arXiv:2601.05631v1 [math.DS] 9 Jan 2026

查孔变换的开普勒剪切

ARTHUR BOOS 和 BENOIT SAUSSOL

摘要。开普勒剪切这一概念由 Damien Thomine 近期提出。它适用于非遍历系统，也可以看作是不变纤维上的条件强混合。当几乎处处的纤维并非强混合时，这一概念尤其值得关注。

我们在此针对几乎处处的纤维均为弱混合的系统，提出一种适用的方法，并将其应用于一族秩一变换。每个变换都属于一种 Chacon 映射，在罗赫林塔的每一步中加入数量随机的间隔块。我们证明，这一新的动力系统呈现出开普勒剪切。该方法依赖于满移位上沿轨道的时变伯克霍夫和的一个局部极限定理版本。

目录

1. 引言 1 2. 查孔变换 4 3. 回返与归纳法 5 4. ℓ–次回返的分布 10 5. 例外集 12 5.1. 第一例外集 13 5.2. 第二异常集 13 6. 时变可观测量的极限定理 15 6.1. 非齐次伯克霍夫和的方差 16 6.2. Perron-Frobenius 算子的复扰动 17 6.3. 中等偏差 27 6.4. 局部极限定理 28 7. 查孔变换的开普勒剪切 32 7.1. 方差等价性 33 7.2. 自相关的最终估计 34 7.3. A_k 36例外集的去同步化 7.4. 从自相关到开普勒剪切 37 7.5. 柱集上的收敛 39 参考文献 40

1. 引言

C考虑一个动力系统（X，$\mathscr{T}$，μ，T）。我们将不变的 σ–代数记为 trans- $\mathscr{I}$ form变换 T。如果该动力系统表现出开普勒剪切，则

$$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{L}^2_\mu(X), \mathbb{E}_\mu(\overline{f_1} f_2 \circ T^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}_\mu\left(\overline{\mathbb{E}_\mu(f_1|\mathscr{I})}\mathbb{E}_\mu(f_2|\mathscr{I})\right).$$

日期：2026年1月12日。

换言之，

$$\mathbb{E}_\mu(Cov(f_1, f_2 \circ T^n | \mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

开普勒剪切可以看作是相对于一个不变 σ–代数的强混合。我们首次在 Damien Thomine 的文章 [Tho] 中看到这一概念。我们回顾混合系统的定义。$(X, \mathscr{T}, \mu, T)$ 是强混合的，当 $A, B \in \mathscr{T}$ 时，

$$\mu(A \cap T^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

强混合蕴含弱混合，即

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left|\mu(A \cap T^{-j}(B)) - \mu(A)\mu(B)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1}$$

更准确地说，强混合等价于

$$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{L}^2_\mu(X), \mathbb{E}_\mu(\overline{f_1} f_2 \circ T^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{\mathbb{E}_\mu(f_1)}\mathbb{E}_\mu(f_2).$$

我们注意到，当系统是遍历的，不变 σ–代数就是平凡的 σ–代数 $\{\emptyset, X\}$，因此，对于 $f \in \mathbb{L}^2_\mu(X)$,

$$\mathbb{E}_\mu(f|\mathscr{I}) = \mathbb{E}_\mu(f).$$

因此，我们推断，如果系统具有开普勒剪切且是遍历的，那么它就是强混合的。反过来，强混合性质蕴含开普勒剪切以及系统的遍历性。

命题1.1。 [EW] T 是弱混合的，当且仅当对于所有的 $A, B \in \mathscr{T}$，存在一个 $J_{A,\ B} \subset \mathbb{N}$其密度为零，使得

$$\mu(A \cap T^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B) \xrightarrow[n\to+\infty \text{ and } n\notin J_{A,B}]{} 0$$

我们称 $J_{A,\ B}$ 为例外集。

我们强调，近年来人们开始研究区间交换变换、查孔变换和替换作用背景下的弱混合速度，参见 [AFS, Mol, BMS]。在这些研究中，作者给出了式 (1) 中时间平均的上界。这类定量估计及其推导方法，借助微积分引理得到了一个例外集。遗憾的是，我们从中唯一能得出的信息只是 $J_{A,\ B} \cap [\![0,\ N]\!]$的基数上界。特别是，我们无法得知例外集位于何处。

本文考虑概率空间 $(X, \mathscr{S}, \eta)$，构造一族应用 T_α，使得对于 η-几乎所有的 $\alpha \in X$，映射 T_α 不是强混合的，但却是弱混合的。系统 $(\Omega\ \mathscr{S}'\ \mu, T)$ 纤维化于 X，其中 $T\colon (\alpha, x)\ \in \Omega\ \mapsto (\alpha, T_\alpha(x))$ 且 $\mu = d\nu_\alpha(x)d\eta(\alpha)$，显然不是遍历的，但对于几乎所有的 $\alpha \in X$，$(Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha, \nu_\alpha, T_\alpha)$ 都是弱混合的。在我们的情形中，假设存在一个概率空间 $(Y, \mathscr{T}, \nu)$，使得对于所有的 $\alpha \in X, Y_\alpha \subset Y$和$\{T^n(A \times B)\colon A \in \mathscr{S}, n \in \mathbb{N}$和 $B \in \bigcap_{\alpha\in X} \mathscr{T}_\alpha\}$ 生成 σ–代数 $\mathscr{S}'$。那么，对于可测集 $A, B \in \bigcap_{\alpha\in X} \mathscr{T}_\alpha$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，我们定义 $W_{A,B,n} = \{\alpha \in X : n \in J^\alpha_{A,B}\}$。由勒贝格控制收敛定理，我们立即得到

命题 1.2. 假设对于所有可测集 A, B，都有 $\eta(W_{A,B,n}) \to 0$，当 $n \to \infty$ 时成立。那么该系统呈现开普勒剪切。

我们将采用这种方法[1]证明下文所述的一族参数化的秩一变换具有开普勒剪切性质，该族推广了查孔变换。我们回顾一下，原始的

[1]出于技术上的原因，我们将使用这一结果的一个略有不同的版本。

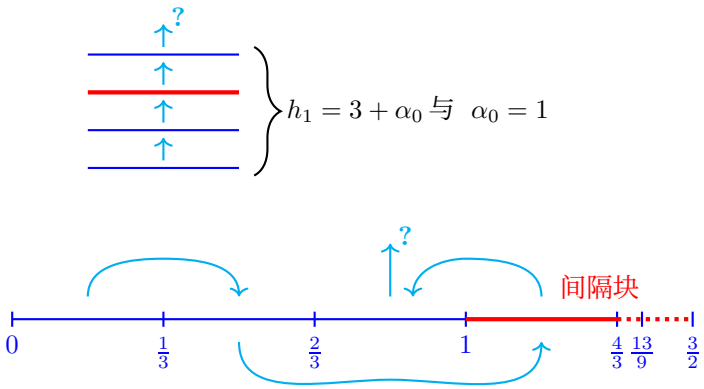

图 1. $d = 3$-查孔变换的罗赫林塔的第一步

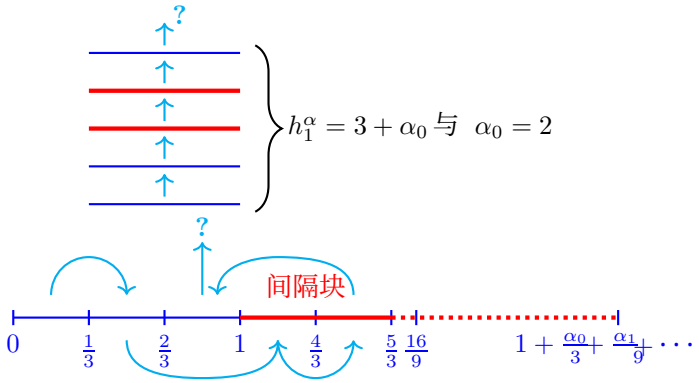

图 2. $d = 3$ 和 $\alpha_0 = 2$的罗赫林塔的第二步。

查孔变换是弱混合的，但不是强混合的 [Cha]。图 1 展示了其在第 0 步的构造示意图。

在我们的情形中，当 $d \geq 7$ 是奇数时，我们将研究具有 d个区间（而非 3 个区间）的 d-查孔变换。对于 $k \in \mathbb{N}$，在 [Par]，中，例外集 $J_{A_k,\ A_k}$ with[2] $A_k = \left[0, \frac{1}{d^k}\right[$ 被明确定义，足以定义所有 A，B 的 $J_{A,\ B}$。我们将用 J_k 代替 $J_{A_k,\ A_k}$。现在，我们引入一列随机独立同分布参数 $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$，其中 α_j 表示第 $j - th$ 步的间隔块数。我们稍微宽泛地使用这一说法

$$\alpha = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j d^{-(j+1)}. \tag{2}$$

接下来，令

$$\Omega := \bigcup_{\alpha\in\{1,2\}^{\mathbb{N}}} (\{\alpha\} \times [0, 1 + \alpha[). \tag{3}$$

[2]我们用记号 $[a, b[$ 表示半开区间 $[a, b)$。

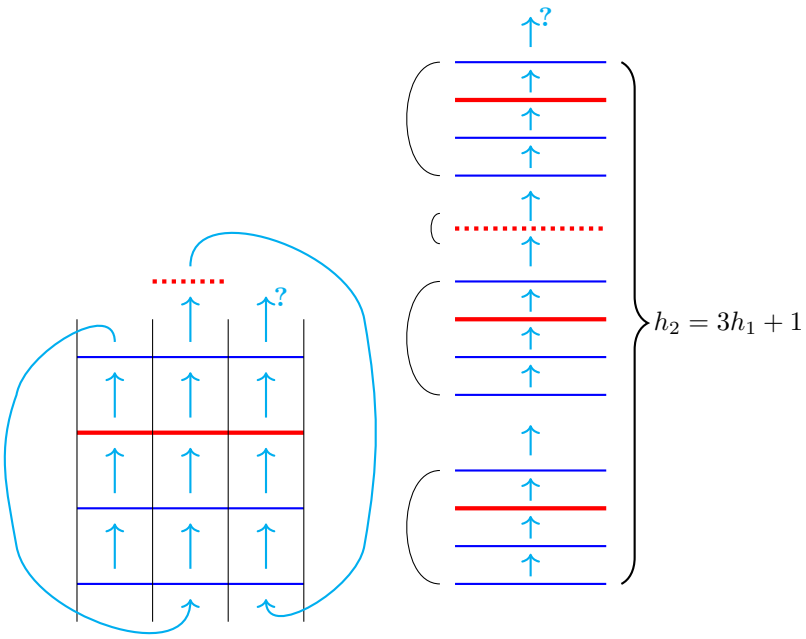

图3. $d = 3$-查孔变换的罗赫林塔第二步

我们将记作 $\alpha = (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$，并将 T_α 称为与 α 相关联的查孔变换。精确定义见定义 2.1。现在我们定义变换

$$T : (\alpha, x) \in \Omega \mapsto (\alpha, T_\alpha(x)).$$

我们考虑动力系统 $(\Omega\ \mathscr{B}(\Omega)\ \mu,\ T)$，其中 $\mu = d(\mathbb{L}eb_\alpha)(x)d\mathscr{H}(\alpha)$，$\mathscr{H}$是在 $\{1,\ 2\}$ 上均匀测度的可数乘积，而 $\mathbb{L}eb_\alpha$ 是在 $[0, 1+\alpha[$ 上归一化的勒贝格测度。与 [Par]，中一样，对于每个 α 和每个 $k \in \mathbb{N}$，我们可以确定一个关于 T_α 的例外集 $J_{k,\ \alpha}$。在这种情况下，例外集依赖于 α。然后，我们可以将 α 关于 $n \in \mathbb{N}$ 的坏集定义为

$$W_{k,n} := \{\alpha \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}} \ :\ n \in J_{k,\alpha}\}.$$

我们将证明（精确表述见第5节），在我们的假设下

$$\mathscr{H}(W_{k,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{4}$$

现在我们来介绍本文的内容。首先，在第2节中，我们精确定义查孔变换的参数化族。在第3节中，我们构建归纳过程，并在第4节中将自相关表示为返回时间的分布。在第5节中，我们为 A_k 定义两个例外集。第 6 节专门讨论纤维分布中返回时间的局部极限定理。最后，第 7 节完成主要结果的证明。

致谢。我们感谢 Sébastien Gouezel 和 Thierry De La Rue 提出了许多建议和意见，使稿件得以改进。

2. Chacon transformation

首先，我们定义查孔变换族。

我们将形如以下形式的集合称为 $m \in \mathbb{N}$、 $\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$和 $q \in [\![0, \alpha_m - 1]\!]$的间隔块

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j d^{-(j+1)} + qd^{-(m+1)} + \left[0, d^{-(m+1)}\right[. \tag{5}$$

注意，对于整数 m，

$$\alpha^{(m)} := \sum_{j=0}^{m} \alpha_j d^{-(j+1)}, \quad \alpha^{(-1)} = 0.$$

根据 α_j的取值，查孔变换与每一步添加一个或两个间隔块的原始查孔变换相同 j。记

$$Z_n = \left[1 - \frac{1}{d^n}, 1 - \frac{1}{d^{n+1}}\right[\cup \left[1 + \alpha^{(n-1)}, 1 + \alpha^{(n)}\right[. \tag{6}$$

定义 2.1（查孔变换）。令 $\tau_{n,\ \alpha}$：$Z_n \to [0, 1 + \alpha[$ 使得，

$$\tau_{n,\alpha}(x) = \begin{cases} x - \left(1 - \frac{1}{d^n}\right) + \frac{1}{d^{n+1}} & if\ x \in \left[1 - \frac{1}{d^n}, 1 - \frac{2}{d^{n+1}}\right[\\ x + \frac{2}{d^{n+1}} + \alpha^{(n-1)} & if\ x \in \left[1 - \frac{2}{d^{n+1}}, 1 - \frac{1}{d^{n+1}}\right[\\ x - \left(1 + \alpha^{(n)} - \frac{1}{d^{n+1}}\right) + \frac{d-1}{d^{n+1}} & if\ x \in \left[1 + \alpha^{(n)} - \frac{1}{d^{n+1}}, 1 + \alpha^{(n)}\right[\\ x + \frac{1}{d^{n+1}} & if\ \alpha_n = 2\ and\ x \in \left[1 + \alpha^{(n-1)}, 1 + \alpha^{(n-1)} + \frac{1}{d^{n+1}}\right[. \end{cases}$$

令 $x \in [0, 1 + \alpha[$。 Z_n构成一个划分。对于 $x \in [0, 1 + \alpha[$，，我们用满足 $x \in Z_{N(x)}$的唯一整数$N(x)$表示。因此，查孔变换定义为

$$T_\alpha(x) = \tau_{N(x),\alpha}(x). \tag{7}$$

经过 k 步构造的罗赫林塔的高度 h_k^α 取决于 α 和 $h_{k+1}^\alpha = dh_k^\alpha + \alpha_k$，其中$h_0^\alpha = 1$。对于所有 $\alpha \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$，我们用 $\mathbb{L}eb_\alpha$和 λ_α表示 $[0, 1 + \alpha[$,上的勒贝格测度，并将其归一化，使得（$\alpha + 1$）$\mathbb{L}eb_\alpha$（A_k）$= \frac{1}{d^k}$。

本文的主要结果是

定理 2.1（查孔变换的开普勒剪切）。动力系统 $(\Omega\ T, \mathscr{H} \otimes (\mathbb{L}eb_\alpha)_{\ \alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}})$ 呈现开普勒剪切，其中 $d \geq 7$ 为奇数。

本文其余部分致力于证明定理 2.1，采用引言中所述的弱混合方法。

3. Returns and induction

遵循 [Par]，中的思想，我们考虑 $A_k = \left[0, \frac{1}{d^k}\right[$ 在 $k \in \mathbb{N}$上的情形。以下量

$$\lambda_\alpha(A_k \cap T_\alpha^{-n}(A_k))$$

通过 T_α 在 A_k 上的诱导映射以及到 A_k的连续回返时间序列，可以完全理解这些量。

定义 3.1（首次返回）。我们定义 A_k 中 $x \in A_k$ 的函数的首次返回

$$r_{A_k,\alpha}(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* : T_\alpha^n(x) \in A_k\}.$$

定义 3.2（归纳法）。我们将 A_k 上的诱导变换定义为

$$S_{A_k,\alpha}(x) = T_\alpha^{r_{A_k}(x)}(x).$$

任意 $x \in [0,1[$ 都有一种符号表示：利用 $[0,1[$ 的 $d-$ 进制细分，其区间为 $\left[\frac{i}{d^j}, \frac{i+1}{d^j}\right[$（对应于 $i \in [\![0,\ d-1]\!]$ 和 $j \in \mathbb{N}^*$），我们得到唯一的序列 $(x_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \in [\![0,\ d-1]\!]^{\mathbb{N}^*}$，使得

$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} x_j d^{-j}.$$

稍微宽泛地说，我们将数 x与其数字序列 $(x_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$等同起来。**定义 3.3.** 我们定义 $x \in [0,1[$ 的移位为

$$\sigma x = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} x_{j+1} d^{-j}.$$

类似地，我们将 $\alpha = (\alpha_j)^{j\in\mathbb{N}}$ 的移位定义为

$$\sigma\alpha = (\alpha_{j+1})_{j\in\mathbb{N}}.$$

我们陈述一系列准备性引理。

引理 3.1 (指标性质). 对于 $x \in [0,1[,$ ，我们有

$$(x_1 = d-1 \implies N(\sigma x) = N(x) - 1).$$

证明。设 $x \in [0,1[$。由 (6)，$x \in Z_{N(x)} \cap [0,1[= \left[1 - \frac{1}{d^{N(x)}}, 1 - \frac{1}{d^{N(x)+1}}\right[$。因此

$$d - \frac{1}{d^{N(x)-1}} - x_1 \le \sigma x < d - \frac{1}{d^{N(x)}} - x_1.$$

我们得到

$$1 - \frac{1}{d^{N(x)-1}} \le \sigma x < 1 - \frac{1}{d^{N(x)}}.$$

此外，

$$1 - \frac{1}{d^{N(\sigma x)}} \le \sigma x < 1 - \frac{1}{d^{N(\sigma x)+1}}.$$

因此

$$N(x) - 1 < N(\sigma x) + 1 \text{ and } N(\sigma x) < N(x).$$

换句话说，

$$N(\sigma x) = N(x) - 1.$$

□

引理 3.2. 对于 $k \in \mathbb{N}$，对于 $x \in A_k$，

$$T_\alpha^{h_k^\alpha - 1}(x) = x + 1 - \frac{1}{d^k}.$$

证明。我们对 k 使用归纳法来证明。取 $k = 0$, $x \in A_0$，得到 $h_0^\alpha = 1$，进而得到 $T_\alpha^{h_0^\alpha - 1}(x) = x = x + 1 - \frac{1}{d^0}$。现在，假设该性质对某个 $k \in \mathbb{N}$ 成立。令$x \in A_{k+1}$。我们有 $A_{k+1} = \left[0, \frac{1}{d^{k+1}}\right[\subset \left[0, \frac{d-2}{d^{k+1}}\right[$。于是，$x \in \left[0, \frac{d-2}{d^{k+1}}\right[$。因此，根据递推假设和定义 2.1，

$$\forall j \in [\![0, d-2]\!], T_\alpha^{j h_k^\alpha}(x) = x + \frac{j}{d^{k+1}}. \tag{8}$$

于是，$T_\alpha^{(d-2)h_k^\alpha}(x) = x + \frac{d-2}{d^{k+1}} \in \left[\frac{d-2}{d^{k+1}}, \frac{d-1}{d^{k+1}}\right[\subset A_k$。因此，

$$T_\alpha^{(d-1)h_k^\alpha - 1}(x) = x + \frac{d-2}{d^{k+1}} + 1 - \frac{1}{d^k} = x + 1 - \frac{2}{d^{k+1}} \in \left[1 - \frac{2}{d^{k+1}}, 1 - \frac{1}{d^{k+1}}\right[.$$

由定义 2.1 可得

$$T_\alpha^{(d-1)h_k^\alpha+\alpha_k}(x) = x + \frac{d-1}{d^{k+1}} \in \left[\frac{d-1}{d^{k+1}}, \frac{1}{d^k}\right[\subset A_k. \tag{9}$$

于是,

$$T_\alpha^{h_{k+1}^\alpha-1}(x) = T_\alpha^{dh_k^\alpha+\alpha_k-1}(x) = x + 1 - \frac{1}{d^{k+1}}.$$

