$\mathfrak{v}(\mathcal{O}_V)$ 都由 [27, (11)], 得出。应用带有 $M = M_L$ 的引理 1]，对于在 [27, (8)] 中定义的整理想 $\mathfrak{c}(M_L)$，可得以下等式：

$$\mathfrak{c}^2(M_L) = 4D_{F'/F}^{-1}\mathfrak{v}(M) = 4D_{F'/F}^{-1}\mathfrak{v}(L)\mathfrak{n}(L)^{-2}.$$

受该等式启发，我们定义如下量：

$$\mathfrak{c}^2(L) := 4D_{F'/F}^{-1}\mathfrak{v}(L)\mathfrak{n}(L)^{-2}. \tag{7.3}$$

基于 [27, 定理 2], ，我们用不变量 $a(L)$、$R(L)$ 和 $\alpha(L)$ 给出一个质量公式（参见 (7.1) 和 (7.2)）。

定理 7.4. 设 F 是一个全实数域，且 L 是一个正定二元 $\mathcal{O}_F$-格。那么

$$m(L) = \frac{N(\mathfrak{c}(L))h(F')}{2^{r(F)+1}[\mathcal{O}_{F'}^\times : \mathcal{O}_F^\times]h(F)} \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{c}(L)} w_\mathfrak{p}(L),$$

其中

$$w_\mathfrak{p}(L) = \frac{u_\mathfrak{p}(L)}{v_\mathfrak{p}(L)} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}\right) \tag{7.4}$$

如下给出：

$$u_{\mathfrak{p}}(L)=\begin{cases}2 & \text{if } \chi(\mathfrak{p})=0, \text{ and either } 2\mid R_{\mathfrak{p}}(L) \text{ and } \alpha_{\mathfrak{p}}(L)+d_{\mathfrak{p}}(-a_{\mathfrak{p}}(L))>2e_{\mathfrak{p}},\\ & \text{or } 2\nmid R_{\mathfrak{p}}(L) \text{ and } R_{\mathfrak{p}}(L)>2e_{\mathfrak{p}},\\ 1 & \text{otherwise},\end{cases}$$

$$\psi_{\mathfrak{p}}(L)=\begin{cases}R_{\mathfrak{p}}(L) & \text{if } R_{\mathfrak{p}}(L) \text{ is odd},\\ \alpha_{\mathfrak{p}}(L) & \text{if } R_{\mathfrak{p}}(L) \text{ is even},\end{cases}\quad \text{and}\quad v_{\mathfrak{p}}(L)=\begin{cases}N(\mathfrak{p})^{\lfloor\psi_{\mathfrak{p}}(L)/2\rfloor} & \text{if } \psi_{\mathfrak{p}}(L)\le 2e_{\mathfrak{p}},\\ 2N(\mathfrak{p})^{e_{\mathfrak{p}}} & \text{if } \psi_{\mathfrak{p}}(L)>2e_{\mathfrak{p}}.\end{cases}$$

证明。设 $M=M_L$是与 L相关的一个 $\mathcal{O}_F$-阶。令 $E(M)=U(M)\cap V_1$和$E(\mathcal{O}_V)=U(\mathcal{O}_V)\cap V_1$，其中 $U(M)$（分别为 $U(\mathcal{O}_V)$）是 M（分别为 $\mathcal{O}_V$）的单位群，且$V_1=\{x\in V\mid Q(x)=1\}$（参见 [27, §2]）。

Si由于 F 是全实的，且 L 是正定的，将公式代入 s

$$\frac{h^+(\mathcal{O}_V)}{[E(\mathcal{O}_V):E(M)]}=\frac{[E(M):1]h(F')}{2^{r(F)}[\mathcal{O}_{F'}^\times:\mathcal{O}_F^\times]h(F)}\quad\text{and}\quad h^+(L)=2[E(M):1]m(L)$$

将 [27, 备注 (c) 和 (36)] 代入 [27,定理 2], ，得到

$$2[E(M):1]m(L)=\frac{[E(M):1]h(F')N(\mathfrak{c}(M))}{2^{r(F)}[\mathcal{O}_{F'}^\times,\mathcal{O}_F^\times]h(F)}\prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{c}(M)}\frac{e(M,\mathfrak{p})}{a(M,\mathfrak{p})}\left(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}\right).$$

将两边除以 $2[E(M):1]$，在我们的记号下即可得到所需的质量公式，条件是 $e(M,\mathfrak{p})=u_{\mathfrak{p}}(L)$ 且 $a(M,\mathfrak{p})=v_{\mathfrak{p}}(L)$。

考虑在 [27, (32)、(35) 和定理2]中定义的各项 $\psi(M,\mathfrak{p})$、$a(M,\mathfrak{p})$ 和 $e(M,\mathfrak{p})$。根据 [27,引理 1] 以及 $R_{\mathfrak{p}}(L)$ 和 $a_{\mathfrak{p}}(L)$ 的定义，我们有

$$\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}(M))=\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}(L)\mathfrak{n}(L)^{-2})=\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}}(L))=R_{\mathfrak{p}}(L).$$

将此与命题 7.2(ii) 中的第三个等式结合，可得

$$\begin{aligned}&\min\{\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}(M)\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(-dV)/dV),\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(4\mathfrak{v}(M))/2\}\\ =\ &\min\{R_{\mathfrak{p}}(L)+d_{\mathfrak{p}}(-a_{\mathfrak{p}}(L)),R_{\mathfrak{p}}(L)/2+e_{\mathfrak{p}}\}=\alpha_{\mathfrak{p}}(L).\end{aligned}$$

因此 $\psi(M,\ \mathfrak{p})=\psi_{\mathfrak{p}}(L)$，从而 $a(M,\ \mathfrak{p})=v_{\mathfrak{p}}(L)$。根据命题 7.2(ii) 中的同余关系，可以轻易地将项 $e(M,\ \mathfrak{p})$ 改写为 $u_{\mathfrak{p}}(L)$。□

我们给出一个局部公式，用于计算理想 $\mathfrak{c}(L)$，并将其与附录 A] 中讨论的局部密度、GK 不变量和 EGK 不变量联系起来。

命题 7.5。设 F 是一个代数数域，且 L 是一个二元 $\mathcal{O}_F$-格。令 $\mathfrak{p}\in\Omega_F\backslash\infty_F$。那么

$$\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}(L))=\frac{R_{\mathfrak{p}}(L)+S_{\mathfrak{p}}(L)}{2},\tag{7.5}$$

