使用新型仿须状传感器的移动机器人定位

Prasanna K. Routray、Basak Sakcak、Steven M. LaValle 和 Manivannan M.

arXiv:2601.05612v1 [physics.app-ph] 9 Jan 2026

摘要——在视觉和远距离感知不可靠的环境中，例如狭窄、杂乱或低能见度场景，仿须状触觉传感器为近距离感知提供了独特优势。本文提出一种框架，利用单个触须传感器，在已知平面环境中进行接触点估计和机器人定位。我们构建了一系列虚拟传感器模型。每个模型都将机器人构型映射为传感器观测，并借助原像这一概念进行结构化推理——原像是与给定观测相符的机器人状态集合。虚拟传感器模型的概念提供了一种抽象方式，使我们能够在不依赖具体物理实现的情况下推理状态不确定性。通过结合传感器观测与运动模型，我们估计接触点。迭代估计进而能够重建障碍物边界。此外，将从当前观测推断出的状态与前一步骤的前向投影状态相交，即可实现准确的机器人定位，而无需依赖视觉或外部系统。该框架支持确定性和可能性表述，并通过仿真以及使用低成本 3D 打印霍尔效应式触须传感器开展的物理实验进行了验证。结果表明，接触点估计和定位误差均低于 7 毫米，展现了基于触须的感知作为基于视觉的导航的轻量、适应性补充方案的潜力。

索引词——触须传感器、触觉感知、悬臂梁、原像分析、虚拟传感器模型、机器人定位

I. 引言

WHISKERS 在猫科动物、鳍足类动物和啮齿动物等动物中提供关键的感知功能，支持猎物探测、流体流动感知和空间探索。例如，老鼠在低能见度条件下依靠触须弥补视力有限的不足，从而进行导航 [1]。这些生物感知策略促使人们在能见度低、杂乱或空间受限的环境中运行的机器人系统中采用受触须启发的传感器——在这些条件下，摄像机和激光雷达等传统传感器往往表现不佳。

传统机器人感知系统主要依赖视觉、激光雷达和深度传感器，但在近距离交互、存在透明材料的环境以及低能见度条件下，这些系统的性能会下降 [2]。在这类情况下，碰撞传感器和胡须传感器等短距离感知方式可提供互补能力。此前的机器人触须实现已涉及流动检测 [3]，障碍物感知 [4]，[5],和纹理分析 [6]–[8]，，但它们在定位和建图中的应用仍然有限。与传统触觉传感器不同，触须既能提供接触反馈，也能提供本体感觉反馈，因此可根据基座反作用信号估计接触位置、方向和大小 [9]。

在已知地图中准确估计接触点并实现机器人定位，仍是基于触须的感知所面临的核心挑战。现有方法通常依赖基座力矩和反作用力来推断接触，却忽略了末端斜率、法向载荷、传感器坐标系中的接触坐标以及末端偏转等额外参数。将这些更全面的参数纳入虚拟传感器框架 [10]，可建立一种数学抽象：传感器映射将机器人状态与观测关联起来，而相应的原像则刻画机器人状态中的不确定性。随后，可在确定性、可能性或概率表述下进行迭代滤波，逐步降低这种不确定性。将这些更丰富的参数用于虚拟传感器模型，可为接触估计、形状重建、建图和定位 [11]提供更稳健的方法。

本文通过将虚拟传感器模型引入为从外部物理世界状态到一组观测的传感器映射，为接触点估计带来了新的见解。这种数学抽象使我们能够直接分析不确定性的主要来源，即特定传感器映射下某一观测的原像。本文通过仿真评估了一系列虚拟传感器模型，并通过物理实验进一步验证了基于弯矩的模型。虚拟感知框架建立在由大转角悬臂梁挠曲推导出的解析表达式之上。我们通过物理实验，将基于弯矩模型的接触点估计结果与最先进的方法进行了比较。此外，我们还介绍了一种低成本、可重构的 3D 打印触须传感器。利用传感器观测和预定义的运动模型估计障碍物轮廓。对于定位，我们利用单个触须传感器和已知运动得到的时序观测，无需依赖辅助感知。该方法支持确定性和可能性表述，并可扩展到概率模型。它同时适用于线性和非线性运动及感知动态。这些能力使基于触须的感知成为受限空间机器人技术的一种可行感知方式，适用于地下、水下及杂乱环境等传统感知常受干扰的场景。

第二节回顾传感器特性、应用场景、现有数学模型和滤波技术。

P. K. Routray 和 Manivannan M. 隶属于印度马德拉斯理工学院虚拟现实与触觉中心的触觉实验室，地址为印度 600036（电子邮箱：prasanna.routray97@gmail.com、dev.subudhi49@gmail.com、mani@iitm.ac.in）。B. Sakcak 和 S. M. LaValle 隶属于芬兰奥卢大学信息技术与电气工程学院的泛在计算中心（电子邮箱：basak.sakcak@oulu.fi、steven.LaValle@oulu.fi）

第三节介绍大角度悬臂梁模型，该模型构成虚拟传感器模型及其相关原像的基础。第四节介绍虚拟传感器映射，定义原像，并探讨如何将它们组合或合并，包括运动建模。第五节介绍传感器的设计、制造和校准过程。第六节和第七节展示了接触点估计、障碍物轮廓估计和定位的实验结果。此外，我们评估了方向感知如何加快状态不确定性的降低。最后，我们报告的结果与障碍物轮廓、触须上的接触位置以及机器人位姿高度吻合。

II. 背景与相关工作

A. 仿须状传感器的功能概述

仿须状传感器具有独特的物理和功能特性，非常适合机器人感知任务。这些传感器具有极高的灵敏度，能够检测低至 4μN 的力，并且甚至在发生物理接触之前，就能响应空气或流体流动造成的扰动 [12]。根据所采用的材料——例如 ABS塑料、钢、碳纤维或复合材料——胡须传感器可以制造成具有不同刚度或柔性的结构，从而影响其机械响应和灵敏度。

触须通过机械变形工作，并通过电阻 [13]，电容 [14]，或磁通密度 [15]的变化将机械变形转换为电信号。其典型的深度感知范围较短——约为 200mm——因此非常适合近距离障碍物检测与交互。在机器人应用中，它们可用于本体感知 [16], ，通过分析变形模式和接触力来估计机器人的相对位置或运动。

由于结构紧凑且采用被动机械设计——无需主动激励即可对外力产生机械响应——触须传感器适合部署在空气或水下环境中。采用硅胶等柔顺材料制造并进行防水处理后 [17], ，它们能够在非结构化或恶劣环境中可靠运行 [18]。这些特性使胡须传感器能够用于导航、障碍物检测、环境建图和定位等任务，尤其适用于传统测距传感器或视觉系统效果较差的场景。

B. 胡须传感器的应用

触须传感器因对接触和非接触刺激都具有很高的灵敏度，已应用于多个机器人领域。在视觉传感器受限的低能见度环境中，它们尤其适用于障碍物检测 [19] 和导航 [20]。它们还能感知细微的纹理变化，因此在材料识别和表面轮廓测量任务中也很有价值 [8], [13], [21], [22]。

除了触觉感知，触须传感器还能够检测微弱的流体流动，因此适用于在动态环境 [23]中运行的空中和水下机器人。它们对柔性接触 [24] 和振动的响应能力，可在操作和抓取任务中增强实时反馈，从而更好地控制接触力。与激光雷达、声呐和深度相机等传统测距传感器相比，触须传感器为近距离感知 [25]提供了一种互补的感知方式。

除了感知和建图，胡须传感器还可用于类似于 [26] 所介绍的触觉反馈系统，并且是仿生机器人技术的核心组成部分；在仿生机器人技术中，它们模拟自然触觉策略以与环境交互 [20], [24], [27], [28]。在专注于感知、探索和丰富接触任务的机器人研究中，它们的用途还在不断拓展。

C. 胡须传感器的数学建模

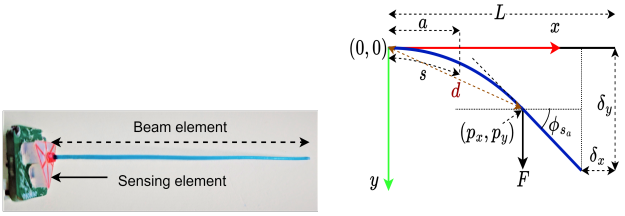
1) 胡须变形建模：由于结构边界条件的限制——基座固定、末端自由（见图1a和图1b）——胡须传感器通常建模为悬臂梁。这些模型近似描述胡须在外力作用下的变形，是表征传感器响应的基础。尽管生物胡须和合成胡须的刚度各不相同，但它们通常比弹性体等软材料更坚硬，因此非常适合采用基于梁的建模方法。

主要采用两种理论框架：欧拉–伯努利梁理论和科塞拉特杆理论。欧拉–伯努利理论假设挠度较小且不存在剪切变形，因其简单且具有解析公式而得到广泛应用。然而，对于柔性触须或尖端挠度较大的情况，则需要采用大角度变形模型。在这种情况下，科塞拉特杆理论能提供更准确的描述，因为它考虑了剪切、扭转和复杂的曲率动力学 [29]。

实际上，许多触须传感器工作时以弯曲为主，剪切作用很小。因此，欧拉–伯努利理论的大角度公式通常已足够，且计算效率较高。触须的几何和材料属性——包括锥度、固有曲率、杨氏模量（E）和截面惯性矩（I）——会显著影响其静态和动态行为。对于具有非线性锥度或曲率的触须，通常需要采用数值方法才能准确建模 [30]。

D. 接触估计技术

滤波技术在解读触须传感器观测数据方面发挥着关键作用，可用于接触点估计、障碍物形状估计和定位等任务。这些方法通常独立于具体的换能机制，因为通过校准，可以将物理模型（通常基于梁理论）与换能过程解耦。这种解耦



(a) (b)

图 1：一般示意图：(a) 典型实体触须传感器，类似于悬臂梁。(b) 悬臂梁的大角度偏转。

使得能够根据弯矩以及偏转角和触须基部运动等可测量量推断接触点。

Kaneko 等人 [19] 早期提出了一种主动感知方法，其中触须在基座处被主动驱动。通过扭矩测量和小角度梁近似，他们推断出接触距离。Kim 等人 [31]随后改进了该方法，在沿触须纵轴固定间距的位置放置一对传感元件，以测量偏转角。基于欧拉–伯努利梁理论，这种配置支持接触点估计，继而进行物体形状辨别。Solomon 等人 [32] 进一步拓展了《Research》，将横向滑移和库仑摩擦纳入考量，通过基座力矩估计接触点。Birdwell 等人 [33] 对渐缩触须和弯矩建模，以估计径向接触距离。