□

接下来我们需要引入一种符号表示，这对后续内容至关重要。为此，我们定义符号回归。

定义 3.4（符号首次回归）。 我们定义函数

$$r_{k,h}^\alpha(x) = \begin{cases} h & if\ x \in \left[0, 1-\frac{2}{d}\right[\\ h+\alpha_k & if\ \left[1-\frac{2}{d}, 1-\frac{1}{d}\right[\\ r_{k,h}^{\sigma\alpha}(\sigma x) & else \end{cases}. \tag{10}$$

那么，符号首次回归为 $r_{k,\ h_k^\alpha}^\alpha$ 更准确地说，$r_{A_k,\ \alpha} \circ u_k^{-1} = r_{k,\ h_k^\alpha}^\alpha$。

这里，我们引入参数 h，因为 h_k^α 取决于 α，且当 $x \geq 1 - \frac{1}{d}$，

$$r_{k,h_k^\alpha}^\alpha(x) = r_{k,h_k^\alpha}^{\sigma\alpha}(\sigma x) \neq r_{k,h_k^{\sigma\alpha}}^{\sigma\alpha}(\sigma x).$$

引理 3.3. 对于 $x \in [0,1[$,

$$r_{k,h}^\alpha(x) = \begin{cases} h & if\ x \in \left[1-\frac{1}{d^{N(x)}}, 1-\frac{2}{d^{N(x)+1}}\right[\\ h+\alpha_{k+N(x)} & if\ x \in \left[1-\frac{2}{d^{N(x)+1}}, 1-\frac{1}{d^{N(x)+1}}\right[\end{cases}.$$

证明。我们对 n 进行归纳，证明对于所有满足 $N(x) = n$ 的 x，公式 (10) 均成立。假设 $n = 0$。令 $x \in [0,1[$ 满足 $N(x) = n$。根据关于符号首次回归的定义 10，我们得到所需结果。现在，我们取满足递推假设的 $n \in \mathbb{N}$。令 $x \in [0,1[$ 满足 $N(x) = n+1$。于是，$x \geq 1 - \frac{1}{d^{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{d}$。因此，$x_1 = d - 1$。我们得到，$r_{k,\ h}^\alpha(x) = r_{k,\ h}^{\sigma\alpha}(\sigma x)$。于是，$N(\sigma x) = N(x) - 1 = n$。根据归纳假设

$$r_{k,h}^{\sigma\alpha}(\sigma x) = \begin{cases} h & if\ \sigma x \in \left[1-\frac{1}{d^{N(\sigma x)}}, 1-\frac{2}{d^{N(\sigma x)+1}}\right[\\ h+(\sigma\alpha)_{k+N(\sigma x)} & if\ \sigma x \in \left[1-\frac{2}{d^{N(\sigma x)+1}}, 1-\frac{1}{d^{N(\sigma x)+1}}\right[\end{cases}.$$

于是,

$$r_{k,h}^\alpha(x) = \begin{cases} h & if\ x \in \left[1-\frac{1}{d^{N(x)}}, 1-\frac{2}{d^{N(x)+1}}\right[\\ h+\alpha_{k+N(x)} & if\ x \in \left[1-\frac{2}{d^{N(x)+1}}, 1-\frac{1}{d^{N(x)+1}}\right[\end{cases}.$$

□

诱导时间的首次表示之间的联系由映射给出

$$u_k : x \in A_k \mapsto d^k x \in [0,1[\tag{11}$$

正如下一个引理所述。

引理 3.4（首次回归的识别）。 对于 $\alpha \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$ 我们得到 $r_{A_k,\ \alpha} = r_{k,\ h_k^\alpha}^\alpha \circ u_k$在 A_k上。

证明。 我们对 $k \in \mathbb{N}$ 使用归纳法来证明这一点。我们从 $k = 0$ 开始。设 $x \in A_0 = [0, 1[$。 首先，假设 $x \in \left[0, 1 - \frac{2}{d}\right[$。 那么， $T_\alpha(x) = x + \frac{1}{d} \in \left[\frac{1}{d}, 1 - \frac{1}{d}\right[\subset A_0$。 我们得到

$$r_{A_k,\alpha}(x) = 1 = h_0^\alpha = r^\alpha_{k,h_k^\alpha} \circ u_0(x).$$

现在，我们假设 $x \in \left[1 - \frac{2}{d}, 1 - \frac{1}{d}\right[$。 于是，由 (7) 可得，

$$T_\alpha(x) = x + \frac{2}{d} + \alpha^{(-1)} = x + \frac{2}{d} \in [1, 1 + \alpha^{(0)}[.$$

对于 $q \in [\![0,\ \alpha_0 - 1]\!]$， $T_\alpha^{q+1}(x) \in [1, 1+\alpha^{(0)}[$。 于是 $r_{A_k,\ \alpha}(x) \geq \alpha_0+1$。 另一方面， $T_\alpha^{\alpha_0+1}(x) = x + \frac{1}{d} \in \left[1 - \frac{1}{d}, 1\right[\subset A_0$。 于是

$$r_{A_k,\alpha}(x) = \alpha_0 + 1 = h_k^\alpha + 1 = r^\alpha_{k,h_k^\alpha} \circ u_0(x).$$

现在，我们假设 $x \in \left[1 - \frac{1}{d}, 1\right[$。 于是， $N(x) \geq 1$。在第一种情形下， $x \in \left[1 - \frac{1}{d^{N(x)}}, 1 - \frac{2}{d^{N(x)+1}}\right[$. 于是， $T_\alpha(x) = x - \left(1 - \frac{1}{d^{N(x)}}\right) + \frac{1}{d^{N(x)+1}} \in A_0$。 对于 $x \in \left[1 - \frac{2}{d^{N(x)+1}}, 1 - \frac{1}{d^{N(x)+1}}\right[$，， 由引理 3.1 可得

$$r_{A_k,\alpha}(x) = h_k^\alpha + \alpha_{N(x)} = h_k^\alpha + (\sigma\alpha)_{N(\sigma x)} = r^\alpha_{k,h_k^\alpha} \circ u_0(x).$$

现在，我们取 $k \in \mathbb{N}$ ，使其满足该性质。令 $x \in A_{k+1} \subset A_k$。 由引理 3.2 和递推假设可得 $r_{A_{k+1},\ \alpha}(x) \geq dh_k^\alpha + \alpha_k = h_{k+1}^\alpha$. 我们得到

$$r_{A_{k+1},\alpha}(x) = \begin{cases} h_{k+1}^\alpha & if\ x \in \left[\frac{1}{d^{k+1}}\left(1 - \frac{1}{d^{N(x)}}\right), \frac{1}{d^{k+1}}\left(1 - \frac{2}{d^{N(x)+1}}\right)\right[\\ h_{k+1}^\alpha + \alpha_{k+1+N(x)} & if\ x \in \left[\frac{1}{d^{k+1}}\left(1 - \frac{2}{d^{N(x)+1}}\right), \frac{1}{d^{k+1}}\left(1 - \frac{1}{d^{N(x)+1}}\right)\right[\end{cases}.$$

由引理 3.3 可得

$$r_{A_{k+1},\alpha}(x) = r^\alpha_{k+1,h^\alpha_{k+1}}(u_{k+1}(x))$$

□

我们对诱导变换作相同的对应。令里程表

$$S(x) = \begin{cases} (x_1 + 1)\sigma x & if\ x_1 \in [\![0, d-2]\!] \\ 0S(\sigma x) & else \end{cases}. \tag{12}$$

现在，我们固定 $k \in \mathbb{N}$。

命题 3.1 (归纳法/里程表变换**)。** 诱导映射与里程表共轭

$$S = u_k \circ S_{A_k,\alpha} \circ {u_k}^{-1}.$$

证明。 令 $x \in A_k$。 由引理 3.1 和命题 3.4，我们推得，

$$T_\alpha^{r_{A_k,\alpha}(x)}(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{d} & if\ x \in \left[0, 1 - \frac{1}{d}\right[\\ \frac{1}{d} T_\alpha^{r_{A_k,\sigma\alpha}(\sigma x)}(\sigma x) & else \end{cases}.$$

我们得到

$$S_{A_k,\alpha}(x) = T_\alpha^{r_{A_k,\alpha}(x)}(x) = u_k^{-1} \circ u_k \circ T_\alpha^{r_{A_k,\alpha}(u_k^{-1}(u_k(x)))}(u_k^{-1}(u_k(x))).$$

那么，对于 $y \in [0, 1[$,

$$u_k \circ S_{A_k,\alpha} \circ {u_k}^{-1}(y) = u_k \circ T_\alpha^{r^\alpha_{k,h_k^\alpha}(y)} \circ u_k^{-1}(y) = S(y).$$

□

现在，我们可以专门使用这一表示来处理 $x \in [0,1[$

$$r^{\alpha}_{k,h} = h + \varepsilon^{\alpha}_{k}, \quad \text{where } \varepsilon^{\alpha}_{k}(x) = \begin{cases} 0 \; if \; x_1 \leq d-3 \\ \alpha_k \; if \; x_1 = d-2 \\ \varepsilon^{\sigma\alpha}_{k}(\sigma x) \; else. \end{cases} \tag{13}$$

现在，我们已经证明归纳法就是里程表变换。接下来，为了继续我们的工作，我们回顾一下里程表的性质。

命题 3.2（里程表的性质）。对于 $x \in \Sigma_d$ 和整数 ℓ，我们有

(1) $(S^d(x))_1 = x_1$(2) σS^d

$(x) = S(\sigma x)$ (3) $S^{d\ell}(x)$

$= x_1 S^{\ell}(\sigma x)$

证明。令 $x \in \Sigma_d$ 为整数 ℓ。则

$$S^d(x) = S^{x_1}(S^{d-x_1}(x)) = S^{x_1}\left(0S(\sigma x)\right) = x_1 S(\sigma x).$$

我们得到

$$(S^d(x))_1 = x_1 \; and \; \sigma S^d(x) = S(\sigma x).$$

我们将对 ℓ 进行归纳法。先从 $\ell = 0$ 开始。于是

$$S^{d\ell}(x) = x = x_1 S^0(\sigma x).$$

现在，我们假设对 ℓ 该命题成立。于是

$$S^{d(\ell+1)}(x) = S^{d\ell}(S^d(x)) = (S^d(x))_1 S^{\ell}(\sigma S^d(x)) = x_1 S^{\ell+1}(\sigma x).$$

□

现在，我们定义第 $\ell-$ 次回返，并证明其主要性质。

定义 3.5（ℓ–次回返）。我们定义 $\ell - th$ 回返为 $x \in A_k$ 整数序列 $t^{\alpha}_{\ell}(x)$，使得

$$t^{\alpha}_{\ell+1}(x) = \min\{m > t^{\alpha}_{\ell}(x) : T^m_{\alpha}(x) \in A_k\}, t^{\alpha}_0(x) = 0.$$

我们立即得到，对于 $\ell \in \mathbb{N}$ 和 $x \in A_k$

$$t^{\alpha}_{\ell}(x) = \sum_{j=0}^{\ell-1} r_{A_k,\alpha}(S^j_{A_k,\alpha}(x)) = {t^{\alpha}_{\ell,h^{\alpha}_k}}'(u_k(x)), \tag{14}$$

其中，对于任意 $x \in \Sigma_d$ 和 $h \in \mathbb{N}$

$${t^{\alpha}_{\ell,h}}'(x) = \sum_{j=0}^{\ell-1} r^{\alpha}_{k,h}(S^j(x)). \tag{15}$$

由此立即可得，对于任意 $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}$

$${t^{\alpha}_{\ell_1+\ell_2,h}}'(x) = {t^{\alpha}_{\ell_1,h}}'(x) + {t^{\alpha}_{\ell_2,h}}'(S^{\ell_1}(x)). \tag{16}$$

诱导时刻之间通过以下归纳过程相互关联。

命题 3.3。对于 $q \in [\![0, \; d-1]\!]$,

$${t^{\alpha}_{d\ell+q,h}}'(x) = \begin{cases} ((d-1)\ell+q)h + \ell\alpha_k + t^{\sigma\alpha\prime}_{\ell,h}(\sigma x) \; if \; q + x_1 \leq d-2 \; or \; q = 0 \\ ((d-1)\ell+q)h + (\ell+1)\alpha_k + t^{\sigma\alpha\prime}_{\ell,h}(\sigma x) \; if \; q + x_1 = d-1 \; and \; q \geq 1 \\ ((d-1)\ell+q-1)h + (\ell+1)\alpha_k + {t^{\sigma\alpha}_{\ell+1,h}}'(\sigma x) \; if \; q + x_1 \geq d \; and \; x_1 \leq d-2 \\ ((d-1)\ell+q-1)h + \ell\alpha_k + {t^{\sigma\alpha}_{\ell+1,h}}'(\sigma x) \; if \; q + x_1 \geq d \; and \; x_1 = d-1 \end{cases}.$$

证明。令 $x \in [0,1[$。我们断言

$$t^{\alpha}_{d\ell,h}{}'(x) = (d-1)\ell h + \ell\alpha_k + t^{\sigma\alpha}_{\ell,h}{}'(\sigma x). \tag{17}$$

我们有：

$$t^{\alpha}_{d\ell,h}{}'(x) = \sum_{j=0}^{d\ell-1} r^{\alpha}_{k,h}(S^j(x)) = \sum_{i=0}^{\ell-1}\sum_{p=0}^{d-1} r^{\alpha}_{k,h}(S^{di+p}(x)).$$

因此，由命题 3.2

$$t^{\alpha}_{d\ell,h}{}'(x) = \sum_{i=0}^{\ell-1}\sum_{p=0}^{d-1} r^{\alpha}_{k,h}(S^p(x_1 S^i(\sigma x))) = (d-1)\ell h + \ell\alpha_k + t^{\sigma\alpha}_{\ell,h}{}'(\sigma x),$$

即可证明该断言。结论由 (16) 和 (17) 得出。 □

在 [Par] 中使用平衡三进制展开，以确定与混合时间相关的例外集。对于任意 $\ell \in \mathbb{N}$，存在唯一的序列 $(a_{\ell,\,j})_{j\in\mathbb{N}} \in [\![-\frac{d-1}{2}\,,\ \frac{d-1}{2}]\!]^{\mathbb{N}}$，使得

$$\ell = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{\ell,j} d^j.$$

我们称之为平衡 d 进制展开。对于每个纤维 α，它将帮助我们理解 $\ell-$ 次回返的行为。这使得我们能够将 T_α 的返回时间作为移位上的余循环来使用，从而为算子方法开辟道路。

命题 3.4。我们有

$$t^{\alpha}_{\ell,h}{}'(x) = \ell h + \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(a_{\ell,j} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k+i} d^{j-(i+1)} \right) + sgn(a_{\ell,j}) \varepsilon_k^{\sigma^j\alpha}(S^{\frac{q_{\ell,j}}{d^j}}(\sigma^j x)) \right)$$

其中 $q_{l,\,j} = \sum_{i\geq j+1} a_{\ell,\,i} d^i + a_{\ell,\,j} d^j \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*_-}(a_{\ell,\,j})$ 。

证明。结论由（16）、（17）和命题 3.3 得出。

□

ℓ–次回返的分布

现在，对于 w 有限词 $[w]$，我们注意到其对应的柱集，并记 $\lambda_k = \lambda_{A_k} := (\lambda_\alpha)^{\frac{|A_k}{\lambda_\alpha\ A_k}}$ $(\cdot) = \lambda^{\lambda_{|A_k}}_{A_k}(\cdot)$为在 A_k条件下的 λ_α 条件测度。我们还可看到，该测度不依赖于 $\alpha_\circ$ 并且我们记 $\lambda := (\lambda_k)_{u_k} = (u_k)_*\lambda_k$ 为 λ_k 在 u_k下的推前测度，它是 $[0,1]$上的勒贝格测度。在本节中，我们求出 ℓ–次回返的截面测度。ℓ–次回返的测度给出了一种新的相关性形式，可用于控制趋于零。然后，我们可以用截面测度表示相关性。首先，我们定义约化首次回返的截断期望。

命题 4.1. 对于任意 $\kappa \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}_\lambda((\varepsilon^\alpha_k)^\kappa) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha^\kappa_{k+j} d^{-(j+1)} =: \beta^{(\kappa)}_k(\alpha).$$

为简便起见，我们记 $\beta_k(\alpha) = \beta^{(1)}_k(\alpha)$。

证明。 由 (13) 可得，对所有 $j \in \mathbb{N}$，对所有 $a \in [\![0,\ d-3]\!]$，以及对所有 $x \in [0,1[, \varepsilon_k^\alpha((d-1)^j ax) = r_{k,\ h}^\alpha(ax) - h = 0$ 和 $\varepsilon_k^\alpha((d-1)^j(d-2)x) = \alpha_{k+j}$。因此，

$$\mathbb{E}((\varepsilon_k^\alpha)^\kappa) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{[(d-1)^j(d-2)]} (\varepsilon_k^\alpha(x))^\kappa dx = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_{k+j}^\kappa \lambda([(d-1)^j(d-2)]) = \beta_k^{(\kappa)}(\alpha).$$

□

我们将第 $\ell-$ 次回返等于 n 的概率记为

$$d_\ell^\alpha(n) = \lambda_\alpha(t_\ell^\alpha = n) \text{ and } d_{\ell,h}^\alpha{}'(n) = \lambda\left(t_{\ell,h}^\alpha{}' = n\right).$$

为方便起见，我们将使用 $d_{\ell,\ h}^{\alpha\ \ \prime}(n)$，而不是 $d_\ell^\alpha(n)$。

由命题 3.3 可知，d_ℓ^α 满足某些递归关系。

命题 4.2。对于 $q \in [\![0,\ d-1]\!]$，有

$$d_{d\ell+q,h}^\alpha{}'(n) = \begin{cases} d_{\ell,h}^{\sigma\alpha\prime}(n-((d-1)\ell h + l\alpha_k)) & if\ q=0 \\ \frac{1}{d}\begin{pmatrix} (d-2)d_{\ell,h}^{\sigma\alpha\prime}(n-A_{(1,\ell)}^{(1,h)}) \\ +d_{\ell,h}^{\sigma\alpha\prime}(n-A_{(1,\ell)}^{(2,h)}) \\ +d_{\ell+1,h}^{\sigma\alpha}{}'(n-A_{(1,\ell)}^{(4,h)}) \end{pmatrix} & if\ q=1 \\ \frac{1}{d}\begin{pmatrix} (d-1-q)d_{\ell,h}^{\sigma\alpha\prime}(n-A_{(q,\ell)}^{(1,h)}) \\ +d_{\ell,h}^{\sigma\alpha\prime}(n-A_{(q,\ell)}^{(2,h)}) \\ +(q-1)d_{\ell+1,h}^{\sigma\alpha}{}'(n-A_{(q,\ell)}^{(3,h)}) \\ +d_{\ell+1,h}^{\sigma\alpha}{}'(n-A_{(q,\ell)}^{(4,h)}) \end{pmatrix} & if\ 2\le q\le d-2 \\ \frac{1}{d}\begin{pmatrix} d_{\ell,h}^{\sigma\alpha\prime}(n-A_{(d-1,\ell)}^{(2,h)}) \\ +(d-2)d_{\ell+1,h}^{\sigma\alpha}{}'(n-A_{(d-1,\ell)}^{(3,h)}) \\ +d_{\ell+1,h}^{\sigma\alpha}{}'(n-A_{(d-1,\ell)}^{(4,h)}) \end{pmatrix} & if\ q=d-1 \end{cases} \tag{18}$$

$$with \begin{cases} A_{(q,\ell)}^{(1,h)} = (q+(d-1)\ell)h + \ell\alpha_k \\ A_{(q,\ell)}^{(2,h)} = (q+(d-1)\ell)h + (\ell+1)\alpha_k \\ A_{(q,\ell)}^{(3,h)} = (q-1+(d-1)\ell)h + (\ell+1)\alpha_k \\ A_{(q,\ell)}^{(4,h)} = (q-1+(d-1)\ell)h + \ell\alpha_k \end{cases}$$

定义 4.1。 我们定义在时刻 $n \in \mathbb{N}$ 可能出现的 $\ell - th$ 次回返集合为

$$P_n^\alpha = \{\ell \in \mathbb{N} : d_\ell^\alpha(n) > 0\}. \tag{19}$$

在时间 n 发生自返回的概率由可能的 d_ℓs 表示。

命题 4.3 (相关性公式)。 对于 $(k,n) \in \mathbb{N}^2$， 我们有

$$\lambda_\alpha(A_k \cap T_\alpha^{-n}(A_k)) = \sum_{\ell\in P_n^\alpha} d_\ell^\alpha(n). \tag{20}$$