其中

$$S_{\mathfrak{p}}(L):=\begin{cases}-1 & \text{if } R_{\mathfrak{p}}(L) \text{ is odd},\\ 2\min\{e_{\mathfrak{p}},\lfloor d_{\mathfrak{p}}(-a_{\mathfrak{p}}(L))/2\rfloor\} & \text{if } R_{\mathfrak{p}}(L) \text{ is even}.\end{cases}$$

证明。 根据定义，$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}(L)\mathfrak{n}(L)^{-2}) = R_{\mathfrak{p}}(L)$。为确定 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(4D_{F'/F}^{-1}\mathcal{O}_F)$，我们采用 [5, 定理 2(1)] 证明中的方法，计算 F'/F 的判别式理想的赋值。因此，若 $\mathfrak{p}$ 是非二进的，则有

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(4^{-1}D_{F'/F}\mathcal{O}_F) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV) - 2\lfloor \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV)/2 \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV) \text{ is odd,} \\ 0 & \text{if } \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV) \text{ is even;} \end{cases}$$

若 $\mathfrak{p}$ 是二进的，由命题 7.2(ii) 可知 $d_{\mathfrak{p}}(-dV) = d_{\mathfrak{p}}(-a_{\mathfrak{p}}(L))$，因此有

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(4^{-1}D_{F'/F}\mathcal{O}_F) = \begin{cases} \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV) - 2\lfloor \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV)/2 \rfloor = 1 & \text{if } \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV) \text{ is odd,} \\ \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV) - 2\lfloor \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV)/2 \rfloor - 2t = -2t & \text{if } \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV) \text{ is even,} \end{cases}$$

其中 $t = \min\{e_{\mathfrak{p}}, \lfloor d_{\mathfrak{p}}(-a_{\mathfrak{p}}(L))/2 \rfloor\}$。此外，当 $\mathfrak{p}$ 是非二进的且 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV)$ 为偶数时，$t = e_{\mathfrak{p}} = 0$。综合这两种情况，并由 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(dV) \equiv R_{\mathfrak{p}}(L) \pmod 2$，可得

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(4^{-1}D_{F'/F}\mathcal{O}_F) &= \begin{cases} 1 & \text{if } R_{\mathfrak{p}}(L) \text{ is odd,} \\ -2t & \text{if } R_{\mathfrak{p}}(L) \text{ is even.} \end{cases} \\ &= -S_{\mathfrak{p}}(L). \end{aligned} \tag{7.6}$$

因此，$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(4D_{F'/F}^{-1}\mathcal{O}_F) = S_{\mathfrak{p}}(L)$。所以

$$2\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}(L)) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}(L)\mathfrak{n}(L)^{-2}) + \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(4D_{F'/F}^{-1}\mathcal{O}_F) = R_{\mathfrak{p}}(L) + S_{\mathfrak{p}}(L),$$

如所求。 □

命题 7.6。 设 F 是一个代数数域，且 L 是一个二元 $\mathcal{O}_F$-格。假设 $\mathfrak{p}$ 是一个二进素理想，且 $L_{\mathfrak{p}}$ 是本原的。

令 B 为 $L_{\mathfrak{p}}$，$D_B = -4$ 行列式 B 和 $K = F_{\mathfrak{p}}(\sqrt{D_B})$ 对应的格拉姆矩阵。定义 $\overline{d_B} = \text{赋值}_{\mathfrak{p}}(D_{K/F_{\mathfrak{p}}}\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}})$ 以及 $f_B = (\text{赋值}_{\mathfrak{p}}(D_B) - d_B)/2$ （参见 *[7, 第 1259] 页*）。那么

$$f_B = (R_{\mathfrak{p}}(L) + S_{\mathfrak{p}}(L))/2 \quad \textit{and} \quad d_B = 2e_{\mathfrak{p}} - S_{\mathfrak{p}}(L).$$

注记 7.7. 结合命题 7.6，通过应用命题 A6、A8 和 A11]，可以用不变量 $a(L_{\mathfrak{p}})$ 和 $R(L_{\mathfrak{p}})$ 来表示或计算局部密度 $\beta_{\mathfrak{p}}(L)$、$\mathrm{GK}(L_{\mathfrak{p}} \perp -L_{\mathfrak{p}})$ 和 $\mathrm{EGK}(L_{\mathfrak{p}} \cap \pi_{\mathfrak{p}}^i L_{\mathfrak{p}}^{\#})^{\le 1}$。详情参见定理 7.11 和例 7.13。

证明。 注意，在 $F_{\mathfrak{p}}^{\times}/F_{\mathfrak{p}}^{\times 2}$ 中 $D_B = -dV_{\mathfrak{p}}$。由 $[13, §2]$ $d_B = \text{赋值}_{\mathfrak{p}}(D_{F'/F}\mathcal{O}_F)$ 可得。因此，d_B 的公式由 (7.6) 得出。由于 $L_{\mathfrak{p}}$ 是本原的，$\text{赋值}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{n}(L)) = 0$。因此

$$\begin{aligned} 2\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}(L)) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}(L)) - \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(4^{-1}D_{F'/F}\mathcal{O}_F) &= \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(4^{-1}D_B) - \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(4^{-1}D_{F'/F}\mathcal{O}_F) \\ &= \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(D_B) - d_B = 2f_B. \end{aligned}$$

因此 $f_B = \text{赋值}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}(L))$。所以，根据命题 7.5， f_B 的公式随即成立。 □

依照 $[31, §1],$，我们将 $A_{\mathfrak{p}^k}^0(L, L)$ 记作从 L 到 L 模 $\mathfrak{p}^k L$ 的线性表示 σ 的数量，使得对所有 $x \in L$， $Q(\sigma(x)) \equiv Q(x)$（模 $2\mathfrak{p}^k$）成立，即

$$A_{\mathfrak{p}^k}^0(L, L) := |\{\sigma : L \to L/\mathfrak{p}^k L \mid Q(\sigma(x)) \equiv Q(x) \pmod{2\mathfrak{p}^k} \text{ for all } x \in L\}|.$$

