arXiv:2601.05618v1 [math.FA] 9 Jan 2026

离散加权Morrey空间上离散希尔伯特变换的有界性

Rashid Aliev[1],Amil Jabiyev[2]

2026年1月12日

[1,2] 巴库国立大学，巴库，阿塞拜疆 电子邮箱： [1] aliyevrashid@mail.ru， [2] amilcbiyev23@gmail.com

摘要。 希尔伯特变换是一种乘子算子，在傅里叶变换理论中得到了广泛应用。希尔伯特变换推动了现代调和分析的发展。其离散形式也广泛应用于科学技术的许多领域，并在数字信号处理中发挥着重要作用。研究离散变换的根本动机在于，实验数据通常不是以连续方式获取的，而是以离散时间值进行采样的。由于物理科学和工程学领域收集的大量数据都是离散的，离散希尔伯特变换成为这些领域中对这类数据进行一般分析的一个相当有用的工具。本文讨论离散加权Morrey空间上的离散希尔伯特变换，并证明其在这些空间中的有界性。

关键词： 离散希尔伯特变换、Morrey空间、加权Morrey空间、离散Morrey空间、离散加权Morrey空间、离散希尔伯特变换在加权Morrey空间上的有界性。

1 引言

我们用 l_p, $p \geq 1$表示满足下列条件的标量序列类 $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ：

$$\|b\|_{l_p} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

其中， $\mathbb{Z}$ 是整数集。

设 $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_p, p \geq 1$。序列 $H(b) = \{(Hb)_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，其中

$$(Hb)_n = \sum_{m\neq n} \frac{b_m}{n-m}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

称为序列 $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$的希尔伯特变换。

M.Riesz 证明（见 [23]），如果 $b \in l_p$、 $p > 1$，那么 $H(b) \in l_p$，并且不等式

$$\|H(b)\|_{l_p} \leq C_p \|b\|_{l_p} \tag{1}$$

成立，其中 C_p 是一个绝对常数。不等式（1）的加权类比见文献[7, 8, 9, 11, 17, 20, 22, 27]。如果 $b \in l_1$，那么序列 $H(b)$ 属于类 $\bigcap_{p>1} l_p$，但一般不属于类 l_1（见 [4]）。在这种情况下，R.Hunt、B.Muckenhoupt 和 R.Wheeden（见 [17]）证明了 $H(b)$ 的分布函数 $(Hb)(\lambda)$: $= \sum_{\{n\in\mathbb{Z}:\ |(Hb)_n|>\lambda\}} 1$ 满足弱条件

$$\forall \lambda > 0 \qquad |(Hb)(\lambda)| \le \frac{c_0}{\lambda}\|b\|_{l_1},$$

其中，c_0 为一个绝对常数。在 [4], 中证明了：如果序列 $b \in l_1$ 满足条件 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n = 0$（该条件对于离散希尔伯特变换的可和性是必要的），并且 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|\ln(e+|n|) < \infty$，那么 $H(b) \in l_1$，且以下不等式成立:

$$\|H(b)\|_{l_1} \le 6\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|\ln(e+|n|).$$

在 [5], 中引入了级数的 Q-可和性概念，并利用这一概念证明了序列 $b \in l_1$ 的希尔伯特变换是 Q-可和的，且其 Q-和等于零。在 [6, 2, 5, 3, 15, 16, 18]中研究了离散Morrey空间和离散奥利奇空间上调和分析算子的离散类比。

本文讨论离散加权Morrey空间上的离散希尔伯特变换。具体而言，我们利用希尔伯特变换在加权 Morrey 空间上的有界性，得到其在离散加权Morrey空间上的有界性。

2 离散加权Morrey空间

经典 Morrey 空间 $M_{\lambda,\ p}(R)$，$0 \le \lambda \le \frac{1}{p}$，$1 \le p \prec \infty$（见 [1, 21, 24, 25, 26]）由满足以下范数有限的函数 $f \in L_{p,\ loc}(R)$ 构成

$$\|f\|_{M_{\lambda,p}} = \sup_x \sup_{r>0} \left[r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(B(x;r))}\right].$$