证明。 设 $(k,n) \in \mathbb{N}^2$，并设 $x \in [0,1[$。我们假设 $n \ge 1$。于是，

$$\mathbb{1}_{A_k\cap T_\alpha^{(-n)}(A_k)}(x) = 1 \iff \exists \ell \in \mathbb{N}, n = t_\ell^\alpha(x).$$

因此，

$$\lambda_\alpha(A_k \cap T_\alpha^{-n}(A_k)) = \lambda_\alpha\left(\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \{t_\ell^\alpha = n\}\right) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} d_\ell^\alpha(n).$$

□

于是我们得到

$$\lambda_\alpha(A_k \cap T_\alpha^{-n}(A_k)) = \frac{1}{d^k(\alpha+1)} \sum_{\ell\in\mathbb{N}} {d^\alpha_{\ell,h^\alpha_k}}'(n) = \lambda_\alpha(A_k) \sum_{\ell\in\mathbb{N}} {d^\alpha_{\ell,h^\alpha_k}}'(n). \tag{21}$$

定义 4.2 (非零项之和)。 令 $\ell = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{\ell,j} d^j$ 满足 $a_{\ell,j} \in [\![-\frac{d-1}{2}, \frac{d-1}{2}]\!]$。于是，我们定义

$$b_\ell = Card(\{j \in \mathbb{N} : a_{\ell,j} \neq 0\}).$$

引理 4.1。 对于 $\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$，集合 P_n^α包含在长度小于 $C_2 m$的区间 I_n^α中，其中 $C_2 > 0$，且 $m = \lfloor$ 对数$_d(n)\rfloor$。

证明。 令 $\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$。我们考虑 $\ell \in P_n^\alpha$，于是 ${d^\alpha_{\ell,h^\alpha_k}}'(n) > 0$和 $n \geq \ell_\circ$ 那么，存在 $x \in [0,1[$, 使得

$$n = {t^\alpha_{\ell,h^\alpha_k}}'(x) = \ell h^\alpha_k + \sum_{j=0}^{m} \left(a_{\ell,j} \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k+i} d^{j-i} + sgn(a_{\ell,j}) \varepsilon_k^{\sigma^j\alpha}(S^{\frac{q_{l,j}}{d^j}}(\sigma^i x)) \right).$$

对 k进行归纳可得,

$$h^\alpha_k = \sum_{i=0}^{k-1} d^{k-1-i}\alpha_i + d^k.$$

利用 d–进分解，可得

$$\ell h^\alpha_k = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{\ell,j} d^j h^\alpha_k = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(a_{\ell,j} \left(d^j \sum_{i=0}^{k-1} d^{k-j-1-i}\alpha_i + d^{k+j} \right) \right).$$

于是,

$$n = d^k \ell(\alpha+1) - \sum_{j=0}^{m} a_{\ell,j}\beta(\sigma^j\alpha) + \sum_{j=0}^{m} sgn(a_{\ell,j}) \varepsilon_k^{\sigma^j\alpha}(S^{\frac{q_{l,j}}{d^j}}(\sigma^i x)).$$

由于

$$\beta(\sigma^j\alpha) \leq \frac{2}{1-\frac{1}{d}}$$

我们有

$$\ell d^k(\alpha+1) - (2+c)m \leq n \leq \ell d^k(\alpha+1) + (2+c)m, \tag{22}$$

其中 $c = \frac{2}{1-\frac{1}{d}}$. 因此,

$$\frac{n}{d^k(\alpha+1)} - \frac{c+2}{d^k(\alpha+1)} m \leq \ell \leq \frac{n}{d^k(\alpha+1)} + \frac{c+2}{d^k(\alpha+1)} m. \tag{23}$$

我们设

$$I^\alpha_n = \frac{n}{d^k(\alpha+1)} + m\left[-\frac{c+2}{d^k(\alpha+1)}, \frac{c+2}{d^k(\alpha+1)} \right]. \tag{24}$$

□

现在，我们可以定义

$$B^\alpha_\ell := \{n \in \mathbb{N} : \ell \in I^\alpha_n\} \tag{25}$$

5. Exceptional sets

现在，我们可以定义并研究 α 中不满足强混合性质的例外集。

5.1. 第一个例外集。 这个第一个例外集处理那些过于接近由塔高产生的刚性时刻的时间。我们固定 $C_0 > 0$，使得 $(1+C_0)\binom{d-1}{C_0}^{C_0} < \frac{3}{2}$)。

定义 5.1（例外集）。我们将 $\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ 的例外集定义为

$$J_{k,\alpha} := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{\left(\ell\in[\![d^N,\, d^{N+1}-1]\!] \text{ and } b_\ell \le C_0 N\right)} B_\ell^\alpha \right) \tag{26}$$

我们将满足 n 为例外的 α 集合定义为

$$W_{k,n} = \{\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}} : n \in J_{k,\alpha}\}. \tag{27}$$

$W_{k,\,n}$ 是 α-纤维与例外集 $J_{k,\,\alpha}$ 之间的联系，它们描述了“坏”集合。这里的目的是证明，当 n 趋于 $+\infty$ 时，$W_{k,\,n}$ 的测度趋于零。

首先，回顾一下，$\mathscr{H}$ 是每个 {1，2} 上均匀测度的可数乘积。

命题 5.1。我们有

$$\mathscr{H}(W_{k,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

证明。令 $n \in \mathbb{N}$ 并设 $m = \lfloor \log_d(n) \rfloor$。对于 $\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ 和 $\ell \in \mathbb{N}$，根据 I_n^α 的定义，

$$\ell \in I_n^\alpha \iff \alpha \in \frac{n}{\ell d^k} - 1 + \frac{m}{\ell}\left[-\frac{c+2}{d^k}, \frac{c+2}{d^k}\right].$$

按照语言上的滥用（2），$\mathscr{H}$ 是康托尔 d–进制集合上的豪斯多夫测度，其数字均等于 1,2。该康托尔 d–进制集合的第 $q-th$ 代，记为 K_q，由 2^q 个长度为 d^{-q} 的区间组成。取满足 $\frac{1}{\ell} \le d^{-q}$ 的最小整数 q，长度为 $\frac{1}{\ell}$ 的区间至多与 K_q 中的两个区间相交。因此，长度为 $\frac{1}{\ell}$ 的区间的 $\mathscr{H}$–测度被 $2^{1-q} \le \frac{d}{\ell^{\log_d(2)}}$ 所界定。

W我们将需要以下组合估计：具有 d进制展开且
cont包含少于 cm 个非零数字的 cm 的数量从上方被以下式子所界定

$$\sum_{b=0}^{cm}\binom{m}{b}(d-1)^b \le (d-1)^{cm}c^{-cm}\sum_{b=0}^{cm}\binom{m}{b}c^b \le \left(\frac{(d-1)(1+c)}{c^c}\right)^m \le (\frac{3}{2})^m$$

其中 $c = C_0$。因此 $\mathscr{H}\left(\frac{n}{\ell d^k} - 1 + \frac{m}{\ell}\left[-\frac{c+2}{d^k}, \frac{c+2}{d^k}\right]\right) \le \frac{(c+2)m}{\ell^{\log_d(2)} d^k}$. 于是，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(W_{k,n}) &\le \sum_{\ell\in[\![d^{\lfloor\log(n)\rfloor}, d^{\lfloor\log(n)\rfloor+1}-1]\!] \text{ and } b_\ell \le C_0\lfloor\log_d(n)\rfloor} \mathscr{H}\left(\frac{n}{\ell d^k} - 1 + \frac{m}{\ell}\left[-\frac{c+2}{d^k}, \frac{c+2}{d^k}\right]\right) \\
&\le \frac{(c+2)m}{n^{\log_d(2)} d^k}\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_d(n)} \\
&\le \frac{(c+2)m}{2^m d^k}\left(\frac{3}{2}\right)^m.
\end{aligned}$$

□

5.2. 第二异常集。 这个第二异常集将确保所有 t_l^α 在所有 $\ell \in I_n^\alpha$ 下都具有非常相似的随机行为（见第7.1小节）。令固定的 $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ 满足 $q_n > p_n$，且 $p_n = \lfloor \log_d(cm) \rfloor + 1$ 和 $q_n = 2\lfloor {}^{1+}{}_{\log_d(2)\log(2)} \log_d(m) \rfloor + 1$，其中 $c > 0$。令 ℓ_0 为由下一个平衡 d-进展开定义的整数

$$\ell_0 = \nu \underbrace{(-\nu)(-\nu)\cdots(-\nu)}_{m-q_n-1 \text{ terms}} \underbrace{\nu\nu\cdots\nu\nu}_{q_n-p_n \text{ terms}} \underbrace{(-\nu)(-\nu)\cdots(-\nu)}_{p_n \text{ terms}}$$

其中 $\nu = \frac{d-1}{2}$.

令 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{B}_n := \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\ell_0}{n} + \frac{r}{n} d^{q_n} \right\} + \left[0, \frac{d^{p_n}}{n} \right] \right) \cap \frac{\mathbb{N}}{n}.$$

Let

$$\check{\mathscr{B}}_n := \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \{ \ell_0 + r d^{q_n} \} + [0, d^{p_n}] \right) \cap \mathbb{N}.$$

对于 $m \in \mathbb{N}$，令 K_m 为集合，其中的数字在 $d-$ 进制展开中前 $m-$ 位为 $\alpha \in [0,1]$ a re 1 或 2。

我们用 t_ℓ^α，和 d_ℓ^α，分别代替 $t_{\ell,h_k^\alpha}^\alpha$，和 $d_{\ell,h_k^\alpha}^\alpha$，。

对于 $\alpha \in K_m$，我们有 $\alpha \geq \sum_{j=0}^m d^{-(j+1)} = \frac{1-d^{-m}}{d-1} \geq \frac{1}{d}$。定义

$$\varphi : x \in \left[\frac{1}{d}, +\infty \right[\mapsto \frac{1}{d^k (x+1)}.$$

由于 φ 是从 $\left[\frac{1}{d}, +\infty\right[$ 到 $\left] 0, \frac{1}{d^{k-1}(d+1)} \right]$ 的同胚，$\varphi(K_m)$ 是一个由长度为 $O(d^{-m})$ 的区间组成的并集。

命题 5.2。令整数 $m = \lfloor$对数$_d(n)\rfloor$。我们有

$$\#\mathscr{B}_n \cap \left(\varphi(K_m) + \left[-C_3 \frac{m}{n}, C_3 \frac{m}{n} \right] \right) \leq 2^{-q_n} n^{\frac{\log(2)}{\log(d)}}$$

伴随 $C_3 = \frac{(c+2)(d-1)}{d^{k+1}}$

证明。 $d^q \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ 和 $n \simeq d^m$。于是，当 n 足够大时，

$$\frac{d^{q_n}}{n} > d^{-m}.$$

令 $m_0 = \lfloor$对数$_d(n)\rfloor - q_n$。于是，由于 $q_n = o(m)$，我们得到 $m_0 \simeq m$。因此，

$$\frac{d^{q_n}}{n} \simeq d^{-m_0}.$$

于是， $m \geq m_0$. K_{m_0} 包含 2^{m_0-1} 个区间，因此 $\left(\varphi(K_{m_0}) + \left[-C_3\frac{m}{n}, C_3\frac{m}{n}\right]\right)$ 至多包含 2^{m_0-1} 个区间。令 I_m 为 K_m 的一个区间， $|I_m|$ 为其长度。 $\varphi(K_m) + \left[-C_3\frac{m}{n}, C_3\frac{m}{n}\right]$ 中一个区间的长度小于 $|I_m| + C_3\frac{m}{n}$，因为 φ 是 $1-$Lipschitz 的。我们有 $p_n < q_n$，因此当 n 足够大时，由 $\frac{r}{n} d^{q_n}$ 定义的 $\mathscr{B}_n$ 的周期（其中 $r \in \mathbb{Z}$ ）远大于包含在 $\varphi(K_{m_0}) + \left[-C_3\frac{m}{n}, C_3\frac{m}{n}\right]$中的区间长度。因此

$$\#\mathscr{B}_n \cap \left(\varphi(K_m) + \left[-C_3 \frac{m}{n}, C_3 \frac{m}{n} \right] \right) \leq \#\mathscr{B}_n \cap \left(\varphi(K_{m_0}) + \left[-C_3 \frac{m}{n}, C_3 \frac{m}{n} \right] \right) \leq 2^{m_0-1} = 2^{-q_n} n^{\frac{\log(2)}{\log(d)}}.$$

□

Let $\check{J}_{k,\alpha} := \bigcup_{\ell \in \check{\mathscr{B}}_n} B_\ell^\alpha$. Let

$$\check{W}_{k,n} = \{ \alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}} : n \in \check{J}_{k,\alpha} \}. \tag{28}$$

命题 5.3. 我们有

$$\mathscr{H}(\check{W}_{k,n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

证明。设 $n \in \mathbb{N}$，设 $\alpha \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$。设 $\ell \in I_n^\alpha$。根据定义，我们得到

$$\beta(\alpha) = \frac{n}{\ell} - h_k^\alpha + O\left(\frac{m}{n}\right).$$

当 n 足够大时，存在唯一的 $\varphi(K_m)$ 的区间 $J_\ell + \left[-C_3\frac{m}{n}, C_3\frac{m}{n}\right]$，使得 $\frac{\ell}{n} \in J_\ell$。由引理 4.1 和 (23)，我们还可得，$J_\ell$ 的长度 $|J_\ell|$ 为 $O(\frac{m}{n})$。此外，φ 是一个微分同胚。因此，K_m 的区间 I_ℓ 的长度为 $O(\frac{m}{n})$。回想 $q_n = 2\lfloor 1+\log_d(2)\,\log(2)\,\log_d(m)\rfloor + 1$，我们得到

$$\mathscr{H}(I_\ell) \le C|I_\ell|^{\log_d(2)}.$$

由命题 5.2，

$$\mathscr{H}\left(\check{W}_{k,n}\right) = \mathscr{H}\left(\bigcup_{\ell \in \check{\mathscr{B}}_n} I_\ell\right) \le 2^{m-q_n} C d^{p_n+1} \left(\frac{m}{n}\right)^{\log_d(2)} \le C d m^{-(1+\log_d(2))}.$$

□

6. 时变可观测量的极限定理

我们的方法依赖于相关时变情形下的一个局部极限定理版本。我们需要一个与 Hafouta 和 Kifer 在 [Haf] and [HK] 中提出的版本非常接近的版本，因为我们处理的是相关变量，而非独立同分布变量。回顾一下，k 是固定的。令 $\ell = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{\ell,j} d^j$，其中 $a_{\ell,j} \in [\![-\frac{d-1}{2}, \frac{d-1}{2}]\!]$，我们考虑 $U_i^\alpha(x) = sgn(a_{\ell,i})\varepsilon_k^{\sigma^i\alpha}(S^{q_\ell, i}(x))$ 和 $X_i^\alpha(x) = U_i^\alpha(\sigma^i x)$。

本节中，我们固定 α，并注意到 U_i，X_i，$\beta^{(\kappa)}(\alpha)$ 和 ε^α，而非 $U_i^\alpha - \mathbb{E}(U_i^\alpha)$、$X_i^\alpha - \mathbb{E}(X_i^\alpha)$、$\beta_k^{(\kappa)}(\alpha)$、$\varepsilon_k^\alpha$ 和 $Y_\alpha = \ell h_k^\alpha + \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(a_{\ell,j}\left(\sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k+i} d^{j-(i+1)}\right)\right)$。回顾一下，根据命题 4.1，$\mathbb{E}(X_i^\alpha) = sgn(a_{\ell,\,i})\beta_k(\sigma^i\alpha)$。由命题 3.4 可知，

$$t_\ell^{\alpha\prime}(x) = Y_\alpha + \sum_{j\in\mathbb{N}} X_j^\alpha. \tag{29}$$

我们还注意到 $S_{j,\,m} = \sum_{i=0}^{m-1} X_{i+j}$ 和 $S_m = S_{0,\,m}$。

因此，本节的主要目的是证明以下局部极限定理。

命题 6.1。对于 $m, n \in \mathbb{N}$，使得 $m = \lfloor$对数$_d$（n）$\rfloor$，$\alpha \notin M_m \cup W_{k,\,n}$，$\ell \in I_n^\alpha$，有

$$\lambda(\{S_m = n - \mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime})\}) = \frac{1}{\sigma_{0,m}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime})-n)^2}{2\sigma_{0,m}^2}} + O\left(\frac{1}{m}\right)$$

其中有 $\sigma_{0,\,m} = \sqrt{\mathbb{V}}(S_m)$ 以及 M_m 一个可测集，我们将在（*53*）中定义它。换言之，

$$d_\ell^{\alpha\prime}(n) = \frac{1}{\sigma(t_\ell^{\alpha\prime})\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime})-n)^2}{2\sigma(t_\ell^{\alpha\prime})^2}} + O\left(\frac{1}{\log_d(n)}\right)$$

其中有 $\sigma(t_\ell^{\alpha\prime}) = \sqrt{\mathbb{V}(t_\ell^{\alpha\prime})}$。

下面粗略列出证明局部极限定理并获得良好误差估计所需的性质 e

(1) $\mathscr{L}_{(m)\,\alpha,it}(1) \simeq \mathbb{1} + it\mathbb{E}(S_m) - \frac{1}{2}t^2\mathbb{V}$
(S_m) (2) 上确界$_{|t|\in[\epsilon_0,\pi]} \left|\mathscr{L}_{(m)\,\alpha,it}(1)\right| = O(\frac{1}{m})$ (3) $\sigma_{0,m} \ge c\sqrt{m}$。

6.1. 非齐次伯克霍夫和的方差。 更准确地说，我们需要方差 $\mathbb{V}(S_m)$ 呈线性增长。我们首先应控制每一对 X_i和 X_j之间的协方差。

命题 6.2 (协方差的指数衰减**)。**

$$|Cov(X_i, X_j)| \leq \frac{1}{d^{i-j}} \left((\beta^{(2)}(\sigma^i \alpha))\sigma(X_i) \right) \leq \frac{\|\alpha\|_\infty^2}{d^{i-j}(d-1)}$$

证明。设 $i > j$ 为两个整数。记 w' 为满足 $|w'| = i - j$ 和 $S^{q_l \frac{\cdot}{d^j}}(w'x) \in [(d-1)^{i-j}]$ 的词，其中对所有 x均成立。然后利用测度在 σ^j 下的不变性以及转移算子$\mathscr{L}^{i-j}$，得到

$$\begin{aligned} sgn(a_{\ell,i})sgn(a_{\ell,j})Cov(X_i, X_j) &= \int_{[0,1[} \varepsilon_{k,h_k^\alpha}^{\sigma^i \alpha}(S^{\frac{q_{\ell,i}}{d^i}}(\sigma^i x))\varepsilon_k^{\sigma^j \alpha}(S^{\frac{q_{\ell,j}}{d^j}}(\sigma^j x))dx - \beta(\sigma^i \alpha)\beta(\sigma^j \alpha) \\ &= \int_{[0,1[} \varepsilon_{k,h_k^\alpha}^{\sigma^i \alpha}(S^{\frac{q_{\ell,i}}{d^i}}(x))\mathscr{L}^{i-j}(\varepsilon_k^{\sigma^j \alpha}(S^{\frac{q_{\ell,j}}{d^j}}(\cdot)))(x)dx - \beta(\sigma^i \alpha)\beta(\sigma^j \alpha). \end{aligned}$$

当 $w \neq w'$ 时，我们有 $\varepsilon_k^{\sigma^j \alpha}(S^{q_l \frac{\cdot}{d^j}}(wx)) = \varepsilon_k^{\sigma^j \alpha}(S^{q_l \frac{\cdot}{d^j}}(w0))$，因此

$$\int_{[0,1[} \varepsilon_k^{\sigma^i \alpha}(S^{\frac{q_{\ell,i}}{d^j}}(x))\varepsilon_k^{\sigma^j \alpha}(S^{\frac{q_{\ell,j}}{d^j}}(wx))dx = \varepsilon_k^{\sigma^j \alpha}(S^{\frac{q_{l,j}}{d^j}}(w0))\beta(\sigma^i \alpha)$$

and

$$\frac{1}{d^{i-j}} \left(\sum_{|w|=i-j \ and \ w \neq w'} \varepsilon_k^{\sigma^j \alpha}(S^{\frac{q_{\ell,j}}{d^j}}(w0)) + \int_{[0,1[} \varepsilon_k^{\sigma^j \alpha}(S^{\frac{q_{\ell,j}}{d^j}}(w'x))dx \right) = \beta(\sigma^j \alpha).$$

