arXiv:2601.05592v1 [math.CO] 9 Jan 2026

t-正则分拆中的钩长偏差

MANJIL P. SAIKIA和 PRABAL TALUKDAR

Abstract. 近年来，关于 t-正则分拆中与钩长相关的组合不等式，已有大量研究。在这篇短文中，我们利用生成函数证明 Singh 和 Barman（2026年）通过组合方法证明的一个结果。此外，我们还给出 Singh 和 Barman（2024年）另一项结果的替代证明，该证明推论出一个此前未被观察到的联系： t-正则分拆中的钩长与某些不同部件分拆之间的联系。

1. Introduction & Statement of Results

正整数 n 的一个分拆是由非递增的正整数组成的有限序列$_k\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_k)$，满足 $\sum \lambda_i = n$。整数 λ_i'称为该分拆的部件$_{i=1}\lambda$。分拆有多种图示表示方法，其中一种是使用杨图。分拆 λ 的杨图是一个左对齐的方格阵列，其从上往下数的第 i 行有 λ_i 个方格。例如，分拆（4，3，1，1）的杨图如下所示（暂时忽略其中列出的数字）。

7	4	3	1
5	2	1	
2			
1			

在这样的杨图中，一个方格的钩长 等于其正右方方格的数量、正下方方格的数量之和，再加上方格自身计数 1。例如，上述杨图中各方格的钩长标在相应的方格内。本文关注 t-正则分拆的钩长。所谓t-正则分拆，是指没有任何部分能被 t 整除的分拆。例如，(4，3，1，1) 是一个 5-正则分拆，而 (10，7，3，1) 则不是。

设 $t \geq 2$ 为一个固定的正整数，并令 $b_{t,k}(n)$ 表示所有 n 的 t-正则分拆中长度为 k 的钩子数量。近年来，与这一统计量相关的研究很多。例如，Ballantine 等人 [BBC+23]研究了 2-正则分拆中的钩长等问题；Singh 和 Barman [SB24] 则研究了不同钩长下 2-正则分拆和 3-正则分拆的钩长偏差。他们证明了诸如 b_2,2$(n) \geq b_2$,1(n) 对所有 $n > 4$ 均成立等组合不等式。最近，Singh 和 Barman [SB26] 继续开展相关研究，并证明了以下结果。

定理 1.1。 [SB26，定理 1。2] 对于所有 $n > 3$，我们有

$$b_{3,2}(n) \geq b_{2,2}(n).$$

2020 数学学科分类。11P82, 05A15, 05A17,05A19。关键词和短语。整数分拆，钩长，组合不等式。

定理 1.2。 [SB26，定理 1。3] 对于所有 $n \geq 0$，我们有

$$b_{3,3}(n) \geq b_{2,3}(n).$$

定理1.1 和1.2 由 Singh 和 Barman 以组合方法证明 [SB26]。在他们论文的结尾，他们指出，若能利用基于生成函数的q级数技巧证明这些结果，将会很有意思。本文将在第 1.1 节中为定理3给出这样的证明。

除了上述定理1.2 之外，以下结果也有待给出基于生成函数的初等q级数证明，因为它们原来的证明都是组合性的。

定理 1.3。 [SB24，定理 1.4] 对所有 $n > 4$，有

$$b_{2,2}(n) \geq b_{2,1}(n).$$

定理 1.4。 [BMS25，定理 1.2] 对所有 $n \geq 0$，有

$$b_{4,2}(n) \geq b_{3,2}(n).$$

我们将在第4 节给出定理1.3的另一种证明，其中只在证明的一个步骤中使用组合推理。尽管我们无法为定理1.3给出纯解析证明，但我们的证明揭示了它与不同部件分拆之间此前未曾注意到的联系。