先进技术将材料属性、固有曲率和动态效应纳入建模。Quist 等人 [30] 考虑了固有曲率，以估计基部力和力矩。Boubenec 等人 [34]证明，由主动触须运动引起的振动频率偏移与接触位置相关。Solomon 等人 [35]，报告的迭代方法利用纵向滑移进行连续接触估计。

基于学习的技术也应运而生。Huet 等人 [9], [36] 使用在触须基座处测得的三维反作用力和力矩训练随机森林，以实现接触定位。Lin 等人 [24] 应用贝叶斯滤波和软接触建模方法，对包含柔顺物体的环境进行建图。最近，Sofla 等人 [37] 采用时间滤波处理通过高分辨率 ATI Nano 传感器测得的弯矩，并结合主动感知来估计接触点。

滤波在解决非单射传感器映射引入的歧义方面尤其有用。许多方法专注于单根触须，而另一些方法则通过应用空间滤波扩展到触须阵列，或通过随时间引入时间滤波应用于单根触须。尽管取得了这些进展，但很少有研究明确刻画接触估计中的不确定性，或提出同时支持确定性观测模型和可能性观测模型的统一框架。

III. 触须力学与接触推断

A. 梁理论简要回顾

我们首先介绍欧拉–伯努利梁理论的关键结论，这些结论为触须传感器和滤波技术的建模提供指导。当横向载荷施加于悬臂梁时，会在固定基座处产生反作用力和弯矩。根据所施加载荷的大小，梁会发生小角度偏转（尖端位移小于梁总长度的 10% L）或大角度偏转。

图 1b 展示了悬臂梁的大角度偏转。偏转后的末端可用位移δ_x 和 δ_y描述，而梁形状则由弧长 s的函数 $x(s)$ 和 $y(s)$ 参数化，其中斜率 $\phi(s)$ 从 0 增加到载荷施加点处的最大值 ϕ_a 。对于大角度情况，尖端水平偏转变得不可忽略（见图 1b 中的 δ_x ）。梁上的曲率 $\kappa(s)$ 定义为：

$$\kappa(s) = \frac{d}{ds}\phi(s) = \frac{M(s)}{EI},$$

并将弯矩 $M(s)$ 与材料属性——杨氏模量 E 和截面惯性矩 I联系起来。

对于施加在任意弧长 s_a 处的力 F，当 $0 \le s \le s_a$ 时，弯曲梁形状（见 [38]）为

$$\begin{aligned} x(s) &= \sqrt{\frac{EI}{2F}} \int_0^{\phi(s)} \frac{\cos\phi}{\sqrt{\sin\phi_a - \sin\phi}}\, d\phi, \\ y(s) &= \sqrt{\frac{EI}{2F}} \int_0^{\phi(s)} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_a - \sin\phi}}\, d\phi. \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $\phi_a = \phi(s_a)$ 是加载点处的斜率。如果未知 ϕ_a ，则可利用以下关系，根据弧长进行数值估算：

$$s_a = \sqrt{\frac{EI}{2F}} \int_0^{\phi_a} \frac{1}{\sqrt{\sin\phi_a - \sin\phi}}\, d\phi. \tag{2}$$

对于未加载段 $s_a < s \le L$，梁保持恒定斜率 ϕ_a，其形状由下式描述：

$$\begin{aligned} x(s) &= x(s_a) + (s - s_a)\cos\phi_a, \\ y(s) &= y(s_a) + (s - s_a)\sin\phi_a. \end{aligned} \tag{3}$$

点 $(p_x, p_y) = (x(s_a)\ y(s_a))$ 对应接触位置。由于积分涉及椭圆函数，因此无法得到闭式解，必须采用数值近似。

在小角度情况下，水平位移可忽略不计（$\delta_x \to 0$），且竖向挠度在自由端达到峰值（$s = L$）。由施加在 $s = s_a$ 处的载荷 F 在任意位置 $s < s_a$ 产生的弯矩为

$$M(s) = F[x(s_a) - x(s)] = F\int_s^{s_a} \cos\phi\, ds, \tag{4}$$

其中 $\cos\phi = \frac{dx}{ds}$。在基座处（$s = 0$），这可简化为$M(0) = Fx(s_a)$；而对于作用于末端的载荷，$M(0) = Fx(L)$。对于 $s > s_a$，$M(s) = 0$，因为载荷施加在上游位置。

B. 通过弯矩进行接触点估计

准确估计偏转接触点（p_x，p_y）是重建触须偏转并推断接触表面几何形状的关键。由于沿细长弹性梁嵌入分布式传感器通常并不实际，因此会使用基座测量值（尤其是弯矩 $M(0)$）来推断接触位置。已知沿梁的接触距离 s_a 后，即可利用基座测量值求得完整的梁形状（$x(s)$ $y(s)$）、斜率 $\phi(s)$ 以及尖端挠度（δ_x，δ_y）。

在小角度假设下，Kaneko 等人 [19]提出通过逐步驱动基座——通过旋转 θ_{add}——并测量由此产生的力矩 $M(0)$ 来估计接触距离。Solomon 等人 [35]通过推导在线性基座运动 t_y 下估计接触距离的闭式表达式，对该方法进行了扩展，表达式为

$$d = \sqrt{\frac{3EIt_y}{M(0)}}, \tag{5}$$

其中，t_y 是触须基部沿 y 轴的位移，$M(0)$ 是相应的弯矩。

对于柔性触须传感器，由于存在大挠度，小角度近似可能不够准确。在本文中，我们采用一种基于椭圆积分的大角度解析模型，用于定义虚拟传感器映射及其原像。尽管该公式具有解析上的洞察力，但计算开销较大，不适合实时应用。为解决这一问题，我们采用 Quist 等人 [30]，开发的数值模型，该模型能够高效模拟大角度二维挠曲。这种数值方法补充了解析模型，并作为评估虚拟传感器行为以及在物理环境中估计接触点的基础。

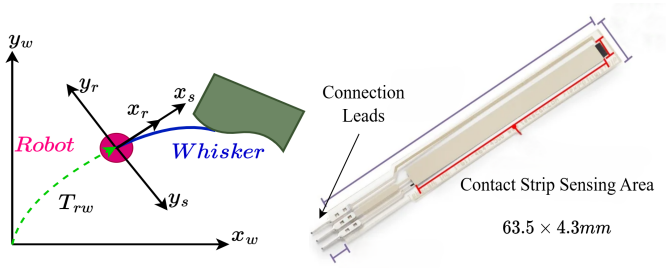
IV. 虚拟触须传感器模型与原像

本节介绍将机器人状态与传感器观测关联起来的虚拟传感器映射，并考察其原像的结构——即产生相同观测的状态集合。我们刻画这种映射固有的歧义，并展示如何通过结合多个传感器观测来减少歧义。

A. 虚拟传感器模型

虚拟触须传感器是一种数学抽象，用于在没有物理硬件的情况下模拟触觉感知。在本研究中，虚拟传感器安装在一台于平面环境中导航的移动机器人上，并通过几何变换表示：变换 T_{sr} 将坐标从机器人坐标系映射到传感器坐标系，而 T_{rw} 将坐标从世界坐标系映射到机器人坐标系（见图 2a）。

机器人状态表示为三元组 $q = (q_x, q_y, q_\theta)$，其中 (q_x, q_y) 是机器人位置，q_θ 是相对于世界坐标系的方向。状态空间 $Q \subseteq \mathbb{R}^2 \times S^1$（其中 S^1 是单位圆）是机器人可能处于的所有状态的集合。先前的研究



(a) (b)

图 2：机器人 T_{rw} 与世界参考坐标系中的触须传感器的参考坐标系：(a) 触须传感器（蓝色）安装在机器人上，并与环境接触。(b) TekScan™ 提供的商用接触条传感器可用作触须传感器。

将传感器建图描述为一个函数，其定义域为Q ，陪域为 Z，即所有可能观测[10]的集合。然而，来自触须传感器的观测本质上存在歧义，因为单个机器人构型q 可能对应多个可行的触须形状和传感器观测 $z \in Z$ [25]。为明确处理这种歧义，我们引入触须梁形状参数 $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$，将原始状态空间扩增为 $Q_{aug} = Q \times [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$。$\alpha$ 的每个取值都定义了一条特定的平面曲线 $\sigma_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$，该曲线位于传感器坐标系中，以弧长 s为参数，并表示为坐标 $(x(s)\ y(s))$。因此，从增广状态到传感器观测的映射由函数 $h : Q_{aug} \to Z$ 给出。该映射通常不是双射，因为不同状态可能产生相同的观测 z。我们将 $h^{-1}(z)$ 记作 z 在 h 下的原像，即与观测 z 相一致的所有机器人状态和触须梁形状的集合。

为有效分析机器人状态和触须梁形状中的歧义，我们提出一系列虚拟触须传感器模型，每种模型代表一种不同的可测或不可测观测（接触点载荷或末端斜率）。通过组合这些传感器模型或应用适当的滤波器，我们可以降低触须梁形状以及沿触须分布的接触点的不确定性。

模型1（负载传感器）。该传感器测量沿触须梁某一点横向作用的无摩擦法向力 F。由于多个机器人状态可能导致不同的梁变形，进而产生不同的力读数，因此这种建图不可逆。

该传感器定义为

$$h_{\text{ls}}(q, \alpha) = F, \tag{6}$$

其中，$q \in Q$ 表示机器人状态，α 表示梁形状，$F \in [-F_{\max}, F_{\max}]$ 表示感测到的侧向力。最大幅值 $F_{\max}$ 表示梁发生塑性变形的临界限值。

F 的负值表示沿负 y_s轴方向施加的力（见图 1b）。由于触须和感知机制在几何形状上

具有对称性，传感器响应通常以零为中心呈对称分布，但由于材料不对称性，极值的大小可能有所不同。

模型2（接触条传感器）。该传感器报告触须与环境接触的区域。将触须均匀离散为 $\mathcal{J} = \{J_i\}_{i=1}^{N}$ 个区间，使得 $\bigcup_{i=1}^{N} J_i = [0, L]$，其中每个 $J_i = [s_{i-1}, s_i]$ 对于 $i = 1,\ldots, N-1$，且$J_N = [s_{N-1}, s_N]$，其中 $s_0, s_1, \ldots, s_N$是沿弧长方向的离散化点。