注意，若 $\lambda = 0$，则 $M_{\lambda,\ p} = L_p$；若 $\lambda = \frac{1}{p}$，则 $M_{\lambda,\ p} = L_\infty$（见 [1]）。当$p > 1$时，$0 \le \lambda < \frac{1}{p}$，F.Chiarenza 和 M.Frasca（见 [10]）证明了 Hardy– Littlewood 极大算子、分数阶积分算子和一个奇异积分算子在 Morrey 空间中的有界性。因此，特别地，这意味着希尔伯特变换在 Morrey 空间中有界。也就是说，当 $p > 1, 0 \le \lambda < \frac{1}{p}$ 时，对于任意 $f(t) \in M_{\lambda,\ p}$，我们有

$$(Hf)(t) := \frac{1}{\pi} v.p. \int_R \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau \in M_{\lambda,p},$$

并且存在 $C_{\lambda,p} > 0$，使得

$$\|Hf\|_{M_{\lambda,p}} \le C_{\lambda,p} \cdot \|f\|_{M_{\lambda,p}}$$

对所有 $f \in M_{\lambda,p}$ 均成立。

在 [13], 中，作者引入了 Morrey空间的离散类比，并研究了其包含性质。对于 $m \in Z$和 $n \in N \cup \{0\}$，定义 $S_{m,\ n} = \{k \in Z:\ |k-m| \le n\}$。按照标准约定，我们用 $|S|$表示集合 S 的基数。于是，对于所有

$m \in Z$ 以及每个 $n \in N \cup \{0\}$。离散Morrey空间 $m_{\lambda,\ p}$、 $0 \le \lambda \le \frac{1}{p}$、$-1 \le p < \infty$由满足下列范数有限的序列 $b = \{b_n\}_{n \in Z}$ 构成

$$\|b\|_{m_{\lambda,p}} = \sup_{m \in Z} \sup_{n \in N \cup \{0\}} \left[|S_{m,n}|^{-\lambda} \left(\sum_{k \in S_{m,n}} |b_k|^p \right)^{1/p} \right].$$

在 [14], 中证明了离散 Hardy-Littlewood 极大算子和离散 Riesz 势的有界性，并在 [2], 中证明了希尔伯特变换在离散 Morrey 空间上的有界性。

设$0 < \lambda < \frac{1}{p}$、 $1 \le p < \infty$ 以及权函数 $w(t)$是定义在R 上的局部可积函数，且几乎处处取值于$(0,\ \infty)$。加权 Morrey 空间$M_{\lambda,\ p,\ w}$ （见 [19]）由满足以下范数有限的函数$f \in L_{p,\ w,\ loc}(R)$组成

$$\|f\|_{M_{\lambda,p,w}} = \sup_x \sup_{r>0} \frac{\left(\int_{B(x,r)} |f(t)|^p w(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_{B(x,r)} w(t) dt \right)^{\lambda}}.$$

若 $w(t) \equiv 1$，则$M_{\lambda,\ p,\ w} = M_{\lambda,\ p}$、 $0 < \lambda < \frac{1}{p}$、 $1 \le p < \infty$。Y. Komori 和 S. Shirai 证明了（见 [19]）Calderón-Zygmund 算子在加权 Morrey 空间上的有界性。特别地，这意味着希尔伯特变换在加权 Morrey 空间上有界。这表明，在 $p > 1$、 $0 < \lambda < \frac{1}{p}$的情况下，对任意 $f(t) \in M_{\lambda,\ p,\ w}$，我们有

$$H(f) \in M_{\lambda,p,w}$$

并且存在$C_{\lambda,\ p,\ w} > 0$ 使得

$$||Hf||_{M_{\lambda,p,w}} \le C_{\lambda,p,w} ||f||_{M_{\lambda,p,w}}$$

对所有 $f \in M_{\lambda,\ p,\ w}$ 均成立。

对于任意 $\lambda > 0$ 以及任意区间 $B \subset R$，记 λB 为与B 具有相同中心、半径长度为 B的 λ 倍的区间。

定义 2.1。（见 [19]）如果存在一个常数 $D > 0$，使得对于任意区间 $B \subset R$ 都有

$$w(2B) \le D w(B),$$

那么我们称 w 满足倍增条件，并记为 $w \in \Delta_2$，其中 $w(E) = \int_E w(t) dt$。

定义 2.2。（见 [17]）如果权函数 w 属于 Muckenhoupt 类 A_p，且 $1 < p < \infty$，则称其满足以下条件：存在 $C > 0$，使得对于任意区间 $B \subset R$

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \le C, \tag{2}$$

and 满足不等式 (2) 的 C 的下确界记为 $[w]_{A_p}$。我们定义 $A_\infty = \cup_{1<}$ A_p。

我们需要以下引理:

引理 2.1（参见 [12]）。若对于某个 $1 \le p < \infty$，有 $w \in A_p$，则 $w \in \Delta_2$。

引理 2.2（参见 [19]）。若 $w \in \Delta_2$，则存在常数 $D_1 > 1$，使得对任意区间 B

$$w(2B) \ge D_1 w(B).$$

对于 $m = (m_1, m_2, \ldots\ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，我们定义

$$S_{m,n} := \left\{ k \in \mathbb{Z}^d : ||k - m||_\infty \le n \right\},$$

其中 $\|k-m\|_\infty = \max_{1 \le i \le d} \{|k_i - m_i|\}$。

设 $0 < \lambda < \frac{1}{p}$, $1 \le p < \infty$。离散加权Morrey空间 $m_{\lambda,\ p,\ w}$ (参见 [15]) 由满足以下范数有限的序列 b: $\mathbb{Z} \to R$ 构成

$$||b||_{m_{\lambda,p,w}} := \sup_{m \in \mathbb{Z}} \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{\left(\sum_{k \in S_{m,n}} |b_k|^p w_k \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{k \in S_{m,n}} w_k \right)^{\lambda}} < \infty,$$

其中 $w = \{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是权，且对任意 $k \in \mathbb{Z}^d$, $w_k \in (0, \infty)$。若 $\{w_k\} \equiv 1$，则 $m_{\lambda,\ p,\ w} = m_{\lambda,\ p}$(参见 [13])。

定义 2.3（参见 [17]）。若权 $\{w_k\}$ 满足以下条件，则称其属于 A_p （$1 < p < \infty$）：

$$[w]_{\tilde{A}_p} := \sup_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{\left(\sum_{k=m}^{n} w_k \right) \left(\sum_{k=m}^{n} w_k^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1}}{(n-m+1)^p} < \infty.$$

定义 2.4. 如果存在 $D > 0$，使得对于任意 $m \in \mathbb{Z}$ 以及任意 $\delta > 0$

$$\sum_{\{k \in \mathbb{Z}:\ k \in [m-2\delta, m+2\delta]\}} w_k \le D \sum_{\{k \in \mathbb{Z}:\ k \in [m-\delta, m+\delta]\}} w_k, \tag{3}$$

则称 $\{w_k\} \in \Delta_2$。

引理 2.3. 如果 $\{w_k\} \in \Delta_2$，则存在 $D_1 > 1$，使得对于任意 $m \in \mathbb{Z}$ 以及 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{k=m-(2n+1)}^{m+(2n+1)} w_k \ge D_1 \sum_{k=m-n}^{m+n} w_k.$$

引理 2.4. 如果对于某个 $1 \le p < \infty$有 $\{w_k\} \in A_p$，则 $\{w_k\} \in \Delta_2$。

引理*2.3*和*2.4*的证明。为证明这些引理，我们定义函数 $w(x) = w_k$ for $x \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$。于是，对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，有 $w_k = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} w(x)dx$。令 $\{w_k\} \in \tilde{\Delta}_2$。下面证明 $w \in \Delta_2$。为此，我们任取一个区间 $B = [b-\delta, b+\delta]$。用 k 表示数 $b + \frac{1}{2}$ 的整数部分。根据定义，$w(b) = w_k$。若 $\delta \le 1$，则由 $\{w_k\} \in \tilde{\Delta}_2$ 可得

$$w(2B) = \int_{b-2\delta}^{b+2\delta} w(x)dx \le 4\delta(w_{k-1} + w_k + w_{k+1}) \le 4\delta \cdot D \cdot w_k \le 4D \cdot w(B).$$

若对某个 $r\in\mathbb{N}$ 有 $\delta\in[r,r+1)$，则

$$w(2B)=\int_{b-2\delta}^{b+2\delta}w(x)dx\le\sum_{m=k-2r}^{k+2r}w_m\le D\cdot\sum_{m=k-r}^{k+r}w_m\le D^2\sum_{\{k\in\mathbb{Z}:\ m\in[k-\frac{\delta}{2},k+\frac{\delta}{2}]\}}w_k\le 2D^2w(B).$$

因此， $w\in\Delta_2$。由此，根据引理 2.2，存在一个常数 $D_1>1$，使得对于任意区间 B

$$w(2B)\ge D_1w(B).$$

若取 $B=[m-n-\frac{1}{2},m+n+\frac{1}{2}]$，则有

$$\sum_{k=m-(2n+1)}^{m+(2n+1)}w_k\ge w(2B)\ge D_1w(B)=D_1\sum_{k=m-n}^{m+n}w_k.$$