令 $\gamma_{\mathfrak{p}}^0(L, L) := 2^{-1}\lim_{k\to\infty} A_{\mathfrak{p}^k}^0(L, L)N(\mathfrak{p})^{-k(\ell(\ell-1)/2)}$，并定义

$$\gamma_{\mathfrak{p}}(L, L) := N(\mathfrak{p})^{e_{\mathfrak{p}}\ell}\gamma_{\mathfrak{p}}^0(L, L),$$

为 L 的局部密度。根据 [31, Hilfssatz 3], $\gamma_{\mathfrak{p}}(L,L)$ 与 $d_{\mathfrak{p}}(L,L)$ 相同，后者定义于 [31, 定义], , 但不同于 [7, §2.4] 中定义的 $\beta_{\mathfrak{p}}(L)$。事实上，当 $\ell=2$ 时，我们有 $\beta_{\mathfrak{p}}(L)=N(\mathfrak{p})^{e_{\mathfrak{p}}}\gamma_{\mathfrak{p}}(L,L)$。

注意， [31, Hilfssatz 7] 的证明也适用于 $L^{(c)}$，其中 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(c)\le 0$。因此我们有

$$\gamma_{\mathfrak{p}}(L^{(c)},L^{(c)})=N(\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(c)(\ell(\ell+1)/2)}\gamma_{\mathfrak{p}}(L,L) \tag{7.7}$$

对于 $c\in F^{\times}$。

当 L 是二元时，西格尔在 [34] 中推导出了非二进情形下 $\gamma_{\mathfrak{p}}(L,\ L)$的公式，而 Pfeuffer 在 [31, 32] 中推导出了二进情形下的公式。基于不变量 $\mathfrak{s}(L_{\mathfrak{p}})$、 $\mathfrak{v}(L_{\mathfrak{p}})$、 $a(L_{\mathfrak{p}})$、$R(L_{\mathfrak{p}})$和 $\alpha(L_{\mathfrak{p}})$，我们给出了适用于所有 $\mathfrak{p}\in\Omega_F\backslash\infty_F$的 $\gamma_{\mathfrak{p}}(L,\ L)$统一公式，以及 $1/m(L)$的相应公式。

定理 7.8。 设 F 是非二进或二进的，且 $L\cong\prec a_1,a_2\succ$ 是相对于良好 *BONG* 的二元$\mathcal{O}_F$-格。令 $a=a(L)$、 $R=R(L)$ 和 $\alpha=\alpha(L)$。则 L 的局部密度公式为

$$\gamma(L,L)=N(\mathfrak{s}(L))N(\mathfrak{v}(L))N(\mathfrak{p})^{e+\lfloor t/2\rfloor}r, \tag{7.8}$$

其中这一对$(t、\ r)$ 由以下公式给出：

(i) 若 $R>0$，则

$$(t,r)=\begin{cases}(\alpha,1) & \text{if } R\le 2e \text{ and } \alpha<R+d(-a),\\ (\alpha,2) & \text{if } R\le 2e \text{ and } \alpha=R+d(-a),\\ (2e,2) & \text{if } R>2e.\end{cases}$$

(ii) 若 $R\le 0$，则

$$(t,r)=\begin{cases}(e-R/2,1) & \text{if } R>-2e \text{ and } d(-a)>e-R/2,\\ (d(-a),2) & \text{if } d(-a)\le e-R/2,\\ (2e,1-\chi(\mathfrak{p})/N(\mathfrak{p})) & \text{if } R=-2e,\end{cases}$$

当 F 为非二进时，即 $e=0$，忽略 *(i)*（分别地，*(ii)*）中的前两种情形。

注记 7.9。 依照命题 7.2(i) 和 (iii)，可知 $N(\mathfrak{s}(L))$、 $N(\mathfrak{v}(L))$、$R(L)$ 和 $\alpha(L)$ 的取值仅取决于 $a(L)$、 $R_1(L)$ 和 $R_2(L)$。因此，任意非阿基米德局部域上的二元格的局部密度完全由不变量 $a(L)$ 和 $R_i(L)$ 决定，其中 $i=1,2$。

证明。 设 $\mathfrak{s}(L)=c\mathcal{O}_F$。记 $L=L'^{(c)}$ 为某个二元 $\mathcal{O}_F$-格 L'，满足 $\mathfrak{s}(L')=\mathcal{O}_F$。于是有

$$\mathrm{LHS}=\gamma(L,L)=N(\mathfrak{p})^{3\mathrm{ord}(c)}\gamma(L',L')=N(\mathfrak{s}(L))^3\gamma(L',L').$$

令 $s=$ 赋值$(\mathfrak{v}(L'))$。由 [29, §82J], 可得 $\mathfrak{p}^s=\mathfrak{v}(L)\mathfrak{s}(L)^{-2}$，因此

$$N(\mathfrak{p})^s=N(\mathfrak{v}(L))N(\mathfrak{s}(L))^{-2}. \tag{7.9}$$

假设 F 是非二进的。由 [34,Hilfssatz 56], 可得

$$\gamma(L',L')=\begin{cases}1-\chi(\mathfrak{p})/N(\mathfrak{p}) & \text{if } L' \text{ is unimodular},\\ 2N(\mathfrak{p})^s & \text{if } L' \text{ is not unimodular}.\end{cases}$$

若 $R=0=-2e$，则 $(t,r)=(0,1-\chi(\mathfrak{p})/N(\mathfrak{p}))$。由于 L'是幺模的，因此有 $s=0$。由 (7.9) 可得 $N(\mathfrak{v}(L))=N(\mathfrak{s}(L))^2$。因此，右端 $=N(\mathfrak{s}(L))^3(1-\chi(\mathfrak{p})/N(\mathfrak{p}))=$左端。若 $R>0=-2e$，则 $(t,r)=(0,2)$。由 (7.9) 可得，右端 $=2N(\mathfrak{v}(L))N(\mathfrak{s}(L))=N(\mathfrak{s}(L))^3(2N(\mathfrak{p})^s)=$左端。