因此，

$$sgn(a_{\ell,i})sgn(a_{\ell,j})Cov(X_i, X_j) = \frac{1}{d^{i-j}} \int_{[0,1[} \varepsilon^{\sigma^j \alpha}(S^{\frac{q_{l,j}}{d^j}}(w'x)) \left(\varepsilon^{\sigma^i \alpha}(S^{\frac{q_{l,i}}{d^i}}(x)) - \beta(\sigma^i \alpha) \right) dx.$$

然后，根据赫尔德不等式，

$$|Cov(X_i, X_j)| \leq \frac{1}{d^{i-j}} \left(\sqrt{(\beta^{(2)}(\sigma^i \alpha))}\sigma(X_i) \right) \leq \frac{\|\alpha\|_\infty^2}{d^{i-j}(d-1)}.$$

□

现在，我们控制每一项 X_i 的方差。

命题 6.3 （方差最小化）。

$$\mathbb{V}(X_i) \geq \frac{d-2}{(d-1)^2}.$$

证明。令

$$f : u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} u_j^2 d^{-(j+1)} - \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} u_j d^{-(j+1)} \right)^2.$$

于是，

$$f(u) - f(1) = \sum_{j \in \mathbb{N}} (u_j - 1)d^{-(j+1)} \left((u_j + 1) - \sum_{i \in \mathbb{N}} (u_i + 1)d^{-(i+1)} \right)$$

对于 $u \in [1, 2]^{\mathbb{N}}$，$f(u) \geq f(1) = d^{-2}(d-1)^2$。由命题 4.1 可得

$$\mathbb{V}(X_i) = f(\sigma^i \alpha) \geq \frac{d-2}{(d-1)^2}.$$

□

现在，为了控制 S_m 的方差，我们使用这些关于相关系数的估计。利用命题 6.2 和 6.3，我们得到

$$\left|\frac{Cov(X_i, X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)}\right| \leq \frac{\|\alpha\|_\infty \sqrt{d-1}}{d^{i-j}\sqrt{d-2}}. \tag{30}$$

现在注意到 $p_{ij} := {}^{Cov}(X_i$<style id='6', $X_j)\ \sigma(X_i)\sigma(X_j)$。结合 (30)，我们有:

$$\sum_{i \neq j} p_{ij} \leq \frac{2\|\alpha\|_\infty}{\sqrt{d-1}\sqrt{d-2}}. \tag{31}$$

根据我们对 $d \geq 7$ 的选择，有 ${}^2\|\alpha\|_{\overline{\sqrt{d-1}\sqrt{d-2}}}^{\infty} < 1$。这保证了协方差矩阵是对角占优的。因此，利用对角占优矩阵的性质，对于 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，我们有

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X_i\right) \geq \left(1 - \frac{2\|\alpha\|_\infty}{\sqrt{d-1}\sqrt{d-2}}\right) \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2 \mathbb{V}(X_i) \tag{32}$$

最后，由 (32) 和命题 6.3，可得

命题 6.4（方差最小化）。 对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{V}\left(t^{\alpha}_{\ell, h^{\alpha}_{k}}{}'\right) \geq \left(1 - \frac{2\|\alpha\|_\infty}{\sqrt{d-1}\sqrt{d-2}}\right) \frac{d-2}{(d-1)^2} b_\ell.$$

现在，我们得到了方差最小化，这是局部极限定理的一个版本所需的第一个假设。

6.2. **Perron-Frobenius 算子的复扰动**。 接下来，我们引入 Perron-Frobenius 算子来证明局部极限定理，换言之，证明命题 6.1。函数 U_j 不连续，因此该算子不能作用于 Hölder连续函数。幸运的是，我们可以在有界振荡函数空间上研究该算子。

本节中，我们记 $\mathscr{D} = [\![0,\ d-1]\!]$ 和 $\Sigma_d = \mathscr{D}^{\mathbb{N}^*}$。函数 $g\colon\ \Sigma_d \to \mathbb{C}$在 Σ_d 的子集 B 上的振荡定义为

$$osc(g, B) := \sup\{|g(x) - g(y)| : (x, y) \in B^2\}.$$

固定 $\delta \in (\frac{1}{d},\ 1 - \frac{1}{d})$。

定义6.1（δ–振荡）。 函数 $g\colon\ \Sigma_d \to \mathbb{C}$的 δ–振荡定义为

$$|g|_\delta := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\delta^{-n} \sum_{|a|=n} osc(g, [a]) d^{-n}\right).$$

注意，函数 g 满足 $|g|_\delta < +\infty$ 有界。

定义6.2（δ–有界振荡函数）。 我们用 OSC_δ 表示所有 δ–有界振荡函数 $g\colon\ \Sigma_d \to \mathbb{C}$构成的集合。给定 $\gamma > 0$，我们赋予 OSC_δ 平衡范数 $\|g\|_{\delta,\ \gamma} =\max(\|g\|_\infty, \gamma|g|_\delta)$，使其成为一个巴拿赫空间。

接下来，我们将在巴拿赫空间（OSC_δ，$\mathbf{k}g\mathbf{k}_{\delta,\ \gamma}$）中进行研究。

为方便起见，并与先前文献保持一致，我们将 U_j关于 $j < 0$ 的定义扩展为 $U_j = 0$。

定义 6.3 (Perron-Frobenius 算子)。 我们将 $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ 和 $j \in \mathbb{Z}$ 的 *Perron-Frobenius* 算子定义为

$$\mathscr{L}_{\alpha,z}^{(j)} : g \in OSC_\delta \mapsto \left(\mathscr{L}_{\alpha,z}^{(j)}(g) : x \in [\![0, d-1]\!]^{\mathbb{N}^*} \mapsto \frac{1}{d} \sum_{w \in [\![0,\, d-1]\!]} e^{zU_j^\alpha(wx)} g(wx) \right).$$

注意， $\mathscr{L} := \mathscr{L}_{\alpha,\ 0}$ 不依赖于 α。注意，对于 $j < 0$， $\mathscr{L}_{\alpha}^{(j)}{}_{,\ z} = \mathscr{L}$。

Perron-Frobenius 算子满足一种 Doeblin-Fortet（Lasota-Yorke）不等式。

命题 6.5。 对于 $g \in OSC_\delta$, $j \in \mathbb{Z}$，对所有 $\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ 和 $t \in \mathbb{R}$

$$\left| \mathscr{L}_{\alpha,it}^{(j)}(g) \right|_\delta \leq \delta |g|_\delta + \frac{2}{d} \|g\|_\infty. \tag{33}$$

证明。 设 $n \in \mathbb{N}^*$。字母表 $[\![0,\ d-1]\!]$ 中存在唯一的词 a'，使得 $|a'| = n$，并且存在一个字母 ω'，使得

$$\forall x \in \Sigma_d, S^{\frac{q_{1,j}}{d^j}}(\omega' a' x) \in [(d-1)^{n+1}].$$

对于 $\omega \neq \omega'$ 或 $a \neq a'$，我们得到

$$\forall x, y \in [\![0, d-1]\!]^{\mathbb{N}^*}, U_j(\omega a x) = U_j(\omega a y).$$

那么，对于 $\omega \neq \omega'$,

$$\left| e^{itU_j(\omega a x)} g(\omega a x) - e^{itU_j(\omega a y)} g(\omega a y) \right| = |g(\omega a x) - g(\omega a y)| \leq osc(g, [\omega a]).$$

对于 $\omega = \omega'$，我们得到

$$\left| e^{itU_j(\omega a x)} g(\omega a x) - e^{itU_j(\omega a y)} g(\omega a y) \right| \leq |g(\omega a x)| + |g(\omega a y)| \leq 2\|g\|_\infty.$$

那么，

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{|a|=n} osc\left(\mathscr{L}_{\alpha,it}^{(j)}(g), [a] \right) d^{-n} &\leq \tfrac{1}{d^{n+1}} \textstyle\sum_{|a|=n} \sum_{|\omega|=1} osc\left(e^{itU_j(\cdot)} g(\cdot), [\omega a] \right) \\ &\leq \tfrac{1}{d^{n+1}} \textstyle\sum_{|a|=n \ and \ (\omega a \neq \omega' a')} osc(g, [\omega a]) + \tfrac{2}{d^{n+1}} \|g\|_\infty \\ &\leq \delta^{n+1} |g|_\delta + \tfrac{2}{d^{n+1}} \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

我们有 $\delta > \frac{1}{d}$。因此

$$\left| \mathscr{L}_{\alpha,it}^{(j)}(g) \right|_\delta \leq \delta |g|_\delta + \frac{2}{d} \|g\|_\infty.$$

□

我们指出

$$\left\| \mathscr{L}_{\alpha,it}^{(j)}(g) \right\|_\infty \leq \|g\|_\infty. \tag{34}$$

定义 6.4 (复合 Perron-Frobenius 算子)。 我们将 $z \in \mathbb{C}$、$j \in \mathbb{Z}$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 的复合 *Perron-Frobenius* 算子定义为

$$\mathscr{L}_{\alpha,z}^{j,n} = \mathscr{L}_{\alpha,z}^{(j+n-1)} \circ \cdots \circ \mathscr{L}_{\alpha,z}^{(j)}$$

由命题 6.5 的归纳法，我们得到了对复合 Perron-Frobenius 算子的统一控制。

命题 6.6。 对于 $g \in OSC_\delta$, $t \in \mathbb{R}$ 以及所有的 $n \in \mathbb{N}$，对于所有 $\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$

$$\left| \mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n}(g) \right|_\delta \leq \delta^n |g|_\delta + \beta \|g\|_\infty, \tag{35}$$

其中 $\beta = {}_d\ \frac{2}{(1-\delta)}$.

我们通过谱方法证明局部极限定理，该方法依赖于 Perron-Frobenius 算子的解析性。下述引理对此很有帮助。

引理 6.1. 存在 $C > 0$，使得对所有 $j \in \mathbb{N}$ 以及所有 $\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$，

$$\forall g \in OSC_\delta, \left\|U_j^\alpha(\cdot)g\right\|_{\delta,\gamma} \leq C\|g\|_{\delta,\gamma}.$$

证明。 根据定义， $\left\|U_j^\alpha(\cdot)g\right\|_{\delta,\gamma} =$ 最大 $\left(\left\|U_j^\alpha(\cdot)g\right\|_\infty, \gamma\left|U_j^\alpha(\cdot)g\right|_\delta\right)$ 以及 $\left|U_j^\alpha(\cdot)g\right|_\delta \leq \|g\|_\infty\left|U_j^\alpha\right|_\delta + \left\|U_j^\alpha\right\|_\infty|g|_\delta$。我们得到

$$\left\|U_j^\alpha\right\|_\infty \leq 2 + \beta(\sigma^j\alpha) \leq 2 + \frac{d}{d-1}. \tag{36}$$

我们提出 $D = 2 + \frac{d}{d-1}$。我们知道，对于 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 x， $y \in \Sigma_d$ 对于 a 满足 $|a| = n$ 的一个词，我们得到 $Osc(U_j^\alpha, [a]) \leq 2D$，并且如果 $a \neq S^{-q_l}(d-1)^n$，则 $Osc(U_j^\alpha, [a]) = 0$。于是

$$\delta^{-n}\sum_{|a|=n} Osc(U_j^\alpha, [a])d^{-n} \leq \frac{2D}{(\delta d)^n}.$$

对于 $n = 0$，由 (36) 得，

$$Osc(U_j^\alpha, \Sigma_d) \leq 2\left\|U_j^\alpha\right\|_\infty \leq 2D.$$

我们还知道 $\delta > \frac{1}{d}$，因此 $\frac{1}{(\delta d)^{n-1}} < 1$。于是，$\left|U_j^\alpha\right|_\delta \leq 2D$。记 $C = 2\left(\frac{1}{\gamma} + D\right) > 0$，得到

$$\left\|U_j^\alpha(\cdot)g\right\|_{\delta,\gamma} \leq 2|g|_\delta + 2D\|g\|_\infty \leq C\|g\|_{\delta,\gamma}.$$

□

因此，我们得到关于 $(z \in \mathbb{C} \mapsto \mathscr{L}_z^{(j)})$ 的解析性引理。

引理 6.2. 对所有 $\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$，函数 $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathscr{L}_{\alpha,z}^{(j)} \in \mathcal{L}(OSC_\delta)$ 是解析的。

证明. 令 $z \in \mathbb{C}$。由引理 6.1 可知，乘以 U_j^α 是 OSC_δ 上的有界算子，其范数由某个常数 C 控制。此外， $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|z|^k}{k!}\left\|U_j^\alpha(\cdot)\right\|_\delta^k \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{C^k|z|^k}{k!} = e^{C|z|} < \infty$。根据命题 6.5，对于 $t = 0$， $\mathscr{L}$ 是 OSC_δ 上的连续算子，并且

$$\mathscr{L}_{\alpha,z}^{(j)}(g) = \mathscr{L} \circ \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}(U_j^\alpha(\cdot))^k g\right).$$

因此，$(z \in \mathbb{C} \mapsto \mathscr{L}_{\alpha,z}^{(j)})$ 是解析的。 □

由于我们处理的是多个不同算子的复合，而非单个算子，因此通常的谱扰动方法并不适用。我们需要使用 [R] 引入并在 [Dub] 中进一步发展的复锥方法，以追踪谱数据。我们沿用 [HK]，中的策略，将锥技术应用于有界振荡空间，而非 Hölder空间。

我们定义，对于 $a > 0$，

$$\mathscr{C}_{a,\mathbb{R}} := \{g \geq 0 : |g|_\delta \leq a\int_{\Sigma_d} gd\lambda\}.$$

我们为 $n \in \mathbb{N}$ 定义，并为两个无限词序列 $X = (x_w)_{w\in\mathscr{D}^n}$ 和 $X' = (x'_w)_{w\in\mathscr{D}^n}$ 定义，因此我们定义

$$l_{(X,X')}^{(n)} : g \in OSC_\delta \mapsto \sum_{|w|=n} \frac{1}{(\delta d)^n}(g(w \cdot x_w) - g(w \cdot x'_w)).$$

Let

$$m^{(n)}_{a,X,X'} : g \in OSC_\delta \mapsto a\int_{\Sigma_d} g d\lambda - l^{(n)}_{(X,X')}(g).$$

我们立即推得

$$\mathscr{C}_{a,\mathbb{R}} = \{g \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall X, X' \in (\Sigma_d)^{\mathscr{D}^n}, m^{(n)}_{a,X,X'}(g) \geq 0\}. \tag{37}$$

命题 6.7. 对于 $\frac{1}{d} < \delta < 1 - \frac{2}{d}$ 和 $a > \frac{2}{d\,1-\delta()-1}$，~~存在 $\iota \in$~~$]0,1[$ 使得

$$\mathscr{L}\left(\mathscr{C}_{a,\mathbb{R}}\right) \subset \mathscr{C}_{\iota a,\mathbb{R}}.$$

证明. 令 $a > \frac{2}{d\,1-\delta()-1}$ 和 $g \in \mathscr{C}_{a,\mathbb{R}}$。那么，根据命题 6.5,

$$l^{(n)}_{X,X'}(\mathscr{L}(g)) \leq |\mathscr{L}(g)|_\delta \leq \delta |g|_\delta + \frac{2}{d}\|g\|_\infty.$$

对于每个 $(x, x') \in \Sigma_d^2$，我们有

$$g(x) = g(x) - g(x') + g(x') \leq |g|_\delta + g(x'),$$

因此,

$$\forall x' \in \Sigma_d, \|g\|_\infty \leq |g|_\delta + g(x'). \tag{38}$$

于是，我们得到,

$$\forall y \in \Sigma_d, l^{(n)}_{X,X'}(\mathscr{L}(g)) \leq \left(\delta + \frac{2}{d}\right)|g|_\delta + \frac{2}{d}g(y).$$

对 y 积分，得到:

$$l^{(n)}_{X,X'}(\mathscr{L}(g)) \leq \left(\delta + \frac{2}{d}\right)|g|_\delta + \frac{2}{d}\int_{\Sigma_d} g d\lambda \leq \left(\frac{2}{d} + a\left(\delta + \frac{2}{d}\right)\right)\int_{\Sigma_d} g d\lambda. \tag{39}$$

此外，$a > \frac{2}{d\,1-\delta()-1}$ 且 $\frac{1}{d} < \delta < 1 - \frac{2}{d}$，因此

$$m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}(g)) = a\int_{\Sigma_d} g d\lambda - l^{(n)}_{X,X'}(\mathscr{L}(g)) \geq a\left(1 - \left(\frac{2}{da} + \delta + \frac{2}{d}\right)\right)\int_{\Sigma_d} g d\lambda. \tag{40}$$

设 $\iota = \left(\frac{2}{da} + \delta + \frac{2}{d}\right) \in]0,1[$。由 (40)，

$$m_{a,X,X'}(\mathscr{L}(g)) \geq a(1-\iota)\int_{\Sigma_d} g d\lambda.$$

于是,

$$m^{(n)}_{\iota a,X,X'}(\mathscr{L}(g)) \geq 0.$$

由此可得

$$\mathscr{L}\left(\mathscr{C}_{a,\mathbb{R}}\right) \subset \mathscr{C}_{\iota a,\mathbb{R}}.$$

□

我们还得到 $\mathscr{L}(\mathscr{C}_{a,\mathbb{R}} \setminus \{0\}) \subset \mathscr{C}_{\iota a,\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

引理 6.3。对于任意 $g \in \mathscr{C}_{\iota a,\ \mathbb{R}}$ 我们有

$$h_{\mathscr{C}_{a,\mathbb{R}}}(g,1) \leq \ln\left(\frac{\max(\sup g, (1+\iota)\int g)}{\min(\inf g, (1-\iota)\int g)}\right),$$

其中 $h_{\mathscr{C}_{a,\ \mathbb{R}}}$ 是相应锥的希尔伯特度量。

证明。 根据定义， g 与 1 之间的距离是 $\ln \frac{Q_2}{Q_1}$ 的下确界，其中 $Q_1 > 0$ 和$Q_2 > 0$ 满足 $g - Q_1$, $Q_2 - g \in \mathscr{C}_{a,\ \mathbb{R}}$；若无法做到这一点，则距离为无穷大。

显然，当 $Q_1 \leq \inf\ g$ 时，条件 $g - Q_1 \geq 0$ 成立。第二个条件为

$$|g - Q_1|_\delta \leq a \int g - Q_1.$$

由于 $g \in \mathscr{C}_{\iota a,\mathbb{R}}$,

$$|g - Q_1|_\delta = |g|_\delta \leq \iota a \int g \leq a \int g - aQ_1,$$

若 $Q_1 \leq (1-\iota) \int g$，则 $Q_1 \leq \min(\inf\ g, (1-\iota) \int g)$。

Q_2 的界可类似地得到。 □

现在，我们还假设 $\delta \leq \frac{d-1}{d+2}$ 。

命题 6.8。 对于 $a \in (\frac{2}{d\ 1-\delta()\cancel{-1,\ \delta-1}})$，像 $\mathscr{C}_{a,\ \mathbb{R}}$ 的直径 $\mathscr{L}(\mathscr{C}_{a,\ \mathbb{R}})$ 有限。证明。 设 $b = \frac{1}{2}(1 - \delta a)$。设 $g \in \mathscr{C}_{a,\ \mathbb{R}} \setminus \{0\}$。我们首先断言，存在 $v \in \mathscr{D}$ 使得 $\inf_{[v]} g \geq b \int g$。否则，对于任意 $v \in \mathscr{D}$

$$d \int_{[v]} g \leq b \int g + osc(g, [v])$$

并对 v 求和，根据 $|g|_\delta$的定义可得,

$$\int g \leq b \int g + \delta |g|_\delta \leq (b + \delta a) \int g < \int g,$$

这就产生矛盾。因此，我们有

$$\mathscr{L}(g) \geq \frac{1}{d} \inf_{[v]} g \geq \frac{b}{d} \int g.$$

另一方面,

$$\sup \mathscr{L} g \leq \int \mathscr{L} g + |\mathscr{L} g|_\delta \leq (1 + \iota a) \int g.$$