引理 2.3 的证明至此完成。

现在，我们来证明引理 2.4。设 $\{w_k\}\in A_p$、 $1<p<\infty$。取区间$B=(x-r,\ x+r)$，并将数 $x-r+\frac{1}{2}$ 和 $x+r+\frac{1}{2}$ 的整数部分分别记为 m 和 n。令

$$\delta_k=|B\cap[m-\frac{1}{2}+(k-1),m-\frac{1}{2}+k]|,\quad k=\overline{1,n-m+1},\quad \delta=\max_{k=\overline{1,n-m+1}}\delta_k.$$

Then

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\\&=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n-m+1}\delta_k w_{m+k-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n-m+1}\delta_k w_{m+k-1}^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}}{\left(\sum_{k=1}^{n-m+1}\delta_k\right)^p}\\&\le\left(\frac{\delta}{\sum_{k=1}^{n-m+1}\delta_k}\right)^p\cdot\left(\sum_{k=m}^{n}w_k\right)\left(\sum_{k=m}^{n}w_k^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}\\&\le 3^p\cdot\frac{(\sum_{k=m}^{n}w_k)\left(\sum_{k=m}^{n}w_k^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}}{(n-m+1)^p}\le 3^p\cdot[w]_{\tilde{A}_p}\end{aligned}$$

由此可得 $w(x)\in A_p$。然后，根据引理 2.1，我们得到 $w(x)\in\Delta_2$。现在我们将证明$\{w_k\}\in\tilde{\Delta}_2$，即不等式 (3) 成立。对于 $\delta<\frac{1}{2}$，不等式 (3) 显然成立。对于 $\delta\ge\frac{1}{2}$，有

$$\begin{aligned}&\sum_{\{k\in\mathbb{Z}:\ k\in[m-2\delta,m+2\delta]\}}w_k\le w([m-4\delta,m+4\delta])\\&\le D^3w([m-\frac{\delta}{2},m+\frac{\delta}{2}])\le D^3\sum_{\{k\in\mathbb{Z}:\ k\in[m-\delta,m+\delta]\}}w_k.\end{aligned}$$

引理 2.4 的证明至此完成。

推论 2.1。若 $\{w_k\}\in A_p$ 对某个 $1\le p<\infty$成立，则存在 $D_1>1$，使得对任意 $m\in\mathbb{Z}$ 和 $i\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=m-2^i}^{m+2^i}w_k\ge D_1^{i-1}(w_{k-1}+w_k+w_{k+1}).$$

3 离散加权 Morrey 空间上离散希尔伯特变换的有界性

定理 3.1。设 $1 \le p < \infty, 0 \le \lambda \le \frac{1}{p}$。若 $\{w_k\} \in \tilde{A}_p$，则对所有 $b = \{b_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in m_{\lambda,\ p,\ w}$，序列 $H(b) = \{(Hb)_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是良定义的。

证明。设 $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in m_{\lambda,\ p,\ w}$，$1 < p < \infty$，$0 < \lambda < \frac{1}{p}$。则对于任意 $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
|(Hb)_n| &\le \sum_{m\neq n} \frac{|b_m|}{|n-m|} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{2^{i-1}\le|n-m|<2^i} \frac{|b_m| {w_m}^{\frac{1}{p}}}{|n-m| {w_m}^{\frac{1}{p}}} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{2^{i-1}\le|n-m|<2^i} \frac{|b_m| {w_m}^{\frac{1}{p}}}{{w_m}^{\frac{1}{p}}} \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \left(\sum_{|n-m|<2^i} |b_m|^p w_m \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{|n-m|<2^i} {w_m}^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \left(\sum_{|n-m|<2^i} |b_m|^p w_m \right)^{\frac{1}{p}} \frac{[w]_{\tilde{A}_p}^{\frac{1}{p}} (2^{i+1}-1)}{\left(\sum_{|n-m|<2^i} w_m\right)^{\frac{1}{p}}} \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \frac{\left(\sum_{|n-m|<2^i} |b_m|^p w_m\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{|n-m|<2^i} w_m\right)^{\lambda}} \frac{[w]_{\tilde{A}_p}^{\frac{1}{p}} (2^{i+1}-1)}{\left(\sum_{|n-m|<2^i} w_m\right)^{\frac{1}{p}-\lambda}} \\
&\le 4\|b\|_{m_{\lambda,p,w}} [w]_{\tilde{A}_p}^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{|n-m|<2^i} w_m \right)^{\lambda-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