假设 F 是二进的。由 $[32,\text{p. }105]$，可得

$$\gamma(L',L')=N(\mathfrak{p})^{s+e+\lfloor t/2\rfloor}r,$$

其中参数 s、t 和 r 取适当值。由 (7.9) 可知，$N(\mathfrak{s}(L))^3N(\mathfrak{p})^s=N(\mathfrak{v}(L))N(\mathfrak{s}(L))$。因此，只需将参数 t 和 r 转换为上文引入的不变量。

情形 I： $R>0$

在此情形下，$L=L'^{(c)}$ 满足 $L'=\prec 1,a\succ$ 和 $c=a_1$。由 $[32,\text{p. }104]$，可得 $\mathfrak{p}^t=4\mathcal{O}_F+2\mathfrak{p}^{\lfloor s/2\rfloor}+\mathfrak{d}(-dL')$，且 $r=1$ 为 1 或 2，分别对应条件 (a) 或 (b) 成立：

(a) $\mathfrak{d}(-dL')\subsetneq\mathfrak{p}^t\subseteq\mathfrak{p}^s$；(b) $\mathfrak{d}(-dL')=\mathfrak{p}^t$ 或 $\mathfrak{p}^s\subsetneq\mathfrak{p}^t$。

我们断言

$$s=R,\quad \mathrm{ord}(\mathfrak{d}(-dL'))=R+d(-a),\quad \text{and}\quad t=\begin{cases}\alpha & \text{if } R\le 2e,\\ 2e & \text{if } R>2e.\end{cases}$$

首先，我们有 $R_1(L')=0$ 且 $R_2(L')=$赋值$(a)=R$。由命题 7.2(iii) 和 (ii)，$s=$赋值$(\mathfrak{v}(L'))=R_1(L')+R_2(L')=R$，因此赋值$(\mathfrak{d}(-dL'))=$赋值$(\mathfrak{v}(L'))+d(-a(L'))=R+d(-a)$。故 $t=\min\{2e,\lfloor R/2\rfloor+e,R+d(-a)\}$。

此外，若 $R\le 2e$ 为偶数，则由命题 2.3(i)，$\alpha\le 2e$。因此，由命题 7.2(i)，$t=\min\{2e,R/2+e,R+d(-a)\}=\min\{2e,\alpha\}=\alpha$。若 $R\le 2e$为奇数，则 $R\le 2e-1$且 $d(-a)=0$。所以 $\lfloor R/2\rfloor+e\ge R+d(-a)=R$。因此，$t=\min\{2e,R\}=R$。所以，由命题 2.3(iii)，$t=R=\alpha$。若 $R>2e$，则 $\lfloor R/2\rfloor+e\ge 2e$ 且 $R+d(-a)\ge 2e$。所以$t=2e$。断言得证。

若 $R\le 2e$，由该断言和命题 2.3(iii)，可得 $s=R\le t=\alpha$。因此，$\mathfrak{p}^t\subseteq\mathfrak{p}^s$ 显然成立，而 $\mathfrak{p}^s\subsetneq\mathfrak{p}^t$ 不成立。因此，(a) 等价于 $R+d(-a)>\alpha$；(b) 等价于 $R+d(-a)=\alpha$。

若 $R>2e$，由该断言和命题 2.3(i)，可得 $t=2e<s=R$。因此，$\mathfrak{p}^t\subseteq\mathfrak{p}^s$不成立，(a) 也不成立。显然，(b) 等价于 $R+d(-a)=2e$ 或 $R>2e$；然而，前一个条件将推出 $2e=R+d(-a)\ge R$，矛盾。

情形 II： $R\le 0$

设 $a_i=\varepsilon_i\pi^{R_i}$，其中 $\varepsilon_i\in\mathcal{O}_F^\times$。由 $[1,\text{推论 }3.4(\text{iii})]$ 和 $[29,93{:}17],$，可得 $L=L'^{(c)}$，其中 $c=\pi^{(R_1+R_2)/2}$ 且

$$L'=A(\varepsilon_1\pi^{-R/2},\varepsilon_1^{-1}\pi^{R/2}(1+\varepsilon_1\varepsilon_2))\cong\prec\varepsilon_1\pi^{-R/2},\varepsilon_2\pi^{R/2}\succ,$$

由 $R\in[-2e,0]^E$（根据（2.2）和命题 2.3(iv)）。由于 $[32,\text{p. }104]$，令 $\mathfrak{p}^t=\mathfrak{n}(L')\mathfrak{w}(L')$，然后根据条件 (c)、(d) 或 (e) 成立，令 $r=1$ or 2 or $1-\chi(\mathfrak{p})/N(\mathfrak{p})$：

(c) $4\mathfrak{o}\subsetneq\mathfrak{p}^t$ 和 $\mathfrak{d}(-dL')\subsetneq\mathfrak{p}^t$；

(d) $4\mathfrak{o}\subsetneq\mathfrak{p}^t=\mathfrak{d}(-dL')$；(e) $4\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^t$。

我们断言

$$\mathrm{ord}(\mathfrak{d}(-dL'))=d(-a)\quad\text{and}\quad t=\min\{e-R/2,d(-a)\}.$$

显然， $R_1(L') = -R/2$ 且 $R_2(L') = R/2$。由命题 7.2(i)，可知 $R(L') = R$,$d(-a(L')) = d(-\varepsilon_1\varepsilon_2) = d(-a)$ 且 $\alpha(L') = \alpha_\circ$ 由于 $R(L')$ 是偶数，由命题 7.2(ii) 和 (iii)，进一步可得

$$\mathrm{ord}(\mathfrak{d}(-dL')) = \mathrm{ord}(\mathfrak{v}(L')) + d(-a(L')) = R_1(L') + R_2(L') + d(-a) = d(-a).$$

由命题 7.2(iii)，$\mathrm{ord}(\mathfrak{n}(L')) = R_1(L') = -R/2$ 且 $\mathrm{ord}(\mathfrak{w}(L')) = R(L') + \alpha(L') = -R/2 + \alpha$。因此

$$t = \mathrm{ord}(\mathfrak{n}(L')\mathfrak{w}(L')) = -R/2 + (-R/2 + \alpha) = \min\{e - R/2, d(-a)\},$$

