arXiv:2601.05614v1 [math.DG] 9 Jan 2026

非Kähler流形上 Hermitian-Yang-Mills流的长期行为

Zeng Chen、CHAO LI、CHUANJING ZHANG 和 XI ZHANG

Abstract. 本文研究紧Hermitian流形上 Hermitian-Yang-Mills流的长期行为。我们证明，沿 Hermitian-Yang-Mills流，平均曲率特征值的下界和上界均具有单调性。在 Gauduchon情形下，我们证明平均曲率的特征值收敛到由 Harder-Narasimhan 型决定的几何不变量。此外，我们将 Atiyah–Bott–Bando–Siu问题推广到非Kähler情形。

1. Introduction

设 (M,ω) 是一个 n 维紧 Hermitian 流形，(E,∂_E) 是一个全纯向量丛。为寻找 Hermitian–Einstein度量，Donaldson ([18]) 为 (E,∂_E) 上的 Hermitian 度量 $H(t)$ 引入了以下演化方程，该方程称为 Hermitian-Yang-Mills流：

$$H^{-1}(t)\frac{\partial H(t)}{\partial t} = -2(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)} - \lambda\cdot \mathrm{Id}_E), \tag{1.1}$$

其中，$F_{H(t)}$ 是 $H(t)$ 的Chern曲率，Λ_ω 表示微分形式关于 ω的缩并，λ 是一个常数。对于K¨ahler流形情形，Donaldson（[18]）证明了上述热方程（1.1）的解存在唯一且可长期存在；对于一般的Hermitian流形情形，则由第四位作者（[58]）证明。

当 ω 为K¨ahler时，Hermitian-Yang-Mills流（1.1）的长期行为是众所周知的：对于稳定丛，流收敛于Hermitian–Einstein度量（[18],[19],[51]）；即使在一般情形下，由于Atiyah–Bott–Bando–Siu猜想（[14],[15],[27],[50],[33]）已得到证实，其在无穷远处的收敛性质也很明确。本文分析非K¨ahler流形上的 Hermitian-Yang-Mills流（1.1）的渐近行为。在陈述我们的结果之前，我们先介绍一些记号。设 $r=$ 秩为 E。对于 E上的任意Hermitian度量 H ，我们

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C07、14J60、32Q15。研究工作得到国家重点研发计划（2020YFA0713100）的资助。作者还获得了中国国家自然科学基金（编号：12141104、12371062和12431004）以及中国博士后科学基金（编号：2018M640583）的部分资助。

将平均曲率 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H$ 的 r 特征值记为 $\lambda_1(H,\omega),\lambda_2(H,\omega),\cdots,\lambda_r(H,\omega)$，并按降序排列。令

$$\vec{\lambda}(H,\omega)=(\lambda_1(H,\omega),\lambda_2(H,\omega),\cdots,\lambda_r(H,\omega)), \tag{1.2}$$

$$\lambda_L(H,\omega)=\lambda_r(H,\omega),\quad \lambda_U(H,\omega)=\lambda_1(H,\omega), \tag{1.3}$$

$$\hat{\lambda}_L(H,\omega)=\inf_M \lambda_L(H,\omega),\quad \hat{\lambda}_U(H,\omega)=\sup_M \lambda_U(H,\omega) \tag{1.4}$$

and

$$\begin{aligned}\lambda_{mL}(H,\omega)&=\frac{1}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\int_M \lambda_L(H,\omega)\frac{\omega^n}{n!},\\ \lambda_{mU}(H,\omega)&=\frac{1}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\int_M \lambda_U(H,\omega)\frac{\omega^n}{n!}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

若 Hermitian度量 ω 满足条件 $\partial\bar{\partial}\omega^{n-1}=0$，则称其为 Gauduchon 度量。Gauduchon（[20]）证明，对于紧复流形上的任意 Hermitian度量 $\hat{}\omega$，在其共形类中存在唯一的 Gauduchon 度量 ω（相差一个正数常数）。我们的第一个结果是，沿 Hermitian-Yang-Mills流，$\lambda_L(H(t)\ \omega)$ 和 $\lambda_U(H(t)\ \omega)$ 的单调性。

¯定理 *1.1.* 设 (M,ω) 为紧 *Hermitian* 流形，(E,∂_E) 为 M 上的全纯向量丛。假设 $H(t)$ 是定义在 (E,∂_E) 上 *Hermitian-Yang-Mills*流 *(1.1)* 的光滑解¯ ^。那么，$\lambda_L(H(t)\ \omega)$ 是递增的，而 $\lambda_U(H(t)\ \omega)$ 在 $[0,\infty)$ 上是递减的。若 ω 是 *Gauduchon* 度量，则 $\lambda_{mL}(H(t)\ \omega)$ 递增，而 $\lambda_{mU}(H(t)\ \omega)$ 递减。此外，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{mL}(H(t),\omega)=\lim_{t\to\infty}\hat{\lambda}_L(H(t),\omega), \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{mU}(H(t),\omega)=\lim_{t\to\infty}\hat{\lambda}_U(H(t),\omega). \tag{1.7}$$

我们的下一个结果表明平均曲率的极限具有唯一性。

定理 1.2。 假设 $H_1(t)$和 $H_2(t)$是 *Hermitian-Yang-Mills*流（*1.1*）的两个光滑解。则有

$$\lim_{t\to\infty}\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{H_1(t)}-F_{H_2(t)})\|_{L^2(H_1(t))}=0. \tag{1.8}$$

为了理解特征值极限的几何实质，我们需要¯回顾 Harder-Narasimhan 型。设 (E,∂_E) 是紧Gauduchon流形 (M,ω) 上的一个 r秩全纯向量丛。它具有唯一的 Harder–Narasimhan 过滤 $\{\mathcal{E}_\alpha\}_{\alpha=0}^{l}$（其中 $\mathcal{E}_0=0$ 和 $\mathcal{E}_l=E$），其连续商丛 $\mathcal{Q}_\alpha=\mathcal{E}_\alpha/\mathcal{E}_{\alpha-1}$（$1\le\alpha\le l$）是无挠且半稳定的（[9], [29]）。由此过滤可以构造一个非增的 r元实数 $\vec{\mu}_\omega(E)=(\mu_{1,\omega},\cdots,\mu_{r,\omega})$，称为 (E,∂_E) 的 Harder-¯Narasimhan 型，其中 $\mu_{i,\omega}=\mu_\omega(\mathcal{Q}_\alpha)$（即该商的 ω-斜率的

秩 $\mathcal{Q}_\alpha$）对于 rank($\mathcal{E}_{\alpha-1}$)$+1 \leq i \leq$ rank($\mathcal{E}_\alpha$)。在 E 上赋予 Hermitian度量 K。我们得到相应的正交投影 π_α^K：相对于 K， $E \to E$ 投影到子层 $\mathcal{E}_\alpha$ 上。众所周知，每个 π_α^K 都是一个L_1^2-有界 Hermitian自同态。定义

$$\Phi_\omega^{HN}(E,K) = \Sigma_{\alpha=1}^{l}\mu_\omega(\mathcal{Q}_\alpha)(\pi_\alpha^K - \pi_{\alpha-1}^K). \tag{1.9}$$

这是一个 L_1^2-有界的Hermitian自同态，称为（E， ∂_E）的Harder-Narasimhan投影。

在Gauduchon情形下，作者（[30]）通过连续性方法证明了 L^p-近似临界Hermitian结构的存在性。考虑以下扰动Hermitian-Einstein方程：

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E + \varepsilon \log(K^{-1}H) = 0, \tag{1.10}$$

其中 K 是 E上的任意固定背景度量，并假设 H_ε 是方程（1.10）的一个解。

定理 1.3 （[30]）。 设（M,ω）为一个紧*Gauduchon*流形，且（E,∂_E）为一个全纯向量丛。则存在一个序列 $\varepsilon_i \to 0$，使得

$$\lim_{i\to\infty}\left\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_{\varepsilon_i}} - \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\Phi_\omega^{HN}(E,K)\right\|_{L^p(K)} = 0 \tag{1.11}$$

对于任意 $0 < p < +\infty$。

于是，由定理 1.1、定理 1.2 和定理 1.3，我们可以推出 Hermitian-Yang-Mills 流下平均曲率特征值函数的极限性质。

定理 1.4. 设(M,ω) 是一个紧*Gauduchon*流形，(E,∂_E) 是其上的一个秩为 r 的全纯向量丛。假设 $H(t)$ 是(E,∂_E)上 *Hermitian-Yang-Mills* 流 *(1.1)* 的光滑解。那么

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\vec{\lambda}(H(t),\omega) - \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\vec{\mu}_\omega(E)\right\|_{L^2} = 0. \tag{1.12}$$

特别地，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{mL}(H(t),\omega) = \lim_{t\to\infty}\hat{\lambda}_L(H(t),\omega) = \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\mu_{r,\omega}, \tag{1.13}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{mU}(H(t),\omega) = \lim_{t\to\infty}\hat{\lambda}_U(H(t),\omega) = \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\mu_{1,\omega}. \tag{1.14}$$

作为上述定理的推论，全纯向量丛上特殊度量的存在性定理随之成立。

定理 1.5。 设(M,ω) 是一个紧*Gauduchon*流形，(E,∂_E) 是 M 上的全纯向量丛。那么对于任意 $\delta > 0$，存在一个 *Hermitian*度量 H_δ 作用于 E，使得

$$(\frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\mu_L(E,\omega)-\delta)\,\mathrm{Id}_E \leq \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_\delta} \leq (\frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\mu_U(E,\omega)+\delta)\,\mathrm{Id}_E\,. \tag{1.15}$$

注 1.6。 如果(E,∂_E)是 ω-半稳定的，那么 $\mu_U(E,\omega) = \mu_L(E,\omega) = \mu_\omega(E)$。因此，定理 *1.5* 表明，紧*Gaudu- chon*流形上的半稳定全纯丛存在近似 *Hermitian-Einstein* 结构，这一点已在 [45] 中证明。

利用定理 1.1 和定理 1.4，我们可以证明

定理 1.7。 设 (E,∂_E) 是紧致复曲面 M上的一个秩为2 的丰正全纯向量丛。那么必定存在一个 *Hermitian*度量 H，使其第二陈形式为正，即 $c_2(E,H) > 0$。

给定一个配有 Hermitian度量 H_0的全纯向量丛 (E, ∂_E)，其定义在紧致 Hermitian流形 (M, ω)上，记 $\mathcal{A}_{H_0}$ 为与 H_0相容的联络空间，记 $\mathcal{A}^{1,1}_{H_0}$ 为 H_0-酉可积联络空间。以初始数据H_0 为初值的 Hermitian-Yang-Mills流 (1.1) 与以下以初始数据 $A_0 \in \mathcal{A}^{1,1}_{H_0}$ 为初值的修正的杨-米尔斯流规范等价:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A(t)}{\partial t} = -\sqrt{-1}(\partial_{A(t)} - \overline{\partial}_{A(t)})\Lambda_\omega F_{A(t)}, \\ A(0) = A_0. \end{cases} \tag{1.16}$$

事实上， $A(t) = \sigma(t)(A_0)$，其中 $\sigma(t)$ 是一个复规范变换，满足 $\sigma^{*H_0}(t)\sigma(t) = H_0^{-1}H(t)$，而 $H(t)$ 是满足 $H(0) = H_0$ 的 Hermitian-Yang-Mills 流 (1.1) 的光滑解。

当 (M, ω) 是一个 K¨ahler 流形时，上述流 (1.16) 就是 Yang-Mills 流。作为 Yang–Mills 泛函的梯度流，它由 Atiyah-Bott 于 [2] 引入。根据 Uhlenbeck 紧性 ([53, 54])，存在一个子列 $t_i \to +\infty$，使得序列 $A(t_i)$ 在解析起泡集 Σ_{an} 之外，模去酉规范变换后，在 L^2_1 拓扑下弱收敛到极限丛 (E_∞, H_∞) 上的极限联络 A_∞。我们称这样的极限 A_∞ 为 Uhlenbeck 极限。根据 [23],中的结果，可以证明上述收敛可加强为 C^∞_{loc} 拓扑下的收敛。由于 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_\infty}$ 是平行的，我们在 $M \setminus \Sigma_{an}$ 上有一个全纯正交分解

$$(E_\infty, A_\infty, H_\infty) = \bigoplus_{i=1}^{l} (E^i_\infty, A_{\infty,i}, H_{\infty,i}), \tag{1.17}$$

其中每个 $H_{\infty,i}$ 都是全纯向量丛 E^i_∞上的 Hermitian–Einstein度量。此外，$(E_\infty, \bar\partial_{A_\infty})$ 可作为反身层延拓到整个 M 上。另一方面，存在一种称为 Harder-Narasimhan-Seshadri 滤过（简称 HNS 滤过）的双重滤过，其连续商丛实际上是稳定的，而非仅为半稳定。记 $Gr^{HNS}_\omega(E, \partial_E)$ 为相对于 ω的–(E, ∂_E) 的 Harder-Narasimhan-Seshadri 滤过的相伴分次层。一个有趣的问题是，$(E_\infty, \bar\partial_{A_\infty})$ 是否与 $Gr^{HNS}_\omega(E, \partial_E)^{**}$ 同构。这个问题最初由

Atiyah-Bott（[2]）针对黎曼曲面提出，随后由 Daskalopoulos（[14]）证明。Bando 和 Siu（[3]）猜想，这一结论对高维 Kähler 流形上的反身层 $\mathcal{E}$ 仍然成立。当层 $\mathcal{E}$ 局部自由时，Daskalopoulos 和 Wentworth（[15]）在 Kähler 曲面情形下证实了这一问题；Jacob（[27]）和 Sibley（[50]）则在高维 Kähler 情形下证明了这一点。Li、第三作者和第四作者（[33]）证实了反身层情形。自然会想到，这些结果在非 Kähler 情形下是否仍然成立?

在 [46], Nie中，第四位作者研究了修正的杨-米尔斯流(1.16)在Hermitian度量 ω 为Gauduchon且为astheno-K¨ahler的假设下的极限行为。他们证明:

定理1.8 ([46])。 设(E, H_0) 是紧致*Gauduchon*且*astheno-Kä ähler*流形(M, ω) 上的一个*Hermitian*向量丛，且 $A(t)$ 是修正的杨-米尔斯流(1.16) 的一个全局光滑解，初始条件光滑为 $A_0 \in \mathcal{A}^{1,1}_{H_0}$。那么

(1) 对每个序列 $t_k \to \infty$，都存在一个子列 t_{k_j} ，使得当$t_{k_j} \to \infty$, $A(t_{k_j})$ 时， A_∞ 收敛（模去酉规范变换）到一个满足下列条件的联络

$$D_{A_\infty}\Lambda_\omega F_{A_\infty} = 0 \tag{1.18}$$

在 *Hermitian*向量丛(E_∞, H_∞) 上，于 Σ_{an} 之外在 C^∞_{loc} 拓扑下收敛，其中 Σ_{an} 是一个豪斯多夫余维至少为4的闭集。
(2) 极限$(E_\infty, \partial_{A_\infty})$ 可以延拓到整个 M，成为一个带有全纯正交分裂的反身层

$$(E_\infty, A_\infty, H_\infty) = \bigoplus_{i=1}^{l} (E^i_\infty, A_{\infty,i}, H_{\infty,i}), \tag{1.19}$$

其中 l 是 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_\infty}$ 在 $X \setminus \Sigma_{an}$ 上的不同特征值的数量，而 $H_{\infty,i}$ 是反身层 E^i_∞ 上的可容许 *Hermitian-Einstein* 度量。

利用定理 1.4，我们进一步研究 Uhlenbeck 极限的结构，并对上述 Atiyah-Bott-Bando-Siu 问题在某些非 K¨ahler 流形上的情形给出肯定回答。

定理1.9。 设(E, H_0) 是紧致 *Gauduchon* 且 *astheno-K¨ahler* 流形(M, ω) 上的一个 *Hermitian*向量丛，且 $A(t)$ 是修正的杨-米尔斯流(1.16) 在光滑初值条件 $A_0 \in \mathcal{A}^{1,1}_{H_0}$ 下的全局光滑解。那么，任意 *Uhlenbeck* 极限$(E_\infty, \partial_{A_\infty})$ 的扩张反身层都与全纯向量丛(E, ∂_{A_0})的 ***HNS-***¯过滤所关联的分次层的双对偶同构，即有

$$(E_\infty, \overline{\partial}_{A_\infty}) \cong Gr^{HNS}_\omega (E, \overline{\partial}_{A_0})^{**}. \tag{1.20}$$

注记 1.10。 这里的弱 *K¨ahler* 条件主要用于控制修正的杨-米尔斯流 (1.16)上的杨-米尔斯能量，并且

然后我们可以通过 *Uhlenbeck*紧性分析极限行为。自然会问，在缺少弱 *K¨ahler* 条件的情况下，修正的杨-米尔斯流上的杨-米尔斯能量是否一致有界。

与 K¨ähler 情形下关于 Atiyah–Bott–Bando–Siu问题的研究（（[15, 27, 50, 33]）相比，主要区别在于我们证明了极限层的 HN 型与初始全纯向量丛¯（E，∂_{A_0}）的 HN 型相同。先前的方法（[15, 引理 4.3]）依赖于紧致 K¨ähler 流形上相关层的斜率具有离散性。作为替代，我们提出了一种新的论证，避免了这一限制。

本文安排如下。第 2 节介绍一些预备知识和估计，这些内容将在定理 1.1 和定理 1.2 的证明中使用。第 3 节分析 Hermitian-Yang-Mills 流的渐近行为，并完成定理 1.1、定理 1.2 和定理 1.4 的证明。第 4 节给出一些应用并证明定理 1.7。第 5 节用于证明定理1.9。

致谢：本研究获得国家重点研发计划 2020YFA0713100 资助。作者还获得中国国家自然科学基金（编号：12141104、11801535、11721101 和 11625106）、中国博士后科学基金（编号：2018M640583、2018M642515）以及中央高校基本科研业务费专项资金的部分资助。

2. Preliminary results

2.1. 稳定性与 Harder-Narasimhan 滤过。设 $(M,\ \omega)$ 是一个 n 维紧 Gauduchon流形，且 $\mathcal{F}$ 是 M 上的无挠层。$\mathcal{F}$ 的 ω-度定义为

$$\deg_\omega(\mathcal{F}) := \deg_\omega(\det(\mathcal{F})) = \int_M c_1(\det(\mathcal{F}), H) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{2.1}$$

其中，H 是 det $\mathcal{F}$ 上任意的 Hermitian度量。由于 ω^{n-1} 是 $\partial\bar{\partial}$-闭的，这是一个定义良好的实数，且与 H 无关。我们将 $\mathcal{F}$ 的 ω-斜率定义为

$$\mu_\omega(\mathcal{F}) := \frac{\deg_\omega(\mathcal{F})}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})}. \tag{2.2}$$

¯若对每个真饱和子层 $\mathcal{S} \subset E$，均有下式成立，则称全纯向量丛 $(E,\ \partial_E)$ 为 ω-稳定（分别称为 ω-半稳定）：

$$\mu_\omega(\mathcal{S}) < (resp.\ \leq)\mu_\omega(E). \tag{2.3}$$

¯若 H 是$(E,\ \partial_E)$上的 Hermitian–Einstein度量，且满足

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H = \lambda \cdot \mathrm{Id}_E, \tag{2.4}$$

其中 $\lambda = \frac{2\pi}{\text{体积}(M,\ \omega)}\mu_\omega(E)$。经典的 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理（[43, 18, 55]）指出，当 ω 为 K¨ähler 时，稳定性蕴含 Hermitian–Einstein 度量的存在。根据 [10, 39], ，我们知道

Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理对紧 Gauduchon 流形也成立。还有许多其他相关的重要且有趣的研究（例如
[1, 3, 5, 6, 7, 8, 15, 22, 24, 26, 29, 28, 31, 39, 38, 35, 32, 33, 40, 41, 42, 44,51, 52, 57], 等）。

不作稳定性假设时，我们需要以下结果，该结果对任意无挠层也成立。

命题 2.1 ([29, 9])。 设(E, ∂_E) 是紧*Gauduchon*流形(M, ω)上的一个全纯向量丛。那么存在一个由子层构成的唯一滤过E

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_l = E \tag{2.5}$$

使得每个商层 $\mathcal{Q}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha/\mathcal{E}_{\alpha-1}$ 都是无挠且 ω-半稳定的，并且 μ_ω（$\mathcal{Q}_\alpha$） $> \mu_\omega$（$\mathcal{Q}_{\alpha+1}$）。该滤过称为 （E, ∂_E） 的 *Harder-Narasimhan*滤过（简称 *HN* 滤过）。

若 rank(E) $= r$，由 Harder-Narasimhan 滤过可得一个非递增的 r元组

$$\vec{\mu}_\omega(E) = (\mu_{1,\omega}(E), \cdots, \mu_{r,\omega}(E)), \tag{2.6}$$

其中 $\mu_{i,\ \omega}(E) = \mu_\omega(\mathcal{Q}_\alpha)$，对于 rank($\mathcal{E}_{\alpha-1}$)$+1 \leq i \leq$rank($\mathcal{E}_\alpha$)。我们称 $\vec{\mu}_\omega(E)$为 ($E,\ \partial_E$) 的 Harder-Narasimhan 型（简称 HN 型）。