假设为单点接触，该传感器将机器人状态和梁形状映射到包含接触位置的弧段：

$$h_{css}(q, \alpha) = J_a, \tag{7}$$

其中 $s_a \in J_a$ 表示沿梁的真实接触位置。

典型的传感器观测如图2b所示，其中观测对应于包含接触位置的弧长区间。如图1b所示，该区间对应于触须上的 s_a 。

模型 3（末端斜率传感器）。该传感器测量横向法向载荷作用下触须梁的最大斜率，记为 ϕ_a。末端斜率传感器定义为

$$h_{es}(q, \alpha) = \phi_a, \tag{8}$$

其中，$\phi_a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是接触点相对于未变形轴线的角度（见图 1b 中的 ϕ_{s_a} ）。实际上，有效斜率范围受到触须长度 L 和材料约束等物理参数的限制。

根据负载传感器、末端斜率传感器或接触条传感器的观测结果，可以利用公式 (1) 和 (3) 重建传感器坐标系中触须可能的弯曲轮廓。尽管这些模型具有解析基础，但由于难以沿细长梁元件嵌入分布式传感器，大多数触须传感器设计依赖于基座测量。为体现这一实际考量，我们引入了另一种虚拟传感器模型，用于测量基座处的弯矩——这一量在工程化触须传感器中得到广泛应用，也与触须生物学相一致。

模型 4（弯矩传感器）。该传感器用于量化触须基座处的弯矩，其模型为

$$h_{bms}(q, \alpha) = M(0), \tag{9}$$

其中 $M(0) \in [-M_{\max}, M_{\max}]$。负值（顺时针）力矩表示沿 y_s 轴加载。若其大小超过 $M_{\max}$，梁可能无法恢复到原始形状。

尽管各个虚拟传感器模型都能提供有用的观测，例如载荷、斜率或接触位置，但由于传感器映射不可逆，它们通常不足以完全确定机器人构型。多个构型可能产生相同的观测，从而导致状态估计出现歧义。实际上，实体触须传感器通常只测量部分参数，例如基座处的弯矩，因此可用信息有限。为提高准确性，必须结合运动数据（如线位移或角位移）及滤波方法来处理观测。下一节将借助 [10] 中讨论的传感器原像概念，对这种歧义进行形式化刻画。

B. 原像与不确定性

观测 $z \in Z$ 在传感器映射 h 下的原像，定义了可能产生该观测的机器人状态集合（q，α）$\in Q_{aug}$。给定映射 $h : Q_{aug} \to Z$，状态空间 Q_{aug} 可根据传感器输出划分为等价类。对于相同的梁形状 α，若两个状态 q，$q' \in Q$ 满足 h（q，α）$= h$（q'，α），则它们在 h 下不可区分。此外，对于 h（q，α）$= h$（q，α'）或 h（q，α）$= h$（q'，α'），这些状态仍然不可区分。在此类情况下，任何传感器读数都无法将它们区分开来。本节分析每种虚拟触须传感器模型的原像，说明感知产生歧义的原因及其如何随传感器类型而变化。

1) 负载传感器的原像：考虑模型1中定义的虚拟负载传感器，它测量施加在触须梁上未知弧长位置 s_a处的法向接触力 F （见图1b）。由式（2）和式（1）可知，仅知道 F 不足以唯一确定梁的形状 α，因为多个接触位置可能产生相同的力。

对于不同的 $s_a \in [0, L]$ 值以及已知的 F，可通过求解以下方程计算相应的端部斜率 ϕ_a

$$s_a = \sqrt{\frac{EI}{2F}} \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{\sin\phi_a - \sin\phi}}\, d\phi, \tag{10}$$

其中 $\phi \le \phi_a$。

满足上述方程的所有端部斜率及其对应的梁形状如图3a（红色）所示。满足式（10）的每一组有效配对（s_a，ϕ_a）都会生成唯一的梁形状（$x(s)$ $y(s)$）以及相应的接触点（p_x，p_y）$= (x(s_a)\ y(s_a))$。为便于计算，$[0, L]$ 经过离散化，并据此计算出梁形状，如图3a所示，其中也标出了相应的接触点（绿色）。

这组接触点及其对应的梁形状 α，有助于确定给定负载传感器观测的原像。考虑环境边界上的一个点，机器人通过触须传感器与该点接触。机器人可能处于不同状态，而这些状态会产生相同的观测F。这些状态到边界点的距离可以表示为一个集合，其中状态取决于梁形状 α。

原像可以通过两种方式构造：将不同的梁形状与.....的边界对齐

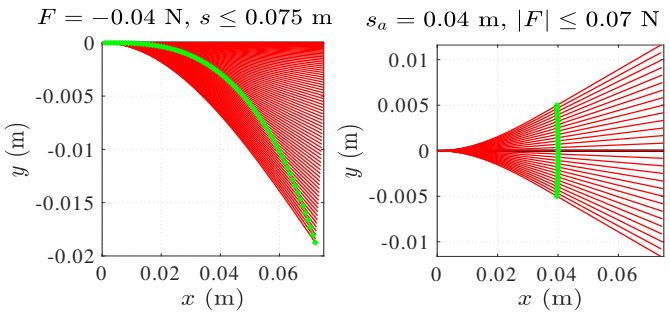


图3：可能的接触位置及相应的触须传感器形状。绿色曲线表示可能接触位置的集合，红色曲线表示每个接触点对应的潜在触须形状：(a) 负载传感器；(b) 接触条传感器。

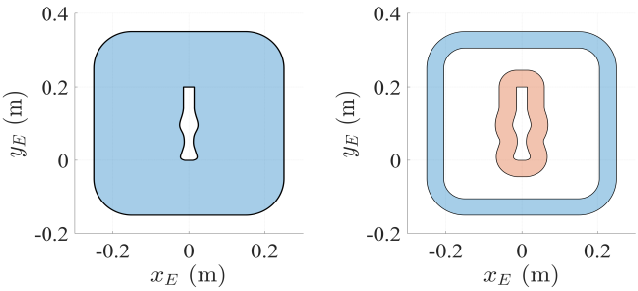


图4：机器人所在的环境及对应的 $z \in Z$ 原像，其中 $z = F$：（a）包含直线、凹形、凸形和对称边界段的地图。阴影区域表示在传感器与机器人参考坐标系重合这一假设下机器人可能所在的区域。（b）单次观测将完整状态空间缩减至阴影区域，因为与方向相关的距离决定了条带（阴影区域）的宽度。距离集合中的一个特定距离对应于机器人的一个方向。

已知地图（见第VII-A节），或者利用梁原点与接触点之间方向相关的距离。方向相关距离法本质上简化为 [10] 中介绍的方向深度传感器。因此，已知 F 的原像是增广状态空间 Q_{aug} 的一个子集，定义为

$$h_{ls}^{-1}(z) = \{(q, \alpha) \in Q_{aug} \mid h_{ls}(q, \alpha) = F\}. \qquad (11)$$

该原像通常在物体边界周围形成条带状区域（见图4b），表示与观测到的力一致的机器人位姿和所有可能的梁形状 α。$[0, L]$ 的离散化程度决定了 α的集合基数，而这也与方向距离的数量有关。反过来，这使得我们能够为已知环境边界上的单个点获得数量相等的可能机器人状态。

2）接触条传感器的原像：假设触须沿弧长 s_a 的单个点发生接触，接触条传感器会测量梁上的弧长。然而，当施加的力 F 和由此产生的斜率 ϕ_a未知时，无法唯一确定精确的接触点和梁形状，即我们无法唯一确定函数 $x(s)$ $y(s)$，因此无法确定接触点 $(p_x, p_y) = (x(s_a)\ y(s_a))$。参见（2），与观测 s_a对应的施加力和末端斜率对，即满足方程（10）的 (F, ϕ_a) 对。然而，未知负载 $F \in [-F_{\max}, F_{\max}]$的超出该范围的取值会使梁发生塑性变形。

由此得到一组梁形状和接触点，如图2b所示。原像 $h_{css}^{-1}(s_a)$ 由所有满足 $(q,\ \alpha) \in Q_{aug}$ 且对应于测得的接触位置 s_a 的机器人构型组成。与前述负载传感器的情况类似，可以通过将梁形状沿环境边界对齐，或使用从梁原点到接触点的方向距离来构造原像。环境边界上单个点对应的 α 和 q 的可能集合取决于 $[-F_{\max}, F_{\max}]$ 的离散化；从几何上看，这可能的机器人位置同样类似于环境边界周围的一条带状区域。事实上，对于所有虚拟传感器模型，如图4b所示，该带状区域的宽度受弧长 s_a 限定。原像集的表达式为

$$h_{css}^{-1}(z) = \{(q, \alpha) \in Q_{aug} \mid h_{css}(q, \alpha) = s_a\}. \qquad (12)$$

已知 F，ϕ_a 和 s_a 时，可由（1）和（3）唯一确定梁形状 $(x(s)\ y(s))$。

3）端部斜率传感器的原像：给定末端斜率 ϕ_a，我们可以根据满足方程（13）的每一组有效 $(s_a,\ \sqrt{F})$ 确定一组可能的接触点及其对应的梁形状。每个接触点都会产生不同的变形轮廓，并且随着接触点逐渐靠近基座，要维持相同的 ϕ_a 需要更大的力。已知的末端斜率满足以下关系

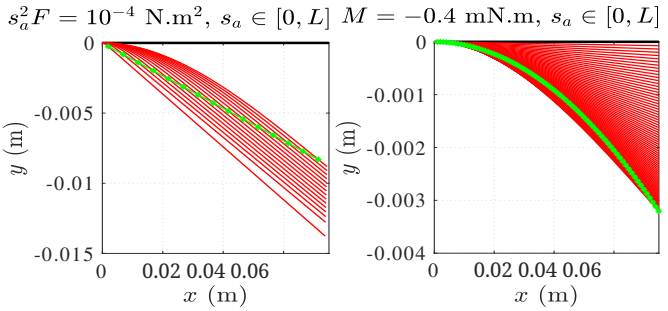
$$s_a\sqrt{F} = \sqrt{\frac{EI}{2}} \int_0^{\phi_a} \frac{1}{\sqrt{\sin\phi_a - \sin\phi}}\, d\phi \qquad (13)$$