如所声称。

注意，若 $R = -2e$，则由（2.2），$d(-a) \geq -R = 2e$，因此根据该断言可得 $t = 2e$。

若 $d(-a) > e - R/2$，由该断言可得 $t = e - R/2 < \mathrm{ord}(\mathfrak{d}(-dL')) = d(-a)$。因此 (d) 不可能成立。显然，(c) 等价于 $2e > e - R/2$，即 $R > -2e$；而 (e) 等价于 $2e = e - R/2$，即 $R = -2e$ 且 $d(-a) = \infty$。

若 $d(-a) \leq e - R/2$，再次根据该断言可得 $t = d(-a) = \mathrm{ord}(\mathfrak{d}(-dL'))$。因此，(c) 不可能成立。显然，(d) 等价于 $d(-a) < 2e$；注意 $e - R/2 < 2e$，否则，$R = -2e$，这意味着 $d(-a) \geq 2e$，矛盾。因此，(d) 等价于 $d(-a) \leq e - R/2$。显然，(e) 等价于 $2e = d(-a) \leq e - R/2$，即 $R = -2e$ 且 $d(-a) = 2e$。□

定理 7.10. 设 F 是一个次数为 n 的全实数域，且 L 是一个正定二元 $\mathcal{O}_F$-格。则

$$\frac{1}{m(L)} = \frac{\pi^n N(\mathfrak{s}(L))}{\sqrt{D_F N(\mathfrak{v}(L))}} \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_F\setminus\infty_F} N(\mathfrak{p})^{\lfloor t_\mathfrak{p}(L)/2\rfloor} r_\mathfrak{p}(L),$$

其中，数对 $(t_\mathfrak{p}(L)\ r_\mathfrak{p}(L))$ 由定理 *7.8* 中的公式 *(i)* 和 *(ii)* 给出。

证明。 当 L 是二元正定的时，由 [34] 和定理 7.8 可得

$$\frac{1}{m(L)} = \frac{1}{\sqrt{D_F}} \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_F} \gamma_\mathfrak{p}(L,L), \quad \prod_{\mathfrak{p}\in\infty_F} \gamma_\mathfrak{p}(L,L) = \frac{\pi^n}{2^n}\sqrt{N(\mathfrak{v}(L))^{-3}},$$

and

$$\prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_F\setminus\infty_F} \gamma_\mathfrak{p}(L,L) = N(\mathfrak{s}(L))N(\mathfrak{v}(L)) \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_F\setminus\infty_F} N(\mathfrak{p})^{e_\mathfrak{p}+\lfloor t_\mathfrak{p}(L)/2\rfloor} r_\mathfrak{p}(L).$$

结合这些结果并注意到 $2^n = \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega_F\setminus\infty_F} N(\mathfrak{p})^{e_\mathfrak{p}}$，我们得到所需的质量公式 a. □

定理 7.11。 设 F 是一个代数数域， L 是一个二元 *ADC* $\mathcal{O}_F$ 格。令 $\mathfrak{p}\in\Omega_F\setminus\infty_F$、 $\nu\in\{1,2\}$、 $\varepsilon_\mathfrak{p}\in\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ 和 $\delta_\mathfrak{p}\in\mathcal{U}_\mathfrak{p}\setminus\{1,\Delta_\mathfrak{p}\}$。设 B 是 $L_\mathfrak{p}$ 的格拉姆矩阵。则 L 的上述局部量由表 *1*、*2*、*3*、*4* 和 *5* 给出。

注记 7.12。 在表 4 中，令 $e_\mathfrak{p}\geq 1$和 $L_\mathfrak{p}^\nu = N_\nu^2(\Delta_\mathfrak{p})$ 或 $M_\nu^2(\Delta_\mathfrak{p})$，其中 $\nu\in\{1,2\}$。当$\nu = 2$ 时， $L_\mathfrak{p}^\nu = L_\mathfrak{p}^2$ 不是本原的，我们忽略量 f_B 和 d_B。然而， $L_\mathfrak{p}^2 = L_\mathfrak{p}^{1(\pi_\mathfrak{p})}$ 和 $L_\mathfrak{p}^1$（或对应的矩阵）是本原的。因此，由 (7.7) 可得 $\beta(L_\mathfrak{p}^2) = N(\mathfrak{p})^3\beta(L_\mathfrak{p}^1)$。于是可以应用 [7, 命题 A6] 中的公式计算 $\beta(L_\mathfrak{p}^1)$，从而得到$\beta(L_\mathfrak{p}^2)$。或者，也可以利用关系 $\beta(L_\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p})^{e_\mathfrak{p}}\gamma(L_\mathfrak{p}, L_\mathfrak{p})$（由定义得出），然后直接应用我们的公式 (7.8)。

证明。由定理 4.1 和 5.1 可知，若 $L_{\mathfrak{p}}$ 是二元 ADC，则它要么具有形式 $N^2_{\nu,\ r}(c)$，其中 $\nu \in \{1,2\}$ 和 $c \in \mathcal{V}_{\mathfrak{p}}$ 满足 $(\nu,\ c) \neq (2,\ 1)$；要么具有形式 $M^2_{\nu}(\Delta_{\mathfrak{p}})$，其中 $\nu \in \{1,2\}$，其结构已被确定。因此，通过穷举检验，可以得到上文讨论的二元 ADC 格所对应的局部量。

首先，利用命题 7.2，可以得到表 1，其中列出了与不变量 (7.1) 和 (7.2) 相关的量。基于这些数据，我们利用公式 (7.4) 和 (7.8) 推导出表 2 和表 3。

为了得到 5，我们只需知道由 [7, 命题 A6、A8 和 A11]给出的表 4 中的量 f_B 和 d_B。这两个量可利用命题 7.5 和表 1 计算。□

利用定理 7.11 的表格中的信息，我们给出一系列例子，说明不变量 $\mathrm{GK}(L_{\mathfrak{p}} \perp -L_{\mathfrak{p}})$ 和 $\mathrm{EGK}(L_{\mathfrak{p}} \cap \pi^i_{\mathfrak{p}} L^{\#}_{\mathfrak{p}})^{\leq 1}$ 无法确定 $\gamma_{\mathfrak{p}}(L_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}})$ 和 $\beta(L_{\mathfrak{p}})$，对每个 $e_{\mathfrak{p}} \geq 2$ 均如此。