对于半稳定层，也存在类似的滤过。

命题 2.2 （[29, 9]）。 设 $\mathcal{Q}$ 是紧*Gauduchon*流形 （M, ω）上的半稳定无挠层。则存在一个滤过

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \mathcal{F}_k = \mathcal{Q}, \tag{2.7}$$

称为 $\mathcal{Q}$ 的 *Seshadri* 滤过，使得商 $\mathcal{F}_\alpha/\mathcal{F}_{\alpha-1}$ 无挠且是 ω-稳定的， $\mu_\omega(\mathcal{F}_\alpha/\mathcal{F}_{\alpha-1}) = \mu_\omega(\mathcal{Q})$ 对每个 α 都成立。虽然这样的滤过可能不唯一，但伴随分次对象 $Gr^S_\omega(\mathcal{Q}, \partial_\mathcal{Q}) = \oplus_{\alpha=1}^k \mathcal{F}_\alpha/\mathcal{F}_{\alpha-1}$在同构意义下由 $\mathcal{Q}$ 唯一确定。

由此，将半稳定因子分解为商实际稳定的滤过，便可得到 Harder–Narasimhan 过滤的一个细化。

命题 2.3 ([29, 9])。 设 (E, ∂_E) 是紧*Gauduchon*流形 (M, ω)上的一个全纯向量丛。那么存在一个双重滤过 $\{E_{\alpha,\beta}\}$，称为 (E, ∂_E)的 *Harder-Narasimhan-Seshadri* 滤过（简称 *HNS-*滤过），并具有以下性质：若 $0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_l = E$ 是 *Harder-Narasimhan* 滤过，则

$$\mathcal{E}_{\alpha-1} = \mathcal{E}_{\alpha,0} \subset \mathcal{E}_{\alpha,1} \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{\alpha,k_\alpha} = \mathcal{E}_\alpha, \tag{2.8}$$

其中连续商丛$\mathcal{Q}_{\alpha,\beta} = \mathcal{E}_{\alpha,\beta}/\mathcal{E}_{\alpha,\beta-1}$ 均为无挠且 ω-稳定。此外， $\mu_\omega(\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}) = \mu_\omega(\mathcal{Q}_{\alpha,\beta+1})$ 和 $\mu_\omega(\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}) > \mu_\omega(\mathcal{Q}_{\alpha+1,\beta})$。伴随分次对象

$$Gr^{HNS}_\omega(E, \overline{\partial}_E) = \oplus_{\alpha=1}^l \oplus_{\beta=1}^{k_\alpha} \mathcal{Q}_{\alpha,\beta} \tag{2.9}$$

由 E的同构类唯一确定。

2.2. **Hermitian-Yang-Mills流**。设 (M,ω) 是一个复维数为 n 的紧致 Hermit-¯ian 流形，(E,∂_E) 是其上的秩为 r 的全纯向量丛。若 H 是 E 上的 Hermitian度量，我们将 Chern 联络记为 D_H ，将曲率形式记为 F_H。设 K 是另一个 Hermitian度量，并令 $h=K^{-1}H$。我们有以下恒等式

$$\begin{aligned}\partial_H-\partial_K&=h^{-1}\partial_K h,\\ F_H-F_K&=\bar\partial_E(h^{-1}\partial_K h),\end{aligned}\tag{2.10}$$

其中 $\partial_H=D^{1,0}_H$ 和 $\partial_K=D^{1,0}_K$ 分别是 D_H 和 D_K 的 $(1,0)$ 部分。

这里回顾 Hermitian-Yang-Mills流 (1.1) 的一些结果。采用记号 $h(t)=K^{-1}H(t)$，方程 (1.1) 可改写为

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t}=-2\sqrt{-1}h(t)\Lambda_\omega(F_K+\bar\partial_E(h^{-1}(t)\partial_K h(t)))+2\lambda h(t).\tag{2.11}$$

由 (1.1)，$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)}$ 的演化方程为¯

$$\frac{\partial\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)}}{\partial t}=-2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial_E\partial_{H(t)}\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)}.\tag{2.12}$$

命题 2.4 ([18, 58])。 以 H_0 为初始数据的 ***Hermitian-Yang-Mills*流 *(1.1)*** 必有唯一解 $H(t)$，该解存在于 $0\le t<+\infty$。

若不致引起混淆，为简便起见，后¯文有时省略参数 t。令 $\Phi(H)=\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H-\lambda\cdot\mathrm{Id}_E$，则有

命题 2.5 ([58, 命题 2.2])。 设 $H(t)$ 是 ***Hermitian-Yang-Mills*流 *(1.1)*** 的一个解。则

$$(2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar\partial-\frac{\partial}{\partial t})\operatorname{tr}\Phi(H(t))=0\tag{2.13}$$

and

$$(2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar\partial-\frac{\partial}{\partial t})|\Phi(H(t))|^2_{H(t)}=2|D_{H(t)}\Phi(H(t))|^2_{H(t)}.\tag{2.14}$$

此外，若初始 ***Hermitian*度量** H_0 满足 $\operatorname{tr}(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_0}-\lambda\cdot\overline{\mathrm{Id}_E})=0$，则

$$\operatorname{tr}F_{H(t)}=\operatorname{tr}F_{H_0}\tag{2.15}$$

且$\det(H_0^{-1}H(t))=1$。

由于 $\operatorname{tr}\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H=\operatorname{tr}\Phi(H)+r\lambda$ and $|\sqrt{-1}\overline{\Lambda_\omega F_H}|^2_H=|\Phi(H)|^2_H-2\lambda\operatorname{tr}\Phi(H)+r\lambda^2$，因此将 $\Phi(H)$ 替换为$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H$后，(2.13) 和 (2.14) 仍然成立。由最大值¯原理可得

$$\sup_M|\Phi(H)|^2_H(t)\le\sup_M|\Phi(H)|^2_H(0)\tag{2.16}$$

and

$$\sup_M |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H|^2_H(t) \leq \sup_M |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H|^2_H(0). \tag{2.17}$$

¯为简便起见，我们用相同的记号 ∂ 同时表示通常算子 $\bar{\partial}$ 和全纯结构 $\bar{\partial}_E$，并令 $\theta_H = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H$。与 [16, 第七章], 中一样，我们用 τ 表示由 $\tau = [\Lambda_\omega, \partial\omega]$定义的零阶型 (1，0) 算子。可以得到

$$[\sqrt{-1}\Lambda_\omega, \bar{\partial}] = \partial^{*_H} + \tau^*, \qquad [\sqrt{-1}\Lambda_\omega, \partial_H] = -(\bar{\partial}^{*_H} + \bar{\tau}^*), \tag{2.18}$$

¯其中，∂^{*_H} 和∂^{*_H} 分别是相对于 H 而言， ∂_H 和 ∂ 的形式伴随算子。

以下引理是众所周知的。

引理 2.6. 假设 ω 是 *Gauduchon* 流形。设 $H(t)$是 *Hermitian-Yang-Mills*流 *(1.1)* 的一个解，则

$$\int_0^\infty \int_M |D_H\theta_H|^2_H(t)\frac{\omega^n}{n!}dt \leq \frac{1}{2}\int_M |\theta_H|^2_H(0)\frac{\omega^n}{n!} \tag{2.19}$$

and

$$\lim_{t\to\infty}\int_M |D_H\theta_H|^2_H(t)\frac{\omega^n}{n!} = 0. \tag{2.20}$$

为方便读者，我们在此给出证明。

证明。 如上所述，我们可知

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar{\partial}\right)|\theta_H|^2_H(t) = -2|D_H\theta_H|^2_H(t). \tag{2.21}$$

于是（2.19）可直接推出。

为了证明（2.20），我们需要估计 $\int_M |D_H\theta_H|^2_H(t)\frac{\omega^n}{n!}$ 的增长。根据（2.12），可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M |\bar{\partial}\theta_H|^2_{H,\omega}\frac{\omega^n}{n!} =& 2\int_M \langle[\bar{\partial}\theta_H, \theta_H], \bar{\partial}\theta_H\rangle_{H,\omega}\frac{\omega^n}{n!} \\ &- 4\,\mathbf{Re}\int_M \langle\bar{\partial}\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar{\partial}\partial_H\theta_H, \bar{\partial}\theta_H\rangle_{H,\omega}\frac{\omega^n}{n!}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

对于最后一个积分，我们有

$$\int_M \langle\bar{\partial}\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar{\partial}\partial_H\theta_H, \bar{\partial}\theta_H\rangle_{H,\omega}\frac{\omega^n}{n!} = \int_M \langle\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar{\partial}\partial_H\theta_H, \bar{\partial}^{*_H}\bar{\partial}\theta_H\rangle_H\frac{\omega^n}{n!} \tag{2.23}$$

and

$$\begin{aligned}\bar{\partial}^{*_H}\bar{\partial}\theta_H &= -([\sqrt{-1}\Lambda_\omega, \partial_H] + \bar{\tau}^*)\bar{\partial}\theta_H = -\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial_H\bar{\partial}\theta_H - \bar{\tau}^*\bar{\partial}\theta_H \\ &= \sqrt{-1}\Lambda_\omega\left(\bar{\partial}\partial_H\theta_H - [F_H, \theta_H]\right) - \bar{\tau}^*\bar{\partial}\theta_H \\ &= \sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar{\partial}\partial_H\theta_H - \bar{\tau}^*\bar{\partial}\theta_H.\end{aligned} \tag{2.24}$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Re}\int_M \langle \bar\partial\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial\partial_H\theta_H, \bar\partial\theta_H\rangle_{H,\omega}\frac{\omega^n}{n!}\\
&= \mathbf{Re}\int_M \langle \sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial\partial_H\theta_H, \sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial\partial_H\theta_H - \bar\tau^*\bar\partial\theta_H\rangle_H\frac{\omega^n}{n!}\\
&\geq \int_M |\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial\partial_H\theta_H|_H^2\frac{\omega^n}{n!} - \int_M |\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial\partial_H\theta_H|_H|\bar\tau^*\bar\partial\theta_H|_H\frac{\omega^n}{n!}\\
&\geq -\frac{1}{4}\int_M |\bar\tau^*\bar\partial\theta_H|_H^2\frac{\omega^n}{n!}.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

因此，有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M |\bar\partial\theta_H|_{H,\omega}^2\frac{\omega^n}{n!} &\leq 2\int_M \langle[\bar\partial\theta_H,\theta_H],\bar\partial\theta_H\rangle_{H,\omega}\frac{\omega^n}{n!} + \int_M |\bar\tau^*|_\omega^2|\bar\partial\theta_H|_{H,\omega}^2\frac{\omega^n}{n!}\\
&\leq C\int_M |\bar\partial\theta_H|_{H,\omega}^2\frac{\omega^n}{n!},
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

其中， C是仅依赖于 $\sup_M |\theta_H|_H$(0) 和 $\sup_M |d\omega|_\omega$ 的常数。由于 $|D_H\theta_H|_{H,\ \omega}^2 = 2|\bar\partial\theta_H|_{H,\ \omega}^2$，我们得到

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M |D_H\theta_H|_{H,\omega}^2\frac{\omega^n}{n!} \leq C\int_M |D_H\theta_H|_{H,\omega}^2\frac{\omega^n}{n!}.
\tag{2.27}
$$

结合 (2.19)，即可得到 (2.20)。 □

为后续使用，我们给出以下关于抛物方程弱超解长期行为的结果。

引理 2.7. 设 $u \in \mathcal{C}(M\times[0,\infty))$ 是满足以下条件的函数

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar\partial\right)u \geq 0
\tag{2.28}
$$

（以粘性意义）. 则 下确界 $_M\, u(\cdot,t)$ 在 $[0,\infty)$ 上单调递增。若进一步假设 ω 是 *Gauduchon*，则时刻 t 的平均值

$$
\mu_m(t) \triangleq \frac{1}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\int_M u(\cdot,t)\frac{\omega^n}{n!}
\tag{2.29}
$$

在 $[0,\infty)$ 上单调递增，并且

$$
\lim_{t\to\infty}\inf_M u(\cdot,t) = \lim_{t\to\infty}\mu_m(t).
\tag{2.30}
$$

黏性上解（例如参见 [13]）是一种非常弱的概念，它允许比较原理成立，并且在连续情形下与分布意义下的超解一致（[37, 25]）。事实上，第 3 节中所考虑的弱超解属于 [11, 17] 中引入的一种更强的概念。

证明。 $\inf_M u(\cdot,t)$ 的单调递增性质直接来自黏性上解的比较原理。

假设 ω 是 Gauduchon。给定一个 $t_0 \geq 0$，我们假设 v 是该方程的连续解

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}\right) v = 0, & \text{on } M \times (t_0, \infty), \\ v = u, & \text{on } M \times \{t_0\}, \end{cases} \tag{2.31}$$

则 v 在 $M \times (t_0, \infty)$ 上光滑，并且对于任意 $t \geq t_0$,

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(M,\omega)} \int_M v(\cdot, t) \frac{\omega^n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M,\omega)} \int_M v(\cdot, t_0) \frac{\omega^n}{n!} = \mu_m(t_0). \tag{2.32}$$

显然，$(u - v)$ 在粘性意义下是一个超解，并且在$M \times \{t_0\}$上为零。根据比较原理，我们有 $(u - v) \geq 0$ 在 $M \times [t_0, \infty)$ 上，因此对于任意 $t > t_0$,

$$\mu_m(t) \geq \frac{1}{\mathrm{Vol}(M,\omega)} \int_M v(\cdot, t) \frac{\omega^n}{n!} = \mu_m(t_0). \tag{2.33}$$

这意味着 $\mu_m(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上单调递增。

与此同时，由于 $\left(v - \inf_M v(\cdot, t_0)\right)$ 是一个非负解，抛物型 Harnack 不等式表明

$$\sup_M v(\cdot, t_0 + 1) - \inf_M v(\cdot, t_0) \leq C \left(\inf_M v(\cdot, t_0 + 1) - \inf_M v(\cdot, t_0) \right), \tag{2.34}$$

其中 $C \geq 1$ 是一个仅依赖于 (M, ω) 的常数。于是

$$0 \leq \mu_m(t_0) - \inf_M u(\cdot, t_0) \leq C \left(\inf_M u(\cdot, t_0 + 1) - \inf_M u(\cdot, t_0) \right). \tag{2.35}$$

因此我们推得 $\lim_{t\to\infty} \mu_m(t) = \lim_{t\to\infty} \inf_M u(\cdot, t)$。 □

3. 证明

¯设 (M, ω) 为一个 n 维紧 Hermitian 流形，(E, ∂_E) 为其上的一个秩为 r 的全纯向量丛， H 为 E 上的一个 Hermitian度量。令

$$\mathrm{Herm}(E, H) = \{\theta \in \Gamma(\mathrm{End}(E)) \mid \theta^{*H} = \theta\},$$

它是由 H-自伴光滑端同态构成的实向量空间，并将 $\mathrm{Herm}^+(E, H) \subset \mathrm{Herm}(E, H)$ 定义为其中正定元素构成的开子集。如引言中所述， $\lambda_1(H, \omega)$、$\lambda_2(H, \omega)$、 $\cdots$、$\lambda_r(H, \omega)$ 是 $\theta_H = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H$ 的特征值，按降序排列。对于 $1 \leq k \leq r$，记

$$\lambda_{L,k}(H, \omega) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{r-i+1}(H, \omega), \qquad \lambda_{U,k}(H, \omega) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H, \omega), \tag{3.1}$$

and

$$\hat{\lambda}_{L,k}(H, \omega) = \inf_M \lambda_{L,k}(H, \omega), \qquad \hat{\lambda}_{U,k}(H, \omega) = \sup_M \lambda_{U,k}(H, \omega). \tag{3.2}$$

此外，若 ω 是 Gauduchon 度量，则定义

$$\begin{aligned}\lambda_{mL,k}(H,\omega) &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\int_M \lambda_{L,k}(H,\omega)\frac{\omega^n}{n!},\\ \lambda_{mU,k}(H,\omega) &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\int_M \lambda_{U,k}(H,\omega)\frac{\omega^n}{n!}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

我们从 Hermitian-Yang-Mills 流下平均曲率的特征值收敛开始。设 $H(t)$ 是 (1.1) 的一个光滑解。简记为

$$\begin{aligned}&\lambda_{L,k}(\cdot,t)=\lambda_{L,k}(H(t),\omega)(\cdot), && \lambda_{U,k}(\cdot,t)=\lambda_{U,k}(H(t),\omega)(\cdot),\\ &\hat{\lambda}_{L,k}(t)=\hat{\lambda}_{L,k}(H(t),\omega), && \hat{\lambda}_{U,k}(t)=\hat{\lambda}_{U,k}(H(t),\omega),\\ &\lambda_{mL,k}(t)=\lambda_{mL,k}(H(t),\omega), && \lambda_{mU,k}(t)=\lambda_{mU,k}(H(t),\omega).\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们推导出定理 1.1 的以下推广。

定理 3.1。 设 $1\le k\le r$。则 $\lambda_{L,k}(t)$ 单调递增，且 $\lambda_{U,k}(t)$ 在 $[0,\infty)$上单调递减。若进一步 ω 是 *Gauduchon*，则 $\lambda_{mL,k}(t)$ 递增，而 $\lambda_{mU,k}(t)$ 递减。此外，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{mL,k}(t)=\lim_{t\to\infty}\hat{\lambda}_{L,k}(t),\qquad \lim_{t\to\infty}\lambda_{mU,k}(t)=\lim_{t\to\infty}\hat{\lambda}_{U,k}(t). \tag{3.5}$$

根据引理 2.7，定理 3.1 的证明可归结为证明

$$(\frac{\partial}{\partial t}-2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar{\partial})\lambda_{L,k}\ge 0,\qquad (\frac{\partial}{\partial t}-2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar{\partial})\lambda_{U,k}\le 0 \tag{3.6}$$

在粘性意义下。事实上，后者是以下技术引理的一个简单推论。

引理3.2。 设 $1\le k\le r$。对于任意 $(p_0,t_0)\in M\times[0,\infty)$，我们可以找到 p_0 的一个开邻域 U，以及定义在 $U\times[0,\infty)$ 上的光滑函数 $f_{L,k},f_{U,k}$，使得

1) $f_{L,k}\ge\lambda_{L,k}$ *on* $U\times[0,\infty)$ *and* $f_{L,k}(p_0,t_0)=\lambda_{L,k}(p_0,t_0)$*;*
2) $\left(\frac{\partial}{\partial t}-2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar{\partial}\right)f_{L,k}(p_0,t_0)=0$*;*
3) $f_{U,k}\le\lambda_{U,k}$ *on* $U\times[0,\infty)$ *and* $f_{U,k}(p_0,t_0)=\lambda_{U,k}(p_0,t_0)$*;*
4) $\left(\frac{\partial}{\partial t}-2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar{\partial}\right)f_{U,k}(p_0,t_0)=0$.

证明。 只需说明 $f_{L,k}$ 的构造，$f_{U,k}$ 的构造类似。当然，可以找到 $(E|_{p_0},H(t_0)|_{p_0})$ 的一组正交归一基 $\{u_\alpha\}_{\alpha=1}^r$，使得

$$\langle\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t_0)}u_\alpha,u_\beta\rangle_{H(t_0)}(p_0)=\lambda_\alpha(H(t_0),\omega)(p_0)\delta_{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

在某个开邻域 $U$of p_0 上选取一个全纯标架场 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^r$，使得

1) $e_\alpha(p_0)=u_\alpha$ for $1\le\alpha\le r$;
2) $dH_{\bar{\beta}\alpha}\big|_{(p_0,t_0)}=0$, where $H_{\bar{\beta}\alpha}=\langle e_\alpha,e_\beta\rangle_{H(t)}$.