推论 1.5。 令 $d_3(n)$ 表示 n的互异部件分拆数量，其中所有部件的大小均大于2。则，对于所有 $n > 4$

$$b_{2,2}(n) - b_{2,1}(n) = \sum_{i=0}^{n-5} d_3(i) - d_3(n-1),$$

其中我们假设 $d_3(0) = 1$。

推论 1.5 在第 4节中得到证明。若能为推论 1.5获得一个纯组合证明，将会很有意义。

2. Preliminaries

在全文中，我们假设 $|q| < 1$。 q-Pochhammer 符号定义为

$$(a;q)_n := \prod_{i=0}^{n-1}(1-aq^i) \quad \text{and} \quad (a;q)_\infty := \prod_{m\geq 0}(1-aq^m).$$

对于整数 $t \geq 2$ 和 $k \geq 1$，回顾一下，$b_{t,k}(n)$表示所有 t-正则分拆中长度为 k 的钩子数量。令

$$B_{t,k}(q) := \sum_{n\geq 0} b_{t,k}(n)\, q^n.$$

我们有以下生成函数

$$B_{2,1}(q) = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}\Big(\frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2}\Big), \tag{2.1}$$

$$B_{2,2}(q) = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}\Big(q^2 + \frac{q^3}{1-q^2} + \frac{q^6}{1-q^4}\Big), \tag{2.2}$$

and

$$B_{3,2}(q) = \frac{(q^3;q^3)_\infty}{(q;q)_\infty}\Big(\frac{q^2}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{2q^3}{1-q^3}\Big). \tag{2.3}$$

Kim [Kim25，定理 3。1] 为所有这些恒等式给出了统一的证明；（2.2）也由 Ballantine 等人证明。 [BBC+23，命题 3。1], 而（2.3）也由 Singh 和 Barman 证明 [SB24，方程 1。7]。

全文中我们都使用这些特化式

$$(-q;q)_\infty := \prod_{m\geq 1}(1+q^m) = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q)_\infty} = (1+q)(1+q^2)\,(-q^3;q)_\infty$$

and

$$(-q^3;q)_\infty := \prod_{m\geq 3}(1+q^m)$$

而不再加以说明。我们用 $A(q) \succeq_{\text{coef}} B(q)$ 表示 $[q^n]\,A(q) \geq [q^n]\,B(q)$ 对每个 n 都成立（按系数逐项比较），其中 $[q^n]N(q)$ 是形式幂级数 $N(q)$ 中 q^n 的系数。有时我们说，对于所有$n \geq k$， $N(q)$ 的系数均非负，意思是当 $n \geq k$ 时，幂级数 $N(q)$ 中 q^n 的系数均非负。

我们需要两个经典恒等式，第一个归功于欧拉 [And98，第 5]:

$$(-q;q)_\infty = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}, \tag{2.4}$$

第二个则归功于西尔维斯特 [SF82，第 281]:

$$(-xq;q)_\infty = \sum_{n\geq 0}\frac{(-xq;q)_n}{(q;q)_n}(1+xq^{2n+1})x^n q^{n(3n+1)/2}. \tag{2.5}$$

这两个恒等式都有使用 q-级数的经典证明。最后，我们需要下面两个引理。

引理 2.1. 设

$$H(q) = \sum_{n\geq 0} h_n q^n,$$

其中$(h_n)_{n\geq 0}$ 最终单调不减；也就是说，存在 N_0 ，使得对所有 $n \geq N_0$，都有 $h_{n+1} \geq h_n$ 。设 $r \in \mathbb{N}$ 和 $J \subseteq \{0\} \cup \mathbb{N}$ 为一个满足 $r \notin J$的集合。此外，设

$$E(q) = \Big(\sum_{j\in J}\alpha_j q^j\Big) - c\,q^r, \quad \textit{with } \alpha_j \geq 0 \textit{ for } j \in J \textit{ and } c \geq 0.$$

若存在 $s \in J$，使得 $s < r$ 且 $\alpha_s \geq c$，则对所有 $n \geq N_0 + r$，

$$[q^n]\big(E(q)H(q)\big) \geq 0.$$

证明。 对于 $n \geq N_0 + r$，我们有

$$[q^n]\big(E(q)H(q)\big) = \sum_{j\in J}\alpha_j\, h_{n-j} - c\,h_{n-r} \geq \alpha_s h_{n-s} - c\,h_{n-r} \geq c\,h_{n-s} - c\,h_{n-r} = c\big(h_{n-s} - h_{n-r}\big).$$