例 7.13。设 $e_{\mathfrak{p}} \geq 2$, $L^{\nu}_{\mathfrak{p}} = N^2_{\nu}(\delta_{\mathfrak{p}})$，其中 $\nu \in \{1,2\}$, $\delta_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ 和 $d_{\mathfrak{p}}(\delta_{\mathfrak{p}}) = 2e_{\mathfrak{p}} - 1$，且 $L'_{\mathfrak{p}} = M^2_1(\Delta_{\mathfrak{p}})$。那么由表 5 可得

$$\mathrm{GK}(L^{\nu}_{\mathfrak{p}} \perp -L^{\nu}_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{GK}(L'_{\mathfrak{p}} \perp -L'_{\mathfrak{p}}) = (0,1,1,2),$$

$$\mathrm{EGK}(L^{\nu}_{\mathfrak{p}} \cap \pi^i_{\mathfrak{p}} L^{\nu\#}_{\mathfrak{p}})^{\leq 1} = \mathrm{EGK}(L'_{\mathfrak{p}} \cap \pi^i_{\mathfrak{p}} L'^{\#}_{\mathfrak{p}})^{\leq 1} = \begin{cases} \emptyset & \text{if } e_{\mathfrak{p}} > 2, \\ (1;1;1) & \text{if } e_{\mathfrak{p}} = 2, \end{cases}$$

对于 $i \in \mathrm{Jor}(L^{\nu}_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Jor}(L'_{\mathfrak{p}}) = \{1 - e_{\mathfrak{p}}\}$，但 $\beta(L^{\nu}_{\mathfrak{p}}) = 2N(\mathfrak{p})^2 \neq \beta(L'_{\mathfrak{p}}) = N(\mathfrak{p})^2$。

事实上，不同的局部密度可以由不变量 (7.1) 和 (7.2) 来解释。尽管 $R(L^{\nu}_{\mathfrak{p}}) = R(L'_{\mathfrak{p}}) = 2 - 2e_{\mathfrak{p}}$，我们有

$$d_{\mathfrak{p}}(-a(L^{\nu}_{\mathfrak{p}})) = d_{\mathfrak{p}}(\delta_{\mathfrak{p}}) = 2e_{\mathfrak{p}} - 1 \neq d_{\mathfrak{p}}(-a(L'_{\mathfrak{p}})) = d_{\mathfrak{p}}(\Delta_{\mathfrak{p}}) = 2e_{\mathfrak{p}}.$$

因此，表3中 $L^{\nu}_{\mathfrak{p}}$ 和 $L'_{\mathfrak{p}}$ 的前四个量相同，除了 $r(L^{\nu}_{\mathfrak{p}}) = 2$ 和 $r(L'_{\mathfrak{p}}) = 1$。由此，根据公式 (7.8)，可得 $\gamma(L^{\nu}_{\mathfrak{p}},\ L^{\nu}_{\mathfrak{p}}) = 2\gamma(L'_{\mathfrak{p}},\ L'_{\mathfrak{p}})$，进而 $\beta(L^{\nu}_{\mathfrak{p}}) = 2\beta(L'_{\mathfrak{p}})$。

TABLE 1. 与二元 ADC 格 L相关的 (7.1) 和 (7.2) 中的量 $d_{\mathfrak{p}}(-a(L_{\mathfrak{p}}))$、 $R(L_{\mathfrak{p}})$ 和 $\alpha(L_{\mathfrak{p}})$。

$e_{\mathfrak{p}}$	$L_{\mathfrak{p}}$	$d_{\mathfrak{p}}(-a(L_{\mathfrak{p}}))$	$R(L_{\mathfrak{p}})$	$\alpha(L_{\mathfrak{p}})$
0	$N_{\mathrm{I}}^2(1)$	∞	0	0
	$N_{\nu}^2(\Delta_{\mathfrak{p}})$	$2e_{\mathfrak{p}}$	0	0
	$N_{\nu}^2(\varepsilon_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}})$	0	1	$1/2$
≥ 1	$N_{\mathrm{I}}^2(1)$	∞	$-2e_{\mathfrak{p}}$	0
	$N_{\nu}^2(\Delta_{\mathfrak{p}})$	$2e_{\mathfrak{p}}$	$-2e_{\mathfrak{p}}$	0
	$N_{\nu}^2(\delta_{\mathfrak{p}})$	$d_{\mathfrak{p}}(\delta_{\mathfrak{p}})$	$1-d_{\mathfrak{p}}(\delta_{\mathfrak{p}})$	1
	$N_{\nu}^2(\varepsilon_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}})$	0	1	1
	$M_{\nu}^2(\Delta_{\mathfrak{p}})$	$2e_{\mathfrak{p}}$	$2-2e_{\mathfrak{p}}$	1

TABLE 2. 与二元 ADC 格 L 相关的 (7.4) 中的量 $\psi(L_{\mathfrak{p}})$、 $u(L_{\mathfrak{p}})$、 $v(L_{\mathfrak{p}})$ 和 $w(L_{\mathfrak{p}})$。

$e_{\mathfrak{p}}$	$L_{\mathfrak{p}}$	$\psi(L_{\mathfrak{p}})$	$u(L_{\mathfrak{p}})$	$v(L_{\mathfrak{p}})$	$w(L_{\mathfrak{p}})$
0	$N_{\mathrm{I}}^2(1)$	0	$2-\chi^2(\mathfrak{p})$	1	$(2-\chi^2(\mathfrak{p}))(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})})$
	$N_{\nu}^2(\Delta_{\mathfrak{p}})$	0	1	1	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$
	$N_{\nu}^2(\varepsilon_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}})$	1	$2-\chi^2(\mathfrak{p})$	2	$\frac{2-\chi^2(\mathfrak{p})}{2}(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})})$
≥ 1	$N_{\mathrm{I}}^2(1)$	0	$2-\chi^2(\mathfrak{p})$	1	$(2-\chi^2(\mathfrak{p}))(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})})$
	$N_{\nu}^2(\Delta_{\mathfrak{p}})$	0	1	1	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$
	$N_{\nu}^2(\delta_{\mathfrak{p}})$	1	1	1	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$
	$N_{\nu}^2(\varepsilon_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}})$	1	1	1	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$
	$M_{\nu}^2(\Delta_{\mathfrak{p}})$	1	1	1	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$