令 $\theta_{\bar{\beta}\alpha} = \langle\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H(e_\alpha)\ e_\beta\rangle_H$，则我们在 $U \times [0,\infty)$ 上有

$$\frac{\partial H_{\bar{\beta}\alpha}}{\partial t} = -2(\theta_{\bar{\beta}\alpha} - \lambda H_{\bar{\beta}\alpha}), \tag{3.8}$$

$$\theta_{\bar{\beta}\alpha} = \sqrt{-1}\Lambda_\omega(\bar{\partial}\partial H_{\bar{\beta}\alpha} - \bar{\partial}H_{\bar{\beta}\gamma}H^{\gamma\bar{\delta}}\partial H_{\bar{\delta}\alpha}), \tag{3.9}$$

其中 $(H^{\alpha\bar{\beta}})$ 是 $(H_{\bar{\beta}\alpha})$ 的逆矩阵。由于 $dH_{\bar{\beta}\alpha}\big|_{(p_0,t_0)} = 0$，很容易验证

$$(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar{\partial})H_{\bar{\beta}\alpha}\big|_{(p_0,t_0)} = 2\lambda H_{\bar{\beta}\alpha}\big|_{(p_0,t_0)}, \tag{3.10}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar{\partial})\theta_{\bar{\beta}\alpha}\big|_{(p_0,t_0)} = 2\lambda\theta_{\bar{\beta}\alpha}\big|_{(p_0,t_0)}. \tag{3.11}$$

运用 Gram-Schmidt 正交化过程，我们可以构造光滑映射 $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_r : U \times [0,\infty) \to E$,

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_1 &= \frac{e_1}{|e_1|_H}, \\
\tilde{e}_2 &= \frac{e_2 - \langle e_2, \tilde{e}_1\rangle_H \tilde{e}_1}{|e_2 - \langle e_2, \tilde{e}_1\rangle_H \tilde{e}_1|_H}, \\
&\cdots, \\
\tilde{e}_r &= \frac{e_r - \langle e_r, \tilde{e}_1\rangle_H \tilde{e}_1 - \cdots - \langle e_r, \tilde{e}_{r-1}\rangle_H \tilde{e}_{r-1}}{|e_r - \langle e_r, \tilde{e}_1\rangle_H \tilde{e}_1 - \cdots - \langle e_r, \tilde{e}_{r-1}\rangle_H \tilde{e}_{r-1}|_H}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

在任意 $(p,t) \in M \times [0,\infty)$ 处，$\{\tilde{e}_1(p,t) \cdots, \tilde{e}_r(p,t)\}$ 构成 $(E|_p, H(t)|_p)$ 的标准正交基。若记

$$\tilde{e}_\alpha = a_\alpha^\beta e_\beta, \tag{3.13}$$

则系数 a_α^β 满足

1) $\overline{a_\alpha^\gamma} H_{\bar{\gamma}\delta} a_\beta^\delta = \delta_{\alpha\beta}$;
2) $a_\alpha^\beta(p_0,t_0) = \delta_{\alpha\beta}$;
3) $da_\alpha^\beta(p_0,t_0) = 0$.

定义

$$f_{L,k} = \sum_{\alpha=r-k+1}^{r} \langle\theta_H \tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\alpha\rangle_H = \sum_{\alpha=r-k+1}^{r} \overline{a_\alpha^\gamma}\theta_{\bar{\gamma}\delta}a_\alpha^\delta. \tag{3.14}$$

显然，$f_{L,k}(p_0,t_0) = \lambda_{L,k}(p_0,t_0)$。

根据 $\lambda_{L,k}$ 的定义以及 $\theta_H \in \mathrm{Herm}(E,H)$ 这一事实，可得

$$\lambda_{L,k}(p,t) = \inf\left\{\sum_{\alpha=1}^{k}\langle\theta_{H(t)}v_\alpha, v_\alpha\rangle_{H(t)} \middle| \{v_\alpha\}_{\alpha=1}^k \in E|_p \text{ is } H(t)\text{-orthonormal}\right\}, \tag{3.15}$$

因此 $f_{L,\ k} \geq \lambda_{L,\ k}$（关于 $U \times [0,\infty)$）。

对于任意 $1 \le \alpha \le r$，记作

$$f_\alpha = \langle \theta_H \tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\alpha \rangle_H = \overline{a_\alpha^\gamma} \theta_{\bar{\gamma}\delta} a_\alpha^\delta. \tag{3.16}$$

根据 e_α 和 a_α^β 的性质，直接计算可得

$$\begin{aligned} &(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}) f_\alpha \big|_{(p_0,t_0)} \\ =&(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}) \overline{a_\alpha^\gamma} \theta_{\bar{\gamma}\delta} a_\alpha^\delta \big|_{(p_0,t_0)} \\ =&[(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}) \theta_{\bar{\alpha}\alpha} + \theta_{\bar{\alpha}\alpha} (\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}) |a_\alpha^\alpha|^2] \big|_{(p_0,t_0)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

同理，

$$\begin{aligned} 0 &= (\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}) \overline{a_\alpha^\gamma} H_{\bar{\gamma}\delta} a_\alpha^\delta \big|_{(p_0,t_0)} \\ &= [(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}) H_{\bar{\alpha}\alpha} + (\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}) |a_\alpha^\alpha|^2] \big|_{(p_0,t_0)}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

结合 (3.10) 和 (3.11)，可推出

$$(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}) f_\alpha \big|_{(p_0,t_0)} = 0. \tag{3.19}$$

由于 $f_{L,\ k}$ 是若干个 f_α 之和，因此可得 $(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}) f_{L,\ k} \big|_{(p_0,t_0)} = 0$。□

由定理 3.1 可直接得到如下推论：

推论 3.3. 存在一个常向量 $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^r$，使得对任意 $p \in [1, \infty)$

$$\lim_{t\to\infty} ||\vec{\lambda}(H(t), \omega) - \vec{\mu}||_{L^p(\omega)} = 0. \tag{3.20}$$

证明。为方便起见，令 $\lambda_{U,0}(t) = 0$ 和 $a_0 = 0$。对于 $1 \le k \le r$，我们定义

$$a_k = \lim_{t\to\infty} \lambda_{mU,k}(t), \qquad b_k = a_k - a_{k-1}. \tag{3.21}$$

我们打算证明 $\vec{\lambda}(H(t)\ \omega)$ 在 L^p 拓扑下收敛到 $\vec{\mu} = (b_1, \cdots, b_r)$。由于 $\lambda_k(t) = \lambda_{U,k}(t) - \lambda_{U,k-1}(t)$ 且 $b_k = a_k - a_{k-1}$，我们只需证明 $\lambda_{U,k}(t)$ 在 L^p 拓扑下收敛到 a_k。

当然，$|\lambda_{U,k}(\cdot, t)| \le C$，其中 $C > 0$ 是某个常数。这意味着 $|a_k| \le C$。根据 $\lambda_{U,k}(t)$ 和 $\lambda_{mU,k}(t)$ 的定义，有

$$||\lambda_{U,k}(\cdot,t) - a_k||_{L^1(M)} \le (\hat{\lambda}_{U,k}(t) - \lambda_{mU,k}(t) + |\hat{\lambda}_{U,k}(t) - a_k|)\,\mathrm{Vol}(M,\omega). \tag{3.22}$$

根据定理 3.1，$\lim_{t\to\infty} \lambda_{U,k}(\cdot, t) = \lim_{t\to\infty} \lambda_{mU,k}(t) = a_k$。然后

$$\lim_{t\to\infty} \|\lambda_{U,k}(\cdot,t) - a_k\|_{L^1(M,\omega)} = 0. \tag{3.23}$$

再次使用 $|\lambda_{U,k}(\cdot, t)| \le C$ 得到

$$||\lambda_{U,k}(\cdot,t) - a_k||^p_{L^p(M)} \le (2C)^{p-1} ||\lambda_{U,k}(\cdot,t) - a_k||_{L^1(M)}, \tag{3.24}$$

因此，$\lim_{t\to\infty} \|\lambda_{U,k}(\cdot, t) - a_k\|_{L^p(M)} = 0$。 □

接下来我们将证明定理 1.2，即，

定理 3.4. 设 $H_i(t)$ *(*$i = 1,2$*)* 是 *Hermitian-Yang-Mills* 流 *(1.1)* 的两个光滑解，定义在 E 和 $\theta_{H_i}(t) = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_i(t)}$ 上。那么我们有

$$\lim_{t\to\infty}\int_M |\theta_{H_2} - \theta_{H_1}|^2_{H_1}(t)\frac{\omega^n}{n!} = 0. \tag{3.25}$$

为方便起见，令

$$h(t) = H_1^{-1}(t)H_2(t), \qquad A(t) = D_{H_2(t)} - D_{H_1(t)}. \tag{3.26}$$

我们还选取 $\sigma(t) \in \mathrm{Herm}^+(E, H_1(t))$，使其为满足以下条件的唯一元素

$$\sigma^{*_{H_1}}(t)\sigma(t) = \sigma^2(t) = h(t). \tag{3.27}$$

为证明定理 3.4，我们需要以下引理。

引理 3.5。设 $C = \sup_M \mathrm{tr}(h + h^{-1})(0) - 2r$。则

$$\sup_M \mathrm{tr}(h + h^{-1})(t) - 2r \le C, \tag{3.28}$$

$$\int_0^\infty \int_M |A|^2_{H_1,\omega}(t)\frac{\omega^n}{n!}dt \le \frac{C(2+C)}{4}\,\mathrm{Vol}(M,\omega). \tag{3.29}$$

此外，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\int_M |A|^2_{H_1,\omega}(t)\frac{\omega^n}{n!} = 0. \tag{3.30}$$

证明。 $h(t)$ 的演化方程为

$$(\frac{\partial}{\partial t} + 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial\partial_{H_1})h(t) = 2([\theta_{H_1}, h] + \sqrt{-1}\Lambda_\omega(\bar\partial h \wedge h^{-1}\partial_{H_1}h)), \tag{3.31}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar\partial)\,\mathrm{tr}(h + h^{-1})\\ &= 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\,\mathrm{tr}(\bar\partial h \wedge h^{-1}\partial_{H_1}h - h^{-1}\partial_{H_1}h \wedge h^{-1}\bar\partial h h^{-1}).\end{aligned} \tag{3.32}$$

注意， $A = h^{-1}\partial_{H_1}h$、 $\bar\partial h h^{-1} = A^{*_{H_1}}$ 和 $\sigma^2 = h$。可以发现

$$\begin{aligned}-\sqrt{-1}\Lambda_\omega\,\mathrm{tr}(\bar\partial h \wedge h^{-1}\partial_{H_1}h) &= -\sqrt{-1}\Lambda_\omega\,\mathrm{tr}((\sigma A)^{*_{H_1}} \wedge (\sigma A))\\ &= |\sigma A|^2_{H_1,\omega}\end{aligned} \tag{3.33}$$

and

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\Lambda_\omega\,\mathrm{tr}(h^{-1}\partial_{H_1}h \wedge h^{-1}\bar\partial h h^{-1})\\ =&\sqrt{-1}\Lambda_\omega\,\mathrm{tr}((A\sigma^{-1}) \wedge (A\sigma^{-1})^{*_{H_1}})\\ =&|A\sigma^{-1}|^2_{H_1,\omega}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Thus

$$(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar\partial)(\mathrm{tr}(h+h^{-1}) - 2r) = -2\left(|\sigma A|^2_{H_1,\omega} + |A\sigma^{-1}|^2_{H_1,\omega}\right). \tag{3.35}$$

抛物型极大值原理告诉我们

$$\sup_M \mathrm{tr}(h+h^{-1}) - 2r \leq \sup_M \mathrm{tr}(h+h^{-1})(0) - 2r = C. \tag{3.36}$$

这意味着

$$\frac{1}{2+C} H_1 \leq H_2 \leq (2+C) H_1, \tag{3.37}$$

and

$$\frac{1}{2+C}\,\mathrm{Id}_E \leq h \leq (2+C)\,\mathrm{Id}_E, \qquad \frac{1}{\sqrt{2+C}}\,\mathrm{Id}_E \leq \sigma \leq \sqrt{2+C}\,\mathrm{Id}_E \tag{3.38}$$

在 $\mathrm{Herm}^+(E,\ H_1)$ 中。然后

$$(\frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\bar{\partial}) \left(\mathrm{tr}(h+h^{-1}) - 2r\right) \leq -\frac{4}{2+C}|A|^2_{H_1,\omega}, \tag{3.39}$$

这意味着（3.29），

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_M |A|^2_{H_1,\omega}(t)\frac{\omega^n}{n!}dt &\leq \frac{2+C}{4}\int_M \left(\mathrm{tr}(h+h^{-1}) - 2r\right)(0)\frac{\omega^n}{n!} \\ &\leq \frac{C(2+C)}{4}\,\mathrm{Vol}(M,\omega). \end{aligned} \tag{3.40}$$

记 $C_1 = 2 + C + \sup_M (|\theta_{H_1}|_{H_1} + |\theta_{H_2}|_{H_2})(0)$，则我们总有

$$2 + \mathrm{tr}(h+h^{-1})(t) - 2r + |\theta_{H_1}|_{H_1}(t) + |\theta_{H_2}|_{H_2}(t) \leq C_1. \tag{3.41}$$

$A(t)$ 的演化方程为

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = -2\partial_{H_2}\theta_{H_2}(t) + 2\partial_{H_1}\theta_{H_1}(t), \tag{3.42}$$

so

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial A(t)}{\partial t}\right|_{H_1,\omega} &\leq 2|\partial_{H_2}\theta_{H_2}|_{H_1,\omega}(t) + 2|\partial_{H_1}\theta_{H_1}|_{H_1,\omega}(t) \\ &\leq 2C_1|\partial_{H_2}\theta_{H_2}|_{H_2,\omega}(t) + 2|\partial_{H_1}\theta_{H_1}|_{H_1,\omega}(t). \end{aligned} \tag{3.43}$$

这得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|A|^2_{H_1,\omega}(t) &= 2\langle [A,\theta_{H_1}], A\rangle_{H_1,\omega} + 2\,\mathbf{Re}\left\langle \frac{\partial A}{\partial t}, A\right\rangle_{H_1,\omega} \\ &\leq 4C_1|A|^2_{H_1,\omega} + 4C_1|A|_{H_1,\omega}|\partial_{H_2}\theta_{H_2}|_{H_2,\omega} \\ &\quad + 4|A|_{H_1,\omega}|\partial_{H_1}\theta_{H_1}|_{H_1,\omega} \\ &\leq 8C_1|A|^2_{H_1,\omega} + 2(C_1|\partial_{H_2}\theta_{H_2}|^2_{H_2,\omega} + |\partial_{H_1}\theta_{H_1}|^2_{H_1,\omega}). \end{aligned} \tag{3.44}$$

考虑

$$f(t) = \int_M |A|^2_{H_1,\omega}(t)\frac{\omega^n}{n!} \tag{3.45}$$

and

$$a(t) = 2\int_M (C_1|\partial_{H_2}\theta_{H_2}|^2_{H_2,\omega} + |\partial_{H_1}\theta_{H_1}|^2_{H_1,\omega})(t)\frac{\omega^n}{n!}. \tag{3.46}$$

有如下结论：

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-1}^{t}(f(s)+a(s))\,\mathrm{d}s=0 \tag{3.47}$$

and

$$f'(t)\leq 8C_1f(t)+a(t). \tag{3.48}$$

对于任意固定的 $t_0\in[0,\infty)$，我们有

$$(e^{-8C_1(t-t_0)}f)'(t)\leq a(t),\qquad \text{for } t\geq t_0. \tag{3.49}$$

于是，在 $[t_0,+\infty)$ 上，

$$f(t)\leq e^{8C_1(t-t_0)}\left(f(t_0)+\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{3.50}$$

现在假设 $t\in[1,\infty)$。由此可知，对于任意 $s\in[t-1,t]$，

$$f(t)\leq e^{8C_1}\left(f(s)+\int_{t-1}^{t}a(x)\,\mathrm{d}x\right). \tag{3.51}$$

对右侧关于 s 在 $[t-1,t]$ 上积分，可得

$$f(t)\leq e^{8C_1}\int_{t-1}^{t}(f(s)+a(s))\,\mathrm{d}s. \tag{3.52}$$

结合式 (3.47)，即可得到所需的等式 (3.30)。 □

定理 *3.4* 的证明。显然有

$$\theta_{H_2}-\theta_{H_1}=\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial A=[\sqrt{-1}\Lambda_\omega,\bar\partial]A=(\partial^{*_{H_1}}+\tau^*)A. \tag{3.53}$$

简单计算可得

$$\begin{aligned}
&\int_M|\theta_{H_2}-\theta_{H_1}|^2_{H_1}\frac{\omega^n}{n!}\\
=&\int_M\langle(\partial^{*_{H_1}}+\tau^*)A,\theta_{H_2}-\theta_{H_1}\rangle_{H_1}\frac{\omega^n}{n!}\\
=&\int_M\langle A,(\partial_{H_1}+\tau)(\theta_{H_2}-\theta_{H_1})\rangle_{H_1,\omega}\frac{\omega^n}{n!}\\
=&\int_M\langle A,\tau(\theta_{H_2}-\theta_{H_1})\rangle_{H_1,\omega}\frac{\omega^n}{n!}+\int_M\langle A,\partial_{H_2}\theta_{H_2}\rangle_{H_1,\omega}\frac{\omega^n}{n!}\\
&-\int_M\langle A,[A,\theta_{H_2}]\rangle_{H_1,\omega}\frac{\omega^n}{n!}-\int_M\langle A,\partial_{H_1}\theta_{H_1}\rangle_{H_1,\omega}\frac{\omega^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

显然，存在一个常数 C，它仅依赖于 ω、$H_1(0)$ 和 $H_2(0)$，使得

$$\mathrm{tr}(h+h^{-1})+|\tau|_\omega+|\theta_{H_1}|_{H_1}+|\theta_{H_2}|_{H_2}\leq C. \tag{3.55}$$

于是，我们可以找到一个仅依赖于 C 的常数 C_1 ，使得

$$\begin{aligned}&\int_M |\theta_{H_2}-\theta_{H_1}|^2_{H_1}\frac{\omega^n}{n!}\\ &\leq C_1\int_M |A|_{H_1,\omega}\left(1+|A|_{H_1,\omega}+|\partial_{H_1}\theta_{H_1}|_{H_1,\omega}+|\partial_{H_2}\theta_{H_2}|_{H_2,\omega}\right)\frac{\omega^n}{n!}.\end{aligned} \tag{3.56}$$

由（2.20）和（3.30）可知，当$t\to\infty$时，右侧项收敛到 0，从而证明得证。□

逐点地，通过选取关于 H_1的标准正交基，我们可以将 σ、 θ_{H_2} 和 θ_{H_1} 视为矩阵。由于 $\sigma\theta_{H_2}\sigma^{-1}$ 和 θ_{H_1} 是 Hermitian 矩阵，因此可以找到酉矩阵 U_1 和 U_2，使得 $U_1\sigma\theta_{H_2}\sigma^{-1}U_1^{-1}$和$U_2\theta_{H_1}U_2^{-1}$为实对角矩阵。根据 [4, 定理 VIII.3.9]，我们知道

$$|\vec{\lambda}(H_2)-\vec{\lambda}(H_1)|^2\leq \mathrm{cond}(U_1\sigma)\,\mathrm{cond}(U_2)|\theta_{H_2}-\theta_{H_1}|^2_{H_1},$$

其中，cond(B)是非奇异矩阵 B的条件数。由于U_1 和 U_2 是酉矩阵，因此 cond($U_1\sigma$) $=$ cond(σ)，且 cond(U_2) $=1$。于是

$$|\vec{\lambda}(H_2)-\vec{\lambda}(H_1)|^2\leq \mathrm{cond}(\sigma)|\theta_{H_2}-\theta_{H_1}|^2_{H_1}. \tag{3.57}$$

此外，cond(σ) 等于 σ 的最大特征值与最小特征值之商。我们注意到

$$\mathrm{cond}(\sigma)\leq\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(h+h^{-1})\leq\frac{1}{2}\sup_M \mathrm{tr}(h+h^{-1})(0). \tag{3.58}$$

由定理 3.4，我们立即得到

引理 3.6。 设 $H_1(t)$ 和 $H_2(t)$ 是 *Hermitian-Yang-Mills* 流 *(1.1)* 的两个光滑解。那么

$$\lim_{t\to\infty}\int_M \left|\vec{\lambda}(H_1(t),\omega)-\vec{\lambda}(H_2(t),\omega)\right|^2\frac{\omega^n}{n!}=0. \tag{3.59}$$

现在我们可以证明定理 1.4。根据推论 3.3，只需证明

定理 3.7。 设 $H(t)$是 *Hermitian-Yang-Mills* 流 *(1.1)* 的一个光滑解。那么对于 $1\leq k\leq r$，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{mL,k}(H(t),\omega)=\frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\sum_{i=1}^{k}\mu_{r+1-i,\omega}(E), \tag{3.60}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{mU,k}(H(t),\omega)=\frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\sum_{i=1}^{k}\mu_{i,\omega}(E). \tag{3.61}$$

一旦证明了以下引理，(3.60) 的“≤”部分和 (3.61) 的“≥”部分便可得出。

引理3.8。 设 H 是 E 上的光滑 *Hermitian*度量。那么对于 $1 \leq k \leq r$，有

$$\lambda_{mL,k}(H,\omega) \leq \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)} \sum_{i=1}^{k} \mu_{r+1-i,\omega}(E), \tag{3.62}$$

$$\lambda_{mU,k}(H,\omega) \geq \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)} \sum_{i=1}^{k} \mu_{i,\omega}(E). \tag{3.63}$$

证明。 我们只给出 (3.63) 的证明，(3.62) 的证明类似。

令 $0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_l = E$为$E$的 Harder-Narasimhan 滤过，并设

$$r_j = \mathrm{rank}(\mathcal{E}_j) \tag{3.64}$$

对 $1 \leq j \leq l$。回顾以下 Chern-Weil公式（[9]）：

$$\begin{aligned} \deg_\omega(\mathcal{E}_j) &= \int_{M\setminus\Sigma_{alg}} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \mathrm{tr}\, F_{H_{\mathcal{E}_j}} \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{M\setminus\Sigma_{alg}} (\sqrt{-1}\mathrm{tr}(\pi^H_{\mathcal{E}_j} \Lambda_\omega F_H) - |\bar\partial \pi^H_{\mathcal{E}_j}|^2_H) \frac{\omega^n}{n!}, \end{aligned} \tag{3.65}$$