由于 $s < r$，我们有 $n - s > n - r$。对于 $n \geq N_0 + r$， $n - s$ 和 $n - r$ 都至少为N_0；又因为 (h_n)最终单调不减，所以 $h_{n-s} \geq h_{n-r}$。因此 $c\big(h_{n-s} - h_{n-r}\big) \geq 0$，命题得证。□

引理 2.2。记

$$(-q^3;q)_\infty \;=\; \prod_{m\geq 3}(1+q^m) \;:=\; \sum_{n\geq 0} d_3(n)\,q^n,$$

其中显然，对于所有 n， $d_3(n) \geq 0$ 。从组合学角度看， $d_3(n)$ 表示将 n 分拆为互异部件，且所有部件大小至少为 3 的分拆数。于是，对于所有 $n \geq 2$,

$$d_3(n) \geq d_3(n-1).$$

这里我们假设 $d_3(0) = 1$。

我们可以用组合推理相当容易地证明引理 2.2 ，但下面给出一个解析证明，因为我们希望给出定理 1.1的完全解析证明，而引理 2.2 在证明中会用到。

引理*2.2*的证明。 注意到

$$(1-q)(-q^3;q)_\infty = \sum_{n\geq 1}(d_3(n) - d_3(n-1))q^n + d_3(0). \tag{2.6}$$

为证明该引理，只需证明方程（2.6）左侧对于所有 $n \geq 2$都具有非负系数。我们将左侧改写如下（第一步中用到了（2.4））

$$\begin{aligned}(1-q)(-q^3;q)_\infty &= \frac{(1-q)(1-q^2)}{(1+q)(1-q^4)}\frac{1}{(q;q^2)_\infty}\\ &= \frac{1-q}{1-q^4}\frac{1}{(q^3;q^2)_\infty}\\ &= \left(\frac{1}{(q^3;q^2)_\infty}\frac{q^2(1-q)}{(1-q^2)^2}\right)\frac{(1-q^2)}{q^2(1+q^2)}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

将 $x = 1$ 代入方程（25），. 得到如下结果

$$\begin{aligned}q^3+q^5+\frac{1}{(q^3;q^2)_\infty}\frac{q^2(1-q)}{(1-q^2)^2} &= q^3(1+q^2)+\frac{q^2(1-q)^2}{(1-q^2)^2}(-q;q)_\infty\\ &= q^3(1+q^2)+\frac{q^2}{(1+q)^2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-q;q)_n}{(q;q)_n}(1+q^{2n+1})q^{\frac{3n^2+n}{2}}\\ &= q^3(1+q^2)+\frac{q^2}{(1+q)}+\frac{q^4(1+q^3)}{(1-q^2)}\\ &\quad+\frac{q^2}{(1+q)^2}\sum_{n\geq 2}\frac{(-q;q)_n}{(q;q)_n}(1+q^{2n+1})q^{\frac{3n^2+n}{2}}\\ &= \frac{q^2(1+q^2)}{(1-q^2)}+\frac{q^2}{(1+q)^2}\sum_{n\geq 2}\frac{(-q;q)_n}{(q;q)_n}(1+q^{2n+1})q^{\frac{3n^2+n}{2}},\end{aligned}$$

由此得到

$$\frac{1}{(q^3;q^2)_\infty}\frac{q^2(1-q)}{(1-q^2)^2} = -q^3-q^5+\frac{q^2(1+q^2)}{(1-q^2)}+\frac{q^2}{1-q^2}\sum_{n\geq 2}\frac{(-q^2;q)_{n-1}}{(q^2;q)_{n-1}}(1+q^{2n+1})q^{\frac{3n^2+n}{2}}. \tag{2.8}$$

将（2.8）代入（2.7），经过一些化简后，我们得到

$$(1-q)(-q^3;q)_\infty = 1-q+q^3+\sum_{n\geq 2}\frac{(-q^3;q)_{n-2}}{(q^2;q)_{n-1}}(1+q^{2n+1})q^{(3n^2+n)/2}. \tag{2.9}$$