由引理 6.7 和 6.3 可得

$$h_{\mathscr{C}_{a,\mathbb{R}}}(\mathscr{L} g, 1) \leq \ln \left(\frac{\max(1 + \iota a, 1 + \iota)}{\min(\frac{b}{d}, 1 - \iota)} \right) < \infty.$$

结论由三角不等式得出。 □

我们将锥 $\mathscr{C}_{a复化\mathbb{R}}$ 定义为

$$\mathscr{C}_{a,\mathbb{C}} = \mathbb{C}^* \left(\mathscr{C}_{a,\mathbb{R}} + i \mathscr{C}_{a,\mathbb{R}} \right) = \mathbb{C}^* \{x + iy \in \mathbb{C} : x \pm y \in \mathscr{C}_{a,\mathbb{R}}\}.$$

命题 6.9。 设 $D = 2 + \frac{d}{d-1}$。存在 $C > 0$ ，使得对于任意 $U \in OSC_\delta$ ，当$\|U\|_{\delta,\ \gamma} \leq D$时，对于所有 $n \in \mathbb{N}$、所有 X、 X'，对于所有 $a > \frac{2}{d\ 1-\delta()-1}$、~~所有 $z \in$~~ $\mathbb{C}$，以及对于所有 $f \in \mathscr{C}_{a,\ \mathbb{R}}$,

$$\left| m_{a,X,X'}^{(n)}(\mathscr{L}_z(f)) - m_{a,X,X'}^{(n)}(\mathscr{L}(f)) \right| \leq C e^{D|\Re(z)|} |z| m_{a,X,X'}^{(n)}(\mathscr{L}(f))$$

其中 $\mathscr{L}_z(f) = \mathscr{L}(e^{zU} f)$。

证明。设 $z\in\mathbb{C}$，并设 $f\in\mathscr{C}_{a,\ \mathbb{R}}$。则

$$\begin{aligned}\left|m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}_z(f))-m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}(f))\right| &\le a\left|\textstyle\int_{\Sigma_d}(e^{zU}-1)fd\lambda\right|+\left|l^{(n)}_{X,X'}(\mathscr{L}((e^{zU}-1)f))\right|\\ &\le 2aD|z|e^{D|\Re(z)|}\textstyle\int_{\Sigma_d}fd\lambda+\left|\mathscr{L}((e^{zU}-1)f)\right|_\delta.\end{aligned}$$

由命题 6.5 可得，$t=0$,

$$\left|\mathscr{L}((e^{zU}-1)f)\right|_\delta\le\delta\left|(e^{zU}-1)f\right|_\delta+\frac{2}{d}\left\|(e^{zU}-1)f\right\|_\infty.$$

我们有

$$\delta\left|(e^{zU}-1)f\right|_\delta\le\delta\|f\|_\infty\left|e^{zU}-1\right|_\delta+2D|z|e^{D|\Re(z)|}|f|_\delta.$$

我们还得到

$$\frac{2}{d}\left\|(e^{zU}-1)f\right\|_\infty\le\frac{4D|z|e^{D|\Re(z)|}}{d}\|f\|_\infty.$$

对于 $e^{zU}-1$ 的振荡，也有类似的结果,

$$\left|e^{zU}-1\right|_\delta\le|z|e^{D|\Re(z)|}|U|_\delta\le\frac{D}{\gamma}|z|e^{D|\Re(z)|}.$$

对 x' 积分不等式 (38)，我们得到

$$\|f\|_\infty\le|f|_\delta+\int_{\Sigma_d}fd\lambda.$$

我们知道 $f\in\mathscr{C}_{a,\ \mathbb{R}}$，那么

$$|f|_\delta\le a\int_{\Sigma_d}fd\lambda.$$

Then

$$\left|m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}_z(f))-m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}(f))\right|\le2D|z|e^{D|\Re(z)|}\int_{\Sigma_d}fd\lambda\left(2a+\left(\delta+\frac{2}{d}\right)(a+1)\right).$$

注意 $C=\underline{{}^{2D}(2a+(a+1)(\delta+\frac{2}{d}))^{\,a(1-\iota)}}$。由 (40),

$$\left|m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}_z(f))-m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}(f))\right|\le Ce^{D|\Re(z)|}|z|m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}(f)).$$

□

现在，我们证明，对任意在 0 的某个邻域内的 z，Perron-Frobenius 算子对锥 $\mathscr{C}_{a,\ \mathbb{C}}$的像都包含于该锥中。

命题 6.10. 存在 *0* 的一个邻域 $U\subset\mathbb{C}$ 以及 $C_3>0$，使得对所有 $j\in\mathbb{Z}$,$\alpha\in\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ 和 $z\in U$,

$$\mathscr{L}^{(j)}_{\alpha,z}(\mathscr{C}_{a,\mathbb{C}})\subset\mathscr{C}_{a,\mathbb{C}},\qquad\sup_{f,g\in\mathscr{C}_{a,\mathbb{C}}}h_{\mathscr{C}_{a,\mathbb{C}}}(\mathscr{L}^{(j)}_{\alpha,z}(f),\mathscr{L}^{(j)}_{\alpha,z}(g))\le C_3.$$

证明。由命题 6.8，实锥 $\mathscr{C}_{a,\ \mathbb{R}}$ 经 $\mathscr{L}$ 映射后的像的直径 D_0 有限。由命题 6.9，我们可以选取 0 的一个邻域 $U\subset\mathbb{C}$，使得

$$\left|m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}_{\alpha,z}(f))-m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}(f))\right|\le\varepsilon m^{(n)}_{a,X,X'}(\mathscr{L}(f))$$

其中 $\varepsilon>0$ 满足 $2\varepsilon\left(1+\cosh\left(\frac{D_0}{2}\right)\right)<1$。然后，应用 [HK] 中的定理 A.2.4，即可得到结论。

□

下一个引理将用于证明引理 6.6。

引理6.4。 对于 $a > {}_{d}\,1\frac{2}{-\delta\,()-1}$ 和 $M \geq \frac{\gamma a+1}{2\gamma a}$ ，我们有

$$\left\{ g \in OSC_\delta : \|g - \mathbb{1}\|_{\delta,\gamma} \leq \frac{1}{M} \right\} \subset \mathscr{C}_{a,\mathbb{C}}$$

证明。 令 $M \geq \frac{\gamma a+1}{2\gamma a}$，并令 $f \in OSC_\delta$ 使得 $\mathrm{k}f - \mathbb{1}\mathrm{k}_{\delta,\ \gamma} < \frac{1}{M}$。因此，$\mathrm{kR}f - \mathbb{1}\mathrm{k}_{\delta,\ \gamma} \leq \mathrm{k}f - \mathbb{1}\mathrm{k}_{\delta,\ \gamma} < \frac{1}{M}$ 且 $\mathrm{kI}f\mathrm{k}_{\delta,\ \gamma} \leq \mathrm{k}f - \mathbb{1}\mathrm{k}_{\delta,\ \gamma} < \frac{1}{M}$，以及 $|\mathrm{R}(f) \pm \mathrm{I}(f)|_\delta \leq \frac{2}{\gamma M}$。因此，$\int_{\Sigma_d}(\mathrm{R}(f) \pm \mathrm{I}(f))d\lambda \geq 1 - \mathrm{kR}(f) - \mathbb{1} \pm \mathrm{I}(f)\mathrm{k}_\infty \geq 1 - \frac{2}{M}$。我们有 $M \geq \frac{\gamma a+1}{2\gamma a}$，于是

$$|\Re(f) \pm \Im(f)|_\delta \leq a \int_{\Sigma_d} (\Re(f) \pm \Im(f))d\lambda.$$

□

下一个引理用于证明引理 6.6 中的（42）。

引理 *6.5*（引理 *2.8.*2 [*HK*]）。设（X，$k{\cdot}k$）为一个复巴拿赫空间，并设 $Q: U \to X$是在开集 $U \subset \mathbb{C}$ 上定义的解析函数，该开集包含以某个 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为中心、半径为 $\delta > 0$ 的闭球 $\overline{B}(z_0, \delta)$。假设存在 $r > 0$，使得对于任意 $z \in B(z_0, \delta)$，都有 $|Q(z)| \leq r$。令 $k \geq 0$ 为一个整数，并记 $Q_{k,\ z_0}$ 为 Q 在 z_0附近的 k 阶泰勒多项式。那么对于任意 $z \in B(z_0, \delta)$，

$$\|Q(z) - Q_{k,z_0}(z)\| \leq \frac{(k+2)r|z - z_0|^{k+1}}{\delta^{k+1}}.$$

引理 6.6 (定理 4.2.1 之后，见 [HK])**.** 存在 *0* 的复邻域 U 以及常数 $C > 0$，使得对于所有 $\alpha \in \{1{,}2\}^{\mathbb{N}}$:

对于任意 $j \in \mathbb{Z}$，存在[3] 唯一的数 $\lambda^{(j)}(z)$、唯一的有界振荡函数$h_z^{(j)}$以及唯一的测度 $\nu_z^{(j)}$，使得

$$\mathscr{L}_{\alpha,z}^{(j)}(h_z^{(j)}) = \lambda^{(j)}(z)h_z^{(j+1)} \text{ and } \mathscr{L}_{\alpha,z}^{(j)*}(\nu_z^{(j+1)}) = \lambda^{(j)}(z)\nu_z^{(j)} \text{ and } \nu_z^{(j)}(h_z^{(j)}) = \nu_z^{(j)}(\mathbb{1}) = 1. \tag{41}$$

注意到 $\lambda^{j,n}(z) \quad {}_{i\in[\![0} \quad {}_{,\,n-1]\!]} \quad (z)$。函数 λ_j、$h^{(j)}{}_{(\cdot)}$和 $\nu_\cdot^{(j)}$是解析的，λ_j、$h^{(j)}{}_{(\cdot)}$是非零数，$h_0^{(j)} = 1$、$\lambda^{(j)}(0) = 1$ 以及 $\nu_0^{(j)} = \mathbb{L}eb$，并且

$$\max\left(\sup_{z\in U} \left|\lambda^{(j)}(z)\right|, \sup_{z\in U} \left\|h_z^{(j)}\right\|, \sup_{z\in U} \left\|\nu_z^{(j)}\right\| \right) \leq C. \tag{42}$$

当 $z = t \in \mathbb{R}$ 时，存在 $c_1 > c_0 > 0$ 和 $R_1 > 0$，使得对于所有整数 j 以及所有 t,

$$c_0 \leq h_t^{(j)} \leq c_1 \text{ and } \lambda^{(j)}(t) > R_1. \tag{43}$$

为证明该引理，我们引入定义

$$\mathscr{C}_{a,\mathbb{C}}{}' := \{\mu \in OSC_\delta{}' : \forall f \in \mathscr{C}_{a,\mathbb{C}} \setminus \{0\}, |\mu(f)| > 0\}.$$

证明。 根据命题 6.10，我们从 [HK] 得到假设 4.1.2 第175页。根据引理6.4，将引理A.2.7 第276页应用于常值函数 1，我们从 [HK] 得到，对于 $M \geq \frac{\gamma a+1}{\gamma a}$，

$$\forall \mu \in \mathscr{C}_{a,\mathbb{C}}{}', \|\mu\| \leq M|\mu(\mathbb{1})|.$$

现在，考虑 $\kappa: \ \mu \in OSC_\delta{}' \mapsto \mu(1)$，我们从 [HK] 得到假设 4.1.1 第174页中的方程 (4.1.5)，其中 $\mathrm{k}\kappa\mathrm{k} = 1$。根据 $\mathscr{C}_{a\text{的定义},\ \mathbb{R}}$, $l: \ f \in OSC_\delta \mapsto \max\{a+1,\ \gamma a\}\int_{\Sigma_d} f(x)dx$满足

$$\forall f \in \mathscr{C}_{a,\mathbb{R}}, \|f\|_{\delta,\gamma} \leq |l(f)| \leq \max\{a+1, \gamma a\}\|f\|_{\delta,\gamma}.$$

[3]所有这些量都依赖于 α，但为了简化记号，我们不显式写出这种依赖关系。

因此，我们可以将第 274 页的引理 A.2.2 从 [HK] 应用于 l,

$$\forall f \in \mathscr{C}_{a,\mathbb{C}}, \|l\| \|f\|_{\delta,\gamma} \leq 2\sqrt{2}\max\{a+1, \gamma a\}|l(f)|.$$

因此， l 满足假设 4.1.1 的方程 (4.1.4)（见 [HK] 第174页），其中 $K = 2\sqrt{2}\max\{a+1, \gamma a\}$。应用 [HK], 第175页的定理 4.2.1，我们得到 $\lambda^{(j)}$，一个唯一的有界振荡函数 $h_\cdot^{(j)}$，以及引理中所述的唯一测度 $\nu_\cdot^{(j)}$，并得到 (41) 和 (43)。根据引理 6.5，利用 $(X, \mathrm{k\cdot k}) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$，可得存在 $C > 0$ 使得，

$$\sup_{z\in U} \left|\lambda^{(j)}(z)\right| \leq C.$$

对于 $\sup_{z\in U} \left\|h_z^{(j)}\right\|$，利用 $(X, \mathrm{k\cdot k}) = (OSC_\delta, \mathrm{k\cdot k}_{\delta,\gamma})$，以及对于 $\sup_{z\in U} \left\|\nu_z^{(j)}\right\|$，利用 $(X, \mathrm{k\cdot k}) = (OSC_\delta', |\mathrm{k\cdot k}|'_{\delta,\gamma})$，我们也有同样的结论。换言之，我们得到 (42)。□

引理 6.7. 对于任意整数 j, m

$$\lambda^{j,m\prime}(0) = \mathbb{E}(S_{j,m}).$$

回顾记号 $S_{j,n} = \sum_{i=0}^{n-1} X_{i+j}$。

证明。 设 $j, m \in \mathbb{N}$。那么，

$$\mathscr{L}_z^{j,m}(h_z^{(j)}) = \lambda^{j,m}(z) h_z^{(j+m)}.$$

我们得到，

$$\frac{d}{dz}\mathscr{L}_z^{j,m}(h_z^{(j)}) = \lambda^{j,m\prime}(z) h_z^{(j+m)} + \lambda^{j,m}(z) h_z^{(j+m)\prime}.$$

因此，

$$\mathscr{L}_z^{j,m}(S_{j,m} h_z^{(j)} + h_z^{(j)\prime}) = \lambda^{j,m\prime}(z) h_z^{(j+m)} + \lambda^{j,m}(z) h_z^{(j+m)\prime}$$

对于 $z = 0$,

$$\mathscr{L}_0^{j,m}(S_{j,m} h_0^{(j)} + h_0^{(j)\prime}) = \lambda^{j,m\prime}(0) h_0^{(j+m)} + h_0^{(j+m)\prime}.$$

因此，

$$\mathbb{E}(\mathscr{L}_0^{j,m}(S_{j,m} h_0^{(j)} + h_0^{(j)\prime})) = \lambda^{j,m\prime}(0)\mathbb{E}(h_0^{(j+m)}) + \mathbb{E}(h_0^{(j+m)\prime}) = \lambda^{j,m\prime}(0) + \mathbb{E}(h_0^{(j+m)\prime}).$$

Then,

$$\mathbb{E}(S_{j,m} h_0^{(j)}) + \mathbb{E}(h_0^{(j)\prime}) = \lambda^{j,m\prime}(0)\mathbb{E}(h_0^{(j+m)}) + \mathbb{E}(h_0^{(m)\prime}) = \lambda^{j,m\prime}(0) + \mathbb{E}(h_0^{(j+m)\prime}).$$

By (41),

$$\forall z \in D(0, \epsilon_0), \nu_z^{(j+m)}(h_z^{(j+m)}) = 1.$$

我们有

$$\nu_z^{(j+m)}(\mathscr{L}_z^{j,m}(h_z^{(j)})) = \lambda^{j,m}(z)\nu_z^{(j+m)}(h_z^{(j+m)}) = \lambda^{j,m}(z).$$

因此，对所有 $z \in D(0, \epsilon_0)$ $\frac{d}{dz}\nu_z^{(j+m)}(h_z^{(j+m)}) = 0$，于是

$$\nu_z^{(j+m)\prime}(h_z^{(j+m)}) + \nu_z^{(j+m)}\left(h_z^{(j+m)\prime}\right) = 0.$$

我们得到，

$$\nu_0^{(j+m)\prime}(h_0^{(j+m)}) + \nu_0\left(h_0^{(j+m)\prime}\right) = 0.$$

但是， $\nu_0^{(j+m)} = \mathbb{L}eb$ 且 $h_0^{(j+m)} = \mathbb{1}$。此外，由 (41) 可知，

$$\forall z \in D(0, \epsilon_0), \nu_z^{(j+m)\prime}(\mathbb{1}) = 0.$$

然后，

$$\nu_0^{(j+m)}\left(h_0^{(j+m)\prime}\right) = \nu_0^{(j+m)\prime}(\mathbb{1}) + \nu_0^{(j+m)}\left(h_0^{(j+m)\prime}\right) = 0$$

and,

$$\mathbb{E}(h_0^{(j+m)'}) = 0. \tag{44}$$

然后,

$$\lambda^{j,m\prime}(0) = \mathbb{E}(S_{j,m}).$$

□

沿用 [Haf], , 我们将在接下来的引理中联系 $S_{j,n}$ 的方差与准特征值 $\lambda^{(j)}(z)$。固定 $\epsilon_0 > 0$，使得圆盘 $D(0,\epsilon_0) \subset U$, $\lambda^{(j)}(0) = 1$，并且对于所有 $z \in D(0,\epsilon_0)$ $\lambda^{(j)}(z) \neq 0$，于是存在一个定义在 $D(0,\epsilon_0)$ 上的解析函数 Π_j，使得对于所有 $z \in D(0,\epsilon_0)$,

$$\lambda^{(j)}(z) = e^{\Pi_j(z)} \text{ and } \Pi_j(0) = 0. \tag{45}$$

注意 $\Pi_{j,m}(z) := \sum_{i=0}^{m-1} \Pi_{j+i}(z)$。于是,

$$\lambda^{j,m} = e^{\Pi_{j,m}}. \tag{46}$$

引理 6.8。存在 $R > 0$ 和 $\beta > 0$，使得对于所有 $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{z \in D(0,\beta)} |\Pi_{0,m}(z)| \leq Rm.$$

证明。由 (42)，存在 $K > 0$，使得对于所有 $j \in \mathbb{N}$, 对于所有 $z \in D(0,\epsilon_0)$,

$$\left|\lambda^{(j)}(z) - 1\right| \leq K|z|.$$

于是，存在 $R > 0$ 和 $\beta > 0$ 使得

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall z \in D(0,\epsilon_0), |\Pi_j(z)| \leq R|z|.$$

因此,

$$\forall z \in D(0,\epsilon_0), |\Pi_{0,m}(z)| \leq Rm.$$

□

引理 6.9. 对所有 f、$g \in OSC_\delta$以及所有 $i \in \mathbb{N}$

$$\left|Cov(f \circ \sigma^i, g)\right| \leq \|f\|_\infty |g|_\delta \delta^i.$$

证明. 设 $\bar{g} = \sum_{|w|=i} \mathbb{1}_{[w]} g_w$ 满足 $g_w = \frac{1}{d^i}\int_{[0,1[} g(wx)dx$。我们有 $Cov(f \circ \sigma^i, \bar{g}) = 0$。对于满足 $|w| = i$的每个 w，有 $x \in \Sigma_d$

$$|g(wx) - g_w| \leq osc(g,[w]).$$

于是,

$$\|g - \bar{g}\|_{\mathbb{L}^1([0,1[)} \leq \sum_{|w|=i} osc(g,[w]) \leq |g|_\delta \delta^i.$$

由 Hölder 不等式和三角不等式,

$$\left|Cov(f \circ \sigma^i, g)\right| \leq \|f\|_\infty |g|_\delta \delta^i.$$

□

下面的引理用于统一控制 $\Pi_{0,\ m}$ 在 0 附近的泰勒展开。

引理6.10。对于 $j,\ \ m \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^{j,m\prime\prime}(0) = \mathbb{E}(S_{j,m}^2) + \mathscr{R}_{j,m}$$

与 $\mathscr{R}_{j,\ m} = \mathbb{E}(h_0^{(j)\prime\prime} - h_0^{(j+m)\prime\prime}) + 2Cov(S_{j,\ m},\ \ h_0^{(j)\prime})$ $= O(1)$。