TABLE 3. 与二元 ADC 格的 (7.8) 相关的量 $N(\mathfrak{s}(L_\mathfrak{p}))$、 $N(\mathfrak{v}(L_\mathfrak{p}))$、 $t(L_\mathfrak{p})$、 $r(L_\mathfrak{p})$ 和 $\gamma(L_\mathfrak{p},\ L_\mathfrak{p})$ $L_\circ$

$e_\mathfrak{p}$	$L_\mathfrak{p}$	$N(\mathfrak{s}(L_\mathfrak{p}))$	$N(\mathfrak{v}(L_\mathfrak{p}))$	$t(L_\mathfrak{p})$	$r(L_\mathfrak{p})$	$\gamma(L_\mathfrak{p},\ L_\mathfrak{p})$
0	$N_1^2(1)$	1	1	0	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$
	$N_\nu^2(\Delta_\mathfrak{p})$	1	1	0	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$
	$N_\nu^2(\varepsilon_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p})$	1	$N(\mathfrak{p})$	0	2	$2N(\mathfrak{p})$
≥ 1	$N_1^2(1)$	$N(\mathfrak{p})^{-e_\mathfrak{p}}$	$N(\mathfrak{p})^{-2e_\mathfrak{p}}$	$2e_\mathfrak{p}$	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$	$N(\mathfrak{p})^{-e_\mathfrak{p}}(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})})$
	$N_1^2(\Delta_\mathfrak{p})$	$N(\mathfrak{p})^{-e_\mathfrak{p}}$	$N(\mathfrak{p})^{-2e_\mathfrak{p}}$	$2e_\mathfrak{p}$	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$	$N(\mathfrak{p})^{-e_\mathfrak{p}}(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})})$
	$N_2^2(\Delta_\mathfrak{p})$	$N(\mathfrak{p})^{1-e_\mathfrak{p}}$	$N(\mathfrak{p})^{2-2e_\mathfrak{p}}$	$2e_\mathfrak{p}$	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$	$N(\mathfrak{p})^{3-e_\mathfrak{p}}(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})})$
	$N_\nu^2(\delta_\mathfrak{p})$	$N(\mathfrak{p})^{\frac{1-d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p})}{2}}$	$N(\mathfrak{p})^{1-d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p})}$	$d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p})$	2	$2N(\mathfrak{p})^{e_\mathfrak{p}+1-d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p})}$
	$N_\nu^2(\varepsilon_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p})$	1	$N(\mathfrak{p})$	1	2	$2N(\mathfrak{p})^{e_\mathfrak{p}+1}$
	$M_1^2(\Delta_\mathfrak{p})$	$N(\mathfrak{p})^{1-e_\mathfrak{p}}$	$N(\mathfrak{p})^{2-2e_\mathfrak{p}}$	$2e_\mathfrak{p}-1$	1	$N(\mathfrak{p})^{2-e_\mathfrak{p}}$
	$M_2^2(\Delta_\mathfrak{p})$	$N(\mathfrak{p})^{2-e_\mathfrak{p}}$	$N(\mathfrak{p})^{4-2e_\mathfrak{p}}$	$2e_\mathfrak{p}-1$	1	$N(\mathfrak{p})^{5-e_\mathfrak{p}}$

TABLE 4. 二元 ADC 格 L在 [7, 附录 A] 中定义的量 f_B、 d_B 和 β（$L_\mathfrak{p}$）。

$e_\mathfrak{p}$	$L_\mathfrak{p}$	f_B	d_B	$\beta(L_\mathfrak{p})$
≥ 1	$N_1^2(1)$	0	0	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$
	$N_1^2(\Delta_\mathfrak{p})$	0	0	$1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$
	$N_2^2(\Delta_\mathfrak{p})$			$N(\mathfrak{p})^3(1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})})$
	$N_\nu^2(\delta_\mathfrak{p})$	0	$2e_\mathfrak{p}+1-d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p})$	$2N(\mathfrak{p})^{2e_\mathfrak{p}+1-d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p})}$
	$N_\nu^2(\varepsilon_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p})$	0	$2e_\mathfrak{p}+1$	$2N(\mathfrak{p})^{2e_\mathfrak{p}+1}$
	$M_1^2(\Delta_\mathfrak{p})$	1	0	$N(\mathfrak{p})^2$
	$M_2^2(\Delta_\mathfrak{p})$			$N(\mathfrak{p})^5$

TABLE 5. 附录 A [7,中定义的二元 ADC 格的 GK($L_\mathfrak{p} \perp -L_\mathfrak{p}$)、EGK($L_\mathfrak{p} \cap \pi_\mathfrak{p}^i L_\mathfrak{p}^\#)^{\leq 1}$ 和 Jor($L_\mathfrak{p}$) $i \in]$ $L_\circ$

$e_\mathfrak{p}$	$L_\mathfrak{p}$	GK($L_\mathfrak{p} \perp -L_\mathfrak{p}$)	EGK($L_\mathfrak{p} \cap \pi_\mathfrak{p}^i L_\mathfrak{p}^\#)^{\leq 1}$	Jor($L_\mathfrak{p}$)
≥ 1	N_1^2(1)	(0, 0, 0, 0)	$\begin{cases} \emptyset & \text{如果 } e_\mathfrak{p} > 1, \\ (2;1;-1) & \text{如果 } e_\mathfrak{p} = 1. \end{cases}$	$\{-e_\mathfrak{p}\}$
	$N_1^2(\Delta_\mathfrak{p})$	(0, 0, 0, 0)	$\begin{cases} \emptyset & \text{如果 } e_\mathfrak{p} > 1, \\ (2;1;-1) & \text{如果 } e_\mathfrak{p} = 1. \end{cases}$	$\{-e_\mathfrak{p}\}$
	$N_\nu^2(\delta_\mathfrak{p})$	(0, 1, $2e_\mathfrak{p} - d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p})$ $2e_\mathfrak{p} + 1 - d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p})$)	$\begin{cases} \emptyset & \text{如果 } d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p}) > 3, \\ (1;1;1) & \text{如果 } d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p}) = 3, \\ (1,1;0,1;1,0) & \text{若 } d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p}) = 1. \end{cases}$	$\{\frac{1-d_\mathfrak{p}(\delta_\mathfrak{p})}{2}$ }
	$N_\nu^2(\varepsilon_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p})$	$(0, 1, 2e_\mathfrak{p}, 2e_\mathfrak{p} + 1)$	(1, 1; 0, 1; 1, 0)	$\{0, 1\}$
	$M_1^2(\Delta_\mathfrak{p})$	(0, 1, 1, 2)	$\begin{cases} \emptyset & \text{if } e_\mathfrak{p} > 2, \\ (1;1;1) & \text{若 } e_\mathfrak{p} = 2, \\ (1;0;1) & \text{如果 } e_\mathfrak{p} = 1. \end{cases}$	$\{1 - e_\mathfrak{p}\}$