其中 Σ_{alg} 是 $\mathcal{E}_j$的奇异集， $H_{\mathcal{E}_j}$ 是 $\mathcal{E}_j|_{M\setminus\Sigma_{alg}}$上的诱导度量，而 $\pi^H_{\mathcal{E}_j}$ 是相对于度量 H到 $\mathcal{E}_j$ 上的正交投影。结合 $\vec{\mu}_\omega$（E）的定义，容易验证

$$\lambda_{mU,r_j}(H,\omega) \geq \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)} \deg_\omega(\mathcal{E}_j) = \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)} \sum_{i=1}^{r_j} \mu_{i,\omega}(E). \tag{3.66}$$

我们将对 k进行归纳法。

1) 对于 $k = 1$，我们有

(3.67)

$$r_1 \lambda_{mU,1} \geq \lambda_{mU,r_1}(H,\omega) \geq \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)} \sum_{i=1}^{r_1} \mu_{i,\omega}(E) = \frac{2r_1\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)} \mu_{1,\omega}(E).$$

因此，(3.63) 对 $k = 1$成立。

2) 假设 $1 \leq s \leq r-1$ ，且(3.63) 对 $k = s$成立。也就是说

$$\lambda_{mU,s}(H,\omega) \geq \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)} \sum_{i=1}^{s} \mu_{i,\omega}(E). \tag{3.68}$$

如果对于某个 $j = 1, \cdots, l$， $s+1 = r_j$，那么显然 (3.63) 对 $k = s+1$ 成立。否则，我们可以找到某个 $j = 1, \cdots, l$，使得 $r_{j-1} < s+1 < r_j$。根据

(3.66)，可以看出

$$\begin{aligned}
&\lambda_{mU,s}(H,\omega)+\frac{r_j-s}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\int_M\lambda_{s+1}(H,\omega)\frac{\omega^n}{n!}\\
&\geq\lambda_{mU,r_j}(H,\omega)\\
&\geq\frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\sum_{i=1}^{r_j}\mu_{i,\omega}(E)\\
&=\frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\left(\sum_{i=1}^{s}\mu_{i,\omega}(E)+(r_j-s)\mu_{s+1,\omega}(E)\right).
\end{aligned}\tag{3.69}$$

利用 (3.68)，我们推得

$$(r_j-s)\lambda_{mU,s+1}(H,\omega)\geq\frac{2(r_j-s)\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\sum_{i=1}^{s+1}\mu_{i,\omega}(E).\tag{3.70}$$

因此，对于 $k=s+1$，(3.63) 成立。证明至此完成。 □

为了证明 (3.60) 中的“≥”部分和 (3.61) 中的“≤”部分，我们只需应用引理 3.6 和以下引理。

引理 3.9。对于任意 $\delta>0$，我们可以找到一个光滑解 $H_\delta(t)$，它是定义在 (E,∂_E) 上的 ¯*Hermitian-Yang-Mills*流 *(1.1)*，使得对于任意 $1\leq k\leq r$，

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{mL,k}(H_\delta(t),\omega)\geq\frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\sum_{i=1}^{k}\mu_{r+1-i,\omega}(E)-k\delta,\tag{3.71}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{mU,k}(H_\delta(t),\omega)\leq\frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}\sum_{i=1}^{k}\mu_{i,\omega}(E)+k\delta.\tag{3.72}$$

证明。应用定理 1.3 和定理 3.1。 □

4. Some applications

4.1. 应用于 Harder-Narasimhan 型的计算。利用定理 1.4，我们可以轻松计算全纯向量丛的张量积、对称幂和外幂的 Harder-Narasimhan 型。

首先回顾复向量空间或实向量空间的对称幂和外幂。设 $r\geq2$、$k\geq1$，并假设 V 是一个 r 维复（分别为实）向量空间。我们选取 V 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_r\}$，并写作

$$\mathrm{T}\Lambda(k,r)=\{(i_1,\cdots,i_k)\mid i_l=1,\cdots,r,\ \text{for every } 1\leq l\leq k\}.\tag{4.1}$$

那么，k 次张量幂 $V^{\otimes k}$ 的一组基可选为

$$\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}\mid(i_1,\cdots,i_k)\in\mathrm{T}\Lambda(k,r)\}.\tag{4.2}$$

对称化 Sym： $V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$ 是满足以下条件的线性算子

$$\mathrm{Sym}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}} \tag{4.3}$$

对于任意 $(i_1, \cdots, i_k) \in \mathrm{T}\Lambda(k, r)$，其中求和遍历 $\{1, \cdots, k\}$ 的所有置换 σ。k 次对称幂 $S^k V$ 是在对称化 Sym 下保持不变的所有元素的集合。显然，$(\mathrm{Sym})^2 = \mathrm{Sym}$，因此 $S^k V = \mathrm{Sym}(V^{\otimes k})$，从而我们得到自然分解

$$V^{\otimes k} \xrightarrow{(\mathrm{Sym},\, \mathrm{Id} - \mathrm{Sym})} S^k V \oplus \ker \mathrm{Sym}. \tag{4.4}$$

此外，令

$$\mathrm{S}\Lambda(k, r) = \{(a_1, \cdots, a_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid a_1 + \cdots + a_r = k\} \tag{4.5}$$

并且对于每个 $a = (a_1, \cdots, a_r) \in \mathrm{S}\Lambda(k, r)$,

$$e^a = \frac{k!}{a!} \mathrm{Sym}(e_1^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes e_r^{\otimes a_r}), \tag{4.6}$$

其中 $a! = a_1! \cdots a_r!$。于是， $S^k V$ 的一组基可以选为

$$\{e^a \mid a \in \mathrm{S}\Lambda(k, r)\}. \tag{4.7}$$

反对称化（或斜对称化）Alt： $V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$ 是满足下述条件的线性算子

$$\mathrm{Alt}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}} \tag{4.8}$$

对于任意的 $(i_1, \cdots, i_k) \in \mathrm{T}\Lambda(k, r)$，其中求和遍历 $\{1, \cdots, k\}$ 的所有置换 σ，而 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ 是 σ的符号。实际上，当 $k > r$时，$\mathrm{Alt} = 0$。对于 $k \leq r$， k 次外幂（或交错幂） $\wedge^k V$ 是所有在反对称化 Alt 下保持不变的元素构成的集合。当然 $(\mathrm{Alt})^2 = \mathrm{Alt}$，因此 $\wedge^k V = \mathrm{Alt}(V^{\otimes k})$，并且我们有自然分解

$$V^{\otimes k} \xrightarrow{(\mathrm{Alt},\, \mathrm{Id} - \mathrm{Alt})} \wedge^k V \oplus \ker \mathrm{Alt}. \tag{4.9}$$

通常我们记作

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = k! \mathrm{Alt}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k). \tag{4.10}$$

Let

$$\mathrm{A}\Lambda(k, r) = \{(i_1, \cdots, i_k) \in \mathrm{T}\Lambda(k, r) \mid i_1 < \cdots < i_k\}. \tag{4.11}$$

于是， $\wedge^k V$ 的一组基可取为

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid (i_1, \cdots, i_k) \in \mathrm{A}\Lambda(k, r)\}. \tag{4.12}$$

˜在 V 上固定一个内积，并假设 V 是一个带有内积的 s 维（$s \geq 1$）复（分别为实）向量空间。那么，˜ 上存在一个自然内积，它由下式唯一确定：

$$\langle v_1 \otimes \tilde{v}_1, v_2 \otimes \tilde{v}_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle \tag{4.13}$$

˜对于 v_1，$v_2 \in V$以及 $\tilde{v}_1$，$\tilde{v}_2 \in V$。此外，设 $\{e_1, \cdots, e_r\}$ 是 V 的一个标准正交˜基，$\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_s\}$ 是 V 的一个标准正交基，则

$$\{e_i \otimes \tilde{e}_j \mid 1 \le i \le r, 1 \le j \le s\} \tag{4.14}$$

˜是 $V \otimes V$的标准正交基。

注意，Sym 和 Alt 算子关于 $V^{\otimes k}$上的诱导内积是自伴的。因此，$V^{\otimes k} = S^k V \oplus$ker Sym 和 $V^{\otimes k} = \wedge^k V \oplus$ kerAlt 的分解（当 $k \le r$时）实际上是正交的。此外，

$$\left\{ \sqrt{\tfrac{a!}{k!}} e^a \;\middle|\; a \in \mathrm{S}\Lambda(k, r) \right\} \tag{4.15}$$

是 $S^k V$的标准正交基；当 $k \le r$时，

$$\left\{ \tfrac{1}{\sqrt{k!}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \;\middle|\; (i_1, \cdots, i_k) \in \mathrm{A}\Lambda(k, r) \right\} \tag{4.16}$$

是 $\wedge^k V$的标准正交基。

上述概念和分解可以自然地推广到复向量丛的情形。

在表示 r 维复或实向量空间上自伴算子的特征值时，使用空间

$$\mathbb{R}^r_{\downarrow} := \{(x_1, \cdots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mid x_1 \ge \cdots \ge x_r\}. \tag{4.17}$$

为方便起见，我们引入映射 τ： $\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r_{\downarrow}$，定义如下。对于任意 $x = (x_1, \cdots, x_r) \in \mathbb{R}^r$，定义 $\tau(x) = (y_1, \cdots, y_r)$ 为满足以下条件的唯一向量

$$(y_1, \cdots, y_r) = (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(r)}) \in \mathbb{R}^r_{\downarrow} \tag{4.18}$$

对于某个置换 σ。显然，τ 定义良好。此外，众所周知的重排不等式蕴含

$$|\tau(x) - \tau(\tilde{x})| \le |x - \tilde{x}|, \qquad \forall\, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^r. \tag{4.19}$$

为供后文使用，我们给出以下简单事实，不作证明。

命题 4.1。设 $D \subset \mathbb{R}^r$ 是一个闭子集，T： $D \to \mathbb{R}^N (N \ge 1)$ 是一个利普希茨映射，且(X, g) 是一个黎曼流形。若 $\{f_i\}$ 是从 X 到 D 的一列可测映射，且

$$\lim_{i \to \infty} ||f_i - v||_{L^1(X)} = 0 \tag{4.20}$$

对某个常向量 $v \in D$，则

$$\lim_{i \to \infty} ||T(f_i) - T(v)||_{L^1(X)} = 0. \tag{4.21}$$

设 (M, ω) 是一个维数为 $n \ge 2$ 的紧Gauduchon流形，E a˜秩为 $r \ge 2$ 的全纯向量丛，定义在 M 上；以及 E 一个秩为 $s \ge 1$ 的全纯向量丛，定义在 M 上。设 H 和 H 分别是定义在 E 和 E 上的 Hermitian 度量˜。固定任意一点 $z \in M$，并选取

˜ $\{e_1,\cdots,e_r\}$ 的正交基和 $\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_s\}$ $E|_z$ 的正交基，分别使得

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H|_z e_i=\lambda_i(H,\omega)(z)e_i,\quad \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\tilde{H}}|_z\tilde{e}_j=\lambda_j(\tilde{H},\omega)(z)\tilde{e}_j. \tag{4.22}$$

设 k 为一个正整数。接下来我们讨论全纯向量丛的张量积、对称幂和外幂的平均曲率。

˜ ˜(i) 记 $E\otimes E$上的诱导Hermitian度量为 $H\otimes H$。我们有

$$F_{H\otimes\tilde{H}}=F_H\otimes\mathrm{Id}_{\tilde{E}}+\mathrm{Id}_E\otimes F_{\tilde{H}}, \tag{4.23}$$

因此

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H\otimes\tilde{H}}=(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H)\otimes\mathrm{Id}_{\tilde{E}}+\mathrm{Id}_E\otimes(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\tilde{H}}). \tag{4.24}$$

因此有

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H\otimes\tilde{H}}|_z(e_i\otimes\tilde{e}_j)=\big(\lambda_i(H,\omega)(z)+\lambda_j(\tilde{H},\omega)(z)\big)e_i\otimes\tilde{e}_j \tag{4.25}$$

对任意 $1\le i\le r$ 和 $1\le j\le s$。

(ii) 记 $E^{\otimes k}$ 上的诱导Hermitian度量为 $H^{\otimes k}$。可以找到

$$F_{H^{\otimes k}}=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Id}_{E^{\otimes(i-1)}}\otimes F_H\otimes\mathrm{Id}_{E^{\otimes(k-i)}}, \tag{4.26}$$

因此

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H^{\otimes k}}=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Id}_{E^{\otimes(i-1)}}\otimes(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H)\otimes\mathrm{Id}_{E^{\otimes(k-i)}}\,. \tag{4.27}$$

由此可得

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H^{\otimes k}}|_z(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k})=\left(\sum_{l=1}^{k}\lambda_{i_l}(H,\omega)(z)\right)e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k} \tag{4.28}$$

对任意 $(i_1,\ \cdots,\ i_k)\in\mathrm{T}\Lambda(k,\ r)$。

(iii) 令 $S^kH=H^{\otimes k}|_{S^kE}$。由于分解

$$E^{\otimes k}=S^kE\oplus\ker\mathrm{Sym} \tag{4.29}$$

是全纯的，并且相对于 $H^{\otimes k}$ 正交，因此我们有

$$F_{S^kH}=F_{H^{\otimes k}}|_{S^kE},\qquad \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{S^kH}=(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H^{\otimes k}})|_{S^kE}. \tag{4.30}$$

因此很容易验证

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{S^kH}|_z(e^a)=\left(\sum_{i=1}^{r}a_i\lambda_i(H,\omega)(z)\right)e^a \tag{4.31}$$

对于每个 $a=(a_1,\cdots,a_r)\in\mathrm{S}\Lambda(k,r)$。

(iv) 对于 $k \leq r$，令 $\wedge^k H = H^{\otimes k}|_{\wedge^k E}$。由于该分解

$$E^{\otimes k} = \wedge^k E \oplus \ker \mathrm{Alt} \tag{4.32}$$

是全纯的，并且关于 $H^{\otimes k}$ 正交，我们知道

$$F_{\wedge^k H} = F_{H^{\otimes k}}|_{\wedge^k E}, \qquad F_{\wedge^k H} = (\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H^{\otimes k}})|_{\wedge^k E}. \tag{4.33}$$

因此可知

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\wedge^k H}|_z(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \left(\sum_{l=1}^{k} \lambda_{i_l}(H,\omega)(z)\right) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \tag{4.34}$$

对于每个 $(i_1, \cdots, i_k) \in \mathrm{A}\Lambda(k, r)$。

根据上述论证，已经求出了 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H\otimes\tilde{H}}$、$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H^{\otimes k}}$、$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{S^k H}$ 和 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\wedge^k H}$ 的所有特征值。将特征值按降序排列后，最终可以确定 $\lambda(H \otimes H, \omega)$、$\vec{\lambda}(H^{\otimes k}, \omega)$、$\vec{\lambda}(S^k H, \omega)$ 和 $\vec{\lambda}(\wedge^k H, \omega)$。为给出具体表达式，我们引入以下记号。

(i) 设 $N = rs = \dim(\mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^s)$ 且

$$\Lambda(r,s) = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}. \tag{4.35}$$

定义 $\vec{T}\colon\ \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^N_\downarrow$ 为

$$\vec{T}((x_1, \cdots, x_r), (y_1, \cdots, y_s)) = \tau(t(\varrho(1)), \cdots, t(\varrho(N))), \tag{4.36}$$

其中 $\varrho\colon\ \{1, \cdots, N\} \to \Lambda(r, s)$ 是任意一个双射，且

$$t(i,j) = x_i + y_j, \qquad \forall\, (i,j) \in \Lambda(r,s). \tag{4.37}$$

(ii) 令 $N = r^k = \dim((\mathbb{R}^r)^{\otimes k})$。定义 $\vec{T}_k\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^N_\downarrow$为

$$\vec{T}_k(x_1, \cdots, x_r) = \tau(t(\varrho(1)), \cdots, t(\varrho(N))), \tag{4.38}$$

其中 $\varrho\colon \{1, \cdots, N\} \to \mathrm{T}\Lambda(k, r)$ 是任意一个双射，并且

$$t(i_1, \cdots, i_k) = \sum_{l=1}^{k} x_{i_l}, \qquad \forall\, (i_1, \cdots, i_k) \in \mathrm{T}\Lambda(k,r). \tag{4.39}$$

(iii) 令 $N = \binom{r+k-1}{k} = \dim(S^k(\mathbb{R}^r))$。定义 $\vec{S}_k\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^N_\downarrow$为

$$\vec{S}_k(x_1, \cdots, x_r) = \tau(t(\varrho(1)), \cdots, t(\varrho(N))), \tag{4.40}$$

其中 $\varrho\colon \{1, \cdots, N\} \to \mathrm{S}\Lambda(k, r)$ 是任意一个双射，并且

$$t(a_1, \cdots, a_r) = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i, \qquad \forall\, (a_1, \cdots, a_r) \in \mathrm{S}\Lambda(k,r). \tag{4.41}$$

(iv) 假设 $k \leq r$，并令 $N = \binom{r}{k} = \dim(\wedge^k(\mathbb{R}^r))$。定义 $\vec{A}_k\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^N_\downarrow$ 为

$$\vec{A}_k(x_1, \cdots, x_r) = \tau(t(\varrho(1)), \cdots, t(\varrho(N))), \tag{4.42}$$

其中 $\varrho: \{1,\cdots,N\} \to \mathrm{A}\Lambda(k,\ r)$ 是任意双射，并且

$$t(i_1,\cdots,i_k) = \sum_{l=1}^{k} x_{i_l}, \qquad \forall\,(i_1,\cdots,i_k) \in \mathrm{A}\Lambda(k,r). \tag{4.43}$$

注意，上述构造的每个映射都是全局 Lipschitz 的，且不依赖于 ϱ 的选择。

现在可以将以下公式概括如下：

(i) $\vec{\lambda}(H\otimes\tilde{H},\omega) = \vec{T}(\vec{\lambda}(H,\omega),\vec{\lambda}(\tilde{H},\omega))$;
(ii) $\vec{\lambda}(H^{\otimes k},\omega) = \vec{T}_k(\vec{\lambda}(H,\omega))$;
(iii) $\vec{\lambda}(S^kH,\omega) = \vec{S}_k(\vec{\lambda}(H,\omega))$;
(iv) $\vec{\lambda}(\wedge^kH,\omega) = \vec{A}_k(\vec{\lambda}(H,\omega))$ when $k \le r$.