记

$$\delta = \log_2 D_1 > 0,$$

并利用推论 2.1，可得

$$\sum_{m=n-2^i}^{n+2^i} w_m \ge D_1^{i-1} \sum_{m=n-1}^{n+1} w_m = 2^{(i-1)\delta}(w_{n-1} + w_n + w_{n+1}).$$

Then

$$|(Hb)_n| \le 4\|b\|_{m_{\lambda,p,w}} [w]_{\tilde{A}_p}^{\frac{1}{p}} \frac{2^{\delta(\frac{1}{p}-\lambda)}}{\left(2^{\delta(\frac{1}{p}-\lambda)}-1\right)(w_{n-1}+w_n+w_{n+1})^{\frac{1}{p}-\lambda}} < \infty.$$

因此，序列 b的希尔伯特变换定义良好。定理 3.1 得证。

定理 3.2。设 $1 \le p < \infty, 0 \le \lambda \le \frac{1}{p}$。若 $\{w_k\} \in \tilde{A}_p$，则对于任意 $b = \{b_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in m_{\lambda,\ p,\ w}$，有 $H(b) \in m_{\lambda,\ p,\ w}$，并且存在 $C_{\lambda,\ p,\ w} > 0$，使得

$$\|H(b)\|_{m_{\lambda,p,w}} \le C_{\lambda,p,w}\|b\|_{m_{\lambda,p,w}}$$

对于任意 $b \in m_{\lambda、\ p、\ w}$。

证明。我们将 $f(x)$ 定义为：当 $x \in [k-\frac{1}{4}, k+\frac{1}{4}]$, $k \in \mathbb{Z}$ 时为 b_k，其他地方为 0；并将 $w(x)$ 定义为：当 $x \in [k-\frac{1}{4}, k+\frac{1}{4}]$ 时为 w_k，在两者之间线性地变化。容易验证，如果 $\{w_k\} \in \tilde{A}_p$，则 $w(x) \in A_p$（见[17]）。我们将证明 $f \in M_{\lambda,p,w}$ 取区间 $B = (x-r, x+r)$，并将数 $x-r+\frac{1}{2}$ 和 $x+r+\frac{1}{2}$ 的整数部分分别记为 m 和 n。令

$$\delta_k = |B \cap [m-\frac{1}{4}+(k-1), m-\frac{1}{4}+k]|, \quad k = \overline{1, n-m+1}, \quad \delta = \max_{k=\overline{1,n-m+1}} \delta_k.$$

Then

$$\frac{\left(\int_B |f(t)|^p w(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_B w(t)dt\right)^{\lambda}} = \left(\int_B w(t)dt\right)^{-\lambda} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-m+1} \delta_k w_{m+k-1} |b_{m+k-1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_B w(t)dt\right)^{-\lambda} \cdot \delta^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=m}^{n} w_k |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

若 $\delta = 0$，则

$$\frac{\left(\int_B |f(t)|^p w(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_B w(t)dt\right)^{\lambda}} = 0.$$

设 $\delta > 0$。若 $n = m$，即若对某个 $m \in \mathbb{Z}$，有 $B \subset [m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2})$，则

$$\left(\int_B w(t)dt\right) \geq \delta_1 \cdot w_m = \delta \cdot w_m = \delta \cdot \sum_{k=m}^{n} w_k;$$

若 $n = m+1$，即若对某个 $m \in \mathbb{Z}$，有 $[m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}] \subset B \subset [m-\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2})$，则由引理 2.4 可得

$$\left(\int_B w(t)dt\right) \geq \delta_1 \cdot w_m + \delta_2 \cdot w_{m+1} \geq \delta \cdot \min\{w_m, w_{m+1}\} \geq \frac{\delta}{D} \cdot \sum_{k=m}^{n} w_k;$$

若 $n \geq m+2$，即若 $[m-\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}] \subset B \subset [m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})$，则由引理 2.4 可得

$$\left(\int_B w(t)dt\right) \geq \delta \sum_{k=m+1}^{n-1} w_k \geq \frac{\delta}{D} \cdot \sum_{k=m}^{n} w_k.$$

因此，

$$\frac{\left(\int_B |f(t)|^p w(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_B w(t)dt\right)^{\lambda}} \leq \delta^{\frac{1}{p}-\lambda} \cdot D^{\lambda} \cdot \frac{\left(\sum_{k=m}^{n} w_k |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{k=m}^{n} w_k\right)^{\lambda}}$$