其中，$F \in [-F_{\max}, F_{\max}]$ 和 $s_a \in [0, L]$ 定义了允许的力和接触位置的范围。

图5a展示了有效接触点及相应梁形状的集合。所得原像 $h_{es}^{-1}(z)$包含与测得的末端斜率 ϕ_a一致的所有机器人构型 $(q,\ \alpha) \in Q_{aug}$。与其他模型（梁形状对齐法或方向距离法）一样，原像是 Q_{aug} 的子集，在已知地图中呈现为条带，如图4b所示。根据传感器观测，可以推导出可能的梁形状及相关接触点。因此，可以利用已知的末端斜率放置梁形状，或者采用方向距离法，而

在这两种情况下，所得可能机器人位置的集合都会在已知地图中呈现为条带。原像集的表达式为

$$h_{es}^{-1}(z) = \{(q,\alpha) \in Q_{aug} \mid h_{es}(q,\alpha) = \phi_a\}. \tag{14}$$



(a) (b)

图5：触须传感器可能与障碍物发生接触的所有可能接触点（绿色）。对于一组离散的传感器测量值（红色），对应的柔性梁形状：（a）端部斜率传感器。（b）小角度挠曲情况下的基座弯矩传感器。

4）弯矩传感器的原像：弯矩观测值的原像取决于梁发生的是小角度还是大角度偏转。可通过将观测值与阈值进行比较来判断。以下分别分析这两种情况。

小角度挠曲：在小角度范围内，尖端水平偏转可以忽略不计（$\delta_x \to 0$），基座处的弯矩可简化为力与弧长之间的线性关系。具体而言，力矩为

$$M(0) = F s_a \tag{15}$$

其中 $F \in [-F_{\max}, F_{\max}]$ 和 $s_a \in [0, L]$。利用这一关系，可通过公式（2）和（1）根据测得的力矩计算出一组可能的接触点和梁形状。状态空间 Q 上的对应原像定义为

$$h_{bms}^{-1}(z) = \{(q,\alpha) \in Q_{aug} \mid h_{bms}(q,\alpha) = M(0)\} \tag{16}$$

并表示所有可能产生相同力矩的机器人状态和梁形状。

大角度偏转：在大角度情况下，非线性效应变得显著，必须使用完整梁模型计算基座处的力矩。根据式（4）中的基座力矩表达式，力矩为

$$M(0) = F x(s_a) = \sqrt{\frac{FEI}{2}} \int_0^{\phi_a} \frac{\cos\phi}{\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_a}}\, d\phi \tag{17}$$

这种表述将未知数增加到元组 $(F,\ s_a,\ \phi_a)$，由于涉及椭圆积分，所得梁形状和接触位置必须通过数值方法计算。因此，

增广状态空间 Q_{aug} 中的原像比小角度情况下更大，因为尖端存在非零水平位移 δ_x，这使得从力矩到机器人状态的逆映射具有更大的不确定性。然而，从几何角度来看，在大角度偏转情况下，原像区域（视为环境中的二维子集）会变小，因为触须弯曲加剧，缩短了可触及接触点的空间范围。

C. 通过滤波降低接触不确定性

由虚拟传感器观测得到的原像源自沿触须分布的一组可能接触点。降低这些接触点和梁形状 α 的不确定性，能够降低机器人状态的不确定性。为此，我们引入空间滤波和时间滤波技术。

命题1. 设 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ 表示根据虚拟触须传感器模型推断出的接触点集合。假设 $x(s)$ 和 $y(s)$ 是表示梁形状水平坐标和垂直坐标的连续函数，并以弧长 $s \in [0, L]$ 为参数。则集合

$$\mathcal{P} = \{(x(s), y(s)) \mid s \in [0, L]\} \tag{18}$$

是紧致且连通的；也就是说，$\mathcal{P}$ 有界且连通。

证明。区间 $[0, L] \subset \mathbb{R}$ 是闭且有界的，因此是紧致且连通的。映射 $s \to (x(s)\ y(s))$ 是从 $[0, L]$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的连续映射。紧致连通集的连续像仍然紧致且连通。因此，$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ 既有界又连通。

□

命题2。设 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中两个偏转接触点集合，定义如下：

$$\mathcal{P}_i = \{(x_i(s), y_i(s)) \mid s \in [0, L]\},$$

其中，$x_i(s)$ 和 $y_i(s)$ 是定义在紧区间 $[0, L]$ 上的连续函数。那么，交集

$$\mathcal{P}_C := \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$$

在非空时是紧致且连通的。在退化情形（单点集或空集）下，结论显然成立。

证明。每个 $\mathcal{P}_i$ 都是从紧致连通区间 $[0, L] \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数的像，因此 $\mathcal{P}_1$，$\mathcal{P}_2 \subset \mathbb{R}^2$ 都是紧致且连通的。虽然连通集的交集一般不一定连通，但在此情形下，两个集合都表示由物理一致且连续的模型所产生的梁偏转平滑轨迹。任何非空交集 $\mathcal{P}_C$ 都源于这些弧状轨迹之间的连续重叠，从而在 $\mathbb{R}^2$ 中形成一个连通的线段或区域。

由于紧集的交集仍为紧集，$\mathcal{P}_C$ 有界且闭。因此，只要非空，$\mathcal{P}_C$ 就是连通且有界的。若 $\mathcal{P}_C$ 是单点集或空集，则该结论显然成立。

□

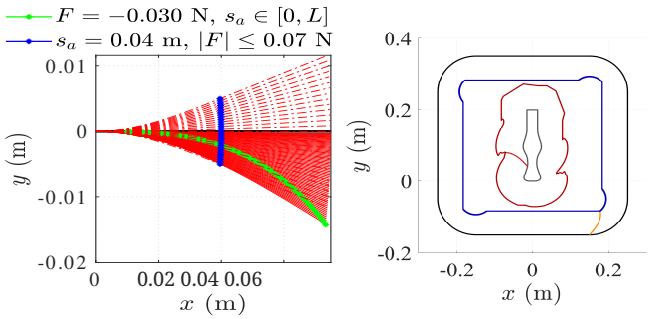
上述命题证明了根据触须观测获得的接触点集合是紧的且连通的，这为后续的空间滤波和时间滤波策略奠定了基础。

1) 合并来自多个传感器的接触点集合：传感器融合通过合并从不同虚拟传感器模型推断出的接触点集合，提升接触估计的准确性。每种模型（例如负载、末端斜率、接触条或力矩模型）都会生成一组与其观测及假定的梁模型相一致的接触点 $\mathcal{P}$。

这些集合可以通过互补的传感模态推导得出。它们的交集减少了接触估计中的歧义。例如，合并负载传感器和接触条传感器的观测可得

$$\mathcal{P}_C = \mathcal{P}_{\text{load}} \cap \mathcal{P}_{\text{strip}} \tag{19}$$

其中，$\mathcal{P}_C$ 表示与两个传感器的观测均一致的接触点。正如图6b所示，这一交集缩小了物理可行接触位置的范围。



(a) (b)

图6：传感器融合：(a) 负载传感器与接触条传感器的交集。$s \in [0, L]$和 $F \in [-F_{max}, F_{max}]$对应的参考坐标系中的可能触须构型（红色）。负载传感器（绿色）和接触条传感器（蓝色）检测到的可能接触点。这些集合的交集确定了接触点。(b) 接触点不确定性的降低产生了一个原像，表明与图4b所示的前一种情况相比，机器人状态的不确定性有所降低。

这一几何交集与基于原像的集合论表述相关，

$$\Delta(F, s) = h_{ls}^{-1}(F) \cap h_{css}^{-1}(s) \tag{20}$$

其中 $\Delta(F, s)$ 表示由各个传感器模型得出的三角测量原像。三角测量这一概念改编自 [10]。每个观测都会产生一组机器人状态和梁形状（原像），我们将这些集合（原像）的交集称为观测三角测量。进而，这会降低机器人状态的不确定性。

2) 使用单个传感器观测进行时间滤波：时间滤波通过一段时间内来自单个触须传感器的观测来估计接触点。该方法假设，对于较小且渐进的基座运动，物体上的接触位置以及触须/梁上的接触位置保持不变。对于较大的渐进基座运动，横向滑移和纵向滑移会产生显著影响，物体上的接触位置以及触须/梁上的接触位置将不再保持不变。如果在多个时刻获得接触点集合 $\mathcal{P}$，并且同时掌握基座运动信息，那么这些集合的交点就能提供接触点的滤波估计。

令 $\mathcal{P}_t$ 和 $\mathcal{P}_{t+1}$ 为两个连续时间步上的接触点集合。在固定接触假设下，这些集合的交集会产生一组新的接触点

$$\mathcal{P}_C = \mathcal{P}_t \cap \mathcal{P}_{t+1}. \tag{21}$$

这种方法使机器人在执行增量运动时，只需一个传感器即可进行接触定位。然而，当基座位移较大时，触须可能会在表面上滑移，交集也可能消失或发生偏移。这表明接触状态发生了变化，并使滑移检测成为滤波过程的副产品。

D. 运动模型

运动模型描述机器人构型如何随时间变化，以响应已知的控制输入或基座位移。在时间 t，与传感器观测相一致的机器人可能构型构成一个子集 $\mathbf{Q}_t \subseteq \mathbf{Q}$，该子集由剔除梁形状后的原像得到。尽管 $\mathbf{Q}_t$ 位于连续空间中，但出于计算用途，我们通过采样将其离散化为有限集合 $\hat{\mathbf{Q}}_t = \{(q_{x_k}, q_{y_k}, q_{\theta_k})\}_{k=1}^{K}$，其中每个元组代表一个采样得到的机器人构型。

为在已知运动下传播这些配置，我们应用一个平面刚体变换，该变换由平移（t_x，t_y）和旋转 θ 定义。该运动由变换矩阵 T_t 表示，并相对于每个配置 $q_k \in \mathbf{Q}_t$ 应用；每个配置首先表示为齐次变换矩阵 T_k。

当变换在局部坐标系中进行时，更新后的位姿计算为 $T_k' = T_k \cdot T_{\text{local}}$，所得配置 $q_k' = (q_{x_k}', q_{y_k}', q_{\theta_k}')$ 则通过读取 T_k' 中的平移和旋转得出。具体而言，新位置由旧位置经（t_x，t_y）旋转和平移后计算得到，新方向由 $q_{\theta_k}' = q_{\theta_k} + \theta$ 给出。所得集合 $\hat{\mathbf{Q}}_{t+1} = \{q_k'\}_{k=1}^{K}$ 表示应用已知运动模型后，机器人在时刻 $t+1$ 可能处于的配置。