注意到， q^n 在右侧求和式（2.9）中的所有系数均为正，因此结合（2.7）– （2.9），我们证明了对所有 $n \geq 3$结论均成立。显然，对于 $n = 2$，结论也成立，因为我们知道 $d_3(2) = 0 = d_3(1)$。□

3. Proof of Theorem 1.1

Let

$$G(q) := B_{3,2}(q) - B_{2,2}(q) = \sum_{n\geq 0} \big(b_{3,2}(n) - b_{2,2}(n)\big)q^n = \sum_{n\geq 0} G_n q^n.$$

因此，要证明定理11 ，只需证明 $G_n \geq 0$ 对所有 $n \geq 4$.

化简（2.2）可得

$$B_{2,2}(q) = \sum_{n\geq 0} b_{2,2}(n)q^n = (-q^3;q)_\infty(1+q)(1+q^2)\Big(q^2 + \frac{q^3}{1-q^2} + \frac{q^6}{1-q^4}\Big).$$

经过简短计算可得

$$B_{2,2}(q) = (-q^3;q)_\infty \frac{q^2+2q^3+q^4+q^5+q^6}{1-q^2}\ . \tag{3.1}$$

记

$$C(q) := \frac{q^2}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{2q^3}{1-q^3}, \quad R(q) := \frac{q^2+2q^3+q^4+q^5+q^6}{1-q^2}, \quad \text{and}$$

$$P(q) := \frac{(q^3;q^3)_\infty}{(q;q)_\infty} = \prod_{m\geq 1}(1+q^m+q^{2m}). \tag{3.2}$$

注意， $P(q)$ 的系数均为非负数。令

$$F(q) := (1-q^6)\,G(q).$$

我们将证明，对于所有 $n \geq 4$， $F(q)$ 的系数 $[q^n]$ 均非负，并将 $F(q)$ 的系数与 $G(q)$ 的系数联系起来。

为简化记号，我们利用 $F(q)$ 将（2.2）和（2.3）改写如下

$$\begin{aligned} F(q) &= (1-q^6)\left[\frac{(q^3;q^3)_\infty}{(q;q)_\infty}\Big(\frac{q^2}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{2q^3}{1-q^3}\Big) - \frac{1}{(q;q^2)_\infty}\Big(q^2 + \frac{q^3}{1-q^2} + \frac{q^6}{1-q^4}\Big)\right] \\ &= P(q)\,P_C(q) - (-q^3;q)_\infty\,P_R(q), \end{aligned}$$

其中， $C(q)$ $R(q)$ 和 $P(q)$ 由（3.2）给出，并且

$$P_C(q) := (1-q^6)C(q), \qquad P_R(q) := (1-q^6)R(q).$$

进一步化简，得到

$$P_R(q) = q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 3q^6 + 3q^7 + 2q^8 + q^9 + q^{10}. \tag{3.3}$$

定义多项式

$$M(q) := (1+q+q^2)(1+q^2+q^4).$$

引理 3.1。令

$$\Phi(q) := M(q)\,P_C(q) - P_R(q) - q^3.$$

那么 $[q^n]\,\Phi(q) \geq 0$ 对所有 $n \geq 4$ 均成立。

证明。 展开即可验证：

$$\Phi(q) = q^2 - 2q^3 + 3q^4 + 5q^6 + 2q^7 + 5q^8 + 4q^9 + 3q^{10} + 3q^{11} + q^{12} + q^{13}.$$

□

引理 3.2. 我们有，

$$P(q) \ \succeq_{\text{coef}}\ M(q)\cdot\prod_{m\geq 3}(1+q^m) = M(q)\cdot(-q^3;q)_\infty.$$

证明。 我们将 $P(q)$ 分解为

$$P(q) = (1+q+q^2)(1+q^2+q^4)\prod_{m\geq 3}(1+q^m+q^{2m}) = M(q)\cdot\prod_{m\geq 3}(1+q^m+q^{2m}).$$