由此可得

$$\|f\|_{M_{\lambda,p,w}} \leq \delta^{\frac{1}{p}-\lambda} \cdot D^{\lambda} \|b\|_{m_{\lambda,p,w}}.$$

我们记作

$$(Tb)_n = \sup_{k>0} \left| \sum_{m:\ |n-m| \geq k} \frac{b_m}{n-m} \right|, \qquad (Mf)(x) = \sup_{y \neq x} \frac{1}{y-x} \int_x^y |f(t)|dt$$

$$S(f)(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy \right|.$$

在 [17], 中，已证明对于任意 $x \in [j-\frac{1}{4}, j+\frac{1}{4}]$ -

$$\left| \int_{|x-y|>n+\frac{1}{2}} \frac{2f(y)}{x-y} dy - \sum_{k:\ |k-j|>n} \frac{b_k}{j-k} \right| < \int_{\frac{1}{2}<|x-y|} \frac{|f(y)|}{(x-y)^2} dy.$$

由此可得

$$(Tb)_j \leq 2S(f)(x) + 2\int_{\frac{1}{2}\leq|x-y|} \frac{|f(y)|}{(x-y)^2} dy \tag{4}$$

对于 $x \in [j-\frac{1}{4}, j+\frac{1}{4}]$。通过分部积分可知，(4) 右侧的第二项有界于 4$(Mf)(x)$。因此，对于任意 $x \in [j-\frac{1}{4}, j+\frac{1}{4}]$ - -

$$(Tb)_j \leq 2S(f)(x) + 4(Mf)(x). \tag{5}$$

文献 [19], 中证明了，若 $w(x) \in A_p$，则 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在加权 Morrey 空间 $M_{\lambda,\ p,\ w}$ 中有界。类似于（[19], 定理 3.3）的证明，我们证明算子 S 在空间 $M_{\lambda,\ p,\ w}$ 中的有界性。固定一个区间 $B=(x_0-r,\ x_0+r)$，并将 $f=f_1+f_2$ 分解为 $f_1 = f\cdot\chi_{2B}$。于是

$$\int_B |Sf(x)|^p w(x)dx \leq \int_B |Sf_1(x)|^p w(x)dx + \int_B |Sf_2(x)|^p w(x)dx.$$

利用如下事实：若 $w(x) \in A_p$，则 S 在 $L_p(w)$ 上有界（见 [17]），可得

$$\int_B |Sf_1(x)|^p w(x)dx \leq \int_R |Sf_1(x)|^p w(x)dx$$

$$\leq C\int_R |f_1(x)|^p w(x)dx = \int_B |f(x)|^p w(x)dx.$$

因此，我们有

$$\int_B |Sf_1(x)|^p w(x)dx \leq C\cdot\|f\|^p_{M_{\lambda,p,w}} \cdot w(B)^{\lambda p} \tag{6}$$

对于 $x \in B$ 和 $y \notin 2B$，我们有 $|x-y| \geq \frac{1}{2}|x_0-y|$。因此，对于 $x \in B$，我们得到

$$|Sf_2(x)| \leq \int_R \frac{|f_2(y)|}{|x-y|} dy \leq C\cdot\int_{|x_0-y|\geq 2r} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|} dy. \tag{7}$$

由 Hölder 不等式和 $w \in A_p$ 可得

$$\int_{|x_0-y|\geq 2r} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|} dy = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j r\leq|x_0-y|<2^{j+1}r} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|} dy$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j r} \int_{|x_0-y|<2^{j+1}r} |f(y)|dy$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j r} \left(\int_{|x_0-y|<2^{j+1}r} |f(y)|^p w(y)dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|x_0-y|<2^{j+1}r} w(y)^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C\cdot\|f\|_{M_{\lambda,p,w}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{w(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p}-\lambda}}$$

利用 (7)、引理 2.1 和引理 2.2，可得

$$\int_B |Sf_2(x)|^p w(x)dx \le C\cdot \|f\|^p_{M_{\lambda,p,w}} \cdot w(B)^{\lambda p}\cdot \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{w(B)}{w(2^{j+1}B)}\right)^{1-p\lambda}$$

$$\le C\cdot \|f\|^p_{M_{\lambda,p,w}} \cdot w(B)^{\lambda p} \tag{8}$$

由（6）和（8）可知，算子 S 在空间$M_{\lambda,\ p,\ w}$中是有界的。由（5）可得

$$\sum_{k\in S_{m,n}} |Tb_k|^p w_k \le \sum_{k\in S_{m,n}} 2\int_{k-\frac{1}{4}}^{k+\frac{1}{4}} |2S(f)+4M(f)|^p w(x)dx \le 4\int_{m-n-\frac{1}{4}}^{m+n+\frac{1}{4}} |S(f)+2M(f)|^p w(x)dx$$