此外，假设 $H(t)$ 和 $H(t)$ 分别是定义在 E 和 E 上的 Hermitian-˜Yang-Mills 流的解。不难发现，$H(t)\otimes\tilde{H}(t)$、$H(t)^{\otimes k}$、$S^kH(t)$ 和 $\wedge^kH(t)$（当 $k \le r$ 时）分别是定义在 $E\otimes\tilde{E}$、$E^{\otimes k}$、S^kE 和 $\wedge^kE$ 上的 Hermitian-Yang-Mills 流的解。结合定理 1.4 和命题 4.1，我们得出

定理 4.2。令 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$。则

(i) $\vec{\mu}_\omega(E\otimes\tilde{E}) = \vec{T}(\vec{\mu}_\omega(E)\ \vec{\mu}_\omega(\tilde{E}))$; *(ii)* $\vec{\mu}_\omega(E^{\otimes k}) = \vec{T}_k(\vec{\mu}_\omega(E))$; *(iii)* $\vec{\mu}_\omega(S^kE) = \vec{S}_k(\vec{\mu}_\omega(E))$; *(iv)* 当 $k \le r$ 时，$\vec{\mu}_\omega(\wedge^kE) = \vec{A}_k(\vec{\mu}_\omega(E))$。

由定理 4.2 可立即得知，对于 $k \ge 1$ 和 $l \ge 0$,

$$\mu_L(E^{\otimes k}\otimes\tilde{E}^{\otimes l},\omega) = k\mu_L(E,\omega) + l\mu_L(\tilde{E},\omega), \tag{4.44}$$

$$\mu_U(E^{\otimes k}\otimes\tilde{E}^{\otimes l},\omega) = k\mu_U(E,\omega) + l\mu_U(\tilde{E},\omega), \tag{4.45}$$

$$\mu_L(S^kE,\omega) = k\mu_L(E,\omega), \tag{4.46}$$

$$\mu_U(S^kE,\omega) = k\mu_U(E,\omega), \tag{4.47}$$

并且对于任意的 $k = 1,\ \cdots,\ r$,

$$\mu_L(\wedge^kE,\omega) = \sum_{i=1}^{k}\mu_{r+1-i,\omega}(E) \ge k\mu_L(E,\omega), \tag{4.48}$$

$$\mu_U(\wedge^kE,\omega) = \sum_{i=1}^{k}\mu_{i,\omega}(E) \le k\mu_U(E,\omega). \tag{4.49}$$

作为一个简单的推论，我们有

推论 4.3。以下陈述等价：

(i) $\mu_L(E,\omega) > 0$; *(ii)* $\mu_L(E^{\otimes k},\omega) > 0$ 对于某个（分别地，对于每个）$k \ge 1$; *(iii)* $\mu_L(S^kE,\omega) > 0$ 对于某个（分别地，对于每个）$k \ge 1$。

上述条件中任一条件成立时，$\mu_L(\wedge^kE,\omega) > 0$ 对任意的 $k = 1,\cdots,r$均成立。

4.2. 定理 1.7 的证明。 (E,∂_E) 的丰性告诉我们，$c_1(E) > 0$，并且存在一个 Hermitian度量 H_0，使得 $\sqrt{-1}\operatorname{tr} F_{H_0} > 0$。令 Kähler 度量 $\omega = \sqrt{-1}\operatorname{tr} F_{H_0}$。设 $H(t)$ 是以初始数据 H_0为初值的 Hermitian-Yang-Mills流 (1.1) 的解。注意到 $\operatorname{tr}(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_0} - \mathrm{Id}_E) = 0$, 结合命题 2.5，可立即得到

$$\sqrt{-1}\operatorname{tr} F_{H(t)} = \sqrt{-1}\operatorname{tr} F_{H_0} = \omega \tag{4.50}$$

对任意 $0 \le t < \infty$。由 [30, 推论 4.6], 可得

$$\mu_L(E,\omega) > 0. \tag{4.51}$$

为计算第二陈形式，我们回顾以下著名公式

$$\begin{aligned} &4\pi^2(2c_2(E,H(t)) - \frac{1}{2}c_1^2(E,H(t))) \\ =&(|\sqrt{-1}F^\perp_{H(t)}|^2_{H(t),\omega} - |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F^\perp_{H(t)}|^2_{H(t)})\frac{\omega^2}{2}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

其中 $\sqrt{-1}F^\perp_{H(t)} = \sqrt{-1}F_{H(t)} - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E \otimes \omega$ 以及 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega F^\perp_{H(t)} = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)} - \mathrm{Id}_E$。注意，$4\pi^2 c_1^2(E,H(t)) = \omega^2$ 并且

$$\begin{aligned} |\sqrt{-1}F^\perp_{H(t)}|^2_{H(t),\omega} =& \left|\sqrt{-1}F^\perp_{H(t)} - (\sqrt{-1}\Lambda_\omega F^\perp_{H(t)}) \otimes \frac{\omega}{2}\right|^2_{H(t)} \\ &+ \frac{1}{2}\left|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F^\perp_{H(t)}\right|^2_{H(t)} \\ \ge& \frac{1}{2}|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F^\perp_{H(t)}|^2_{H(t)}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

因此,

$$8\pi^2 c_2(E,H(t)) \ge (2 - |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F^\perp_{H(t)}|^2_{H(t)})\frac{\omega^2}{4}. \tag{4.54}$$

如上所述，我们将平均曲率 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)}$的两个特征值按降序排列，记为 $\lambda_1(H(t))$、$\lambda_2(H(t))$。有

$$\lambda_1(H(t)) + \lambda_2(H(t)) = 2 \tag{4.55}$$

因此

$$\begin{aligned} &2 - |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F^\perp_{H(t)}|^2_{H(t)} \\ =&2 - \sum_{i=1}^{2}(\lambda_i(H(t)) - 1)^2 \\ =&4 - (\lambda_1(H(t)))^2 - (\lambda_2(H(t)))^2 \\ =&(\lambda_1(H(t)) + \lambda_2(H(t)))^2 - (\lambda_1(H(t)))^2 - (\lambda_2(H(t)))^2 \\ =&2\lambda_1(H(t))\lambda_2(H(t)). \end{aligned} \tag{4.56}$$

根据定理 1.4，我们知道，当 t 足够大时， $\lambda_1(H(t)) \geq \lambda_2(H(t)) > 0$，那么

$$c_2(E, H(t)) \geq \frac{\lambda_1(H(t))\lambda_2(H(t))}{16\pi^2}\omega^2 > 0. \tag{4.57}$$

定理 1.7 的证明至此完成。

5. The Atiyah-Bott-Bando-Siu question on some compact non-Kähler manifolds

本节中，我们研究一些紧致非 K¨ahler 流形上的 Atiyah–Bott–Bando–Siu问题。

5.1. 极限的 HN 型。我们首先证明，定理1.8中的极限层的 HN 型与初始全纯向量丛 (E, ∂_{A_0}) 的 HN 型相同。

在定理1.9的设定下，设 $A(t)$ 是热流方程 (1.16) 在 (M, ω) 上的一个光滑解，初始数据为 $A_0 \in \mathcal{A}^1_{,H_0}$，并设 A_∞ 是一个 Uhlenbeck 极限。由定理1.8可知， A_∞ 是极限自反层 E_∞ 上的一个可容许联络，且 $\Lambda_\omega F_{A_\infty}$ 是平行的。记 $r =$ 为 rank(E)，并将 r 的实特征值记为$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_\infty}$，按降序排列为 $\lambda_{1,\infty}, \lambda_{2,\infty}, \cdots, \lambda_{r,\infty}$。那么常向量 Vol$(M, \omega)$ $\vec{\lambda}_\infty =$,) ($\frac{\mathrm{Vol}(M,\omega)}{2\pi}\lambda_1$, $\infty, \cdots,$ Vol(M,ω) $\frac{}{2\pi}$ $\lambda_{r,\infty})$ 正是 $(E_\infty, \partial_{A_\infty})$ 的 HN 型。令 $\vec{\mu}_\omega(E) = (\mu_{1,\omega}, \cdots, \mu_{r,\omega})$ 为 (E, ∂_{A_0}) 的 HN 型。现在我们将证明 Vol$(\frac{M,\omega}{2\pi}\ \vec{\lambda}_\infty = \vec{\mu}_\omega,)(E)$。

令$\mathbf{u}(r)$表示酉群 $U(r)$的李代数。固定一个实数 $\rho \geq 1$。对于任意$\mathbf{a} \in \mathbf{u}(r)$，令$\varphi_\rho(\mathbf{a}) = \Sigma_{j=1}^r |\lambda_j|^\rho$，其中 $\sqrt{-1}\lambda_j$是$\mathbf{a}$的特征值。由 [2, 命题 12.16] 可知，φ_ρ 是$\mathbf{u}(r)$上的凸函数。给定一个实数 N，定义如下的 Hermitian-Yang-Mills 型泛函：

$$\mathrm{HYM}_{\rho,N}(A) = \int_M \varphi_\rho\left(\frac{\mathrm{Vol}(M,\omega)}{2\pi}\Lambda_\omega F_A - \sqrt{-1}N\,\mathrm{Id}_E\right)\frac{\omega^n}{n!}, \tag{5.1}$$

下文假设 Vol$(M, \omega) = 2\pi$，并令 HYM$_{\rho,N}(\vec{\mu})$ =HYM$_\rho(\vec{\mu} + \vec{N}) = 2\pi\varphi_\rho($ $\sqrt{-1}(\vec{\mu} + \vec{N}))$，其中 $\vec{\mu} + \vec{N} =$ diag$(\mu_1 + N, \cdots, \mu_r + N)$。我们需要以下两个引理，其证明可见 [15,引理 2.23 和命题 2.24]。

引理 5.1。 泛函$\mathbf{a} \mapsto (\int_M \varphi_\rho(\mathbf{a})\frac{\omega^n}{n!})^{\frac{1}{\rho}}$在 $L^\rho(\mathbf{u}(E))$上定义了一个范数，且该范数与 L^ρ-范数等价，其中$\mathbf{u}(E)$ 表示$\mathrm{End}(E)$中由斜厄米端*omorphism*构成的子丛。

引理 5.2。 假设 $\mu_r \geq 0$ 和 $\lambda_r \geq 0$。若对某个具有极限点的集合 $I \subset [1, \infty)$ 中的所有 ρ，都有 $\varphi_\rho(\sqrt{-1}\vec{\mu}) = \varphi_\rho(\sqrt{-1}\vec{\lambda})$，则 $\vec{\mu} = \vec{\lambda}$。

推论 5.3。 令 $A(t_i)$为沿修正的杨-米尔斯流的一列联络，其 *Uhlenbeck* 极限为 A_∞。则

(1) $|\Lambda_\omega F_{A(t_i)}|_{H_0} \to |\Lambda_\omega F_{A_\infty}|_{H_0}$ 在 L^p 中对所有 $1 \le p < \infty$均强收敛，因此，极限$t_i\to\infty \int_M |\Lambda_\omega F_{A(t_i)}|^2_{H_0} \frac{\omega^n}{n!} = \int_M |\Lambda_\omega F_{A_\infty}|^2_{H_0} \frac{\omega^n}{n!}$；

(2) $\|\Lambda_\omega F_{A_\infty}\|_{L^\infty(H_0)} \le \|\Lambda_\omega F_{A(t_j)}\|_{L^\infty(H_0)} \le \|\Lambda_\omega F_{A(t_0)}\|_{L^\infty(H_0)}$ 对于 $0 \le t_0 \le t_j$.

注 5.4. 上述推论的证明与 *K¨ahler* 情形相同（[34, 推论 3.12]）。

注意，我们可以用光滑凸伴随不变函数$\varphi_{\rho,\ \zeta} \to \varphi_\rho$来逼近$\varphi_\rho$。通过直接计算（[15, 命题 2.25]），可得

$$(2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\overline{\partial} - \frac{\partial}{\partial t})\varphi_{\rho,\zeta}(\Lambda_\omega F_{A(t)} - \sqrt{-1}N\mathrm{Id}_E) \ge 0. \tag{5.2}$$

因此可以看出，$t \mapsto \mathrm{HYM}_{\rho,\ N}(A(t))$ 单调不增。再结合引理 5.1 和推论 5.3，可得

命题5.5。设 $A(t)$ 是流 (1.16)的一个解，且 A_∞ 是 $A(t)$的一个子序列 *Uhlenbeck* 极限。那么对任意 $\rho \ge 1$ 和任意 N，$\lim_{t\to\infty}\mathrm{HYM}_{\rho,\ N}(A(t)) = \mathrm{HYM}_{\rho,\ N}(A_\infty)$。

接下来我们将证明，极限层的 HN 型与初始向量丛的 HN 型相同。

定理5.6。设(E,∂_{A_0}) 是紧*Gauduchon*流形(M,ω)上的一个全纯向量丛，且 $A(t)$ 是*Hermitian*向量丛(E,H_0) 上以 $A_0 \in \mathcal{A}^{1,\ 1}_{H_0}$ 为初始数据的修正的杨-米尔斯流 *(1.16)* 的光滑解。设 A_∞ 是 $A(t)$的一个 *Uhlenbeck* 极限，且 (E_∞, A_∞) 是定理*1.8*中相应的反身层。那么

$$\mathrm{HYM}_{\rho,N}(A_\infty) = \lim_{t\to\infty}\mathrm{HYM}_{\rho,N}(A(t)) = \mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\mu}_\omega(E)) \tag{5.3}$$

对所有 $1 \le \rho \le 2$ 以及所有 $N \in \mathbb{R}$；并且 $(E_\infty、\ A_\infty)$ 的 *HN* 型与 $(E、\ A_0)$的 *HN* 型相同。

定理*5.6* 的证明。设 $H(t)$ 是具有初始条件 H_0 和 $D_{\partial_{A_0},\ H(t)}$ 是关于 $H(t)$ 的 $(E,\ \partial_{A_0})$ 上的 Chern 联络。固定 $1 \le \rho \le 2$，显然有

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\lambda}_\infty)^{\frac{1}{\rho}} - \mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\mu}_\omega(E))^{\frac{1}{\rho}}\right| \\
\le&\left|\mathrm{HYM}_{\rho,N}(A_\infty)^{\frac{1}{\rho}} - \mathrm{HYM}_{\rho,N}(A(t))^{\frac{1}{\rho}}\right| \\
&+ \left|\mathrm{HYM}_{\rho,N}(D_{\overline{\partial}_{A_0},H(t)})^{\frac{1}{\rho}} - \mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\mu}_\omega(E))^{\frac{1}{\rho}}\right|,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

其中我们用到了这一事实

$$\mathrm{HYM}_{\rho,N}(A_\infty) = \mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\lambda}_\infty) \quad \text{and} \quad \mathrm{HYM}_{\rho,N}(A(t)) = \mathrm{HYM}_{\rho,N}(D_{\overline{\partial}_{A_0},H(t)}). \tag{5.5}$$

注意

(5.6)

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{HYM}_{\rho,N}(D_{\overline{\partial}_{A_0},H(t)})^{\frac{1}{\rho}}-\mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\mu}_\omega(E))^{\frac{1}{\rho}}\right|\\
=&\left|\left(\int_M\varphi_\rho(\sqrt{-1}(\vec{\lambda}(H(t),\omega)+\vec{N}))\frac{\omega^n}{n!}\right)^{\frac{1}{\rho}}-\left(\int_M\varphi_\rho(\sqrt{-1}(\vec{\mu}_\omega(E)+\vec{N}))\frac{\omega^n}{n!}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right|\\
\leq&\left(\int_M\varphi_\rho(\sqrt{-1}(\vec{\lambda}(H(t),\omega)-\vec{\mu}_\omega(E)))\frac{\omega^n}{n!}\right)^{\frac{1}{\rho}}\\
\leq&C(\rho,r)\|\vec{\lambda}(H(t),\omega)-\vec{\mu}_\omega(E)\|_{L^\rho(M,\omega)},
\end{aligned}$$

其中， $C(\rho,\ r)$ 是一个仅依赖于 r 和 ρ 的常数。对于任意 $\delta>0$，由定理 1.4 可得

$$\left|\mathrm{HYM}_{\rho,N}(D_{\overline{\partial}_{A_0},H(t)})^{\frac{1}{\rho}}-\mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\mu}_\omega(E))^{\frac{1}{\rho}}\right|\leq\frac{\delta}{2} \tag{5.7}$$

当 t 充分大时。命题5.5给出

$$\left|\mathrm{HYM}_{\rho,N}(A_\infty)^{\frac{1}{\rho}}-\mathrm{HYM}_{\rho,N}(A(t))^{\frac{1}{\rho}}\right|\leq\frac{\delta}{2} \tag{5.8}$$

当 t 足够大时，因此

$$\left|\mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\lambda}_\infty)^{\frac{1}{\rho}}-\mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\mu}_\omega(E))^{\frac{1}{\rho}}\right|\leq\delta. \tag{5.9}$$

取 $\delta\to0$，我们推得

$$\mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\lambda}_\infty)=\mathrm{HYM}_{\rho,N}(\vec{\mu}_\omega(E)) \tag{5.10}$$

对于任意 $1\leq\rho\leq2$ 以及所有 $N\in\mathbb{R}$。当然，这意味着 $\varphi_\rho(\sqrt{-1}(\vec{\lambda}_\infty+\vec{N}))=\varphi_\rho(\sqrt{-1}(\vec{\mu}_\omega(E)+\vec{N}))$ 对所有 $1\leq\rho\leq2$ 以及所有 $N\in\mathbb{R}$成立。我们可以将 N 取充分大，使得 $\mu_{r,\ \omega}+N\geq0$ 以及 $\lambda_{r,\ \infty}+N\geq0$。于是根据引理 5.2，可以得出 $\lambda_\infty=\vec{\mu}_\omega(E)$。□

设 $H(t)$ 是以初始度量 H_0 为初始条件的 Hermitian-Yang-Mills流 (1.1) 的长时间解， $A(t)$ 是满足 $A_0\in\mathcal{A}^{1,\ 1}_{H_0}$ 的修正的杨-米尔斯流 (1.16) 的长时间解。于是我们知道 $A(t)=\sigma(t)(A_0)$，其中 $\sigma(t)$ 是一族满足 $\sigma^{*_{H_0}}(t)\sigma(t)=H_0^{-1}H(t)$ 的复规范变换。考虑由饱和子层构成的 $(E,\ \partial_{A_0})$ 的如下 HN 滤过

$$0=\mathcal{E}_0\subset\mathcal{E}_1\subset\cdots\subset\mathcal{E}_l=(E,\overline{\partial}_{A_0}). \tag{5.11}$$

设 $\kappa_\alpha^{H(t)}$ 是关于 $H(t)$ 到 $\mathcal{E}_\alpha$ 上的正交投影，并令 $\kappa_\alpha^{(t)}=\sigma(t)\circ\kappa_\alpha^{H(t)}\circ\sigma^{-1}(t)$。则 $\kappa_\alpha^{(t)}$ 是到子层 $\sigma(t)(\mathcal{E}_\alpha)$ 上的正交投影，而 $\{\kappa_\alpha^{(t)}\}$ 是 $(E,\ \partial_{A(t)})$ 的 HN 滤过。容易验证：$(\kappa_\alpha^{(t)})^2=\kappa_\alpha^{(t)}=(\kappa_\alpha^{(t)})^{*_{H_0}}$；$(\mathrm{Id}-\kappa_\alpha^{(t)})\overline{\partial}_{A(t)}\kappa_\alpha^{(t)}=0$；$|\overline{\partial}_{A(t)}\kappa_\alpha^{(t)}|_{H_0}=|\partial_{A_0}\kappa_\alpha^{H(t)}|_{H(t)}$。此外，可以看出 $\overline{\partial}\kappa_\alpha^{(t)}\in L^2_1(\mathrm{End}(E))$。

在与定理1.8相同的条件下，假设 A_∞ 是 $A(t_j)$ 的 Uhlenbeck 极限，则存在一列酉规范变换 $\{a_j\}$，使得联络 $A_j := a_j(A(t_j))$ 在 C^∞_{loc}-拓扑下于 Σ_{an} 之外收敛到 A_∞，其中 $j \to \infty$。于是，$\kappa^j_\alpha := a_j \circ \kappa^{(t_j)}_\alpha \circ a_j^{-1}$ 是关于 H_0 到 $a_j \circ \sigma(t_j)(\mathcal{E}_\alpha)$ 上的正交投影。根据 [36, 引理3.13]（另见 [15, 引理4.5]），我们有如下引理。

引理 5.7。设 (E_∞, A_∞) 是定理*1.8*中对应的反身层。

(1) 令 $\{\kappa^\infty_\alpha\}$ 为反身层 $(E_\infty, \partial_{A_\infty})$ 的 *HN* 滤过。则存在 *HN* 滤过的一个子列 $\{\kappa^j_\alpha\}$，使其在 $L^p \cap L^2_{1,loc}$ 上强收敛至 $\{\kappa^\infty_\alpha\}$，且在 Σ_{an} 之外，对所有 $1 \le p < \infty$，均有 $j \to +\infty$。

(2) 假设 $(E, \overline{\partial}_{A_0})$ 是半稳定的，且 $\{\kappa^j_{ss,\alpha}\}$ 是 (E, ∂_{A_j}) 的 *Seshadri* 滤过。不失一般性，假设对所有 j，$\kappa^j_{ss,\alpha}$ 的秩均为常数。则存在 $(E_\infty, \partial_{A_\infty})$ 的一个滤过 $\{\kappa^\infty_{ss,\alpha}\}$，使得经过子列选取后，$\{\kappa^j_{ss,\alpha}\}$ 在 $L^p \cap \overline{L}^2_{1,loc}$ 上强收敛至 $\{\kappa^\infty_{ss,\alpha}\}$，且在 Σ_{an} 之外，对所有 $1 \le p < \infty$，均有 $j \to +\infty$；对所有 α 和 j，$\kappa^\infty_{ss,\alpha}$ 的秩和度分别等于 $\kappa^j_{ss,\alpha}$ 的秩和度。

5.2. 非零全纯映射。本小节中，我们将在某些假设下证明非零全纯映射的存在性，这对于构造从分次层到极限层的非零全纯映射至关重要。

假设 $\pi: M \to M$ 是一个以光滑中心 Σ 为中心的爆破。由 [56], 可知，存在一个关于除子 $-\pi^{-1}(\Sigma)$ 的全纯线丛 L，其定义在 M 上，使得对于某个充分小的 $\tilde{\delta}$，(1,1)-形式 $\pi^*\omega + \tilde{\delta}\sqrt{-1}F_{H_L}$ 为正，其中 $\sqrt{-1}F_{H_L}$ 是关于 L 上的某个 Hermitian度量 H_L 的陈形式。令 $\eta = \pi^*\omega + \tilde{\delta}\sqrt{-1}F_{H_L}$，并令 $\omega_\epsilon = \pi^*\omega + \epsilon\eta$，其中 $0 < \epsilon \le 1$。于是我们得到 M 上的一族厄米度量 $\{\omega_\epsilon\}$。此外，若 ω 是K¨ahler的，则 η 也是K¨ahler的，ω_ϵ 也如此。对于有限序列的爆破 $\pi_i: M_i \to M_{i-1} (i = 1, 2, \cdots, q)$，其中 $M_0 = M$，令

$$\omega_{i,\epsilon} = \pi_i^* \omega_{i-1,\epsilon} + \epsilon_i \eta_i, \tag{5.12}$$

其中每个 η_i 都是 M_i 上的 Hermitian度量，$0 < \epsilon_i \le 1$ 和 $\omega_{0,\ \epsilon} = \omega_\epsilon$。

Bando 和 Siu（[3]）为以光滑中心进行的吹起推导出了一个一致的 Sobole夫不等式。他们的论证不依赖于 K¨ahler 条件。为完整起见，我们在此给出这一结果。

引理 5.8 ([3])。设 (M, ω) 是一个 n 维紧致 *Hermitian* 流形，且 $\pi: M \to M$ 是一个以非奇异中心为中心的爆破。任取 $\tilde{}$ 上的 *Hermitian* 度量 θ，并令 $\omega_\epsilon = \pi^*\omega + \epsilon\theta$，其中 $0 < \epsilon \le 1$。那么存在一致常数 $C_S(\omega)$ 使得

$$\Big(\int_{\tilde{M}} |f|^{\frac{2n}{2n-1}} \frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\Big)^{\frac{2n-1}{n}} \le C_S(\omega)\Big(\int_{\tilde{M}} (|\mathrm{d}f|^2_{\omega_\epsilon} + |f|^2)\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\Big), \tag{5.13}$$