证明。令 $j,m\in\mathbb{N}$。仿照引理 6.7 的证明，可得对于 $z\in D(0,\epsilon_0)$

$$\lambda^{j,m\prime\prime}(z)h_z^{(j+m)}+2\lambda^{j,m\prime}(z)h_z^{(j+m)\prime}+\lambda_{j,m}(z)h_z^{(j+m)\prime\prime}=\mathscr{L}_{\alpha,z}^{j,m}(S_{j,m}^2h_z^{(j)}+2S_{j,m}h_z^{(j)\prime}+h_z^{(j)\prime\prime}).$$

因此，在 $z=0$ 处取期望可得

$$\lambda^{j,m\prime\prime}(0)+2\lambda^{j,m\prime}(0)\mathbb{E}(h_0^{(j+m)\prime})+\lambda^{j,m}(0)\mathbb{E}(h_0^{(j+m)\prime\prime})=\mathbb{E}(S_{j,m}^2)+2\mathbb{E}(S_{j,m}h_0^{(j)\prime})+\mathbb{E}(h_0^{(j)\prime\prime}).$$

由 44 可知，

$$\lambda^{j,m\prime\prime}(0)+\mathbb{E}(h_0^{(j+m)\prime\prime})=\mathbb{E}(S_{j,m}^2)+2Cov(S_{j,m}h_0^{(j)\prime})+\mathbb{E}(h_0^{(j)\prime\prime}).$$

因此，

$$\lambda^{j,m\prime\prime}(0)=\mathbb{E}(S_{j,m}^2)+\mathscr{R}_{j,m}.$$

另一方面，应用引理 6.6 和积分柯西公式 $\left\|h_0^{(j)\prime\prime}\right\|_{\delta,\gamma}\leq C$ 以及 $\left|\mathbb{E}(h_0^{(j)\prime\prime}-h_0^{(j+m)\prime\prime})\right|\leq\left\|h_0^{(j)\prime\prime}\right\|_\infty+\left\|h_0^{(j+m)\prime\prime}\right\|_\infty\leq 2C$，其中 C 不依赖于 j 和 m。最后，由引理 6.9 得到 $Cov(S_{j,m},h_0^{(j)\prime})=O(1)$。因此，

$$\mathscr{R}_{j,m}=O(1).$$

□

现在，我们需要利用S_m的均值和方差，对项 $\Pi_{0,m}(z)$ 进行二阶控制。

引理 6.11. 存在 $c_0>0$，使得对所有 $m\in\mathbb{N}$,

$$\forall z\in D(0,\beta),\left|\Pi_{0,m}(z)-z\Pi_{0,m}'(0)-\frac{z^2}{2}\Pi_{0,m}''(0)\right|\leq c_0m|z|^3.$$

证明. 由引理 6.8 可知，对所有 $m\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{z\in D(0,\beta)}|\Pi_{0,m}(z)|\leq Rm.$$

于是，对所有 $m\in\mathbb{N}^*$,

$$\sup_{z\in D(0,\beta)}\left|\frac{1}{m}\Pi_{0,m}(z)\right|\leq R.$$

由引理 6.5 可知，存在 $c_0>0$，使得对所有 $m\in\mathbb{N}^*$,

$$\forall z\in D(0,\beta),\left|\frac{1}{m}\Pi_{0,m}(z)-\frac{1}{m}z\Pi_{0,m}'(0)-\frac{1}{m}\frac{z^2}{2}\Pi_{0,m}''(0)\right|\leq c_0|z|^3.$$

因此，对所有 $m\in\mathbb{N}$,

$$\forall z\in D(0,\beta),\left|\Pi_{0,m}(z)-z\Pi_{0,m}'(0)-\frac{z^2}{2}\Pi_{0,m}''(0)\right|\leq c_0m|z|^3.$$

□

引理 6.12. 存在 $c_1>0$，使得对所有 $m\in\mathbb{N}$,

$$\forall z\in D(0,\beta),\left|\Pi_{0,m}(z)-z\mathbb{E}(S_m)-\frac{z^2}{2}\mathbb{V}(S_m)\right|\leq c_1(|z|^2+m|z|^3).$$

证明. $\lambda^{0,m\prime}(z) = \Pi'_{0,m}(z)e^{\Pi_{0,m}(z)}$。并且 $\lambda^{0,m\prime\prime}(z) = \Pi''_{0,m}(z)e^{\Pi_{0,m}(z)} + (\Pi'(z))^2 e^{\Pi_{0,m}(z)}$。于是，$\Pi'_{0,m}(0) = \lambda^{0,m\prime}(0)$ 且 $\Pi''_{0,m}(0) = \lambda^{0,m\prime\prime}(0) - \left(\lambda^{0,m\prime}(0)\right)^2$. 根据引理 6.7，$\Pi'_{0,m}(0) = \mathbb{E}(S_m)$。

由引理6.10，$\Pi''_{0,m}(0) = \mathbb{V}(S_m) + O(1)$。因此，存在 $\check{C} > 0$，使得对所有$m \in \mathbb{N}$，$\left|\Pi''_{0,m}(0) - \mathbb{V}(S_m)\right| \leq \check{C}$。由引理 6.11，

$$\forall z \in D(0,\beta), \left|\Pi_{0,m}(z) - z\mathbb{E}(S_m) - \frac{z^2}{2}\mathbb{V}(S_m)\right| \leq c_1(|z|^2 + m|z|^3).$$

□

这里，我们需要控制 $\mathscr{L}^{0,n}_z$ 对 1 的像，因为这一项会出现在局部极限定理的证明中。我们可以很好地控制 $h_z^{(n)}$，这里的目的是证明量 $\mathscr{L}^{0,n}_{\alpha,z}(1)$ 与 $h_z^{(n)}$ 相差不大。利用第 17 页的 (4。10) 或第 5 页的 (2。6) 以及 [Haf], , 我们得到下面这个引理，它是锥收缩的直接推论。

L引理 6.13. 存在常数 A_1 和 $\zeta \in (0,\ 1)$，使得对任意 $z \in U$ 和 $n \geq k_1$,

$$\left\| \frac{\mathscr{L}^{0,n}_{\alpha,z}(\mathbb{1})}{\lambda^{0,n}(z)} - h_z^{(n)} \right\|_{\delta,\gamma} \leq A_1\zeta^n$$

6.3. **中等偏差**。这里的结果将在下一节中用于处理 t_ℓ 与其期望值相差较大的情况。这些结果是谱扰动的推论。

命题6.11. 存在 $a > 0$，使得对于 $z \in U$,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \left|\lambda^{(j)}(z)\right| \leq 1 + a|z|^2.$$

证明。由引理 6.7，$\lambda^{(j)\prime}(0) = \mathbb{E}(X_j) = 0$，因为 X_j 是中心化的。

应用引理 6.6 和积分柯西公式可得，存在 $a > 0$，使得对所有 $z \in U$,

$$\left|\lambda^{(j)}(z)\right| \leq 1 + a|z|^2.$$

□

引理6.14. 存在 $C > 0$，使得对于 $t \in \mathbb{R}$，其中 $|t| < \epsilon_0$ 满足 ϵ_0，其定义见 (45)，且 m 为整数

$$\mathbb{E}(e^{tS_m}) \leq C\lambda^{0,m}(t).$$

证明。对于 $t \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$，由式 (43) 可得，由于 $\mathscr{L}^{0,m}_t$ 是一个正算子，

$$\mathbb{E}(e^{tS_m}) = \mathbb{E}(\mathscr{L}^{0,m}_t(\mathbb{1})) \leq \mathbb{E}\left(\mathscr{L}^{0,m}_t\left(\frac{1}{c_0}h_t^{(0)}\right)\right) = \frac{1}{c_0}\lambda^{0,m}(t)\mathbb{E}(h_t^{(m)}) \leq \frac{c_1}{c_0}\lambda^{0,m}(t).$$

□

于是，由命题6.11可得，只要 $|t| < \epsilon_0$ 和 $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(e^{tS_m}) \leq 2C(1 + at^2)^m. \tag{47}$$

命题 6.12. 对于任意满足 $m > 1/\epsilon_0^2$ 的 m，以及任意 α

$$\lambda\left(|S_m| \geq m^{\frac{3}{4}}\right) \leq 2Ce^{-m^{\frac{1}{4}}}.$$

证明. 对于 $\beta > 0$，结合 (47) 应用 Chernov不等式，可得

$$\lambda(S_m \geq \beta m) \leq e^{-t\beta m}(1+at^2)^m.$$

现在，取 $\beta = m^{-\frac{1}{4}}$和 $t = \frac{1}{\sqrt{m}}$,

$$\lambda(S_m \geq m^{\frac{3}{4}}) \leq Ce^{-m^{\frac{1}{4}}}. \tag{48}$$

同样地，对于 $t = -\frac{1}{\sqrt{m}}$ 我们得到

$$\lambda(S_m \leq -m^{\frac{3}{4}}) \leq Ce^{-m^{\frac{1}{4}}}. \tag{49}$$

□

6.4. 局部极限定理。 我们通过证明命题 6.1 来结束本节。下面的引理表明，从时刻 j 到 $n+j+i$ 的 Perron-Frobenius 算子复合是严格压缩的，只要 U_{n+j} 能够在某个深度为 i 的柱集上取 0 和 1 两个值。非周期性的这一思想已经出现在 Dolgopyat 的工作中 [Dol]。

固定 $\theta \in (\frac{d\delta}{d-1}, 1)$。

引理 6.15。 设 $g \in OSC_\delta$、j、t 和 n 使得 $\epsilon_0 \leq |t| \leq \pi$。

若 $a_{\ell,\ n+j} \neq 0$ 且存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $\alpha_{k+n+j+i} = 1$，则有

$$\left\| \mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n+i}(g) \right\|_\infty \leq \left(1 - \frac{\chi_0}{d^{n+i}}\right) \|g\|_\infty + \frac{\theta^{n-1}}{d^{n+i}} |g|_\delta. \tag{50}$$

其中 $\chi_0 = 2 -$ 最大值$\{|1+e^{it}| :\ \epsilon_0 \leq |t| \leq \pi\} > 0$。

证明。令 $g \in OSC_\delta$。令 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 $t \in]-\pi,\ \pi]$，使得 $\epsilon_0 \leq |t| \leq \pi$。注意，$G_{n-1}$ 是满足 $|a| = n-1$ 且对所有 $r \in [\![1,\ n-1]\!]$，$a_r + \frac{q_{l,\ j+r}}{d^r} \not\equiv d-1[d]$的词 a 的集合。我~~们断言~~存在一个词 $a \in G_{n-1}$，使得

$$osc(g, [a]) < \theta^{n-1}|g|_\delta.$$

否则，

$$\forall a \in G_{n-1}, osc(g,[a]) \geq \theta^{n-1}|g|_\delta.$$

这将推出，由于 $\#G_n = (d-1)^{n-1}$,

$$|g|_\delta \geq \delta^{-n+1} \sum_{|a|=n-1} d^{-n+1} osc(g,[a]) \geq \delta^{-n+1} d^{-n+1} \#G_{n-1} \theta^{n-1} |g|_\delta > |g|_\delta,$$

矛盾。因此我们固定这样的 $a \in G_{n-1}$。

我们选择 b, b' 和 c，使得

$$|b| = |b'| = 1 \ and \ |c| = i$$

验证

$$b + \frac{q_{l,j+n}}{d^n} \equiv 0[d] \ and \ S^{\frac{q_{l,j+n}}{d^n}}(b'c\cdot) \subset [(d-1)^i(d-2)].$$

Then

$$S_n(ab'cx) = S_{n-1}(ab'cx) + sgn(a_{\ell,j+n}) \ and \ S_{n-1}(ab'cx) = S_{n-1}(abcx) = S_n(abcx)$$

因为

$$\varepsilon_k^{\sigma^{j+n}\alpha}(S^{\frac{q_{l,j+n}}{d^n}}(b'cx)) = \alpha_{k+n+j+i} = 1 \ and \ \varepsilon_k^{\sigma^{j+n}\alpha}(S^{\frac{q_{l,j+n}}{d^n}}(bcx)) = 0.$$

因此

$$\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n}(g)(cx) = \frac{1}{d^n}\left(\sum_{|\omega|=n \ and \ \omega \neq ab \ and \ \omega \neq ab'} e^{itS_n(\omega cx)} g(\omega cx) \right) + \frac{1}{d^n}\left(e^{itS_n(ab'cx)} g(ab'cx) + e^{itS_n(abcx)} g(abcx) \right).$$

我们知道 $\epsilon_0 \le |t| \le \pi$，于是，由于 $osc(g,[a]) \le |g|_\delta \theta^{n-1}$

$$\left|\frac{1}{d^n}\left(e^{itS_n(ab'cx)}g(ab'cx) + e^{itS_n(abcx)}g(abcx)\right)\right| \le \frac{1}{d^n}\left((2-\chi_0)|g(ab'cx)| + |g|_\delta\theta^{n-1}\right) \le \frac{1}{d^n}\left((2-\chi_0)\|g\|_\infty + |g|_\delta\theta^{n-1}\right).$$

我们得到

$$\left|\mathscr{L}^{j,n}_{\alpha,it}(g)(cx)\right| \le \left(1-\frac{\chi_0}{d^n}\right)\|g\|_\infty + \frac{|g|_\delta}{d^n}\theta^{n-1}. \tag{51}$$

然后，

$$\begin{aligned}\left|\mathscr{L}^{j,n+i}_{\alpha,it}(g)(x)\right| &= \left|\tfrac{1}{d^i}\textstyle\sum_{|\omega|=i} e^{itS_{n+j,i}(\omega x)}\mathscr{L}^{j,n}_{\alpha,it}(g)(\omega x)\right| \\ &= \left|\tfrac{1}{d^i}e^{itS_{n+j,i}(cx)}\mathscr{L}^{j,n}_{\alpha,it}(g)(cx) + \tfrac{1}{d^i}\textstyle\sum_{|\omega|=i \text{ and } \omega\neq c} e^{itS_{n+j,i}(\omega x)}\mathscr{L}^{j,n}_{\alpha,it}(g)(\omega x)\right| \\ &\le \tfrac{1}{d^i}(1-\tfrac{\chi_0}{d^n})\|g\|_\infty + \tfrac{\theta^{n-1}}{d^{n+i}}|g|_\delta + (1-\tfrac{1}{d^i})\|g\|_\infty \text{ by (51) and (34)} \\ &= \left(1-\tfrac{\chi_0}{d^{n+i}}\right)\|g\|_\infty + \tfrac{\theta^{n-1}}{d^{n+i}}|g|_\delta.\end{aligned}$$

□

我们现在的目标是确保这些关于压缩的条件频繁出现。令k_1 为一个正整数，使得 $C_0 > 2^{1-k_1}$。我们回顾一下， C_0 在第 5.1 小节开头处定义。

定义 6.5。令

$$\Gamma_m(\alpha) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{[2^{k_1}]}(\sigma^j\alpha).$$

根据该定义，我们立即得到：

$$\mathbb{E}(\Gamma_m) = 2^{-k_1}m \tag{52}$$

定义 6.6。令

$$M_m := \{\alpha \in \{1,2\}^{\mathbb{N}} : \Gamma_m(\alpha) \ge 2\mathbb{E}(\Gamma_m)\}. \tag{53}$$

引理 6.16。 存在 $v>0$ 和 $C_1>0$ 使得

$$\mathbb{P}(M_m) \le C_1 e^{-vm}.$$

证明。 由大偏差定理可得结论。 □

回顾 $m = \lfloor \log_d(n) \rfloor$，并且对于 $\alpha \notin W_{k,\,n}$，我们有 $b_\ell \ge C_0 m$ 对所有 $\ell \in I_n^\alpha$ 均成立。

引理6.17. 设 $c_1 = (C_0 - 2^{1-k_1}) > 0$。

$$\forall \alpha \notin M_m \cup W_{k,n}, \forall \ell \in I_n^\alpha,\ \#\{j \in [\![0,m]\!] : a_{\ell,j} \neq 0 \text{ and } \exists i \in [\![0,k_1]\!], \alpha_{k+j+i} = 1\} \ge c_1 m.$$

证明。 j 的集合的基数至少为 $b_\ell - \Gamma_m(\alpha) \ge (C_0 - 2^{1-k_1})m$。 □

设 K_0 是一个固定的整数，使得

$$\theta^{K_0-1}(c+\beta) < \frac{\chi_0}{2} \text{ and } \delta^{K_0} + \frac{\beta}{c} < \frac{1}{2} \tag{54}$$

其中 $c = \frac{8}{d(1-\delta)}$。

引理6.18。 我们有，对于满足 $n \ge K_0$ 的 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\frac{1}{2} \le \Delta_n < 1$，使得对于$j,i,q \in \mathbb{N}$，$t \in]-\pi,\pi]$，满足 $a_{\ell,n+j} \neq 0, \alpha_{k+n+j+i} = 1$, $\epsilon_0 \le |t| \le \pi$和 $i \le k_1$,

$$\left\|\mathscr{L}^{j,n+i+q}_{\alpha,it}(g)\right\|_{\delta,\gamma} \le \Delta_n \|g\|_{\delta,\gamma}$$

其中 $\gamma = \frac{d}{(1-\delta)\ 4}$。

证明。 设 $c = \frac{8}{d(1-\delta)}$ 且 $t \in]-\pi, \pi]$ 满足 $\epsilon_0 \le |t| \le \pi$。首先，假设 $|g|_\delta \ge c\mathbf{k}g\mathbf{k}_\infty$。根据 (35),

$$\left|\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n}(g)\right|_\delta \le \delta^n |g|_\delta + \beta \|g\|_\infty.$$

我们知道 $n \ge K_0$，因此利用 (34) 和 (54)，得到

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n}(g)\right\|_{\delta,\gamma} &\le \max\{\|g\|_\infty, \gamma(\delta^n + \tfrac{\beta}{c})|g|_\delta\} \\ &\le \max\{\tfrac{1}{c}, \gamma(\delta^n + \tfrac{\beta}{c})\}|g|_\delta \\ &\le \max\{\tfrac{1}{c\gamma}, \delta^n + \tfrac{\beta}{c}\}\|g\|_{\delta,\gamma} \\ &= \max\{\tfrac{1}{2}, \delta^n + \tfrac{\beta}{c}\}\|g\|_{\delta,\gamma} \\ &\le \tfrac{1}{2}\|g\|_{\delta,\gamma}.\end{aligned}$$

于是,

$$\left\|\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n}(g)\right\|_{\delta,\gamma} \le \frac{1}{2}\|g\|_{\delta,\gamma}. \tag{55}$$

我们有 $\delta < 1$，于是 $\frac{3\delta+1}{4} < 1$。令 $\Delta = \frac{1}{2}$，得到

$$\left\|\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n}(g)\right\|_{\delta,\gamma} \le \Delta\|g\|_{\delta,\gamma}.$$

现在，假设 $|g|_\delta \le c\mathbf{k}g\mathbf{k}_\infty$。那么，由 (50)、(34) 和 (35)，对于 $q \in \mathbb{N}$， $\epsilon_0 \le |t| \le \pi$

$$\left\|\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n+i+q}(g)\right\|_\infty \le \left(1 - \frac{\chi_0}{d^{n+i}}\right)\left\|\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,q}(g)\right\|_\infty + \frac{\theta^{n-1}}{d^{n+i}}\left|\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,q}(g)\right|_\delta \le \left(1 - \frac{\chi_0}{d^{n+i}} + \frac{\theta^{n-1}}{d^{n+i}}(\delta^q c + \beta)\right)\|g\|_\infty.$$

我们知道 $n \ge K_0$ 和 $i \le k_1$，于是

$$\left\|\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n+i+q}(g)\right\|_\infty \le \left(1 - \frac{\chi_0}{2d^{n+k_1}}\right)\|g\|_\infty.$$

因此,

$$\left\|\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n+i}(g)\right\|_{\delta,\gamma} \le \max\{1 - \tfrac{\chi_0}{2d^{n+k_1}}, \gamma(c\delta^{K_0} + \beta)\}\|g\|_{\delta,\gamma} \ .$$

我们有 $\Delta_n = \max\{1 - \frac{\chi_0}{2d^{n+k_1}}, \gamma(c\delta^{K_0} + \beta)\} \in (\frac{1}{2}, 1)$。于是,

$$\left\|\mathscr{L}_{\alpha,it}^{j,n+i+q}(g)\right\|_{\delta,\gamma} \le \Delta_n\|g\|_{\delta,\gamma}.$$