由于

$$\int_{m-n-\frac{1}{4}}^{m+n+\frac{1}{4}} w(x)dx = \sum_{k=m-n}^{m+n}\int_{k-\frac{1}{4}}^{k+\frac{1}{4}} w(x)dx + \sum_{k=m-n}^{m+n-1}\int_{k+\frac{1}{4}}^{k+\frac{3}{4}} w(x)dx \le \sum_{k=m-n}^{m+n} w_k,$$

then

$$\frac{\left(\sum_{k\in S_{m,n}} |Tb_k|^p w_k\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{k\in S_{m,n}} w_k\right)^{\lambda}} \le \frac{\left(4\int_{m-n-\frac{1}{4}}^{m+n+\frac{1}{4}} |S(f)+2M(f)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_{m-n-\frac{1}{4}}^{m+n+\frac{1}{4}} w(x)dx\right)^{\lambda}}$$

.

$$\le 4^{\frac{1}{p}} ||S(f)+2M(f)||_{M_{\lambda,p,w}} \le 4^{\frac{1}{p}}\left(||S(f)||_{M_{\lambda,p,w}} + 2||M(f)||_{M_{\lambda,p,w}}\right).$$

因此，$T(b)\in m_{\lambda,\ p,\ w}$ 且

$$\|T(b)\|_{m_{\lambda,p,w}} \le 4^{\frac{1}{p}}\left(||S(f)||_{M_{\lambda,p,w}} + 2||M(f)||_{M_{\lambda,p,w}}\right)\|b\|_{m_{\lambda,p,w}}$$

$$\le 4^{\frac{1}{p}}\left(||S||_{M_{\lambda,p,w}\to M_{\lambda,p,w}} + 2||M||_{M_{\lambda,p,w}\to M_{\lambda,p,w}}\right)\|f\|_{M_{\lambda,p,w}}$$

$$\le 4^{\frac{1}{p}}\left(||S||_{M_{\lambda,p,w}\to M_{\lambda,p,w}} + 2||M||_{M_{\lambda,p,w}\to M_{\lambda,p,w}}\right)\delta^{\frac{1}{p}-\lambda}\cdot D^{\lambda}\|b\|_{m_{\lambda,p,w}}$$

另一方面，由不等式

$$|(Hb)_n| \le |(Tb)_n|$$

可得 $H(b)\in m_{\lambda,\ p,\ w}$ 且

$$\|H(b)\|_{m_{\lambda,p,w}} \le 4^{\frac{1}{p}}\left(||S||_{M_{\lambda,p,w}\to M_{\lambda,p,w}} + 2||M||_{M_{\lambda,p,w}\to M_{\lambda,p,w}}\right)\delta^{\frac{1}{p}-\lambda}\cdot D^{\lambda}\|b\|_{m_{\lambda,p,w}}$$

对任意 $b\in m_{\lambda,p,w}$。至此，定理 3.2 的证明完成。

参考文献

[1] Adams D. R. *Morrey*空间，Springer，2015。124页。

[2] Aliev R. A., Ahmadova A. N. 离散希尔伯特变换在离散Morrey空间上的有界性，《乌法数学杂志》，2021年。第13卷，第1期。第98–109页。doi:10.13108/2021-13-1-98[3] Aliev R. A., Ahmadova A. N., Huseynli A. F.t 离散Ahlfors-Beurling变换在离散Morrey空间上的有界性，阿塞拜疆国家科学院数学与力学研究所论文集，2022年。第48卷，第1期。第123–131页。https://doi.org/10.30546/2409-4994.48.1.2022.123[4] Aliev R. A., Amrahova A. F. 关于离散希尔伯特变换的可和性，《乌拉尔数学杂志》，2018年。第4卷，第21期。第6–12页。http://dx.doi.org/10.15826/umj.2018.2.002[5] Aliev R. A., Amrahova A. F. 离散希尔伯特变换的性质，《计算复分析与算子理论》，2019年。第13卷，第8期。第3883–3897页。https://doi.org/10.1007/s11785-019-00936-9[6]Aliev R. A., Huseynli A. F. 离散希尔伯特变换在Or- licz序列空间上的有界性，阿塞拜疆国家科学院数学与力学研究所论文集，2024年。第50卷，第2期。第213-221页。https://doi.org/10.30546/2409-4994.2024.50.2.213