注意到， $\prod_{m\geq 3}(1+q^m+q^{2m})$ 的展开中将包含一个 $\prod_{m\geq 3}(1+q^m)$ 的副本，由此即可得到结果。□

现在我们定义

$$S(q) := P(q) - M(q)(-q^3;q)_\infty.$$

于是，我们有

$$[q^n]S(q) = 0, \quad \text{for all } 0\leq n\leq 5,$$

因为

$$S(q) = \prod_{m\geq 1}(1+q^m+q^{2m}) - (1+q+q^2)(1+q^2+q^4)\prod_{m\geq 3}(1+q^m),$$

and 经过简短计算，显然 $[q^n]S(q) = 0$ 当 $0\leq n\leq 5$ 时。此外 ，

$$[q^n]S(q) \geq 0, \quad \text{for all } n\geq 6,$$

这只是引理 3.2的另一种表述。另外请注意

$$F(q) = P(q)P_C(q) - (-q^3;q)_\infty P_R(q).$$

引理 3.3。我们有 :

$$[q^n]F(q) \geq 0 \quad \textit{for all } n\geq 4.$$

证明。 根据 $F(q)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned} F(q) &= (M(q)(-q^3;q)_\infty + S(q))P_C(q) - (-q^3;q)_\infty P_R(q) \\ &= (-q^3;q)_\infty(M(q)P_C(q) - P_R(q)) + S(q)P_C(q). \end{aligned}$$

我们首先断言，对于 $n\geq 4$， $[q^n](-q^3;q)_\infty(M(q)P_C(q) - P_R(q)) \geq 0$。注意，

$$\begin{aligned} (-q^3;q)_\infty\big(M(q)P_C(q) - P_R(q)\big) &= \prod_{m\geq 3}(1+q^m)\big(\Phi(q)+q^3\big) \\ &= \prod_{m\geq 3}(1+q^m)\big(q^2+\Phi_{\geq 4}(q)-q^3\big) \\ &\quad \text{(where } \Phi_{\geq 4}(q) \text{ is the polynomial with} \\ &\quad \text{all the degree } \geq 4 \text{ terms of } \Phi(q)\text{)} \\ &\geq \prod_{m\geq 3}(1+q^m)\big(q^2+3q^4+q^6-q^3\big). \end{aligned}$$

因此，要证明我们的断言，只需证明 $\prod_{m\geq 3}(1+q^m)(q^2+3q^4+q^6-q^3)$ 从四次项开始的系数均非负。

Let

$$H(q) = (-q^3;q)_\infty = \prod_{m\geq 3}(1+q^m) = \sum_{n\geq 0} d_3(n)\,q^n, \qquad E(q) = q^2+3q^4+q^6-q^3.$$

根据引理 2.2 我们知道 $d_3(n+1) \geq d_3(n)$ 对所有 $n\geq 1$均成立，因此 $H(q)$ 的系数序列最终不减，并且 $N_0 = 1$。应用引理 2.1 ，令 $r=3$， $s=2$ 以及 $c=1$

$$[q^n]\big(E(q)H(q)\big) \geq 0 \qquad \text{for all } n\geq N_0+r = 4.$$

因此，我们证明了所要证明的结论：

$$[q^n](-q^3;q)_\infty(M(q)P_C(q)-P_R(q))\geq 0,\quad n\geq 4. \tag{3.4}$$

现在只需证明

$$[q^n]S(q)P_C(q)\geq 0,\quad n\geq 0. \tag{3.5}$$

通过计算很容易看出，这对 $8\geq n\geq 0$ 成立。我们声称这对 $n\geq 9$ 也成立。我们有：

$$S(q)P_C(q)=M(q)\left(\prod_{m\geq 3}(1+q^m+q^{2m})-\prod_{m\geq 3}(1+q^m)\right)P_C(q).$$

直接计算可得：

$$M(q)P_C(q)=\left(q^3+q^2+q+2\right)\left(q^5+q^3+q\right)^2,$$

显然，其系数均非负。此外，$\prod_{m\geq 3}(1+q^m+q^{2m})$ 的展开中会包含一项 $\prod_{m\geq 3}(1+q^m)$，因此 $\prod_{m\geq 3}($ $1+q^m+q^{2m})\prod_{m\geq 3}1+q^m$