V. 传感器设计与标定

传感器设计和制造通常因任务而异。所提出的虚拟传感器可以利用当前技术部分实现。材料科学和微机电系统制造领域的最新进展，使接触条传感器得以开发（见图2b）。在工程化触须传感器中，弯矩传感器最为简单，也最为广泛制造。设计一种能够测量沿触须梁施加的法向载荷的传感器，极为复杂。我们开发了一种简单、低成本且

可重新配置的触须传感器，它能够测量基座处的磁通密度，类似于弯矩传感器（见模型 4）。其总成本低于 20 美元，其中大部分零件采用 3D 打印制成，因此可重新配置且适合长期使用。

A. 传感器制造

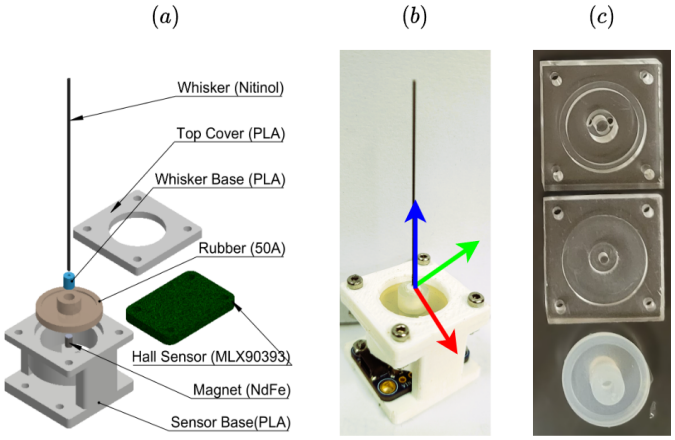


图 7：WhiskerSensor：（a）传感器的 CAD 模型，展示了所有必要组件。（b）制造完成的传感器。（c）橡胶柔顺元件（CE）及用于制造 CE 的丙烯酸模具。

该触须传感器采用模块化设计，便于制造。其设计受到先前研究的启发 [15],[24] ，并采用直触须元件，如图 7(a) 所示；制造完成的传感器见图 7(b)。材料的选择参考了以往研究，以确保最佳性能。传感器基座采用聚乳酸（PLA）进行 3D 打印，其密度为$\rho = 1230\text{kg m}^{-3}$、杨氏模量为 $E = 4.1\,\text{GPa}$，泊松比为 $\nu = 0.35$。使用霍尔传感器（MLX90393）测量基座处的磁响应，其三轴分辨率为 16 位，量程为 $\pm 5\,\text{mT}$ 至 $\pm 50\text{mT}$。或者，也可使用 TLE493D 霍尔传感器，其分辨率为 12 位，量程最高可达$\pm 160\text{mT}$。柔顺结构由邵氏硬度为 50A 的液态硅橡胶（LSR）制成，可通过改变其厚度和直径进行配置。LSR 由 A 组分和 B 组分按 1:1 的重量比混合制备，使用丙烯酸模板进行模塑，并固化 24 小时。触须元件由一根细镍钛合金丝制成，直径为 0.58mm，杨氏模量为$E = 52$ GPa，截面惯性矩为 $I = 5.555 \times 10^{-15}\,\text{m}^4$,，密度为 $\rho = 6450\text{kg m}^{-3}$，有效长度为 75 mm。

B. 传感器校准

校准过程如下： [24], [35], 建立霍尔传感器测得的磁通密度 B 与悬臂梁固定基座处的弯矩 $M(0)$ 之间的映射。校准

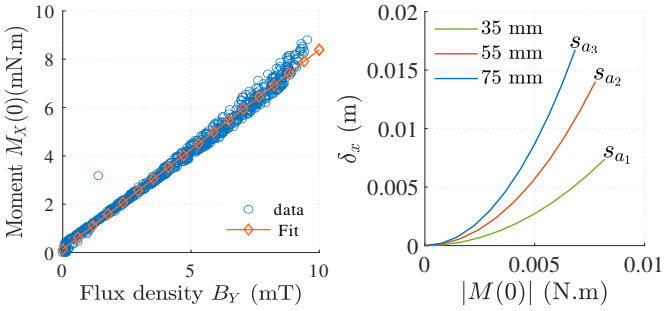


图 8：传感器校准：(a) 通量密度到基座弯矩的映射。(b) 基座弯矩到 δ_x 的映射（ δ_x 参见图 1b）。

通过将触须偏转至 YZ 平面内的多个接触点 $(p_{x_i},\ p_{y_i})$ 并记录相应的测量值 (B_i) 来完成，其中 $i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ n$，且$n = 1000$ 能够确保具有良好的代表性。同样，数值模型 [30] 用于偏转触须并记录弯矩 $M(0)_i$。目的是推导出 B_i 与 $M(0)_i$ 之间的映射。

数值模型根据 Quist 等人提出的公式 [30]，模拟细长触须状梁在点载荷作用下的弯曲，并以“点模式”运行。在“点模式”下，接触点的坐标 $(p_x,\ p_y)$ 已知。模型求解力 F 和弧长 s_a ，使偏转点与 $(p_x,\ p_y)$ 重合。随后，模型返回偏转触须形状，以及基座处力和力矩的完整二维分量。

所有传感器特定参数（包括几何形状和材料属性）均与 V-A 节所述内容一致。为使模拟响应与真实传感器相匹配，在固定端施加弹性边界条件。该校准结果如图 8a 所示。

对于大角度偏转，校准还建立了 $M(0)$ 与水平偏转 δ_x 之间的关系，如式 (4) 所述。尽管由于梁偏转的非线性特性，这种映射并非一一对应，但仍然很有用。图 8b 展示了这种映射。采用刚性触须（例如碳纤维）时，力矩-偏转关系在更大的范围内会是一一对应的。相比之下，柔性触须常会出现尖端滑移，尤其是在载荷较高时。当接触发生在靠近末端的位置时，映射 $B \rightarrow M(0)$ 和 $M(0) \rightarrow \delta_x$ 几乎呈一一对应，可靠性也更高。

VI. 触须接触与障碍物形状分析

实验分析将虚拟传感器模型与两个关键目标联系起来：(1) 接触点确定和 (2) 障碍物形状估计。实体传感器观测无法直接得出接触点或机器人状态。为提取这些信息，我们应用了第 IV-C 节介绍的滤波策略。具体而言，我们对可能的接触点集合进行时间滤波，

以根据虚拟传感器模型的输出估计接触位置。随后，我们将相同的方法应用于实体触须传感器，以确定接触点并估计障碍物形状。需要注意的是，这些实验不涉及显式运动规划。随着触须沿已知轨迹扫过障碍物，我们对接触点和障碍物边界形状进行估计。

实验中，触须传感器安装在分辨率为10µm的三维线性平台上。传感器连接到一块 Teensy 4.0 板，以每秒300个样本的速率传输数据。所有数据采集、运动控制和分析均在配备英特尔酷睿 i5 处理器的 Windows 10 系统上完成。使用 MATLAB® R2023a 进行数据分析，包括使用 polyshape、polygon 和 polyxpoly 函数对接触点集合进行几何表示并求交。

A. 实验：接触点确定

使用第 IV-C 节介绍的时间滤波方法，估算触须梁上的接触点。该方法基于一个假设：在基座发生小幅增量运动期间，接触位置保持不变；在此假设下，计算连续时间步中可能接触点集合的交集。在我们的实验中，该方法通过一个改编自 [30]，的数值模型实现，该模型以“力模式”运行，以生成可能的接触点集合。在“力模式”下，实验者在沿触须向外一定弧长 (s) 的位置施加大小已知的力。假设不存在摩擦，力的方向始终垂直于触须在施力点处的切线。随后，Elastica2D——一种数值仿真工具——计算偏转触须的形状，以及基座处力和力矩的所有二维分量。这些集合源自针对每次传感器观测计算出的弯曲梁形状，如图3a所示，并在第 IV-B1 节中讨论。图9展示了沿 y-轴发生1毫米基座线性位移时，所有虚拟传感器模型估算出的接触点。

将第 IV-C 节所述的空间和时间滤波方法应用于物理传感器观测，以估计接触点。也可以通过将两个物理传感器以固定距离放置，并使二者在同一位置接触，来演示空间滤波。图 10 展示了使用物理

传感器。通过校准（如第五节B部分所述），将测得的磁通密度 B 映射为基座处的弯矩 $M(0)$。时间滤波过程采用了与 [37]，中所述方法类似的方法，并将结果与 [19]中描述的最先进的解析方法进行比较。表I给出了接触估计精度。如果未找到连续两组可能接触点之间的交点，则会出现两种情况：（1）接触发生在触须的末端；或（2）由于滑移而失去接触。如果传感器输出超过预定义阈值且未找到交点，则可确认接触发生在末端。

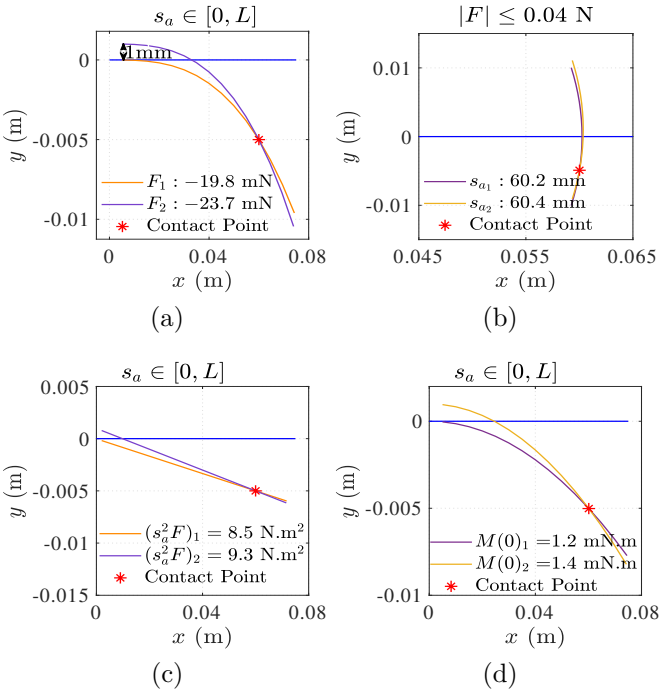


图 9：模拟虚拟传感器的接触点确定：通过时间滤波和基座线性位移，求取可能接触点的交点来确定接触点。(a) 负载传感器。(b) 接触条传感器。(c) 端部斜率传感器。(d) 力矩传感器（小角度情况）。接触点估计考虑了多种参数值和虚拟传感器输出。