对所有 $f \in C^1(\tilde{M})$ 以及所有 $0 < \epsilon \leq 1$，均成立。

现在，我们给出以下两个引理而不作证明，因为这些结果可通过Moser迭代直接推出。

引理*5.9.* 设 (M,ω) 是一个 n 维紧 *Hermitian* 流形。假设函数 $\phi \geq 0$ 满足 $\phi(x,t) \in C^\infty(M\setminus\Sigma\times[0,\infty)) \cap L^\infty(M\setminus\Sigma\times[t_1,t_2])$，对任意 $t_2 > t_1 > 0$ 均成立，其中 Σ 是一个复余维至少为2的解析子集。设 $(2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar{\partial} - \frac{\partial}{\partial t})\phi \geq 0$, $\phi(0) \in L^1(M\setminus\Sigma,\omega)$ 且 $\|\phi(t)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega)} \leq e^{C_1(t-t_0)}\|\phi(t_0)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega)}$，对任意 $t \geq t_0 \geq 0$ 均成立，其中 C_1 是一个正数常数。那么，对于任意 $T > s > 0$,

$$\|\phi\|_{L^\infty(M\setminus\Sigma\times[s,T])} \leq \frac{C(C_S(\omega),n,T,C_1)}{s^{2n+1}}\|\phi(0)\|_{L^1(M\setminus\Sigma)}, \tag{5.14}$$

其中 $C(C_S(\omega)\ n,T,C_1)$ 是一个仅依赖于 n、T、C_1 以及 *Sobolev*常数 $C_S(\omega)$ 的常数。

引理 *5.10.* 设 (M,ω) 是一个 n 维紧致 *Hermitian*流形，ϑ 是一个满足 $\vartheta \geq \omega$ 的 *Hermitian*度量。假设函数 $\phi(x,t) \in C^\infty(M\setminus\Sigma\times[0,\infty))$，其中 Σ 是 M 中的一个闭子集。假设对于任意 $\Omega \subset\subset M\setminus\Sigma$，$\vartheta$ 和 ω 拟等距（即存在常数 $C(\Omega)$，使得 $0 < C(\Omega) < 1$，且 $C(\Omega)\vartheta \leq \omega \leq \vartheta$ 在 Ω 上）。进一步假设 $(2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\bar{\partial} - \frac{\partial}{\partial t})\phi \geq 0$, $\phi(t) \in L^1(M\setminus\Sigma,\omega)$ 且 $\|\phi(t)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega)} \leq e^{C_1(t-t_0)}\|\phi(t_0)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega)}$ 对任意 $t \geq t_0 \geq 0$ 均成立。那么对于任意 $\hat{\delta} > 0$,

$$\begin{aligned}&\|\phi\|_{L^\infty(M\setminus B^\vartheta_{2\hat{\delta}}(\Sigma)\times[0,T])}\\ \leq&\frac{C(C_S(\omega),n,T,C_1,C_2,\hat{\delta},\mathrm{Vol}(M,\omega))}{\hat{\delta}^{4n+2}}(\|\phi(0)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega)} + \|\phi(0)\|_{L^\infty(M\setminus B^\vartheta_{\hat{\delta}}(\Sigma))}),\end{aligned} \tag{5.15}$$

其中 $B^\vartheta_{\hat{\delta}}(\Sigma)$ 表示关于 ϑ 的 Σ $\hat{\delta}$-邻域，C_2 是满足 $\leq \frac{\sqrt{-1}\vartheta\bar{\vartheta}\omega^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{C_2\frac{\omega^n}{n!}}{}$ 且 $|\mathrm{d}\omega|_\omega \leq C_2$ 的常数。

设 $(M,\ \omega)$ 是一个 Gauduchon流形，$\mathcal{E}$ 是一个无挠层，在奇异集 $\Sigma_\mathcal{E}$ 之外带有 Hermitian 度量 H_0。根据 Hironaka 扁平化定理（[21]），我们知道存在一个有限的爆破序列 π_i：$M_i \to M_{i-1}(i = 1,\ \cdots,\ q$ 和 $M_0 = M)$，沿复余维至少为 2 的光滑中心 Σ_{i-1} 进行，使得

(1)$\tilde{E}_q = \pi^*\mathcal{E}/tor(\pi^*\mathcal{E})$ 在 $M_q = M$ 上局部自由，其中 $\pi = \pi_1\circ\pi_2\circ\cdots\circ\pi_q$，而 $tor(\pi^*\mathcal{E})$ 是 $\pi^*\mathcal{E}$ 的挠部;
(2)$\pi : \tilde{M} \to M$ 在限制到 $\tilde{M}\setminus\pi^{-1}(\Sigma_\mathcal{E})$。

命题5.11。假设 π^*H_0 可以光滑地延拓到整个M_q，并仍为简便起见记作 H_0。那么存在一个长时间解 $H(t)$，满足 *Donaldson*热流

$$\begin{cases} H^{-1}(t)\dfrac{\partial H(t)}{\partial t} = -2\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)}, \\ H(0) = H_0, \end{cases} \tag{5.16}$$

在 $M \setminus \Sigma_{\mathcal{E}}$ 上满足

(5.17)
$$\int_{M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}} |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)}|_{H(t)} \frac{\omega^n}{n!} \leq e^{2\tilde{C}_1(t-t_0)} \int_{M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}} |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t_0)}|_{H(t_0)} \frac{\omega^n}{n!},$$

(5.18)
$$\begin{aligned}&\int_{M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}} \ln(\mathrm{tr}h(t) + \mathrm{tr}h^{-1}(t))\frac{\omega^n}{n!}\\ \leq& e^{2\tilde{C}_1 t}\ln(2\mathrm{rank}(\mathcal{E}))\mathrm{Vol}(M,\omega) + \frac{e^{2\tilde{C}_1 t}-1}{2\tilde{C}_1}\int_{M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}} |\Lambda_\omega F_{H_0}|_{H_0}\frac{\omega^n}{n!},\end{aligned}$$

and

(5.19)
$$|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H|_{L^\infty(M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}\times[s,T],H)} \leq \frac{C(C_S(\omega),n,\tilde{C}_1,T)}{s^{2n+1}}\int_{M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}} |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_0}|_{H_0}\frac{\omega^n}{n!}$$

对于任意 $t \geq t_0 \geq 0$ 和任意 $T > s > 0$，其中 $h(t) = H_0^{-1}H(t)$，且 $\tilde{C}_1$ 是仅依赖于 ω 的常数。

证明。对于 $1 \leq i \leq q$，定义沿 Σ_{i-1} 的第 i 次爆破 $\pi_i : M_i \to M_{i-1}$。对于第 q 次爆破，π_q 是 $M_q \setminus \pi_q^{-1}(\Sigma_{q-1})$ 与 $M_{q-1}\setminus\Sigma_{q-1}$ 之间的双全纯映射。于是，$E_{q-1} := (\pi_q)_* E$ 在 Σ_{q-1} 之外局部自由。令 $E_{i-1} = (\pi_i)_* E_i$、$\hat{\Sigma}_q = \emptyset$ 和 $\hat{\Sigma}_{i-1} = \pi_i(\hat{\Sigma}_i) \cup \Sigma_{i-1}$，其中 $1 \leq i \leq q$。也就是说，存在 q 次爆破，使得 E_i 在 $M_i \setminus \pi_i^{-1}(\Sigma_{i-1})$ 上与 $\hat{M}_{i-1}\setminus\Sigma_{i-1}$ 上的 E_{i-1} 同构，且 E_{i-1} 在 $M_{i-1}\setminus\Sigma_{i-1}$ 上局部自由。

$$\begin{array}{ccccccccccc} E_q & & E_{q-1} & & E_{q-2} & & & & E_1 & & E_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ M_q & \xrightarrow{\pi_q} & M_{q-1} & \xrightarrow{\pi_{q-1}} & M_{q-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M \end{array}$$

由于 π_i 是全纯且适当的，根据 Remmert 适当映射定理（[47],[48]），$\Sigma_{i-1} \subset M_{i-1}$ 是复余维至少为 2 的解析子集。另一方面，根据假设 (2)，E_0 在 $\Sigma_{\mathcal{E}}$之外与$\mathcal{E}$ 同构。

˜**断言 5.1**。存在一个与 ϵ_i 无关的常数 C_1，使得对于任意 $0 < \epsilon_i \leq 1$和 $1 \leq i \leq q$，

$$-\tilde{C}_1\frac{\omega_{q,\epsilon}^n}{n!} \leq \frac{\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\omega_{q,\epsilon}^{n-1}}{(n-1)!} \leq \tilde{C}_1\frac{\omega_{q,\epsilon}^n}{n!} \quad and \quad |\mathrm{d}\omega_{q,\epsilon}|_{\omega_{q,\epsilon}} \leq \tilde{C}_1, \tag{5.20}$$

其中 $\omega_{q,\ \epsilon}$ 由 *(5.12)* 定义。

断言 *5.1* 的证明。回顾定义并直接计算可得（5.21

)

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\omega_{q,\epsilon}^{n-1}\\ =&(n-2)(n-1)\sqrt{-1}\partial\omega_{q,\epsilon}\wedge\overline{\partial}\omega_{q,\epsilon}\wedge\omega_{q,\epsilon}^{n-3} + (n-1)\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\omega_{q,\epsilon}\wedge\omega_{q,\epsilon}^{n-2},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\partial\omega_{q,\epsilon}\wedge\overline{\partial}\omega_{q,\epsilon}\\=&(1+\epsilon_q)^2\pi_q^*(\sqrt{-1}\partial\omega_{q-1,\epsilon}\wedge\overline{\partial}\omega_{q-1,\epsilon})\\=&(1+\epsilon_q)^2(1+\epsilon_{q-1})^2\pi_q^*\pi_{q-1}^*(\sqrt{-1}\partial\omega_{q-2,\epsilon}\wedge\overline{\partial}\omega_{q-2,\epsilon})\\=&\cdots=(1+\epsilon_1)^2(1+\epsilon_2)^2\cdots(1+\epsilon_q)^2\pi^*(\sqrt{-1}\partial\omega\wedge\overline{\partial}\omega).\end{aligned}\tag{5.22}$$

ˆ 由于 M 是紧致的，因此存在一个正数常数 C_1 ，使得

$$-\hat{C}_1\omega^3\leq\sqrt{-1}\partial\omega\wedge\overline{\partial}\omega\leq\hat{C}_1\omega^3\tag{5.23}$$

在 M 上。此处，对于任意 $\beta_1,\ \beta_2\in\Omega_x^{p,p}M,$ ， $\beta_1\leq\beta_2$表示 $\beta_2-\beta_1$是一个非负的（$p,\ p$）形式。由于 $\pi\colon\ M_q\setminus\pi^{-1}(\Sigma_{\mathcal{E}})\to M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}$是双全纯的，（5.23）意味着

$$-\hat{C}_1(\pi^*\omega)^3\wedge\omega_{q,\epsilon}^{n-3}\leq\sqrt{-1}\partial(\pi^*\omega)\wedge\overline{\partial}(\pi^*\omega)\wedge\omega_{q,\epsilon}^{n-3}\leq\hat{C}_1(\pi^*\omega)^3\wedge\omega_{q,\epsilon}^{n-3}\tag{5.24}$$

在 $M_q\setminus\pi^{-1}(\Sigma_{\mathcal{E}})$ 上。根据 $\omega_{q,\ \epsilon}$ 的定义，我们知道 $\pi^*\omega\leq\omega_{q,\ \epsilon}$，于是

$$-\hat{C}_1\omega_{q,\epsilon}^n\leq\sqrt{-1}\partial(\pi^*\omega)\wedge\overline{\partial}(\pi^*\omega)\wedge\omega_{q,\epsilon}^{n-3}\leq\hat{C}_1\omega_{q,\epsilon}^n\tag{5.25}$$

在 $M_q\setminus\pi^{-1}(\Sigma_{\mathcal{E}})$ 上。注意， $\pi^{-1}(\Sigma_{\mathcal{E}})$ 的余维为一。由连续性可得

$$-\hat{C}_1\omega_{q,\epsilon}^n\leq\sqrt{-1}\partial(\pi^*\omega)\wedge\overline{\partial}(\pi^*\omega)\wedge\omega_{q,\epsilon}^{n-3}\leq\hat{C}_1\omega_{q,\epsilon}^n\tag{5.26}$$

˘在 M_q 上。类似地，存在一个与 $\epsilon_1,\ \cdots,\ \epsilon_q$ 无关的常数 C_1，使得

$$-\breve{C}_1\omega_{q,\epsilon}^n\leq\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}(\pi^*\omega)\wedge\omega_{q,\epsilon}^{n-2}\leq\breve{C}_1\omega_{q,\epsilon}^n.\tag{5.27}$$

另一方面，直接计算可得

$$\mathrm{d}\omega_{q,\epsilon}=(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)\cdots(1+\epsilon_q)\pi^*(\mathrm{d}\omega).\tag{5.28}$$

事实上，$\omega_{q,\ \epsilon}>\pi^*\omega$ 可推出

$$|\mathrm{d}\omega_{q,\epsilon}|_{\omega_{q,\epsilon}}\leq(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)\cdots(1+\epsilon_q)|\mathrm{d}\omega|_\omega\leq\check{C}_1\tag{5.29}$$

对于一个与 $\epsilon_1,\ \cdots,\ \epsilon_q$ 无关的正数常数ˇ C_1。结合 (5.26)、(5.27) 和 (5.29)，我们证实了该断言。□

现在我们通过归纳法证明 (5.16)、(5.17)、(5.18) 和 (5.19)。由于 E 是紧 Hermitian 流形 $(M_q,\ \omega_{q,\ \epsilon})$ 上的全纯向量丛，根据 [58], 中的结果，存在一个长时间解 $H_{q,\ \epsilon}(t)$，满足 Donaldson热流

$$\begin{cases}H_{q,\epsilon}^{-1}(t)\dfrac{\partial H_{q,\epsilon}(t)}{\partial t}=-2\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_{q,\epsilon}(t)},\\H_{q,\epsilon}(0)=H_0\end{cases}\tag{5.30}$$

在 M_q上。直接计算可得

$$(2\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}\partial\overline{\partial}-\frac{\partial}{\partial t})(|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_{q,\epsilon}(t)}|^2_{H_{q,\epsilon}(t)}+\zeta)^{\frac{1}{2}}\geq0,\tag{5.31}$$

对任意 $\zeta > 0$。将 (5.31) 两边在 $(M_q, \omega_{q,\epsilon})$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_q}(|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_{q,\epsilon}(t)}|^2_{H_{q,\epsilon}(t)}+\zeta)^{\frac{1}{2}}\frac{\omega^n_{q,\epsilon}}{n!}\\
\leq& 2\int_{M_q}(|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_{q,\epsilon}(t)}|^2_{H_{q,\epsilon}(t)}+\zeta)^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\omega^{n-1}_{q,\epsilon}}{(n-1)!}\\
\leq& 2\tilde{C}_1\int_{M_q}(|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_{q,\epsilon}(t)}|^2_{H_{q,\epsilon}(t)}+\zeta)^{\frac{1}{2}}\frac{\omega^n_{q,\epsilon}}{n!}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

对任意 $t \geq t_0 \geq 0$，对 $[t_0, t]$ 积分，并令 $\zeta \to 0$，可得 5.33

$$\int_{M_q}|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_{q,\epsilon}(t)}|_{H_{q,\epsilon}(t)}\frac{\omega^n_{q,\epsilon}}{n!}\leq e^{2\tilde{C}_1(t-t_0)}\int_{M_q}|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_{q,\epsilon}(t_0)}|_{H_{q,\epsilon}(t_0)}\frac{\omega^n_{q,\epsilon}}{n!}$$

结合 (5.33)，引理5.9 和 引理 5.10 可知 5.34

$$|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_{q,\epsilon}(t)}|_{L^\infty(M_q\times[s,T],H_{q,\epsilon}(t))}\leq\frac{C(C_S(\omega_{q,\epsilon}),n,\tilde{C}_1,T)}{s^{2n+1}}\int_{M_q}|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_0}|_{H_0}\frac{\omega^n_{q,\epsilon}}{n!}$$

对于任意 $T > s > 0$ 和

$$|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_{q,\epsilon}(t)}|_{L^\infty(M_q\setminus B^{\omega_{q,\epsilon}}_{\check{\delta}}(\pi_q^{-1}(\Sigma_{q-1}))\times[0,T],H_{q,\epsilon}(t))}\leq C(\check{\delta}^{-1},T) \tag{5.35}$$

对于任意 $\check{}\ \delta > 0$，其中 $C(\check{}\delta^{-1}, T)$ 是关于 $0 < \epsilon_q \leq 1$ 的一致常数。令 $h_{q,\epsilon}(t) = H_0^{-1}H_{q,\epsilon}(t)$。直接计算可得

$$(2\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}\partial\overline{\partial}-\frac{\partial}{\partial t})\ln(\mathrm{tr}h_{q,\epsilon}(t)+\mathrm{tr}h^{-1}_{q,\epsilon}(t))\geq -2|\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_0}|_{H_0}. \tag{5.36}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\int_{M_q}\ln(\mathrm{tr}h_{q,\epsilon}(t)+\mathrm{tr}h^{-1}_{q,\epsilon}(t))\frac{\omega^n_{q,\epsilon}}{n!}\\
\leq& e^{2\tilde{C}_1t}\ln(2\mathrm{rank}(\mathcal{E}))\mathrm{Vol}(M_q,\omega_{q,\epsilon})+\frac{e^{2\tilde{C}_1t}-1}{2\tilde{C}_1}\int_{M_q}|\Lambda_{\omega_{q,\epsilon}}F_{H_0}|_{H_0}\frac{\omega^n_{q,\epsilon}}{n!}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

˜注意，(5.34) 中的常数 $C(C_S(\omega_{q,\epsilon}), n, C_1, T)$ 不依赖于 ϵ_q。事实上，固定 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \epsilon_{q-1})$，由引理 5.8 可知，Sobolev常数 $C_S(\omega_{q,\epsilon})$ 关于 $0 < \epsilon_q \leq 1$ 一致有界。应用最大值原理和标准椭圆理论，按照 [32], 中相同的论证，我们得到 $M_q \setminus \pi_q^{-1}(\Sigma_{q-1})$ 上 $h_{q,\epsilon}(t)$ 的一致 C^∞_{loc} 估计。然后选取一个子列，随着 $\epsilon_q \to 0$ ，$H_{q,\epsilon}(t)$ 在 C^∞_{loc} 拓扑下收敛到 $H_{q-1,\epsilon}(t)$，且 $H_{q-1,\epsilon}(t)$ 是 $M_{q-1} \setminus \Sigma_{q-1} \times [0, \infty]$ 上 Donaldson热流的解。接着对 (5.33)、(5.37)

和 (5.34) 两边取 {v36}，即可推出

$$\begin{aligned}&\int_{M_{q-1}\setminus\Sigma_{q-1}}|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q-1,\epsilon}}F_{H_{q-1,\epsilon}(t)}|_{H_{q-1,\epsilon}(t)}\frac{\omega_{q-1,\epsilon}^n}{n!}\\ \leq&e^{2\tilde{C}_1(t-t_0)}\int_{M_{q-1}\setminus\Sigma_{q-1}}|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q-1,\epsilon}}F_{H_{q-1,\epsilon}(t_0)}|_{H_{q-1,\epsilon}(t_0)}\frac{\omega_{q-1,\epsilon}^n}{n!}\end{aligned}\tag{5.38}$$

对于任意 $t\geq t_0$,

$$\begin{aligned}&\int_{M_{q-1}\setminus\Sigma_{q-1}}\ln(\mathrm{tr}h_{q-1,\epsilon}(t)+\mathrm{tr}h_{q-1,\epsilon}^{-1}(t))\frac{\omega_{q-1,\epsilon}^n}{n!}\\ \leq&e^{2\tilde{C}_1t}\ln(2\mathrm{rank}(\mathcal{E}))\mathrm{Vol}(M_{q-1},\omega_{q-1,\epsilon})+\frac{e^{2\tilde{C}_1t}-1}{2\tilde{C}_1}\int_{M_{q-1}\setminus\Sigma_{q-1}}|\Lambda_{\omega_{q-1,\epsilon}}F_{H_0}|_{H_0}\frac{\omega_{q-1,\epsilon}^n}{n!}\end{aligned}\tag{5.39}$$

and

$$|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q-1,\epsilon}}F_{H_{q-1,\epsilon}}|_{H_{q-1,\epsilon}}\in L^\infty(M_{q-1}\setminus\hat{\Sigma}_{q-1}\times[s,T])\tag{5.40}$$

对于任意 $T>s>0$。根据引理5.9，有

$$\begin{aligned}&|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q-1,\epsilon}}F_{H_{q-1,\epsilon}(s')}|_{H_{q-1,\epsilon}(s')}(x)\\ \leq&\frac{C(C_S(\omega_{q-1,\epsilon}),n,\tilde{C}_1,T)}{s^{2n+1}}\int_{M_{q-1}\setminus\Sigma_{q-1}}|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{q-1,\epsilon}}F_{H_0}|_{H_0}\frac{\omega_{q-1,\epsilon}^n}{n!}\end{aligned}\tag{5.41}$$