$)$ 的系数均非负。于是，我们有：

$$[q^n]S(q)P_C(q)\geq 0,\quad n\geq 9.$$

结合（3.4）和（3.5），即可得到所需结果。 □

现在我们可以完成定理 1.1 的证明。回顾

$$G(q)=B_{3,2}(q)-B_{2,2}(q)=\sum_{n\geq 0}G_nq^n,$$

and

$$F(q)=(1-q^6)\,G(q):=\sum_{n\geq 0}F_nq^n.$$

我们有

$$F(q)=(1-q^6)G(q)=G(q)-q^6G(q).$$

Now

$$q^6G(q)=\sum_{n\geq 0}G_nq^{n+6}=\sum_{m\geq 6}G_{m-6}q^m=\sum_{n\geq 0}G_{n-6}q^n,$$

其中我们将 $G_{n-6}=0$ 解释为 $n<6$.因此

$$F(q)=\sum_{n\geq 0}\big(G_n-G_{n-6}\big)q^n.$$

因此，对所有整数 $n\geq 0$,

$$G_n-G_{n-6}=F_n. \tag{3.6}$$

在引理 3.3 中，我们证明了

$$F_n\geq 0\qquad (n\geq 4). \tag{3.7}$$

由（3.6）和（3.7）立即可得

$$G_n\geq G_{n-6}\qquad (n\geq 4). \tag{3.8}$$

我们直接根据 $B_{3,2}$ 和 $B_{2,2}$ 的定义计算 G_n for $n=4,5,6,7,8,9$。这得出

$$(G_4,G_5,G_6,G_7,G_8,G_9)=(3,1,5,5,11,13). \tag{3.9}$$

因此，对于每个 $r\in\{4,5,6,7,8,9\}$，序列 $(G_{r+6k})_{k\geq 0}$ 由 (3.8) 可知是非递减的。由于 (3.9) 成立，因此对所有 $G_n\geq 0$， $n\geq 4$都有 。定理 的证明至此完成。

4. Proofs of Theorem 1.3 and Corollary 1.5

定理 *1.3* 的证明。由 (2.1) 和 (2.2)，我们有

$$\begin{aligned}
B_{2,2}(q)-B_{2,1}(q) &= (-q;q)_\infty\left(\frac{q^2+q^3+q^5}{1-q^4}-\frac{q}{1-q^2}\right)\\
&= (-q;q)_\infty\left(\frac{q^2+q^5-q}{1-q^4}\right)\\
&= (-q^3;q)_\infty\left(\frac{q^2+q^5-q}{1-q}\right)\\
&= (-q^3;q)_\infty\left(q^2\sum_{n\geq 0}q^n+q^5\sum_{n\geq 0}q^n-q\sum_{n\geq 0}q^n\right)\\
&= (-q^3;q)_\infty\left(-q+\sum_{n\geq 5}q^n\right). \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

回顾

$$(-q^3;q)_\infty=\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^n,$$

其中显然 $d_3(n)\geq 0$ 对所有 n (参见引理 2.2的陈述）。现在我们将式（4.1）改写如下

$$\begin{aligned}
B_{2,2}(q)-B_{2,1}(q) &= \left(\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^n\right)\left(\sum_{n\geq 5}q^n\right)-\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^{n+1}\\
&= \left(\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}q^n\right)-\left(\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^n\right)(1+q+q^2+q^3+q^4)\\
&\quad -\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^{n+1}\\
&= \sum_{n\geq 0}c(n)q^n-\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^n-2\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^{n+1}-\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^{n+2}\\
&\quad -\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^{n+3}-\sum_{n\geq 0}d_3(n)q^{n+4}, \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