[7] Andersen K. F. 离散希尔伯特变换的带权不等式，《加拿大数学通报》，1977年，第20卷，第1期，第9–16页。https://doi.org/10.4153/CMB-1977-002-2

[8] Belov Y., Mengestie T. Y., Seip K. 稀疏序列上的离散希尔伯特变换，《伦敦数学学会会刊》，2011年，第103卷，第1期，第73–105页。https://doi.org/10.1112/plms/pdq053

[9] Belov Y., Mengestie T.Y.,Seip K.酉离散Hilbert变换，《数学分析杂志》，2010年，第112卷，第383–393页。https://doi.org/10.1007/s11854-010-0035-y[10] Chiarenza F., Frasca M. Morrey空间与Hardy-Littlewood极大函数，《应用数学杂志》，1987年，第7卷，第273-279页。

[11] Gabisoniya I., Meskhi A. 离散希尔伯特变换的两个加权不等式，*Proc.Razm. Math. Inst.*，1998年。第116卷，第107–122页。

[12] Grafacos L. 现代傅里叶分析，Springer，2014年。642页。

[13]Gunawan H.、Kikianty E.、Schwanke C. 离散Morrey空间及其包含性质，*Math.Nachr.*，2018年。第291卷，第8–9期，第1283–1296页。https://doi.org/10.1002/mana.201700054

[14] Gunawan H., Schwanke C. 离散Morrey空间上的 Hardy-Littlewood 极大算子，*Mediterr. J. Math.*，2019年。第 16 卷，第 1 期，第 1–12 页。https://doi.org/10.1007/s00009- 018-1277-7[15]Hao X. B., Li B. D., Yang S. 离散加权Morrey空间上的 Hardy-Littlewood 极大算子，*ActaMath. Hungar.*，2024年。第 172 卷，第 2 期，第 445–469 页。https://doi.org/10.1007/s10474-024-01420-3[16]Hao X. B., Li B. D., Yang S. 离散加权勒贝格空间上的离散 Riesz 势估计，*Ann. Funct. Anal.*，2024年。第 15 卷，第 3 期。文章编号：51。https://doi.org/10.1007/s43034-024-00357-6

[17]Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. 共轭函数与希尔伯特变换的加权范数不等式, *Trans.of AMS*, 1973年。第 176 卷, 第 227–251 页。
https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1973-0312139-8[18]Jakfar M., Manuharawati M., Lukito A., Fiangga Sh. 离散Morrey空间上的内积, *Europ. J. Pure and Appl. Math.*, 2023年。第 16 卷, 第 1 期, 第 144–155 页。
https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v16i1.4612[19] Komori Y., Shirai S. 加权Morrey空间与奇异积分算子, *Mathem.Nachr.*, 2009年。第 282 卷, 第 2 期, 第 219–231 页。
https://doi.org/10.1002/mana.200610733[20] Liflyand E. 离散希尔伯特变换的加权估计, 载于: 傅里叶分析与逼近论方法, Springer（2016）, 第 59–69 页。[21] Morrey C. B. 拟线性椭圆偏微分方程解的研究, *Trans.Amer. Math. Soc.*, 1938年。第 43 卷, 第 1 期, 第 126–166 页。https://doi.org/10.2307/1989904[22] Rakotondratsimba Y. 离散希尔伯特变换的双权不等式, *Soochow J.Math.*, 1999年。第 25 卷, 第 4 期, 第 353—373 页。[23]Riesz M. 关于共轭函数, *Math. Z.*, 1928年。第 27 卷, 第 218–244 页。https://doi.org/10.1007/BF01171098
[24] Sickel W. 与Morrey空间相关的光滑性空间综述 I, *Eurasian Math. J.*, 2012年。第 3 卷, 第 3 期, 第 110–149 页。[25] Sickel W. 与Morrey空间相关的光滑性空间综述 II, *Eurasian Math. J.*, 2013年。第 4 卷, 第 1 期, 第 82–124 页。[26] Yuan W., Sickel W. , Yang D.*Morrey*与*Campanato*邂逅*Besov*、*Lizorkin*和*Triebel*, Springer, 柏林（2010）。[27] Stepanov V. D., Tikhonov S. Yu. 单调函数希尔伯特变换的双权不等式, *Dokl. Math.*, 2011年。第 83 卷, 第 2 期, 第 241–242 页。