表I：使用实体传感器进行接触点估计的结果。传感器在基座处测量增量力矩$M(0)$，基座线位移为1 mm。结果与最先进方法 [19],[35]进行比较。此处， p_x 和$\hat{}p_x$ 分别表示真实接触位置和估计接触位置， d 表示估计距离， ϵ 表示估计误差。

p_x(毫米) $\hat{}p_x$	M_0 (毫牛 ·米) $\hat{}d$ (我们的方法) %ϵ $\hat{}d$ (最先进方法) %ϵ					
70	71.5	0.19	71.5	2.1	67.5	3.5
65	65.4	0.20	65.4	0.6	65.8	1.3
55	55.8	0.28	55.8	1.4	55.6	1.1
45	44.5	0.42	44.5	1.1	45.4	0.9
35	34.9	0.63	34.9	0.3	37.1	5.9

B. 实验：障碍物轮廓估计 on

本实验旨在沿障碍物表面扫动触须传感器，并持续记录接触信息，以估计障碍物的形状。传感器安装在分辨率为 10µm 的三维线性平台上；尽管该平台支持三维运动，我们将传感器相对于其参考坐标系的运动限制在 yz 平面内（见图7b）。这种设置能够在传感器与物体交互时，对基座位移进行控制。在每个时间步，实体传感器测得的磁通密度会转换为触须基部的弯矩，作为

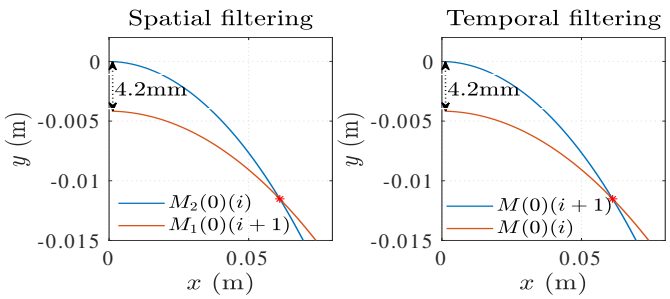


图10：大角度偏转下触须传感器参考系中的接触点：交点（红色星标）表示接触点。使用了图8b中的标定数据。（a）空间滤波可通过在传感器参考坐标系中的预定义位置放置两个或更多传感器来实现。 $M_1(0,\ i)$和$M_2(0,\ i)$由两个相距4.2 mm的传感器记录。（b）使用单个触须传感器时采用时间滤波。传感器基座移动了4.2 mm，并记录了 $M(0,\ i) = 17\,\text{mN}\cdot\text{m}$和 $M(0,\ i+1) = 25\ \text{mN}\cdot\text{m}$。

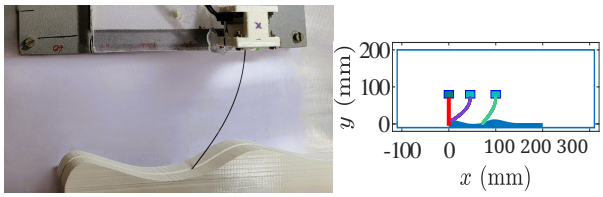


图11：传感器和障碍物的实验与仿真表示：（a）触须传感器（见图7）安装在直线平台上，并掠过障碍物。（b）估计得到的触须传感器形状。

虚拟力矩传感器模型的观测。整体实验装置如图11a所示，相应的触须偏转仿真结果如图11b所示。

我们采用第 IV-C 节介绍的时间滤波方法，通过求连续时间步内可能接触点集合的交集来估计接触位置。该方法假设在基座发生小幅运动期间，接触保持固定；当交点发生移动时，则表明物体或触须上出现了滑移。虽然滑移是连续接触和形状估计的线索 [35], ，但本研究并未直接对其建模，而是将其视为伴随结果。经验观测表明，在持续扫掠过程中，接触点通常会向触须末端移动。这促使我们采用尖端接触标定策略：当接触发生在末端时，利用尖端水平偏转 δ_x （见图 1b）估计梁形状。随后，使用大角度偏转公式重建偏转触须形状，并为每次传感器观测确定偏转接触点（$x(s_a)$ $y(s_a)$）

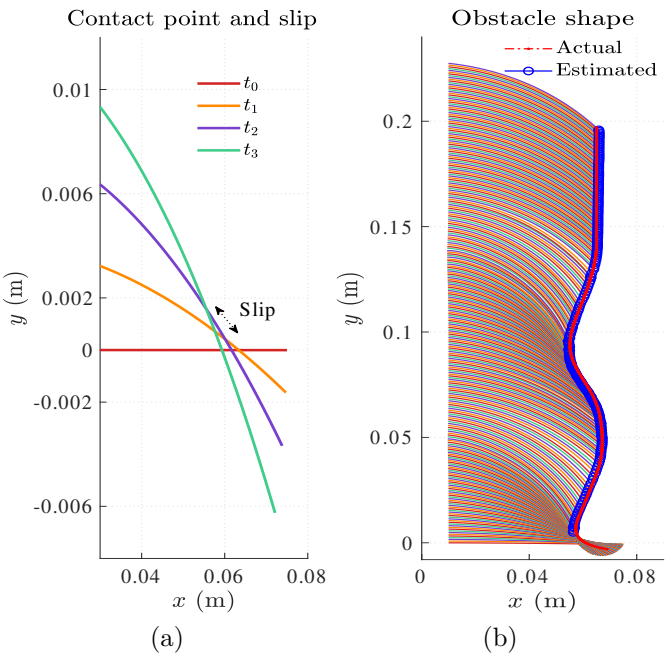


图 12：物体轮廓确定：(a) 基座每步移动 4.2 mm 时的连续接触点和滑移量化。滑移是指触须沿自身或边界发生的接触偏移，此时触须正扫过障碍物边界。(b) 根据连续接触点得到的物体轮廓。接触点通常会滑移至末端。图中展示了不同时间点估算出的触须传感器形状；估算的物体轮廓与实际轮廓非常接近。

。随后，利用已知的触须基部运动轨迹累积这些接触点。

为估计物体边界，所有时间步中的累积接触点构成如下空间并集： $\bigcup_{t=2}^{T_{final}} (x_t(s_a)\ y_t(s_a))$. 该集合表示物体轮廓的离散近似。当连续接触点沿触须的位置不重合时，尤其是在基座位移较大时，可以推断发生了滑移事件。图 12a 展示了这些连续接触点，并标出了滑移转变；图 12b 则展示了根据接触历史构建的估计物体轮廓。针对每条基座运动轨迹，执行五次独立扫描以生成可靠的轮廓，并将其与用于制造物体的三维 CAD 模型所提供的真实形状进行比较。

VII. 机器人定位

本节介绍一种基于触须传感器观测的定位框架，其中包括推断出的接触点和梁形状。我们首先介绍一种根据观测构建原像的方法，随后说明定位过程。为降低根据原像获得的机器人状态的不确定性，我们

应用第 IV-D 节介绍的运动模型，对已知机器人状态进行前向投影。

A. 根据传感器观测构建原像

给定传感器响应后，可以利用接触点和触须形状构建原像。一种常见的实际情况是，接触点最终会向梁的自由端移动。已知梁形状时，我们将触须沿已知环境地图的边界对齐，以获得一组可能的机器人构型。在任意时间步 t $\mathbf{Q}_t \subseteq \mathbf{Q}$ 对机器人的构型空间进行离散化会引入近似误差，尤其是在尖角等高曲率特征附近，此时微小的位姿变化可能导致接触几何发生较大变化。这种误差可能造成歧义，因为多个相邻的离散构型在环境中可能产生无法区分的传感器观测。提高构型空间的采样密度或采用由粗到细搜索，可以在保持计算效率的同时提高定位精度。

随着机器人移动，可能出现两种情况：(1) 接触点靠近凹边界段，导致曲率增大（见图 13a）；或 (2) 接触点远离凹陷区域，导致曲率减小（见图 13b）。给定末端斜率 ϕ_a 和触须形状，我们利用触须形状的短时间历史（2 至 3 个）来估计接触点处的瞬时边界斜率 ϕ_{E_t}。瞬时边界斜率 ϕ_{E_t} 可利用由基座运动轨迹以及在时间步 t 和 $t+2$观测到的触须形状推导出的相对位姿计算得出。对于环境离散化边界情境下原像的精确构建，这一估计至关重要。

时间索引为 t 的传感器观测对应于一种特定的触须形状，该形状必须沿环境边界始终保持对齐。触须与边界之间所需的倾角 γ_t，通过接触处的触须斜率 ϕ_{a_t} 和局部边界斜率 ϕ_{E_t} 确定，这些斜率由两个或更多近期触须样本获得。触须与环境边界之间的对齐角 γ_t，根据接触点处的触须斜率 ϕ_{a_t} 和局部边界斜率 ϕ_{E_t} 计算，其中 $\gamma_t = \pi - (\phi_{a_t} + \phi_{E_t})$。此处，$\gamma_t$ 表示触须与接触点处边界之间的角度差。

根据传感器观测确定接触点、触须形状、边界斜率 ϕ_{E_t}和对齐角 γ_t 后，构造原像所需的所有要素便已齐备。这些要素为计算时间索引 t 处机器人在原像中的位姿奠定了基础，具体方法是求当前可能状态与前向投影的过去状态的交集，详见下文所述的定位方法。