其中

$$c(n)=\sum_{i=0}^{n}d_3(i).$$

化简（4.2）后，我们得到

$$\begin{aligned}
B_{2,2}(q)-B_{2,1}(q) &= \sum_{n\geq 0}(c(n)-d_3(n))q^n-2\sum_{n\geq 1}d_3(n-1)q^n-\sum_{n\geq 2}d_3(n-2)q^n\\
&\quad -\sum_{n\geq 3}d_3(n-3)q^n-\sum_{n\geq 4}d_3(n-4)q^n\\
&= \sum_{n\geq 4}\left(c(n)-d_3(n)-2d_3(n-1)-d_3(n-2)-d_3(n-3)-d_3(n-4)\right)q^n\\
&\quad +\sum_{n=0}^{3}(c(n)-d_3(n))q^n-2q-q^2-q^3, \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

其中我们用到了如下事实： $d_3(0) = 1$， $d_3(1) = d_3(2) = 0$。

由（4.3）可知，要证明定理 1.3 ，我们需要证明以下结论

$$c(n) - d_3(n) - 2d_3(n-1) - d_3(n-2) - d_3(n-3) - d_3(n-4) \geq 0 \quad \text{for all } n > 4. \tag{4.4}$$

S简化（4.4），利用 c（n）的值，这等价于证明以下结论 g

$$\sum_{i=0}^{n-5} d_3(i) - d_3(n-1) \geq 0 \quad \text{for all } n > 4. \tag{4.5}$$

现在我们用组合论论证证明（4.5）。令 $D_3(n)$ 表示由 n 中所有部件大于 2 的互异部件分拆组成的集合。因此， $|D_3(n)| = d_3(n)$。我们注意到，由于部件的限制， $D_3(n-1)$ 中的所有分拆都不含部件大小为 $n-2$ 或 $n-3$ 的部件。我们将唯一的分拆（ $n-1$ ）$\in D_3(n-1)$ 映射到 $\phi \in D_3(0)$ 中唯一的分拆。对于其他每个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ $\in D_3(n-1)$，我们只需删去最大部件 λ_1，并将其映射到某个 $D_3(i)$ 中的一个分拆，其中 $3 \leq i \leq n-5$。这就构成了一个单射，证明完毕。□

推论*1.5*的证明。结论由方程（4.3）、（4.4）和（4.5）得出。 □

Acknowledgments

作者感谢匿名审稿人提出的若干有益意见，这些意见改进了本文的表述。第一作者部分受到艾哈迈达巴德大学启动基金的资助（参考编号：URBSASI24A5）。

References

[和98] George E. Andrews。分拆理论。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，1998年。1976年原版的重印本。[BBC+23] Cristina Ballantine、Hannah E. Burson、William Craig、Amanda Folsom 和 Boya Wen。钩长偏差与一般线性分拆不等式。*Res. Math. Sci.*，10(4)：36，2023 年。编号 41。[BMS25] Rupam Barman、Pankaj Jyoti Mahanta 和 Gurinder Singh。 t-正则分拆在 t方面的钩长不等式：第二部分。*Res. Number Theory*，11，2025年。编号 84。[Kim25] Eunmi Kim。 ℓ-正则分拆和 ℓ-互异分拆中钩长的不等式与渐近性。*J. Math. Anal. Appl.*，550(2)：19，2025年。编号 129599。[SB24] Gurinder Singh 和 Rupam Barman。普通分拆和 t-正则分拆中的钩长偏差。*J. Number Theory*，264：41–58，2024年。[SB26] Gurinder Singh 和 Rupam Barman。 t-正则分拆在 t方面的钩长不等式。*Canadian Math. Bull.*，即将发表，2026年。[SF82] James J. Sylvester 和 F. Franklin。《分拆构造理论：分为三幕、一间幕间剧和一出终幕剧》。*Amer. J. Math.*，5(1-4)：251–330，1882年。

Mathematical and Physical Sciences division, School of Arts & Sciences, Ahmedabad University, Navrangpura, Ahmedabad 380009, Gujarat, India电子邮箱地址: manjil.saikia@ahduni.edu.in

Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Science Education and Research Kolkata, Mohanpur, Nadia 741246, West Bengal, India电子邮箱地址: prabaltalukdar89@gmail.com