对于任意 $x\in M_{q-1}\setminus\Sigma_{q-1}$、 $T>s>0$ 和 $s'\in[s,T]$。固定 (ϵ_1, ϵ_2, $\cdots$, ϵ_{q-2}) 并执行相同的步骤，我们得到 $M_{q-2}\setminus\Sigma_{q-2}$ 上 Donaldson热流的一个解。重复这一论证，我们得到 $M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}$ 上 Donaldson热流的一个解，它满足 (5.42

$$\int_{M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}}|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)}|_{H(t)}\frac{\omega^n}{n!}\leq e^{2\tilde{C}_1(t-t_0)}\int_{M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}}|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t_0)}|_{H(t_0)}\frac{\omega^n}{n!},$$

$$\begin{aligned}&\int_{M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}}\ln(\mathrm{tr}h(t)+\mathrm{tr}h^{-1}(t))\frac{\omega^n}{n!}\\ \leq&e^{2\tilde{C}_1t}\ln(2\mathrm{rank}(\mathcal{E}))\mathrm{Vol}(M,\omega)+\frac{e^{2\tilde{C}_1t}-1}{2\tilde{C}_1}\int_{M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}}|\Lambda_\omega F_{H_0}|_{H_0}\frac{\omega^n}{n!},\end{aligned}\tag{5.43}$$

$$|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H|_{L^\infty(M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}\times[s,T],H)}\leq\frac{C(C_S(\omega),n,\tilde{C}_1,T)}{s^{2n+1}}\int_{M\setminus\Sigma_{\mathcal{E}}}|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_0}|_{H_0}\frac{\omega^n}{n!}\tag{5.44}$$

对于任意 $t\geq t_0\geq0$ 和任意 $T>s>0$。证明至此完成。 □

命题5.12。 设 $\mathcal{E}$ 是紧*Gauduchon*流形(M,ω)上的无挠层，其奇异集为 $\Sigma_{\mathcal{E}}$; S 是$\mathcal{E}$ 的饱和子层，其奇异集为 Σ_S。假设*Hermitian*丛 $(\mathcal{E}|_{M\setminus\Sigma},H_0)$ 上存在联络序列$A_j\in\mathcal{A}^{1,1}_{H_0}$，其中 Σ 是 M 的一个闭子集，实*Hausdorff*余维至少为4，且满足 $\Sigma_S\cup\Sigma_{\mathcal{E}}\subset\Sigma$,

使得
(1) $A_j \to A_\infty$ 在 C^∞_{loc}-拓扑下趋于 Σ，当 $j \to \infty$ 时；(2) $A_j = g_j(A_0)$ 对于某个复规范变换 g_j，以及 $\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\tilde{H}_j}\|_{L^1(\omega,\tilde{H}_j)}$，其关于 j 一致有界，其中度量 $\tilde{H}_j$ 定义为 $H_0^{-1}\tilde{H}_j = g_j^{*_{H_0}} g_j$，而 $F_{\tilde{H}_j}$ 是 $\tilde{H}_j$ 在 $(\mathcal{E}, \partial_{A_0})$上的 *Chern*曲率；

(3) 存在一列光滑中心爆破：$\pi_i : M_i \to M_{i-1}, i = 1, \cdots, q$，以及 M_q 上全纯向量丛的一个正合列 $0 \to S \to E \to W \to 0$，使得复合映射 $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_q : M_q \to M$ 在 Σ 外是双全纯的，E 和 S 分别与 $\mathcal{E}$ 和 S 在 Σ 外同构。而拉回的几何对象 $\pi^* A_0$, $\pi^* H_j$, $\pi^* H_0$ 可以在 M_q 上光滑延拓至 E。

令 $i_0 : S \hookrightarrow \mathcal{E}$ 为全纯嵌入。那么，$\{g_j \circ i_0\}$的一个子列经过重新缩放后，收敛到一个非零全纯映射 $f_\infty : (S, \partial_{A_0}) \to (E_\infty, \partial_{A_\infty})$，在 Σ 之外的 C^∞_{loc}-拓扑下，当 $j \to \infty$时成立。

证明。令 H_0^S 为 H_0 在 S上诱导的度量。根据命题5.11，我们有演化方程（5.16）的解 $H_j(t)$ 和 $H^S(t)$，其初始条件分别为在 $(\mathcal{E}|_{M\setminus\Sigma}, \partial_{A_0})$ 上的 $H_j(0) = \tilde{H}_j$，以及在 $(S|_{M\setminus\Sigma}, \partial_{A_0})$ 上的 $H^S(0) = H_0^S$，满足

$$\begin{aligned} &|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_j(t)}|_{L^\infty(M\setminus\Sigma\times[s,T], H_j(t))} \\ \le &\frac{C(C_S(\omega), n, \tilde{C}_1, T)}{s^{2n+1}} \int_{M\setminus\Sigma} |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_j(0)}|_{H_j(0)} \frac{\omega^n}{n!} \end{aligned} \tag{5.45}$$

and

$$\begin{aligned} &|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H^S(t)}|_{L^\infty(M\setminus\Sigma\times[s,T], H^S(t))} \\ \le &\frac{C(C_S(\omega), n, \tilde{C}_1, T)}{s^{2n+1}} \int_{M\setminus\Sigma} |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H^S(0)}|_{H^S(0)} \frac{\omega^n}{n!} \end{aligned} \tag{5.46}$$

对任意 $T > s > 0$。直接计算可得

$$\frac{\partial}{\partial t}|i_0|^2_{H^S(t),H_j(t)} = -2\langle\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_j(t)} \circ i_0, i_0\rangle + 2\langle i_0 \circ \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H^S(t)}, i_0\rangle, \tag{5.47}$$

and

$$(2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\overline{\partial} - \frac{\partial}{\partial t})|i_0|^2_{H^S(t),H_j(t)} \ge 0. \tag{5.48}$$

通过与 (5.19) 的证明相同的方法，可得

$$|i_0|^2_{H^S,H_j} \in L^\infty(M \setminus \Sigma \times [s,T]), \tag{5.49}$$

and

$$\int_{M\setminus\Sigma} |i_0|^2_{H^S(t),H_j(t)} \frac{\omega^n}{n!} \le e^{2\tilde{C}_1(t-t_0)} \int_{M\setminus\Sigma} |i_0|^2_{H^S(t_0),H_j(t_0)} \frac{\omega^n}{n!} \tag{5.50}$$

对任意的 $T > s > 0$ 和 $t_0 + 1 > t \geq t_0 > 0$。应用引理5.9，我们得到 5.51
( )

$$|i_0|^2_{H^S(t_0+\hat{s}),H_j(t_0+\hat{s})}(x) \leq \frac{C(C_S(\omega), n, t_0+1, \tilde{C}_1)}{\hat{s}^{2n+1}} \int_{M\setminus\Sigma} |i_0|^2_{H^S(t_0),H_j(t_0)} \frac{\omega^n}{n!}$$

对于 $x \in M \setminus \Sigma$ 和任意 $0 < \hat{s} < 1$。由假设中的一致 L^1界，我们推得

$$2(|\Lambda_\omega F_{H_j(t)}|_{H_j(t)} + |\Lambda_\omega F_{H^S(t)}|_{H^S(t)})(x) \leq C_2 \tag{5.52}$$

对于所有 $x \in M \setminus \Sigma$ 和 $t_0 + 1 > t \geq t_0 > 0$ （其中 t_0 固定），这里 $C_2 = C_2(t_0)$ 是一个与 j 无关的一致常数。结合 (5.52) 和 (5.47) 可得

$$-C_2 \leq \frac{\partial}{\partial t} \ln |i_0|^2_{H^S(t),H_j(t)}(x) \leq C_2 \tag{5.53}$$

对于所有 $x \in M \setminus \Sigma$ 和任意满足 $t_0 + 1 > t \geq t_0 > 0$ 的 t。于是

$$|i_0|^2_{H^S(t_0),H_j(t_0)}(x) \leq e^{C_2\hat{s}} |i_0|^2_{H^S(t_0+\hat{s}),H_j(t_0+\hat{s})}(x) \tag{5.54}$$

对于所有 $x \in M \setminus \Sigma$ 和任意 $0 < \hat{s} < 1$。由 (5.51) 和 (5.54) 可知 5.55
( )

$$|i_0|^2_{H^S(t_0),H_j(t_0)}(x) \leq e^{C_2\hat{s}} \frac{C(C_S(\omega), n, t_0+1, \tilde{C}_1)}{\hat{s}^{2n+1}} \int_{M\setminus\Sigma} |i_0|^2_{H^S(t_0),H_j(t_0)} \frac{\omega^n}{n!}$$

对于 $x \in M \setminus \Sigma$ 以及任意的 $0 < \hat{s} < 1$。

ˆ ˆ 定义全纯映射 $f_j : (S|_{M\setminus\Sigma}, \partial_{A_0}) \to (\mathcal{E}|_{M\setminus\Sigma}, \partial_{A_j})$，其定义为 $f_j = g_j \circ i_0$。容易验证

$$|\hat{f}_j|_{H_0^S,H_0} = |i_0|_{H_0^S,\tilde{H}_j}. \tag{5.56}$$

Set

$$f_j = \Big(\int_M |i_0|^2_{H^S(1),H_j(1)} \frac{\omega^n}{n!}\Big)^{-\frac{1}{2}} \hat{f}_j. \tag{5.57}$$

那么，(5.55)意味着存在一个常数 C_3 ，使得

$$\sup_{x\in M\setminus\tilde{\Sigma}} \Big(\int_M |i_0|^2_{H^S(1),H_j(1)} \frac{\omega^n}{n!}\Big)^{-1} |i_0|^2_{H^S(1),H_j(1)}(x) \leq C_3 \tag{5.58}$$

对所有 j均成立。令 $h_j(t) = \tilde{H}_j^{-1} H_j(t)$。由命题5.11，还可得

$$\begin{aligned} &\int_{M\setminus\Sigma} \ln(\mathrm{tr} h_j(t) + \mathrm{tr} h_j^{-1}(t)) \frac{\omega^n}{n!} \\ \leq & e^{2\tilde{C}_1 t} \ln(2\mathrm{rank}(\mathcal{E}))\mathrm{Vol}(M,\omega) + \frac{e^{2\tilde{C}_1 t} - 1}{2\tilde{C}_1} \int_{M\setminus\Sigma} |\Lambda_\omega F_{\tilde{H}_j}|_{\tilde{H}_j} \frac{\omega^n}{n!}. \end{aligned} \tag{5.59}$$

另一方面，不难验证

$$2\sqrt{-1}\Lambda_\omega \partial\overline{\partial} \ln(\mathrm{tr} h_j(t) + \mathrm{tr} h_j^{-1}(t)) \geq -2|\Lambda_\omega F_{H_j(t)}|_{H_j(t)} - 2|\Lambda_\omega F_{\tilde{H}_j}|_{\tilde{H}_j} \tag{5.60}$$

在 $M \setminus \Sigma$ 上，对所有 $t > 0$。

对于任意紧子集 Ω ⊂ $M \setminus \Sigma$，令 dist(Ω) =inf{$d(x,y) \mid x \in$Ω $y \in \Sigma\} > 0$，其中 d 是 (M,ω) 上的距离函数。令 $B = \cup_{y\in\Sigma} B_y^{\omega}(\frac{1}{2}$dist(Ω))，且 $\Omega' = M \setminus B$。然后选取截断函数 ψ，使得在 Ω 上 $\psi \equiv 1$，在 B 上 $\psi \equiv 0$，且 $\mathrm{d}\psi|_{\omega} \leq$ ^{4} dist(Ω) 。根据假设，对于 Σ 外的所有 $k \geq 0$，A_j 在 C^k 上局部有界，因此有

$$|\Lambda_\omega F_{\tilde{H}_j}|_{\tilde{H}_j} = |\Lambda_\omega F_{A_j}|_{H_0} \leq C_4 \tag{5.61}$$

在 Ω′ 上，其中 C_4 是一个与 j 无关的常数。利用 (5.52)、(5.59)、(5.60)、(5.61)、截断函数 ψ 和 Moser 迭代，我们可推出

$$\sup_{\Omega} \ln(\mathrm{tr}h_j(1)+\mathrm{tr}h_j^{-1}(1)) \leq C_5 \int_{M\setminus\Sigma} \ln(\mathrm{tr}h_j(1)+\mathrm{tr}h_j^{-1}(1))\frac{\omega^n}{n!} \leq C_6, \tag{5.62}$$

其中 C_5、C_6 是与 j 无关的常数。类似地，可以得到 H^S(1) 的局部 C^0-估计，即对于任意紧子集 Ω ⊂⊂ $M \setminus \Sigma$，存在一个常数 C_7 使得

$$\sup_{\Omega} \ln(\mathrm{tr}((H_0^S)^{-1}H^S(1)) + \mathrm{tr}((H^S(1))^{-1}H_0^S)) \leq C_7. \tag{5.63}$$

对于任意紧子集 Ω ⊂ $M \setminus \Sigma$，由 (5.58)、(5.62)、(5.63)，可得

$$\sup_{x\in\Omega} |f_j|^2_{H_0^S,H_0}(x) \leq C(\Omega), \tag{5.64}$$

其中 C(Ω) 是一个与 j 无关的常数。

由于 f_j 是$\overline{\partial}_{A_0,\ A_j}$-全纯的，根据上述 f_j 的一致局部 C^0-界以及 $A_j \to A_\infty$ 在 C^∞_{loc} 拓扑下于 Σ 外趋于 $j \to \infty$ 的假设，标准椭圆理论表明，f_j 存在一个子列（为简便起见，仍记为 f_j），使得 f_j 在 C^∞_{loc} 拓扑下于 Σ 外收敛于全纯映射$\overline{\ }f_\infty$：$(S,\ \partial_{A_0}) \to (E_\infty,\ \partial_{A_\infty})$，其中 $j \to \infty$。

现在我们只需证明 f_∞ 非零。由于 Σ 的 Hausdorff 余维至少为 4，对于满足 $\delta C_3 < 1$ 的任意小的 $\delta > 0$，我们可以选取一个紧子集 $\Omega_{\bar{\delta}} \subset M \setminus \Sigma$，使得

$$\int_{M\setminus\Omega_{\bar{\delta}}} \frac{\omega^n}{n!} \leq \bar{\delta}. \tag{5.65}$$

显然，局部一致估计 (5.62) 和 (5.63) 表明，存在一个正数常数 $C_{\bar{\delta}}$，使得

$$C_{\bar{\delta}}^{-1}|i_0|^2_{H^S(1),H_j(1)}(x) \leq |i_0|^2_{H_0^S,\tilde{H}_j}(x) \leq C_{\bar{\delta}}|i_0|^2_{H^S(1),H_j(1)}(x) \tag{5.66}$$

对所有 $x \in \Omega_\delta$ 和 j 均成立。于是

(5.67)
$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{\overline{\delta}}} |f_\infty|^2_{H_0^S,H_0}\frac{\omega^n}{n!} &= \lim_{j\to+\infty}\int_{\Omega_{\overline{\delta}}} |f_j|^2_{H_0^S,H_0}\frac{\omega^n}{n!}\\ &= \lim_{j\to+\infty}(\int_M |i_0|^2_{H^S(1),H_j(1)}\frac{\omega^n}{n!})^{-1}\int_{\Omega_{\overline{\delta}}} |i_0|^2_{H_0^S,\tilde{H}_j}\frac{\omega^n}{n!}\\ &\geq \lim_{j\to+\infty} C_{\overline{\delta}}^{-1}(\int_M |i_0|^2_{H^S(1),H_j(1)}\frac{\omega^n}{n!})^{-1}\int_{\Omega_{\overline{\delta}}} |i_0|^2_{H^S(1),H_j(1)}\frac{\omega^n}{n!}\\ &\geq C_{\overline{\delta}}^{-1}(1-\overline{\delta}C_3) > 0.\end{aligned}$$

因此， f_∞ 是一个非零全纯映射。

□

5.3. 定理 1.9 的证明。设 $\{\mathcal{E}_{\alpha,\beta}\}$ 是全纯向量丛 $(E,\ \partial_{A_0})$ 的 HNS 滤过，则其伴随分次对象 $Gr_\omega^{HNS}(E,\ \overline{\partial}_{A_0}) = \oplus_{\alpha=1}^{l}\oplus_{\beta=1}^{l_\alpha}\mathcal{Q}_{\alpha,\ \beta}$ 由 $(E,\ \partial_{A_0})$ 的同构类唯一确定，其中 $\mathcal{Q}_{\alpha,\ \beta} = \mathcal{E}_{\alpha,\ \beta}/\mathcal{E}_{\alpha,\ \beta-1}$。我们将 Σ_{alg} 称为 HNS 滤过 $\{\mathcal{E}_{\alpha,\beta}\}$的奇异集，它是一个复余维至少为 2 的复解析子集。基于定理5.6、引理 5.7 和命题5.12，我们可以证明定理1.9。我们的论证与 [36,第 5]节中的论证类似，为了完整起见，我们在此给出证明。首先，我们概述证明思路。

令 $\mathcal{Q}^{\alpha,\beta} = E/\mathcal{E}_{\alpha,\beta-1}$，则可得到一个无挠层序列 $\{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}\}$。我们将使用归纳法验证 $\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}$ 对每个 α 和 β 都满足以下三个性质。

归纳假设：存在一个联络序列 $A^{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}}_j \in \mathcal{A}^1_{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta},H_0}$ 在 Hermitian丛 $(\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}|_{M\setminus(\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an})}, H_0)$ 上，使得：(1) $A^{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}}_j \to A^{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta},\infty^\beta}$ 在 C^∞_{loc} 拓扑下于 $\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an}$ 之外收敛，其中 Σ_{alg} 是 HNS 滤过 $\{\mathcal{E}_{\alpha,\beta}\}$ 的奇异集，而 Σ_{an} 是定理1.8中的解析起泡集；(2) $A^{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}}_j|_{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}_0} = g_j(A^{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}}_0)$ 对某个复规范变换 g_j 以及 $\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{A^{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}}_j})\|_{L^1(\omega,H_j)}$ 在 j 中一致有界，其中度量 H_j 定义为 $H_0^{-1}H_j = g_j^{*H_0}g_j$，且 $A^{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta},H_j}$ 是 H_j 在 $(\mathcal{Q}^{\alpha,\beta},\partial_{A^{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}}_0})$ 上的 Chern 联络；(3) $\overline{(\mathcal{Q}^{\alpha,\beta},\partial_{A^{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta},\infty^\beta}})}$ 与 $(\mathcal{Q}^{\alpha,\beta},\partial_{A^{\mathcal{Q}^{\alpha,\beta}}_0})$ 具有相同的 HN 型。

一旦 $\mathcal{Q}^{\alpha,\ \beta}$ 满足归纳假设，根据命题5.12，我们便可以构造一个非零全纯映射

$$f_{\alpha,\beta}:(\mathcal{Q}_{\alpha,\beta},\overline{\partial}_{A_0^{\mathcal{Q}_{\alpha,\beta}}})\to(E_\infty,\overline{\partial}_{A_\infty})$$

从 $\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an}$出发。利用定理5.6，我们可以证明该全纯映射

$$\oplus_{\alpha=1}^{l}\oplus_{\beta=1}^{l_\alpha} f_{\alpha,\beta} : Gr_{\omega}^{HNS}(E,\overline{\partial}_{A_0}) \to (E_\infty,\overline{\partial}_{A_\infty}) \tag{5.68}$$

在 $\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an}$ 之外是一个同构。根据 Hartogs 延拓定理，上述映射可延拓到 $\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an}$，成为从$(E_\infty, \partial_{A_\infty})$ 到 $Gr_{\omega}^{HNS}(E, \partial_{A_0})^{**}$ 的全纯同构。

现在我们给出证明的细节。

定理*1.9*的证明。我们首先证明 $\mathcal{Q}^{1,1}$（即 E）满足归纳假设 (1) –(3)。设 $H(t)$ 是全纯向量丛 (E, ∂_{A_0}) 上 Hermitian-Yang-Mills 流 (1.1) 的长时间解，其初始度量为 H_0；设 $A(t)$ 是 Hermitian向量丛 (E, H_0) 上修正的杨-米尔斯流 (1.16) 的解，其初始联络为A_0。于是有 $A(t) = \sigma(t)(A_0)$，其中 $\sigma(t)$ 满足 $\sigma^{*_{H_0}}(t)\sigma(t) = h(t) = H_0^{-1}H(t)$。

由定理1.8，存在一个联络序列 $\{A_j\}$，它在 C^∞_{loc}-拓扑下于 Σ_{an} 之外收敛到 A_∞，当 $j\to\infty$时，其中 $A_j = a_j(A(t_j)) = a_j\circ\sigma(t_j)(A_0)$，对某个酉规范变换 a_j成立。与 (5.31) 相同的计算表明

$$(2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\overline{\partial} - \frac{\partial}{\partial t})(|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t)}|^2_{H(t)} + \zeta)^{\frac{1}{2}} \geq 0, \tag{5.69}$$