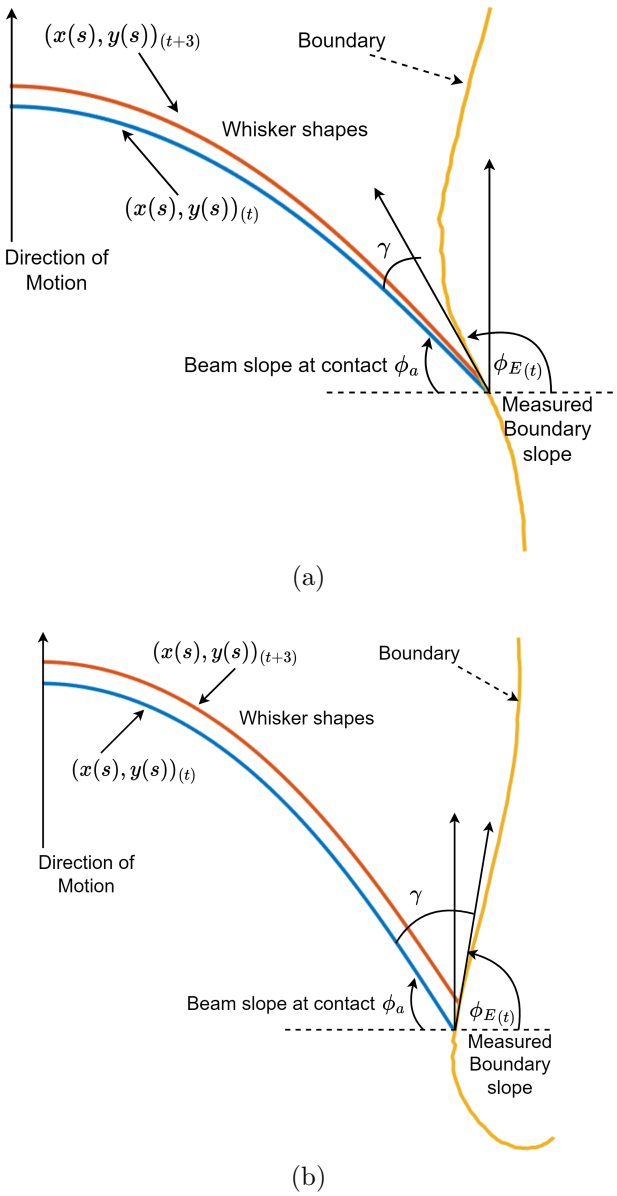


图 13：沿环境边界的触须接触角：a）扫掠接触点接近曲率增大的凹形区域；b）触须接触点离开曲率减小的凹形区域。

B. 定位：确定性方法

为利用触须传感器的观测进行自定位，我们根据估计的接触点、触须形状、边界斜率和对齐角构造原像。假设环境中包含障碍物，其边界由解析定义的连续函数构成；在计算实现中，这些函数通过间隔为1毫米的离散化点进行近似。

在时间 t，我们利用至少三次传感器观测构造扩展集合 $\mathbf{Q}_{\text{aug}}$，以确定接触点（p_x，p_y）、触须方向 γ_t、边界斜率 ϕ_{E_t} 以及触须形状 $x(s)$ $y(s)$。可能的

时间 t 的状态$\mathbf{Q}_t \subset \mathbf{Q}$ 是通过将触须形状对齐到已知环境边界上的每个离散点来获得的，同时保持倾角γ_t 不变。这种对齐确定了机器人构型，如下所示：

$$q_k = T_k \cdot R(-\phi_a - \gamma_t) \cdot \begin{bmatrix} -x(s_a) \\ -y(s_a) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

其中，$q_k \in \mathbf{Q}_t$ 是通过将触须形状与由齐次变换 $T_k \in SE(2)$表示的环境边界点对齐而得到的一个可能机器人状态。接触点（$x(s_a)$ $y(s_a)$）定义在触须的局部坐标系中。旋转矩阵 $R(\cdot)$施加必要的角度修正，使触须与 T_k处的边界对齐；由此得到的变换给出了与观测到的传感器响应相一致的机器人位姿。

应用运动模型可得到前向投影的状态集合$\hat{\mathbf{Q}}_{t+1}$，该集合是将已知的局部变换 T_{local} 应用于$\mathbf{Q}_t$中的每个状态后得到的。随后，使用基于样条的插值和几何建模工具，将这个离散集合转换为多边形表示，如图14b中的虚线曲线所示。随后的一次传感器观测 z_{t+1} 使用与之前相同的步骤，得到一组新的可能状态$\mathbf{Q}_{t+1}^{\text{obs}}$ 。交集

$$\mathbf{Q}_{t+1} = \hat{\mathbf{Q}}_{t+1} \cap \mathbf{Q}_{t+1}^{\text{obs}}$$

通过 MATLAB 中的 polyxpoly 操作求得，得到一小组状态，如图14c所示（19个蓝色点）。这一感知、运动应用和求交过程会反复迭代，从而减少机器人构型的歧义。图14d所示为结合了更多传感器读数后歧义较小的一组状态（6个红色点）。

不完美的传感器测量值、校准误差和运动模型误差都会导致机器人估计状态存在不确定性。因此，如上所述，直接求原像的交集在这些不完美因素下可能无法得到有效或完整的估计。为解决这一问题，可以使用可能性或概率框架来构建和细化原像表示。在下一小节中，我们将介绍一种用于机器人定位的可能性方法，该方法纳入了这些不确定性。

C. 定位：可能性方法

系统层面的不确定性——例如传感器噪声、校准误差和运动误差——会导致机器人估计状态的整体不精确。这些误差来源包括传感器校准中的误差（例如将磁通密度映射为弯矩）、传感器噪声、在非线性接触条件下对尖端水平偏转的估计误差 δ_x，以及运动模型的不完善。为考虑这些有界不确定性，我们采用一种可能性框架，将此类不完善性纳入原像表述中。

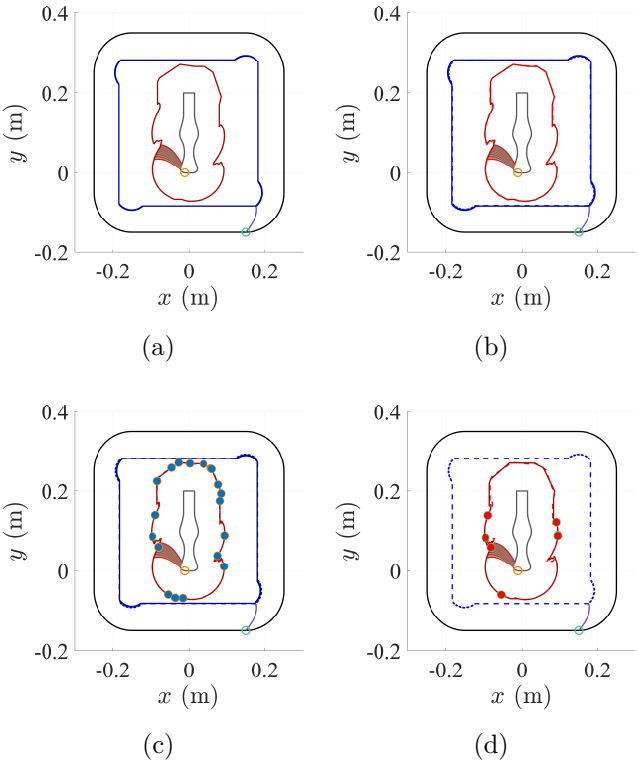


图 14：以确定性方法对机器人进行定位：(a) 记录传感器观测后机器人的可能状态（红色和蓝色）。（b）施加运动后向前投影的机器人状态（虚线）。（c）施加运动并获得新的观测后，机器人的可能状态（散布的蓝色点）。（d）获得四次观测后机器人状态数量减少（散布的红色点）。

考虑基于集合的噪声的一般情况，传感器映射记为 H，其定义为将噪声考虑在内，使得

$$H : Q \times \mathcal{A} \to \text{pow}(Z), \tag{23}$$

其中，$\mathcal{A} = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$、$Z$ 为观测空间，pow(·)表示幂集。设 $\varepsilon > 0$ 为已知的传感器观测噪声上界。具体而言，我们使用的传感器映射定义如下方程所示

$$H(q, \alpha) = \{z \in Z \mid |h(q, \alpha) - z| \leq \varepsilon\}, \tag{24}$$

其中，$h(\cdot)$ 是确定性设定下的传感器映射。因此，给定观测 z，在 H 下可能产生 z 的状态集合为

$$H^{-1}(z) = \{(q \in Q,\ \alpha \in \mathcal{A}) \mid z \in H(q, \alpha)\}. \tag{25}$$

这类似于函数原像的概念。在我们基于可能性框架实现定位时，不确定性设为观测值的 $\varepsilon = 5\%$，具体依据传感器特性确定。

图15展示了在感知和运动模型存在不确定性的情况下，机器人定位的可能性方法。

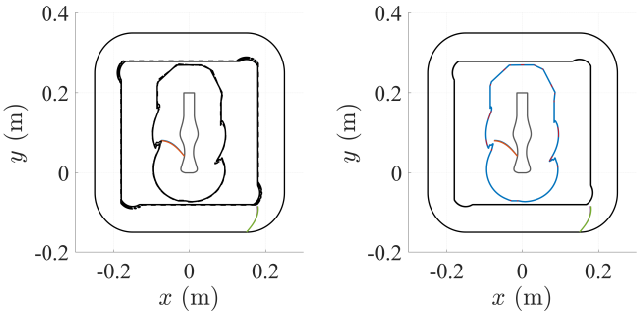


图15：存在感知与运动模型误差时的机器人可能性定位方法：（a）通过第二次测量获得的原像。（b）第三次测量后机器人可能所在位置的可能性子集（红色）。

图15a显示了纳入第二次测量后得到的原像，其中考虑了传感器响应的有界不确定性。该原像表示机器人可能所在的状态空间区域，而非一个精确点。机器人经过一次运动更新并获得第三次观测后，前向投影得到的状态集合$\mathbf{Q}_{t+1}$与根据新的传感器观测原像得到的可能性构型相交。如图15b所示，这一交点产生了经过细化的子集（以红色突出显示），代表可能性更高的机器人构型。这一迭代过程使定位方法能够在存在组件级不确定性的情况下，逐步缩小机器人状态的范围。

D. 定位误差分析

为了评估定位精度，我们记录了直线平台测得的传感器真实位置（分辨率为 10 µm），以及相应的传感器观测。基于原像的定位方法在传感器沿凹形边界扫描并产生一致的观测变化时，表现可靠。在确定性定位中，平均定位误差保持在 7 mm 以下。如图11所示，我们在相似条件下针对不同扫描编号进行了实验扫描。每个扫描编号都对应一个已知位置，障碍物扫描从该位置开始，因此定位过程也从此处开始。我们改变了运动模型参数（t_x，t_y），包括用于估计瞬时边界斜率 ϕ_{E_i} 的样本数量，通常为 2 到 5 个。 ϕ_{E_i} 的估计对于构建精确的原像至关重要，尤其是在地图边界为离散近似时。为保持高精度，每步的线性运动（t_x 或 t_y）均限制在 1毫米以内，与离散化环境边界的空间分辨率一致。