Acknowledgments

谨此感谢 Constantin-Nicolae Beli 教授分享有关三元二次型旋量例外的幻灯片，并感谢 Sungmun Cho 教授介绍二元二次型局部密度公式的最新进展。本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12301013）资助。

References

[1] *C. N. Beli*，二进局部域上的整旋量范数群，*J. Number Theory 102 (2003), 125–182.*[2] *C. N. Beli*，二进局部域上整二次型分类的新方法，*Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 1599–1617.*[3]*C. N. Beli*，二进局部域上的万有整二次型，*(2020), arXiv:2008.10113v2.*[4]*C. N. Beli*，关于旋量例外的一些结果，二次型与格的算术理论会议，首尔，*(2025).*[5]*H. Boylan and N.-P. Skoruppa*，相对二次扩张的经典方法，*Journal of Algebra 669 (2025), 243–272.*[6] *W. K. Chan and M. I. Icaza*，全实数域上的正定几乎正则三元二次型，*Bull. London Math. Soc. 40 (2008), 1025–1037.*[7] *S. Cho*，关于局部密度公式和*Gross-Keating*不变量，附录《二元二次型的局部密度》由*T. Ikeda*和*H. Katsurada*撰写，*Math. Z. 296 (2020), no. 3-4, 1235–1269.*[8]*P. L. Clark*，欧几里得二次型与*ADC*型 *I*，*Acta Arith. 154 (2012), 137–159.*[9] *P. L. Clark and W. C. Jagy*，欧几里得二次型与*ADC*型 *II*：整型，*Acta Arith. 164 (2014), 265–308.*[10] *P. L. Clark, P. Pollack, J. Rouse and K. Thompson*，二次型所表示的整数集的密度，*J. Number Theory 256 (2024), 290–328.*[11]*L. E. Dickson*，三元二次型与同余，*Ann. of Math. 28 (1927), 331–341.*[12] *L. E. Dickson*，万有二次型，*Trans. Amer. Math. Soc. 31 (1929), 164–189.*[13] *A. Fr¨ohlich*，代数数域的判别式，*Math. Z. 74 (1960), 18–28.*[14] *B. Gross and K. Keating*，模对应的交，*Inv. Math. 112 (1993) 225–245.*[15] *J. Hanke*，枚举类数有界的极大正定二次型，$\mathbb{Z}$ 在 $n \geq 3$ 个变量中，*(2001)*，*arXiv:1110.1876.*[16] *Z. He*，关于二进局部域上的经典*n*-万能二次型，*Manuscripta Math. 174 (2024), 559–595.*[17] *Z. He*，关于代数数域上的 n-*ADC*二次格，*Doc. Math. 30 (2025), 981–1022.*[18] *Z. He and Y. Hu*，关于二进局部域上的 n-万能二次型，*Sci. China Math. 67 (2024), 1481–1506.*[19] *Z. He, Y. Hu, F. Xu*，关于数域上的不定 k-万能整二次型，*Math. Z. 304(1) (2023), 20.*

[20]*W. C. Jagy, I. Kaplansky and A. Schiemann*，共有*913*个正则三元型，*Mathematika 44 (1997), 332–341.*[21] *T. Ikeda and H. Katsurada*，非阿基米德局部域上二次型的*Siegel*级数显式公式，*J. Reine Angew. Math. 783 (2022), 1–47.*[22]*V. Kala*，数域中的万有二次型与不可分解元：综述，*Commun. Math. 31 (2023), 81–114.*[23]*V. Kala, J. Kr´asensk´y, D. Park, P. Yatsyna and B. Zmija*，二次域上的*Kitaoka*猜想，*(2025)*，*arXiv:2501.19371.*[24] *V. Kala and P. Yatsyna*，关于*Kitaoka*猜想及万有二次型的提升问题，*Bull. Lond. Math. Soc. 55 (2023), 854–864.*[25] *M. Kirschmer*，极大整二次型的单类属，*J. Number Theory 136 (2014), 375–393.*[26]*M. Kneser*，不定二次型的表示质量，*Math Z. 77 (1961), 188–194.*[27] *O. K¨orner*，代数数域上的二元二次格的类数，*Acta Arith. 39 (1981), 269–279.*[28] *O. T. O'Meara*，局部域上二次型的整表示，*Amer. J. Math. 80 (1958), 843-878.*[29] *O. T. O'Meara*，二次型导论，第三次修订印刷版，*Springer-Verlag*，柏林 *(2000).*[30] *M. Peters*，类数为一的定二元二次型，*Acta Arith. 36 (1980), 271–272.*[31] *H. Pfeuffer*，全实代数数域上全正二次型的单类属，*J. Nu mber Theory 3 (1971), 371–411. ¨H. Pfeuffer*，全实代数数域上二元二次型的表示，*Acta Arith. 34 (1978), 103–111.*[32]*H. Pfeuffer*，关于全实代数数域上全正二次型类数猜想，*J. Number Theorey 11 (1979), 188–196.*β ¨*C. L. Siegel*，关于二次型的解析理论 *III*，*Ann. Math. 38 (1937), 212–291. ¨R. Schulze-Pillot*，通过三元二次型的旋量属表示，*J. Number Theory 12 (1980), no. 4, 529–540. ¨F. Xu*，数域上不定三元二次型的表示，*Math. Z. 234 (2000), 115–144.*[33] *F. Xu and Y. Zhang*，关于数域上的不定二次型与潜在万有二次型，*Trans. Amer. Math. Soc. 375 (2022), 2459–2480.*

Department of Mathematics, Dongguan University of Technology, Dongguan 523808, China

电子邮箱地址: zilonghe@connect.hku.hk