对任意 $\zeta > 0$ 都成立。将 (5.69) 两边在 (M, ω) 上积分并令 $\zeta\to 0$，可直接推出

$$\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t_1)}\|_{L^1(\omega,H(t_1))} \leq \|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t_2)}\|_{L^1(\omega,H(t_2))} \tag{5.70}$$

对任意 $t_1\geq t_2\geq 0$ 都成立。利用 (5.70) 和定理5.6，可以很容易验证 $\mathcal{Q}^{1,1}$ 满足归纳假设 (1)、(2)、(3)。

令 $\mathcal{S} := \mathcal{E}_{1,1}$ 为全纯向量丛 (E, ∂_{A_0}) 的 HNS 滤过所对应的第一个稳定相干子层，并令 $i_0 : \mathcal{S}\to(E, \partial_{A_0})$ 为全纯嵌入。根据 Sibley 关于 HNS 滤过奇点消解的结果（[50, 命题 4.3]），存在一列沿复子流形进行的有限次爆破，其复合映射 $\tilde{\pi} : M\to M$ 具有以下性质：存在一个滤过

$$0 = E_{0,0}\subset E_{1,1}\subset\cdots\subset E_{l,k_l} = \tilde{E} := \tilde{\pi}^*E \tag{5.71}$$

由子丛组成，并且 $E_{\alpha,\beta}$ 同构于$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ 在每个 α 和 β 的 $\tilde{\pi}^{-1}(\Sigma_{alg})$ 外部。

根据命题5.12，$f_j = a_j\circ\sigma(t_j)\circ i_0$存在一个子列，经重新缩放后收敛到一个非零全纯映射 $f_\infty : \mathcal{S}\to(E_\infty, \partial_{A_\infty})$，且在 $\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an}$ 之外当 $j\to\infty$时成立。由于 $\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an}$ 的豪斯多夫余维至少为 4，根据 Hartogs 延拓定理（关于这一条件另见 [49,引理 5.7），f_∞ 延拓为整个 M上的一个层同态 $f_\infty : \mathcal{S}\to(E_\infty, \partial_{A_\infty})$。

记 ξ_1^j 为关于H_0到 $a_j\circ\sigma(t_j)(\mathcal{S})$上的正交投影。应用引理 5.7，根据 Uhlenbeck 和 Yau 关于L_1^2-子丛的正则性陈述（[55]），我们知道，当 $j\to+\infty$时， ξ_1^j 在 $L^p\cap L^2_{1,loc}$上于 Σ_{an} 之外强收敛到 ξ_1^∞，且 ξ_1^∞确定了 $(E_\infty,\partial_{A_\infty})$ 的一个子层 $\mathcal{E}_1^\infty$,1，其秩 rank($\mathcal{E}_1^\infty$,1) =rank($\mathcal{S}$)，并且 $\mu_\omega(\mathcal{E}_1^\infty,1)=\mu_\omega(\mathcal{S})$。另一方面，事实 $\xi_1^j\circ f_j=f_j$ 意味着 $\xi_1^\infty\circ f_\infty=f_\infty$，进而有 $f_\infty:\mathcal{S}\to\mathcal{E}_1^\infty$,1。此外，定理5.6指出$(E_\infty,\partial_{A_\infty})$ 和 (E,∂_{A_0}) 具有相同的 HN 型，因此 $\mathcal{E}_1^\infty$,1 是 ω- 半稳定的。注意到 $\mathcal{S}$ 是 ω- 稳定的。由 [29, V.7.11,7.12], 可知，非零全纯映射 f_∞ 必为同构，即

$$\mathcal{S}\cong\mathcal{E}^\infty_{1,1}, \tag{5.72}$$

并且 $\mathcal{E}_1^\infty,_1$ 是 $(E_\infty,\partial_{A_\infty})$ 的一个 ω-稳定子层。这是归纳法的第一步。

现在我们将利用 $\mathcal{Q}^1,_1$ 满足 (1) – (3) 这一事实，推断 $\mathcal{Q}^1,_2$也满足归纳假设。为简便起见，记 $\mathcal{Q}^1,_2=E/\mathcal{S}$为 $\mathcal{Q}$。于是我们有 $Gr_\omega^{HNS}(E,\partial_{A_0})=\mathcal{S}\oplus Gr_\omega^{HNS}(\mathcal{Q},\partial_{A_0^{\mathcal{Q}}})$。由于 H_∞是可容许 Hermitian-Einstein 度量的直和，存在一个全纯正交分解 $(E_\infty,\partial_{A_\infty})=\mathcal{E}_1^\infty,_1\oplus\mathcal{Q}_\infty$，其中 $\mathcal{Q}_\infty=(\mathcal{E}_1^\infty,_1)^\perp$ 在$M\setminus(\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an})$ 上。

设 $\{e_a\}$ 是 $\mathcal{S}$的一个局部标架，且 $H_{j,\bar{}ab}=\langle f_j(e_a),f_j(e_b)\rangle_{H_0}$。正交投影 ξ_1^j 可写为

$$\xi_1^j(X)=\langle X,f_j(e_b)\rangle_{H_0}H_j^{a\bar{b}}f_j(e_a) \tag{5.73}$$

对任意 $X\in\Gamma(E)$，其中 $(H_j^{a\bar{b}})$ 是矩阵 $(H_{j,ab})$ 的逆矩阵。由于 $f_j\bar{}\to f_\infty$ 在 C^∞_{loc}-拓扑下于 $\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an}$ 之外收敛至 $j\to\infty$，且 f_∞ 是单射，我们可以证明 $\xi_1^j\to\xi_1^\infty$在 C^∞_{loc}-拓扑下于 $\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an}$ 之外收敛至 $j\to\infty$。令 $\xi_1:E_\infty\to E_\infty$ 为关于 H_∞到 $\mathcal{E}_1^\infty$上的正交投影。根据 [14, 引理 5.12], ，我们可以选取一列酉规范变换 $\{u_j\}$，使得当 $j\to\infty$时， $\xi_1^j=u_j\circ\hat{}\,\xi_1\circ u_j^{-1}$且 $u_j\to$Id 在 $M\setminus(\Sigma_{alg}\cup\Sigma_{an})$ 上按 C^∞_{loc}-拓扑收敛。容易验证，$u_j(\mathcal{Q}_\infty)=(\xi_1^j(E))^\perp$。注意，存在丛同构 $p^{*_{H_0}}:\mathcal{Q}\to\mathcal{S}^\perp$ 以及酉规范变换 $u_0:\mathcal{Q}_\infty\to\mathcal{S}^\perp$。考虑 $\mathcal{Q}$5 上的诱导联络

$$D_{A_j^{\mathcal{Q}}}=(p^{*_{H_0}})^{-1}\circ a_0^{-1}\circ u_0\circ\hat{\xi}_1^\perp\circ u_j^{-1}\circ a_j\circ D_{A(t_j)}\circ a_j^{-1}\circ u_j\circ\hat{\xi}_1^\perp\circ u_0^{-1}\circ a_0\circ p^{*_{H_0}}, \tag{.74}$$

以及 $\mathcal{Q}$ 的复规范变换

$$h_j=(p^{*_{H_0}})^{-1}\circ a_0^{-1}\circ u_0\circ\hat{\xi}_1^\perp\circ u_j^{-1}\circ a_j\circ\sigma(t_j)\circ p^{*_{H(t_j)}}. \tag{5.75}$$

Then

$$\overline{\partial}_{A_j^{\mathcal{Q}}}=h_j\circ\overline{\partial}_{A_0^{\mathcal{Q}}}\circ h_j^{-1} \tag{5.76}$$

and

$$\partial_{A_j^{\mathcal{Q}}} = (h_j^{*_{H_0}})^{-1} \circ \partial_{A_0^{\mathcal{Q}}} \circ h_j^{*_{H_0}}. \tag{5.77}$$

根据定义，可以直接推得，在 $M \setminus (\Sigma_{alg} \cup \Sigma_{an})$ 上的 C^∞_{loc}-拓扑中，$(((p^{*_{H_0}})^{-1} \circ a_0^{-1} \circ u_0)^*(A_j^{\mathcal{Q}}) \to A_\infty^{\mathcal{Q}_\infty}$，因为 $j \to \infty$。因此， $\mathcal{Q}$ 满足归纳假设 (1)。同时，直接计算可得 $h_j^{*_{H_0}} h_j = (H_0^{\mathcal{Q}})^{-1} H^{\mathcal{Q}}(t_j)$，其中 $H^{\mathcal{Q}}(t)$ 表示 $\mathcal{Q}$ 关于 $H(t)$ 的商上的诱导度量。于是我们得到

$$\begin{aligned} \|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H^{\mathcal{Q}}(t_j)}\|_{L^1(\omega, H^{\mathcal{Q}}(t_j))} &= \|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A^{\mathcal{Q}_{t_j}}(t_j)}\|_{L^1(\omega, H_0)} \\ &= \|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_j^{\mathcal{Q}_j}}\|_{L^1(\omega, H_0)}, \end{aligned} \tag{5.78}$$

其中 $\mathcal{Q}_{t_j} = \sigma(t_j)(\mathcal{Q})$， $\mathcal{Q}_j = a_j \circ \sigma(t_j)(\mathcal{Q})$。

现在考虑关于度量 H_0 和 Chern 联络 A_j的 $\mathcal{Q}_j$ 上的高斯–科达齐方程:

$$F_{A_j^{\mathcal{Q}_j}} = (\xi_1^j)^\perp \circ F_{A_j} \circ (\xi_1^j)^\perp + \partial_{A_j}\xi_1^j \wedge \overline{\partial}_{A_j}\xi_1^j. \tag{5.79}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} &\int_{M\setminus(\Sigma_{alg})} |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_j^{\mathcal{Q}_j}}|_{H_0} \frac{\omega^n}{n!} \\ =&\int_{M\setminus(\Sigma_{alg})} |(\xi_1^j)^\perp \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_j}(\xi_1^j)^\perp + \sqrt{-1}\Lambda_\omega(\partial_{A_j}\xi_1^j \wedge \overline{\partial}_{A_j}\xi_1^j)|_{H_0} \frac{\omega^n}{n!} \\ \leq&\int_{M\setminus(\Sigma_{alg})} \{|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_j}|_{H_0} + |\overline{\partial}_{A_j}\xi_1^j|^2_{H_0}\} \frac{\omega^n}{n!}. \end{aligned} \tag{5.80}$$

根据 $\mathcal{S}$ ([51, 引理3.2]) 的次数公式和高斯–科达齐方程，我们得到 $\int_{M\setminus(\Sigma_{alg})} |\partial_{A_j}\xi_1^j|^2_{H_0} \frac{\omega^n}{n!}$ 一致有界。由此可知，$\int_{M\setminus(\Sigma_{alg})} |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_j^{\mathcal{Q}_j}}|_{H_0} \frac{\omega^n}{n!}$ 也一致有界。因此，归纳假设 (2) 得以满足。显然，定理5.6表明归纳假设 (3) 也成立。因此， $\mathcal{Q}$ 满足归纳假设 (1) –(3)。

通过归纳法重复上述论证，我们得出

$$E_\infty \cong Gr_\omega^{HNS}(E, \overline{\partial}_{A_0}) = \oplus_{\alpha=1}^{l} \oplus_{\beta=1}^{k_\alpha} \mathcal{Q}_{\alpha,\beta} \tag{5.81}$$

在 $M \setminus (\Sigma_{alg} \cup \Sigma_{an})$ 上。由 Hartogs 延拓定理及反身层的正规性，存在一个层同构

$$f : (E_\infty, \overline{\partial}_{A_\infty}) \to Gr_\omega^{HNS}(E, \overline{\partial}_{A_0})^{**} \tag{5.82}$$

关于 M。我们完成了。 □

References

[1] L. ´Alvarez-C´onsul 和 O. Garc´ıa-Prada, *Hitchin-Kobayashi correspondence, quivers, and vortices* **238** 2003 1 33 , 《数学物理通讯》, ( ), -。[2] M.F. Atiyah 和 R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, 《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑》, 308(1983), 第1505期, 523-615。[3] S. Bando 和 Y.T. Siu, *Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics* *Gemetry* , 载于 , *and Analysis on Complex Manifolds* 1994, 39 50 World Scientific, -。[4] R. Bhatia, *Matrix analysis*, 数学研究生教材丛书, 第169卷。Springer-Verlag, 纽约, 1997。xii+347 页。ISBN: 0-387-94846-5。[5] O. Biquard, *On parabolic bundles over a complex surface*, 《伦敦数学学会杂志》, (2) 53(1996), 302-316。[6] I. Biswas, *Stable Higgs bundles on compact Gauduchon manifolds*, 《巴黎科学院数学报告》, 349(2011), 71-74。[7] I. Biswas 和 G. Schumacher, *Yang-Mills equation for stable Higgs sheaves*, 《国际数学杂志》, 20(2009), 541-556。[8] S.B. Bradlow, *Vortices in holomorphic line bundles over closed Kähler manifolds*, 《数学物理通讯》, 135(1990), 1-17。[9] L. Bruasse, *Harder-Narasimhan filtration on non Kähler manifolds*, 《国际数学杂志》, 12(2001), 第5期, 579-594。[10] N.P. Buchdahl, *Hermitian-Einstein connections and stable vector bundles over compact complex surfaces* **280** 1988 625 648 , 《数学年刊》, ( ), -。[11] E. Calabi, *An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry* **25** 1958 45 56 , 《杜克数学杂志》, ( ), -。[12] F. Campana, *Orbifold slope rational connectedness*, arXiv:1607.07829v2。[13] M.G. Crandall、H. Ishii 和 P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations* **27** 1992 , 《美国数学会通报》（新系列）, ( ), 第1期, 1 67。[14] G.D. Daskalopoulos, *The topology of the space of stable bundles on a compact Riemann surface* **36** 1992 3, 699 746 , 《微分几何杂志》, ( ), 第-期。[15] G. Daskalopoulos 和 R. Wentworth, *Convergence properties of the Yang-Mills flow on Kähler surfaces* **575** 2004 69 99 , 《纯粹与应用数学杂志》, ( ), -。[16] J.-P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf。[17] J. Dodziuk, *Maximum principle for parabolic inequalities and the heat flow on open manifolds* **32** 1983 5, 703 716 , 《印第安纳大学数学杂志》, ( ), 第-期。[18] S.K. Donaldson, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles* 3 **50** 1985 1 26 , 《伦敦数学学会会刊》, ( ) ( ), -。[19] S.K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, 《杜克数学杂志》, 54(1987), 第1期, 231-247。[20] P. Gauduchon, *La 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte*, 《数学年刊》, 267(1984), 495–518。[21] H. Hironaka, *Flattening theorem in complex-analytic geometry*, 《美国数学杂志》, 97(1975), 第2期, 503-547。[22] N.J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, 《伦敦数学学会会刊》(3), 55(1987), 59-126。[23] M.C. Hong 和 G. Tian, *Asymptotical behaviour of the Yang-Mills flow and singular Yang-Mills connections* **330** 2004 3, 441 472 , 《数学年刊》, ( ), 第-期。[24] D. Huybrechts 和 M. Lehn, *Stable pairs on curves and surfaces*, 《代数几何杂志》, 4(1995), 第1期, 67-104。[25] H. Ishii, *On the equivalence of two notions of weak solutions viscosity solutions and distribution solutions* **38** 1995 1, 101 120 , , 《泛函方程》, ( ), 第-期。

Existence of approximate Hermitian-Einstein structures on semi-stable bun-
[26] A. Jacob, *dles* **18** 2014 859 883 ,
《亚洲数学杂志》，（），-。[27] A. Jacob,
The Yang-Mills flow and the Atiyah-Bott formula on compact Kähler man-
ifolds **138** 2016 2, 329 365 ，《美国数学杂志》，
（），第 - 期。[28] J. Jost 和 K. Zuo,
Harmonic maps and Sl r ℂ *-representations of fundamental*（，），《代数几何
groups of quasiprojective manifolds **5** 1996 77 106
杂志》，（），-。[29] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, 《日本数学会
出版物》，15，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1987 年。[30] C. Li、C.J. Zhang 和 X. Z
hang, *Mean curvature positivity and rational connectedness*, arXiv:2112.00488v3。[31] J.Y. Li 和 M.S.
Narasimhan, *Hermitian-Einstein metrics on parabolic stable bundles*, 《数学学报（英文版）》，
15(1999)，93-114。[32] J.Y. Li、C.J. Zhang 和 X. Zhang,
Semistable Higgs sheaves and Bogomolov type
inequality **56** 2017 3, ，《变分与偏微分方
程》，（），第 81 号论文，33 页。[33] J.Y. Li、C.J. Zhang 和 X. Zhang,
The limit of the Hermitian-Yang-Mills flow on
reflexive sheaves **325** 2018 165 214 ，《数学进展》，
（），-。[34] J.Y. Li 和 X. Zhang, *The gradient flow of Higgs pairs*, 《欧洲数学学会杂志》，13(2011)，
1373-1422。[35] J.Y. Li 和 X. Zhang,
Existence of approximate Hermitian-Einstein structures on
semi-stable Higgs bundles **52** 2015 783 ，《变分与偏微分方
程》，（），- 795。[36] J.Y. Li 和 X. Zhang, *The limit of the Yang-Mills-Higgs flow on Higgs bundles*,
《国际数学研究通知》，2017(2017)，第 1 期，232-276。[37] P.-L. Lions,
Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equa-
tions. II. Viscosity solutions and uniqueness ，《偏微分方程通讯》，
8(1983)，第 11 期，1229-1276。[38] M. L¨ubke 和 A. Teleman, *The Kobayashi-Hitchin correspondence*,
世界科学出版公司，里弗埃奇，新泽西州，1995 年。[39] M. L
¨ubke 和 A.
The universal Kobayashi-Hitchin correspondence on Her-
mitian manifolds **183** 2006 863, +97
Teleman,《美国数学会回忆录》，（），第 vi 页。[40] T. Mochizuki,
Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles and an
application ´ **309** 2006 +117 978 2 85629 226 6 ，Asterisque，（），
viii 页。ISBN：----。[41] T. Mochizuki,
Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles II,《几何与拓扑》，13(2009)，
359-455。[42] T. Mochizuki, *Kobayashi-Hitchin correspondence for analytically stable bundles*,
《美国数学会汇刊》，373(2020)，第 1 期，551-596。[43] M.S. Narasimhan 和 C.S. Seshadri,
Stable and unitary vector bundles on a compact
Riemann surface 2 **82** 1965 540 567 ，《数学年刊》（），
（），-。[44] L. Ni 和 H.Y. Ren,
Hermitian-Einstein metrics for vector bundles on complete
Kähler manifolds **353** 2001 441 456 ，《美国数学会汇刊》，
（），-。[45] Y.C. Nie 和 X. Zhang, *Semistable Higgs bundles over compact Gauduchon manifolds*,《几
何分析杂志》，28(2018)，627-642。[46] Y.C. Nie 和 X. Zhang,
The limiting behaviour of Hermitian-Yang-Mills flow over
compact non-Kähler manifolds **63** 2020 7, 1369 1390 ，《中国科学：数学》，
（），第 - 期。https://doi.org/10.1007/s11425-018-9411-7。[47] R. Remmert,
Projectionen analytischer Mengen,《数学年刊》，130(1956)，410-441。[48] R. Remmert,
Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume,《数学年刊》，133(1957)，328-370。
[49] B. Shiffman, *On the removal of singularities of analytic sets*,《密歇根数学杂志》，15(1968)，
111-120。

[50] B. Sibley, *Asymptotics of the Yang-Mills flow for holomorphic vector bundles over Kähler manifolds: the canonical structure of the limit* , 《莱茵应用数学杂志》, **706**(2015), 123-191。[51] C.T. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization* **1** 1988 867 918 , 《美国数学会杂志》, （）, -。[52] C.T. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, 法国高等科学研究院出版物, **75**(1992), 5-95。[53] K. Uhlenbeck, *Connections with L^p bounds on curvature*, 《数学物理通讯》, **83**(1982), 第 1 期, 31-42。[54] K. Uhlenbeck, *A priori estimates for Yang-Mills fields*, 未发表。[55] K.K. Uhlenbeck 和 S.-T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles* **39** 1986 257 293 , 《纯粹与应用数学通讯》, （）, S -S。[56] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I: Volume 1*, 剑桥大学出版社, 2002 年。[57] Y. Wang 和 X. Zhang, *Twisted holomorphic chains and vortex equations over non-compact Kähler manifolds* **373** 2011 179 202 , 《数学分析及其应用杂志》, （）, -。[58] X. Zhang, *Hermitian-Einstein metrics on holomorphic vector bundles over Hermitian manifolds* **53** 2005 315 335 , 《几何物理学杂志》, （）, -。

University of Science and Technology of China, Hefei, 230026, P.R. China*Email address*: ustcchze@mail.ustc.edu.cn

School of Mathematics and Statistics Nanjing University of Science and , , , , Technology Nanjing 210094 P.R.China
Email address: leecryst@mail.ustc.edu.cnSchool of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo, 315211, P.R. China
Email address: zhangchuanjing@nbu.edu.cn

School of Mathematics and Statistics Nanjing University of Science and , , , , Technology Nanjing 210094 P.R.China
Email address, 通讯作者: mathzx@njust.edu.cn