表II：当已知接触发生在末端时，沿障碍物边界进行不同触须扫描编号的平均定位误差。

扫描编号	01	02	03	04	05
平均误差 ϵ （毫米）	2.79	6.20	3.60	5.50	7.30
标准差 σ （毫米）	1.09	1.67	0.02	0.65	0.44

VIII. 结论与未来工作

本文提出了一种利用触须传感器进行接触点估计和基于原像的机器人定位方法。通过利用触须梁的偏转形状和估计的接触点，借助数值求得的可能状态集合的交点来估计机器人位姿。与依赖解析模型或概率模型的传统方法不同，所提出的框架采用环境边界和梁形状的离散表示，在已知环境中对传感器或机器人进行定位。通过数学模型和可视化进行的评估表明，该方法具有稳定的定位性能，尤其是在凹形障碍物边界处。

然而，准确定位需要仔细校准，因为机械错位或建模不准确会降低传感器观测的质量。触须传感器固有的非线性使精确的接触估计更加复杂，不过 Quist 等人提出的数值模型 [30] 能够建立物理读数与触须基部产生的力和力矩之间的映射。这些挑战凸显了采用结构化计算策略的必要性，尤其是在将此框架扩展到更高维度的状态空间时。

未来工作将从多个方向扩展这一方法。在确定性模型和可能性模型的基础上，我们将研究概率方法，以融合来自多种传感模态的信息。将触须观测与远距离感知相结合，可以提高鲁棒性；集成基于微机电系统的惯性测量单元，则可提供方向信息，从而减少歧义并加快定位。将该方法扩展到三维笛卡尔空间和杂乱的平面环境，需要采用最优运动策略、细化可能状态的交点，并高效地实时管理迭代前向投影。

致谢

作者衷心感谢 Mitra J. Hartmann 教授提供 elastica2D 模型的使用权限，该模型对本研究至关重要。

参考文献

[1] B. Mitchinson、C. J. Martin、R. A. Grant 和 T. J. Prescott，“主动感知中的反馈控制：大鼠的探索性触须运动受与环境接触的调节”，英国皇家学会学报B辑：生物科学，第274卷，1041，2007 1613，1035，页码 – 。[2] R. Chen、J. Xu 和 S. Zhang，“短距离应用中3D光学传感器的比较研究”，《光学与激光工程》，第149卷，页码106763，2022年。[3] A. Kottapalli、M. Asadnia、J. Miao 和 M. Triantafyllou，“受港海豹触须启发、用于降低涡激振动的流动传感器”，载于2015年第28届IEEE微机电系统国际会议（MEMS）。IEEE，2015年，页码889–892。[4] N. F. Lepora、M. Pearson 和 L. Cramphorn，“Tacwhiskers：仿生光学触觉触须机器人”，载于2018年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议（IROS）。IEEE，2018年，页码7628–7634。[5] P. Xu、X. Wang、S. Wang、T. Chen、J. Liu、J. Zheng、W. Li、M. Xu、J. Tao 和 G. Xie，“一种基于摩擦电的人工触须，用于反应式避障和局部建图”，《Research》，2021年。[6] M. Evans、C. W. Fox、M. J. Pearson 和 T. J. Prescott，“地面纹理辨别任务中机器人触须传感器信号的基于谱模板的分类”，TAROS会议论文集，页码19–24，2009年。[7] S. N’Guyen、P. Pirim 和 J.-A. Meyer，“机器人鼠Psikharpax利用人工触须进行纹理辨别”，载于生物医学工程系统与技术国际联合会议。施普林格，2010年，页码252–265。[8] P. K. Routray、A. S. Kanade、K. Tiwari、P. Pounds 和 M. Muniyandi，“通过触须实现多维纹理感知与分类”，载于2022年IEEE机器人与传感器环境国际研讨会（ROSE）。IEEE，2022年，页码1–7。[9] L. A. Huet、J. W. Rudnicki 和 M. J. Hartmann，“利用各种形状的触须进行触觉感知：根据触须基部的机械信号确定物体接触的三维位置”，《软体机器人》，第4卷，第2期，页码88–102，2017年。[10] S. M. LaValle，《感知与滤波：基于原像和信息空间的新视角》。Now出版社，2012年。[11] M. M. Bilevich、S. M. LaValle 和 D. Halperin，“通过少量距离测量，利用隐式流形的交集进行传感器定位”，载于2023年IEEE机器人与自动化国际会议（ICRA）。IEEE，2023年，页码1912–1918。[12] W. Deer 和 P. E. Pounds，“用于接触、接触前及流体速度感知的轻质触须”，《IEEE机器人与自动化快报》第4卷，第2期，页码1978–1984，2019年。[13] J. H. Solomon 和 M. J. Hartmann，“用于感知特征的机器人触须”，《自然》，第443卷，第7111期，页码525–525，2006年。[14] J. Stocking、W. Eberhardt、Y. Shakhsheer、B. Calhoun、J. Paulus 和 M. Appleby，“一种基于电容、用于流体运动感知的类触须人工传感器”，载于SENSORS，2010年IEEE。IEEE，2010年，页码2224–2229。[15] S. Kim、C. Velez、D. K. Patel 和 S. Bergbreiter，“一种磁转导触须，用于角位移和力矩感知”，载于2019年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议（IROS）。IEEE，2019年，页码665–671。[16] J. Han、G. Waddington、R. Adams、J. Anson 和 Y. Liu，“本体感觉评估：方法的批判性综述”，《运动与健康科学杂志》，第5卷，第1期，页码80–90，2016年。[17] W. C. Eberhardt、B. F. Wakefield、C. T. Murphy、C. Casey、Y. Shakhsheer、B. H. Calhoun 和 C. Reichmuth，“受海豹触须阵列启发的流体动力学检测人工传感器的开发”，《生物启发与仿生学》，第11卷，第5期，页码056011，2016年。[18] N. H. Nguyen 和 V. A. Ho，“修剪式软触须传感器的力学与形态补偿策略”，《软体机器人》，第9卷，第1期，页码135–153，2022年。[19] M. Kaneko、N. Kanayama 和 T. Tsuji，“用于接触感知的主动天线”，《IEEE机器人与自动化学报》，第14卷，第2期，第278–291页，1998年。[20] M. J. Pearson、A. G. Pipe、C. Melhuish、B. Mitchinson 和 T. J. Prescott，《Whiskerbot：一种以大鼠胡须感觉系统为模型的机器人主动触觉系统》，《适应性行为》，第15卷，第3期，第223–240页，2007年。[21] M. Fend、S. Bovet、H. Yokoi 和 R. Pfeifer，《用于纹理辨别的主动式人工触须阵列》，载于《2003年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议论文集》（IROS 2003）（目录号03CH37453），第2卷。IEEE，2003年，第1044–1049页。[22] A. E. Schultz、J. H. Solomon、M. A. Peshkin 和 M. J. Hart- mann，《用于距离检测、地形绘制和物体特征提取的多功能胡须阵列》，载于《2005年IEEE机器人与自动化国际会议论文集》。IEEE，2005年，第2588–2593页。[23] K. Sisanth、M. Thomas、J. Abraham 和 S. Thomas，《橡胶混炼概论》，载于《橡胶纳米复合材料进展》。爱思唯尔，2017年，第1–39页。[24] M. A. Lin、E. Reyes、J. Bohg 和 M. R. Cutkosky，《受触须启发的触觉感知：用于机器人操作器接触定位》，载于《2022年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议论文集》（IROS）。IEEE，2022年，第7817–7824页。[25] K. Tiwari、B. Sakcak、P. Routray、M. Manivannan 和 S. M. LaValle，《用于导航的受可见性启发的触觉传感器模型》，载于《2022年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议论文集》（IROS）。IEEE，2022年，第13 151–13 158页。[26] A. M. Okamura，《机器人辅助手术中的触觉反馈》，《泌尿学当前观点》，第19卷，第1期，第102–107页，2009年。[27] T. J. Prescott、M. J. Pearson、B. Mitchinson、J. C. W. Sullivan 和 A. G. Pipe，《机器人胡须探测》，《IEEE机器人与自动化杂志》，第16卷，第3期，第42–50页，2009年。[28] Z. Wang、F. P.-W. Lo、Y. Huang、J. Chen、J. Calo、W. Chen 和 B. Lo，《触觉感知：一种用于临床胃肠道疾病筛查的仿生胡须方法》，《npj机器人》，第1卷，第1期，第3页，2023年。[29] O. A. Bauchau 和 J. I. Craig，《欧拉-伯努利梁理论》，载于《结构分析》。施普林格，2009年，第173–221页。[30] B. W. Quist 和 M. J. Hartmann，《大鼠触须基部的机械信号：触须固有曲率的影响及其对触觉探索的启示》，《神经生理学杂志》，第107卷，第9期，第2298–2312页，2012年。[31] D. Kim 和 R. Möller，《用于形状识别的仿生胡须》，《机器人与自主系统》，第’55卷，第3期，第229–243页，2007年。[32] J. H. Solomon 和 M. J. Hartmann，《适用于阵列实现的人工触须：考虑横向滑移和表面摩擦》，《IEEE机器人学汇刊》，第24卷，第5期，第1157–1167页，2008年。[33] J. A. Birdwell、J. H. Solomon、M. Thajchayapong、M. A. Taylor、M. Cheely、R. B. Towal、J. Conradt 和 M. J. Hartmann，《用于大鼠触须系统径向距离测定的生物力学模型》，《神经生理学杂志》，第98卷，第4期，第2439–2455页，2007年。[34] Y. Boubenec、D. E. Shulz 和 G. Debrégeas，《触觉主动探索过程中触须对机械事件的编码》，《行为神经科学前沿》，第6卷，第74页，2012年。[35] J. H. Solomon 和 M. J. Z. Hartmann，《利用机器人触须的扫掠动作和扭矩信息提取物体轮廓》，《国际机器人研究杂志》，第29卷，第9期，第1233–1245页，2010年。[36] H. Emnett、M. Graff 和 M. Hartmann，《一种用于三维接触点确定和轮廓提取的新型触须传感器》，载于《机器人科学与系统会议》，第14卷，第6期，2018年6月，2018年。[37] M. S. Sofla、S. Vayakkattil 和 M. Calisti，《基于基座力矩读数的柔性胡须触觉定位》，《软体机器人》，2024年。[38] T. Beléndez、C. Neipp 和 A. Beléndez，《悬臂梁的大挠度与小挠度》，《欧洲物理学杂志》，第23卷，第3期，第371页，2002年。