□

注意，对于 $\alpha \notin M_m, \ell \in P_n^\alpha$集合 $Y_\ell = \{j \in [\![0, m]\!] : a_{\ell,j} \ne 0, \exists i \in [\![0, k_1]\!], \alpha_{k+j+i} = 1\}$。设$y_1 < y_2 < \cdots < y_p$ 为 Y_ℓ的依次排列的元素，其中 p是 Y_ℓ的基数。我们考虑序列 $m_s = y_{(2K_0+k_1)s}$，其中 $s \in [\![1, \lfloor \frac{p}{2K_0+k_1} \rfloor]\!]$，以及一个序列 (i_s)， $0 \le i_s \le k_1$ 使得$\alpha_{k+m_s+i_s} = 1$。令 $N_s = m_s - K_0, N_0 = 0$ 且 $n_s = N_s - N_{s-1}$。

现在，固定 $g \in OSC_\delta$，并定义 $G_s^{(t)}$为

$$G_s^{(t)} = \mathscr{L}_{it}^{0,N_s}(g).$$

对于 $s = 1$、.....、 $\lfloor \frac{p}{2K_0+k_1} \rfloor$。

命题 6.13。 存在 $\frac{1}{2} < \Delta < 1$，使得对于所有 $s \in [\![1、 \lfloor \frac{p}{2K_0+k_1} \rfloor - 1]\!]$ 以及所有满足 $\epsilon_0 \le |t| \le \pi$ 的 $t \in]-\pi、 \pi]$，

$$\left\|G_s^{(t)}\right\|_{\delta,\gamma} \le \Delta^{s-1}\|g\|_{\delta,\gamma}. \tag{56}$$

证明。 我们应用引理6.18，取 $n = y_{K_0} \geq K_0$、 $j = 0$、 $i < k_1$ 使得 $\alpha_{k+n+i} = 1$ 和 $q = y_{2K_0+k_1} - K_0 - y_{K_0} - i \geq 0$，得到

$$\left\|G_1^{(t)}\right\|_{\delta,\gamma} \leq \Delta_n \|g\|_{\delta,\gamma} \leq \|g\|_{\delta,\gamma}.$$

设 $s = 1$、.....、 $\lfloor \frac{p}{2K_0+k_1} \rfloor - 1$。现在只需证明，对于某个 $\Delta < 1$

$$\left\|G_{s+1}^{(t)}\right\|_{\delta,\gamma} \leq \Delta \left\|G_s^{(t)}\right\|_{\delta,\gamma}$$

，结论即可通过归纳法得到。我们有

$$G_{s+1}^{(t)} = \mathscr{L}_{it}^{N_s,n_s}\left(\mathscr{L}_{it}^{0,N_s}(g)\right) = \mathscr{L}_{it}^{N_s,n_s}\left(G_s^{(t)}\right).$$

应用引理6.18，取 $j = N_s$、 $n = K_0$、 $i = i_s$ 和 $q = n_s - K_0 - i_s$，我们得到

$$\left\|G_{s+1}^{(t)}\right\|_{\delta,\gamma} \leq \Delta_{K_0} \left\|G_s^{(t)}\right\|_{\delta,\gamma}.$$

□

现在，我们可以证明本节的主要结果。

证明。 命题 6.1 的证明

取 m， $n \in \mathbb{N}$ 使得 $m = \lfloor \log_d(n) \rfloor$， $\alpha \notin W_{k,\ n}$ 且 $\ell \in I_n^{\alpha}$。我们考虑

$$\lambda_\alpha(\{S_m = n - \mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime})\}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(n-\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime}))}\mathbb{E}(e^{itS_m})dt$$

由富比尼定理可得。我们得到

$$\mathbb{E}(e^{itS_m}) = \mathbb{E}\left(\mathscr{L}_{\alpha,it}^{0,m}(\mathbb{1})\right).$$

由富比尼定理，

$$\lambda(\{S_m = n - \mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime})\}) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}\left(\int_{[-\pi,\pi]} e^{-it(n-\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime}))}\mathscr{L}_{\alpha,it}^{0,m}(\mathbb{1})dt\right).$$

由于 $\alpha \notin M_m$，我们有 $p \geq c_2 m$，其中 $c_2 > 0$。然后，由引理6.17和（56），对于 $\epsilon_0 \leq |t| \leq \pi$，

$$\left|\mathbb{E}\left(\mathscr{L}_{\alpha,it}^{0,m}(\mathbb{1})\right)\right| \leq C_2\Delta^{c_1 m} \text{ with } c_1 > 0,\ C_2 > 0,\ 0 < \Delta < 1.$$

这意味着，

$$\mathbb{E}\left(\int_{[-\pi,\pi]} e^{-it(n-\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime}))}\mathscr{L}_{\alpha,it}^{0,m}(\mathbb{1})dt\right) = \mathbb{E}\left(\int_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]} e^{-it(n-\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime}))}\mathscr{L}_{\alpha,it}^{0,m}(\mathbb{1})dt\right) + O(\Delta^{c_1 m}).$$

现在，我们取 $-\epsilon_0 < t < \epsilon_0$。由引理6.13，当 $m \in \mathbb{N}$ 足够大时，可得

$$\mathscr{L}_{it}^{0,m}(\mathbb{1}) = \lambda^{0,m}(it)(h_m(it) + O(\zeta^m)) \text{ with } 0 < \zeta < 1.$$

根据式 (46)， $\lambda^{0,\ m}(it) = e^{\Pi_{0,\ m}(it)}$ 并且根据引理 6.6， $\Pi_{0,\ m}$ 在 $D(0,\ \epsilon_0)$ 上是解析的。由引理 6.12 可知，对于所有的 $z \in D(0,\ \epsilon_0)$，

$$\Pi_{0,m}(z) = z\mathbb{E}(S_m) + \frac{z^2}{2}\mathbb{V}(S_m) + O(|z|^2 + m|z|^3) = \frac{z^2}{2}\mathbb{V}(S_m) + O(|z|^2 + m|z|^3).$$

根据引理 6.6，对于所有的 $z \in D(0,\ \epsilon_0)$，

$$h_m(z) = 1 + O(|z|).$$

于是，我们得到

$$\mathscr{L}_{\alpha,it}^{0,m}(\mathbb{1}) = e^{-\frac{t^2}{2}\mathbb{V}(S_m)}(1 + O(|t|^2 + m|t|^3))(1 + O(|t|) + O(\zeta^m)).$$

令 $\psi_m\colon\ t\in\mathbb{R}\mapsto e^{-it(n-\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha}{}'))}e^{-\frac{t^2}{2}\mathbb{V}(S_m)}$。因此，

$$\int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0}|t\psi_m(t)|dt\le\int_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}|t|e^{-\frac{t^2}{2}\mathbb{V}(S_m)}dt=\frac{1}{\sigma_{0,m}^2}\int_{[-\sigma_{0,m}\epsilon_0,\sigma_{0,m}\epsilon_0]}|t|e^{-\frac{t^2}{2}}dt\le\frac{2\sqrt{2\pi}}{\sigma_{0,m}^2}.$$

And

$$\int_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}m\big|t^3\psi_m(t)\big|dt\le\frac{m}{\sigma_{0,m}^4}\mathbb{E}(|\mathscr{N}|^3)\text{ with }\mathscr{N}\text{ the normal distribution.}$$

回想一下，$\alpha\notin W_n$。因此，由命题 6.4 可得，$\sigma_{0,m}\ge C_2\sqrt{m}$. 因此，

$$\int_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}m\big|t^3\psi_m(t)\big|dt=O\left(\frac{1}{m}\right).$$

用同样的证明方法可得，

$$\int_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}m\big|t^4\psi_m(t)\big|dt=O\left(\frac{1}{m}\right)$$

and

$$\int_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}\big|t^2\psi_m(t)\big|dt=O\left(\frac{1}{m}\right).$$

于是，

$$\int_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}e^{-it(n-\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha}{}'))}\mathscr{L}_{\alpha,it}^{0,m}(\mathbb{1})dt=\int_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}e^{it(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha}{}')-n)}e^{-\frac{t^2}{2}\mathbb{V}(S_m)}dt+O\left(\frac{1}{m}\right).$$

此外，

$$\int_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}e^{it(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha}{}')-n)}e^{-\frac{t^2}{2}\mathbb{V}(S_m)}dt=\frac{1}{\sigma_{0,m}}\int_{[-\epsilon_0\sigma_{0,m},\epsilon_0\sigma_{0,m}]}e^{it\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha}{}')-n)}{\sigma_{0,m}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

根据正态分布的性质，

$$\frac{1}{\sigma_{0,m}}\int_{[-\epsilon_0\sigma_{0,m},\epsilon_0\sigma_{0,m}]}e^{it\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha}{}')-n)}{\sigma_{0,m}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_{0,m}}e^{-\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha}{}')-n)^2}{2\sigma_{0,m}^2}}+O\left(\frac{e^{-\varepsilon_0^2\sigma_{0,m}^2}}{2\sigma_{0,m}}\right).$$

最后，

$$\int_{[-\epsilon_0,\epsilon_0]}e^{-itn}\mathscr{L}_{\alpha,it}^{0,m}(\mathbb{1})dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_{0,m}}e^{-\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha}{}')-n)^2}{2\sigma_{0,m}^2}}+O\left(\frac{1}{m}\right).$$

于是，

$$\lambda(\{S_m=n-\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha}{}')\})=\frac{1}{\sigma_{0,m}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha}{}')-n)^2}{2\sigma_{0,m}^2}}+O\left(\frac{1}{m}\right).$$

□

7. 查孔变换的开普勒剪切

我们汇总先前的结果，以证明主要定理，即查孔变换的开普勒剪切。

首先，我们证明，对于不属于例外集的时刻，A_k 的自相关表现得如同在强混合系统中一样。记 $m=\lfloor\log_d(n)\rfloor$。

˘**命题 7.1**。对于$\alpha\notin W_{k,\ n}\cup M_m\cup W_{k,\ n}$，

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}}d_\ell^{\alpha}{}'(n)=\lambda_\alpha(A_k)+O\left(\frac{\sqrt{\log_d(\log_d(n))}}{(\log_d(n))^{\frac{1}{4}}}\right).$$

我们在第 7.2 小节证明这一点，因为首先需要控制方差。

7.1. 方差等价性。 本小节旨在证明，当 ℓ 遍历适当的 α时， t_ℓ^α的方差彼此接近。

命题 7.2. 对于 $\ell > \ell' \in I_n^\alpha$，将 $\ell - \ell' = \sum_{j=0}^m u_j d^j$ 写成平衡的 $d-adic$ 分解，

$$\forall s \geq \log_d(C_2 m) + 1, u_s = 0.$$

证明。 假设

$$\exists s \geq \log_d(C_2 m) + 1, u_s \neq 0.$$

记 $R = \max\{s \geq \log_d(C_2 m) + 1 : u_s \neq 0\}$。由引理 4.1，得到 $|\ell - \ell'| \leq C_2 m$。我们知道 $|u_R| \geq 1$，因为 u_R 是一个整数。于是，由于 $d^R \geq dC_2 m$，

$$dC_2 m \left| 1 + \sum_{j=0}^{R-1} \frac{u_j}{u_R} d^{j-R} \right| \leq \left| u_R d^R \right| \left| \sum_{j=0}^{R} \frac{u_j}{u_R} d^{j-R} \right| = |\ell - \ell'| \leq C_2 m.$$

另一方面

$$\sum_{j=0}^{R-1} \left| \frac{u_j}{u_R} \right| d^{j-R} = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{R-1} \left| \frac{u_{R-1-j}}{u_R} \right| d^{-j} \leq \frac{d-1}{2d} \frac{1}{1-\frac{1}{d}} = \frac{1}{2}.$$

因此，对 $\left|1 + \sum_{j=0}^{R-1} \frac{u_j}{u_R} d^{j-R}\right|$应用反三角不等式，得到 $\frac{dC_2 m}{2} \leq C_2 m$，矛盾。□

下面的引理表明，进位数不会传播到低位数字之上。

引理 7.1。 对于 $\alpha \notin \check{W}_{k,\ n}$，对于 $\ell > \ell' \in I_n^\alpha$，有：

$$\forall j \geq \log_d(C_2 m) + 1, a_{\ell,j} = a_{\ell',j}.$$

证明。 令 $\alpha \notin \check{W}_{k,\ n}$ 和 $\ell > \ell' \in I_n^\alpha$。根据命题 7.2，我们可以设 $\xi = \ell - \ell' = \sum_{j=0}^{p_n} u_j d^j$。因此，

$$\ell = \ell' + \xi = \sum_{j=0}^{p_n} (a_{\ell',j} + u_j) d^j + \sum_{j \geq p_n + 1} a_{\ell',j} d^j.$$

˘根据W_{k}的定义，n，

$$\exists i \in [\![p_n + 1, q_n]\!], a_{\ell',i} < \frac{d-1}{2}.$$

于是，

$$\ell = \sum_{j=0}^{p_n} (a_{\ell',j} + u_j) d^j + \sum_{j=p_n+1}^{i-1} (a_{\ell',j}) d^j + a_{\ell',i} d^i + \sum_{j \geq i+1} a_{\ell',j} d^j.$$

因此，

$$\sum_{j=0}^{p_n} (a_{\ell',j} + u_j) d^j + \sum_{j=p_n+1}^{i-1} a_{\ell',j} d^j + a_{\ell',i} d^i \leq d^i - 1 + d^i \left(\frac{d-1}{2} - 1 \right) = \frac{d-1}{2} d^i - 1.$$

因此，

$$\forall j \geq i, a_{\ell,j} = a_{\ell',j}.$$

□

˘ 于是，对于 $\alpha \notin W_{k,n} \cup W_{k,n}$，

$$\left\| t_\ell^{\alpha\prime} - t_{\ell'}^{\alpha\prime} \right\|_\infty = O(2 \log_d(C_2 m)). \tag{57}$$

我们注意到 $\sigma_\ell^\alpha = \overline{\sqrt{\mathbb{V}(t_{\ell\prime}^\alpha)}}$。下一个引理表明，这些标准差是等价的 .

引理 7.2。对于 $\alpha \notin W_{k,n} \cup \check{W}_{k,n}$ 和 $\ell, \ell' \in I_n^\alpha$,

$$\frac{\sigma_\ell^\alpha}{\sigma_{\ell'}^\alpha} = 1 + O\left(\frac{\log_d(C_2 m)}{\sqrt{m}}\right).$$

证明。设 $\alpha \notin W_{k,n} \cup \check{W}_{k,n}$ 并设 $\ell, \ell' \in I_n^\alpha$。

于是，$\mathbb{V}(t_\ell^{\alpha\prime}) = \mathbb{V}(t_\ell^{\alpha\prime} - t_{\ell'}^\alpha) + 2Cov(t_\ell^{\alpha\prime} - t_{\ell'}^\alpha, t_{\ell'}^\alpha) + \mathbb{V}(t_{\ell'}^\alpha)$。

由命题 6.4，对某个常数 C',

$$\mathbb{V}(t_{\ell'}^{\alpha\prime}) \geq C' \frac{d-2}{(d-1)^2} b_{\ell'} \geq C\left(\frac{d-2}{(d-1)^2}\right) m.$$

由 (57) 和柯西-施瓦茨不等式可得,

$$\left|\frac{\sigma_\ell^\alpha}{\sigma_{\ell'}^\alpha} - 1\right| \leq \left(\frac{\sqrt{C_1 \log_d^2(C_2 m) + C_3 \log_d(C_2 m)}}{\sqrt{C\left(\frac{d-2}{(d-1)^2}\right) m}}\right).$$

因此,

$$\frac{\sigma_\ell^\alpha}{\sigma_{\ell'}^\alpha} = 1 + O\left(\frac{\log_d(m)}{\sqrt{m}}\right).$$

□

7.2. 自相关的最终估计。为控制命题6.1中改变标准差 σ_ℓ^α 时产生的误差，我们使用下面的引理。

引理 7.3。对于 $A > 0$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}\setminus\{-1\})^{\mathbb{N}}$, $(\xi_{\ell,\ n})_{(\ell,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \in \{0,\ 1\}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$以及 $(\varepsilon_n^{(\ell)})_{(n,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$，使得对于所有 $\ell \in \mathbb{Z}$、所有 $n \in \mathbb{N}$、$\left|\varepsilon_n^{(\ell)}\right| \leq |\varepsilon_n|$，都有

$$\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{\xi_{n,\ell}}{\left(1+\varepsilon_n^{(\ell)}\right)\beta_n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ell A-n)^2}{2(1+\varepsilon_n)^2\beta_n^2}} - \frac{\xi_{n,\ell}}{\sqrt{2\pi}\beta_n} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(\ell A-n)^2}{2\beta_n^2}}\right| \leq \frac{|\varepsilon_n|}{A}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi e}} + \frac{1}{\beta_n}\right).$$

证明。我们知道，$\forall x \in \mathbb{R}$，$\frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$。对于二阶导数，我们有

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left((x > 1 \text{ or } x < -1) \iff \frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0\right).$$

导数在 $\pm\infty$ 处为零，即 $(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$。于是,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}. \tag{58}$$

我们还知道 $\frac{d^3}{dx^3} e^{-\frac{x^2}{2}} = x(3-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$，并且可以得到

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{x^2}{2}}\right| \leq 1. \tag{59}$$

考虑 $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\xi_{n,\ell}}{(1+\varepsilon_n^{(\ell)})\beta_n} e^{-\frac{x^2}{2(1+\varepsilon_n^{(\ell)})^2\beta_n^2}} - \frac{\xi_{n,\ell}}{\beta_n} e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}} \right| &\leq \left| \frac{1}{(1+\varepsilon_n^{(\ell)})\beta_n} e^{-\frac{x^2}{2(1+\varepsilon_n^{(\ell)})^2\beta_n^2}} - \frac{1}{\beta_n} e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}} \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{(1+\varepsilon_n^{(\ell)})\beta_n} e^{-\frac{x^2}{2(1+\varepsilon_n^{(\ell)})^2\beta_n^2}} - \frac{1}{(1+\varepsilon_n^{(\ell)})\beta_n} e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}} \right| \\
&+ \left| \frac{1}{(1+\varepsilon_n^{(\ell)})\beta_n} e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}} - \frac{1}{\beta_n} e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}} \right| \\
&\leq \frac{1}{(1+\varepsilon_n^{(\ell)})^2\beta_n^2\sqrt{e}} |x| \left| \varepsilon_n^{(\ell)} \right| \\
&+ \left| \frac{1}{(1+\varepsilon_n^{(\ell)})\beta_n} e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}} - \frac{1}{\beta_n} e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}} \right| \ by\ (58) \\
&\leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}}}{(1+\varepsilon_n^{(\ell)})^2\beta_n^2\sqrt{e}} |x| \left| \varepsilon_n^{(\ell)} \right| + \frac{e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}}}{\beta_n \left| 1+\varepsilon_n^{(\ell)} \right|} \left| \varepsilon_n^{(\ell)} \right| \\
&\leq \frac{\left| \varepsilon_n^{(\ell)} \right| e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}}}{\beta_n \left| 1+\varepsilon_n^{(\ell)} \right|} \left(\frac{|x|}{\beta_n \left| 1+\varepsilon_n^{(\ell)} \right| \sqrt{e}} + 1 \right) \\
&\leq \frac{\left| \varepsilon_n^{(\ell)} \right| e^{-\frac{x^2}{2\beta_n^2}}}{\beta_n (1+\varepsilon_n^{(\ell)})} \left(\frac{|x|}{\beta_n (1+\varepsilon_n^{(\ell)}) \sqrt{e}} + 1 \right) \ because\ \varepsilon_n^{(\ell)} > 0.
\end{aligned}$$

因此，根据级数-积分比较和 (59),

$$\left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{\xi_{n,\ell}}{(1+\varepsilon_n)\beta_n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ell A-n)^2}{2(1+\varepsilon_n)^2\beta_n^2}} - \frac{\xi_{n,\ell}}{\sqrt{2\pi}\beta_n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(\ell A-n)^2}{2\beta_n^2}} \right| \leq 2\frac{|\varepsilon_n|}{A} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi e}} + \frac{1}{\beta_n} \right).$$

□

现在我们可以证明自相关估计了。

命题 *7.1* 的证明。考虑 $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} d_\ell^\alpha(n) = \sum_{\ell \in P_n^\alpha} d_\ell^\alpha(n)$。我们回顾一下，$S_m = t_{\ell'}^\alpha - \mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime})$。我们可以将集合 I_n^α 分成两部分 A_n^α 和 B_n^α，如下所示

$$A_n^\alpha := \{\ell \in I_n^\alpha : \left| \mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime}) - n \right| \leq m^{\frac{3}{4}}\} \ and\ B_n^\alpha := (A_n^\alpha)^c \cap I_n^\alpha.$$

因此,

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}} d_\ell^\alpha(n) = \sum_{\ell \in A_n^\alpha} d_\ell^{\alpha\prime}(n) + \sum_{\ell \in B_n^\alpha} d_\ell^{\alpha\prime}(n).$$

注意，若 $t_{\ell'}^\alpha(x) = n$ 且 $\left| \mathbb{E}(t_{\ell'}^\alpha) - n \right| > m^{\frac{3}{4}}$，则 $\left| \mathbb{E}(t_{\ell'}^\alpha) - t_{\ell'}^\alpha(x) \right| > m^{\frac{3}{4}}$。因此，根据命题 6.12,

$$\sum_{\ell \in B_n^\alpha} d_\ell^{\alpha\prime}(n) \leq 2C \# I_n^\alpha e^{-m^{\frac{1}{4}}}, C > 0.$$

由引理 4.1,

$$\# I_n^\alpha \leq C_4 m, C_4 > 0.$$

于是,

$$\sum_{\ell \in B_n^\alpha} d_\ell^{\alpha\prime}(n) \leq 2CC_4 m e^{-m^{\frac{1}{4}}}.$$

令 $\ell_{min}^{(n)}$ 为 I_n^α 的最小值，并设 $\hat{\sigma}_n := \sigma_{\ell_{min}^{(n)}}$。根据 Kac引理，$\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime}) = \ell d^k(\alpha+1)$，因此我们有 $\ell \in I_n^\alpha \Leftrightarrow \left| \mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime}) - n \right| \leq C_2 m$，并且由（24）可知，$I_n^\alpha$ 是一个

区间。因此，

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_n\sqrt{2\pi}}\sum_{\ell\notin I_n^\alpha} e^{-\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime})-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_n\sqrt{2\pi}}\sum_{\left|\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime})-n\right|>C_2 m} e^{-\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime})-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}} \le \frac{e^{-m^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{2m\pi}}\sqrt{2}$$

由级数的收敛性可得，

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_n\sqrt{2\pi}}\sum_{\ell\notin I_n^\alpha} e^{-\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^{\alpha\prime})-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}} = O\left(\frac{e^{-\frac{m}{4}}}{\sqrt{m}}\right). \tag{60}$$

根据命题 6.1，并对 $\sigma(t_\ell^\alpha)$ 应用引理 7.2，对 $\sum_{\ell\notin I_n^\alpha}\frac{1}{\sigma_\ell^\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\mathbb{E}(t_\ell^\alpha)-n)^2}{2(\sigma_\ell^\alpha)^2}}$ 应用引理 7.3，我们得到

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}} d_\ell^{\alpha\prime}(n) = \frac{1}{\hat{\sigma}_n\sqrt{2\pi}}\sum_{\ell\in I_n^\alpha} e^{-\frac{(\ell d^k(\alpha+1)-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}} + O\left(\frac{\sqrt{\log_d(m)}}{m^{\frac{1}{4}}}\right).$$

因此，由 (60)，

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}} d_\ell^{\alpha\prime}(n) = \frac{1}{\hat{\sigma}_n\sqrt{2\pi}}\sum_{\ell\in\mathbb{N}} e^{-\frac{(\ell d^k(\alpha+1)-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}} + O\left(\frac{\sqrt{\log_d(m)}}{m^{\frac{1}{4}}}\right).$$

仅在下一个等式中，我们令 $A = d^k(\alpha+1)$。由级数与积分的比较，

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(Ax-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}}dx - \int_{\lfloor\frac{n}{A}\rfloor-1}^{\lfloor\frac{n}{A}\rfloor+1} e^{-\frac{(Ax-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}}dx + e^{-\frac{n^2}{2\hat{\sigma}_n^2}} \le \sum_{\ell\in\mathbb{N}} e^{-\frac{(\ell A-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}}, \tag{61}$$

and,

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}} e^{-\frac{(\ell A-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}} \le \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(Ax-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}}dx - \int_{\lfloor\frac{n}{A}\rfloor-1}^{\lfloor\frac{n}{A}\rfloor+1} e^{-\frac{(Ax-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}}dx + e^{-\frac{(A(\lfloor\frac{n}{A}\rfloor+1)-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}} + e^{-\frac{(A\lfloor\frac{n}{A}\rfloor-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}}. \tag{62}$$

于是，由 (61) 和 (62)，

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_n\sqrt{2\pi}}\sum_{\ell\in\mathbb{N}} e^{-\frac{(\ell d^k(\alpha+1)-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_n\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(d^k(\alpha+1)x-n)^2}{2\hat{\sigma}_n^2}}dx + O\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_n}\right).$$

最后，通过变量替换，

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}} d_\ell^{\alpha\prime}(n) = \frac{1}{d^k(\alpha+1)} + O\left(\frac{\sqrt{\log_d(m)}}{m^{\frac{1}{4}}}\right) = \lambda_\alpha(A_k) + O\left(\frac{\sqrt{\log_d(\log_d(n))}}{(\log_d(n))^{\frac{1}{4}}}\right).$$

□

7.3. 的例外集的去同步化 A_k。本小节旨在证明与 A_k 相关的整个自相关的收敛性。

命题 7.3. 对所有 $B\in\mathscr{B}(\{1,2\}^{\mathbb{N}})$，

$$\int_\Omega \mathbb{1}_{(B\times A_k)\cap T^{-n}(B\times A_k)}d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\{1,2\}^{\mathbb{N}}} \mathbb{1}_B(\alpha)\left(\lambda_\alpha(A_k)\right)^2 d\mathscr{H}(\alpha).$$

证明。令 $B\in\mathscr{B}(\{1,2\}^{\mathbb{N}})$，并令 $k\in\mathbb{N}$。

考虑由 (27)、(28) 和 (53) 定义的例外集，令 $Z_{k,n} := W_{k,n}\cup\check{W}_{k,n}\cup M_{\lfloor\log_d(n)\rfloor}$。注

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(B\times A_k)\cap T^{-n}(B\times A_k)}) = \int_\Omega \mathbb{1}_{(B\times A_k)\cap T^{-n}(B\times A_k)}d\mathscr{H}\otimes(\mathbb{L}eb_\alpha)_{\alpha\in\{1,2\}^{\mathbb{N}}}.$$

我们有

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(B\times A_k)\cap T^{-n}(B\times A_k)}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{((Z_{k,n}\cap B)\times A_k)\cap T^{-n}(B\times A_k)}) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{((Z_{k,n}^c\cap B)\times A_k)\cap T^{-n}(B\times A_k)}).$$

Note that,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{((Z_{k,n}\cap B)\times A_k)\cap T^{-n}(B\times A_k)}) = O(\mathscr{H}(Z_{k,n})).$$

根据命题 5.1、命题 5.3 和引理 6.16,

$$\mathscr{H}(Z_{k,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

由命题 7.1 可得,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{((Z_{k,n}^c\cap B)\times A_k)\cap T^{-n}(B\times A_k)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\{1,2\}^{\mathbb{N}}} \mathbb{1}_B(\alpha)\left(\lambda_\alpha(A_k)\right)^2 d\mathscr{H}(\alpha).$$

□

7.4. 从自相关到开普勒剪切。现在，我们希望将上述结果推广到 Ω 的所有博雷尔集。只需证明自相关收敛到 0；我们将在下一个引理中证明这一点。

引理 7.4。设 $(\Omega\ \mathscr{T}, \mu, T)$ 是一个动力系统。设 $f \in \mathbb{L}^2_\mu(\Omega)$ 满足

$$\mathbb{E}(Cov_n(f, f|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

那么，

$$\forall g \in \mathbb{L}^2_\mu(\Omega), \mathbb{E}(Cov_n(f, g|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

证明。令 $f \in \mathbb{L}^2_\mu(\Omega)$ 使得

$$\mathbb{E}(Cov_n(f, f|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Let

$$H_f := \overline{Vect\left(\{\mathbb{E}(f|\mathscr{I})\} \cup \{f\circ T^n : n\in\mathbb{N}\}\right)}$$

并令

$$F_f := \{g \in \mathbb{L}^2_\mu(\Omega) : \mathbb{E}(Cov_n(f, g|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\}.$$

容易证明 F_f 是闭的。这由假设 $H_f \subset F_f$ 得出。现在，我们证明 $H_f^\perp \subset F_f$。令 $g \in H_f^\perp$。于是,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_\Omega (f\circ T^n) g d\mu = 0 = \int_\Omega \mathbb{E}(f|\mathscr{I}) g d\mu.$$

这意味着

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Cov_n(f, g|\mathscr{I})) = 0,$$

从而证明了该断言。于是，$\mathbb{L}^2_\mu(\Omega) = F_f$。 □

为了将命题 7.3 中证明的收敛性推广到 Ω 的每个可测集，我们将使用 Dynkin 类引理。我们证明一个一般性结果：使自相关收敛到 0 的博雷尔集构成一个 Dynkin 类。

引理 7.5。设 $(\Omega\ \mathscr{T}, \mu, T)$ 是一个动力系统。设 $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ 使得

$$\forall A \in \mathscr{S}, \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

我们记 $\mathcal{C}(\mathscr{S})$ 由 $\mathscr{S}$ 生成的 *Dynkin* 类。那么，

$$\forall A \in \mathcal{C}(\mathscr{S}), \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

证明。 设 $\mathscr{R} := \left\{ A \in \mathscr{T} \colon \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right\}$。我们证明 $\mathscr{R}$ 是一个 Dynkin 类。

显然，我们得到 $\Omega \in \mathscr{R}$。设 $A, B \in \mathscr{R}$ 使得 $A \subset B$。那么，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_{B\setminus A}, \mathbb{1}_{B\setminus A}|\mathscr{I})) &= \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) \\ &= \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B|\mathscr{I})) + \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) - 2\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B|\mathscr{I}))\end{aligned}$$

于是，由引理 7.4，

$$\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_{B\setminus A}, \mathbb{1}_{B\setminus A}|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

设 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{R}^{\mathbb{N}}$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$。设 $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$。我们证明 $\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$。对于 $m, n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) = \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_{A\setminus A_m}, \mathbb{1}_{A\setminus A_m}|\mathscr{I})) + 2\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_{A\setminus A_m}, \mathbb{1}_{A_m}|\mathscr{I})) + \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_{A_m}, \mathbb{1}_{A_m}|\mathscr{I}))。$$

因此，对于 $m, n \in \mathbb{N}$，$|\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I}))| \le 2(\mu(A\setminus A_m) + (\mu(A\setminus A_m))^{\frac{1}{2}} + |\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_{A_m}, \mathbb{1}_{A_m}|\mathscr{I}))|$。因此，存在 $m_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $(\mu(A\setminus A_{m_0}) + (\mu(A\setminus A_{m_0}))^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4})$，并且存在$n_0 \in \mathbb{N}$ 使得，

$$\forall n \ge n_0, \left|\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_{A_{m_0}}, \mathbb{1}_{A_{m_0}}|\mathscr{I}))\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

因此，

$$\forall n \ge n_0, \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) < \varepsilon.$$

因此 $A \in \mathscr{R}$。我们得到 $\mathscr{R}$ 是一个 Dynkin 类。我们知道 $\mathscr{S} \subset \mathscr{R}$。于是，

$$\mathcal{C}(\mathscr{S}) \subset \mathcal{C}(\mathscr{R}) = \mathscr{R}.$$

□

现在，我们来说明如何运用 Dynkin 类引理证明开普勒剪切。

命题 7.4（作用在 $\pi-$系统上的开普勒剪切）。设 $(\Omega\ \mathscr{T}, \mu, T)$ 是一个动力系统。设$\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$一个 $\pi-$系统，使得 $\sigma(\mathscr{S}) = \mathscr{T}$并且

$$\forall A \in \mathscr{S}, \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

于是，

$$\forall f \in \mathbb{L}^2_\mu(\Omega), f \circ T^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f|\mathscr{I}).$$

证明。 根据引理 7.5，

$$\forall A \in \mathcal{C}(\mathscr{S}), \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

由于 $\mathscr{S}$ 是一个 $\pi-$系统，根据 Dynkin 类引理，

$$\mathcal{C}(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{S}).$$

此外，$\sigma(\mathscr{S}) = \mathscr{T}$，因此，

$$\forall A \in \mathscr{T}, \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

由引理 7.4 可得，

$$\forall A, B \in \mathscr{T}, \mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

因此，

$$\forall f \in \mathbb{L}^2_\mu(\Omega), f \circ T^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f|\mathscr{I}).$$

□

7.5. 柱集上的收敛。 现在，我们希望将这种收敛推广到 Ω 的所有博雷尔子集。只需证明条件自相关收敛至 0，这正是下一条引理要讨论的对象。现在，我们证明自相关在 α–柱集上收敛，而这些柱集构成一个 π–系统。这使我们能够使用命题 7.4。

引理 7.6。 设 k、$m \in \mathbb{N}$，并设 $u \in \{1,2\}^{[\![0,m]\!]}$。那么，

$$\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_{[u]\times A_k}, \mathbb{1}_{[u]\times A_k}|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

证明。 设 $k,m \in \mathbb{N}$，并设 $u \in \{1,2\}^{[\![0,m]\!]}$。取 $B = [u]$，利用命题 7.3，即得结论。□

因此，我们可以通过 α–柱集和 A_k 的变换，生成 $[0,1[$ 的每个 d–进制细分。

引理 7.7。 设 $k \in \mathbb{N}$、$m \geq k$，并设 $u \in \{1,2\}^{[\![0,m]\!]}$。设 $j \in [\![1、 d^k]\!]$。
那么，存在 $s \in \mathbb{N}$ 使得 $s \leq h_k^{(u)}$ 且

$$[u] \times \left[\frac{j-1}{d^k}, \frac{j}{d^k}\right[= T^s([u] \times A_k)$$

其中， $h_k^{(u)}$ 是 h_k^α 对 $\alpha \in [u]$的共同取值。

证明。 令 $k \in \mathbb{N}, m \geq k$，并令 $u \in \{1,2\}^{[\![0,m]\!]}$。令 $(\alpha, x) \in [u]\times A_k$。我们将 $j-1 = \sum_{i=0}^{k-1} v_i d^i$ 写作 $v_i \in [\![0, d-1]\!]$。我们取

$$s = \sum_{i=0}^{k-1} (v_i h_i^\alpha + \alpha_i \mathbb{1}_{\{d-1\}}(v_i)).$$

由 (8) 和 (9)，

$$T^s([u] \times A_k) = [u] \times \left[\frac{j-1}{d^k}, \frac{j}{d^k}\right[.$$

□

现在，我们也可以利用下面的引理生成间隔块。

引理 7.8。 令 $m \in \mathbb{N}$，并令 $u \in \{1,2\}^{[\![0,m]\!]}$。令 $j \in [\![0, m-1]\!]$ 和 $l \in [\![0, u_j - 1]\!]$, $m \geq k \geq j+1$ 和 $q \in [\![1, u_j d^{k-(j+1)}]\!]$。因此，存在 $s \in \mathbb{N}$ 使得 $s \leq h_k^{(u)}$ 且

$$[u] \times \left(\left\{1 + \sum_{i=0}^{j-1} u_i d^{-(i+1)} + l d^{-(j+1)}\right\} + \left[\frac{q-1}{d^k}, \frac{q}{d^k}\right[\right) = T^s([u] \times A_k).$$

证明。 证明与引理 7.7 的证明类似。 □

因此，我们可以为柱集收敛构建 π–系统。我们定义

$$\mathscr{S}_1 := \left\{[u] \times \left[\frac{j-1}{d^k}, \frac{j}{d^k}\right[: m \in \mathbb{N},\ \ m \geq k,\ \ u \in \{1,2\}^{[\![0,m]\!]} \text{ and } j \in [\![1, d^k]\!]\right\} \cup \{\emptyset\}.$$

Let

$$\mathscr{S}_2 := \left\{ \begin{array}{l} [u] \times \left(\left\{1 + \sum_{i=0}^{j-1} u_i d^{-(i+1)} + l d^{-(j+1)}\right\} + \left[\frac{q-1}{d^k}, \frac{q}{d^k}\right[\right) : \\ m \in \mathbb{N},\ \ u \in \{1,2\}^{[\![0,m]\!]},\ \ j \in [\![0, m-1]\!], \\ l \in [\![0, u_j - 1]\!] \text{ and } m \geq k \geq j+1,\ q \in [\![1, u_j d^{k-(j+1)}]\!] \end{array} \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

最后，前两个集合的并集是一个 π–系统。

引理 7.9。 $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$ 在交集运算下保持稳定：

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2)^2, A \cap B \in \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2.$$

此外，在 $\mathscr{S}_1$ 和 $\mathscr{S}_2$ 上，相关性确保收敛至 0。

引理 7.10。对于所有 $A \in \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$,

$$\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

证明。令 $A \in \mathscr{S}_1$。根据引理 7.7，存在 $m \in \mathbb{N}$， $u \in \{1, 2\}^{[\![0,\ m]\!]}$， $j \in [\![1,\ d^k]\!]$ 和 $s \in \mathbb{N}$，使得 $s \leq h_k^{(u)}$ 并且

$$A = [u] \times \left[\frac{j-1}{d^k}, \frac{j}{d^k}\right[= T^s([u] \times A_k).$$

注意，对于任意 $\alpha \in [u]$，由于 $s \leq h_k^{\alpha}$,

$$T_\alpha^{-s}(T_\alpha^s(A_k) \cap T_\alpha^{-n}(T_\alpha^s(A_k))) = A_k \cap T_\alpha^{-n}(A_k).$$

因此,

$$\mathbb{E}(Cov_n(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A|\mathscr{I})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

同样，我们对 $A \in \mathscr{S}_2$ 也能得到相同的结果。 □

现在，我们已经具备证明本文主要结果的所有要素，即查孔变换的开普勒剪切。

定理 *2.1* 的证明。利用 $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$ 中的元素，根据引理 7.7 和引理 7.8，我们知道可以生成形如 $[u] \times [0, a[$ with $[u]$ a cylinder of $\mathscr{C}$ and $a = \sum_{j=0}^{m} a_j d^{-(j+1)}$ with $a_j \in [\![0,\ d-2]\!]$ 的集合。然后， $\sigma(\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2) = \mathscr{B}(\Omega)$。根据引理 7.9，我们知道 $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$ 是一个 $\pi-$ 系统。最后，根据引理 7.10 和命题 7.4,

$$\forall f \in \mathbb{L}^2_\mu(\Omega), f \circ T^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}_\mu(f|\mathscr{I}).$$

□

参考文献

[AFS] Avila, A., Forni, G. 和 Safaee, P.（2023）。区间交换变换的定量弱混合 ns, 《几何与泛函分析》，33(1):1–56。

[BMS] Alexander Bufetov、Juan Marshall-Maldonado 和 Boris Solomyak, 《替换作用的局部谱估计与定量弱混合》, 《伦敦数学学会会刊》111 (2025)

[Cha] R.V. Chacon，非强混合的弱混合变换。《美国数学会会刊》，22(3) (1969) 559–562。[Dol] Dimitri Dolgopyat, Anosov 流中的相关性衰减，《数学年刊》147,357-390(1998)。https://doi.org/10.1007/s11856-011-0137-y [EW] Manfred Einsiedler 和 Thomas Ward，遍历理论。数学研究生教材 (2011)，Springer[Haf] Yeor Hafouta，某些时变扩张动力系统的极限定理，《非线性》 33 (2020) 6421[HK] Yeor Hafouta 和 Yuri Kifer，非传统极限定理与随机动力学，世界科学出版社 (2018) [Mol] Nelson Moll，Chacon 映射的弱混合速度，预印本 arXiv:2308.00823[Par]Jiyun Park 和 Kangrae Park，弱混合系统中例外集的大小，预印本 arXiv:2301.09786v1[R] H.-H. Rugh，复空间中的锥与规范：谱隙与复 Perron-Frobenius 理论，《数学年刊》171 (2010), 1702–1752。[Tho] Damien Thomine，遍历理论中的开普勒剪切，《亨利·勒贝格年刊》，第 3 卷 (2020)，第 649-676 页。

艾克斯-马赛大学，马赛数学研究所，法国国家科学研究中心，吕米尼，邮政信箱 907，13288 马赛