含导电圆柱柱体波导结中的波散射解析方法

Malgorzata Warecka,Rafal Lech, Piotr Kowalczyk格但斯克理工大学电子、电信与信息学学院微波与天线工程系，波兰格但斯克 malgorzata.warecka@pg.edu.pl,rafal.lech@pg.edu.pl, pio.kow@gmail.com

arXiv:2601.05638v1 [cs.CE] 9 Jan 2026

摘要——本文提出一种分析含导电圆柱体的波导结的新方法。该算法基于采用局部投影函数的模式匹配技术，可改善问题的数值条件性。此外，该方法通过缩小需要进行数值积分的边界，提升了计算效率。我们通过多个示例（包括多截面微波滤波器）测试了该方法的收敛性和准确性，并将结果与采用商用全波仿真器实现的有限元法所得结果进行比较，以验证该方法。

索引词——模式匹配法、波导结、散射矩阵、微波滤波器

I. 引言

数十年来，波导技术一直应用于陆地和卫星通信、雷达系统以及其他大功率应用领域。近年来，人们对空间和卫星技术的兴趣日益浓厚，这些技术也迅速发展。因此，对能够快速、高效地仿真这些系统所用结构的工具的需求也不断增长 [1]–[4]。

常用的离散方法具有很强的通用性，因此被广泛应用于商用全波仿真器中 [5]–[7]。然而，这些方法的通用性是以效率有限为代价的。因此，针对特定结构或几何形状开发的专用软件不断涌现。在这种情况下，可以采用混合方法 [8]–[10]，有时甚至可以采用解析方法 [11], [12] 。

本文分析了含有圆柱形导体的矩形波导结中的电磁波散射现象的解析描述。文献中已对类似结构进行过分析 [8]，[11]，[12]。在所有这些情况下，分析都涉及区域分解，并引入了一个包含所研究物体的假想圆柱区域。该圆柱区域完全填满了波导结（圆柱区域的直径等于波导的宽度）

本研究由格但斯克理工大学通过卓越倡议—研究型大学计划下的 Argentum 启动研究基金资助，资助编号为 DEC-19/1/2023/IDUB/I3b/Ag。

并与定义入射波和反射波的波导端口相连。波导段中的电磁场通常用笛卡尔坐标表示，并与圆柱形区域中用圆柱函数表示的场相匹配。为满足连续性条件而采用的投影，需要在整个结的横截面上进行积分。在这种情况下，由于积分较为复杂，必须通过数值方法求值。此外，结中的圆柱函数数量与波导中的模式数量密切相关，因而限制了模式数量，也限制了该方法的适用性。

本文提出了一种替代方法，该方法无需在结区引入假想圆柱形区域，并且匹配过程中由场投影产生的数值积分仅限于散射物体的边界。我们采用一维有限元法（FEM）中已知的局部基函数进行投影，因为投影全局函数可能导致数值条件性较差。本文仅分析导电圆柱体，并通过将所得结果与全波电磁仿真器 InventSim [5] 得到的结果进行比较，验证所开发算法的有效性。需要指出的是，所提出的技术也可用于分析几何形状为非圆柱形的非导电物体，例如，可通过定义在包围该物体的圆柱表面上的阻抗矩阵来描述此类物体。这一课题将在未来的工作中探讨。

II. 公式推导

分析对象是位于矩形波导结中的导电圆柱柱体。假设圆柱沿波导的整个高度 b 延伸。图1展示了该结构的几何形状，其中半径为 R 的柱体中心距波导壁 h 。进一步的分析仅针对在结区传播的 TE_{m0} 模式。

要确定该截面的散射矩阵，必须明确界定结构的端口。我们假设

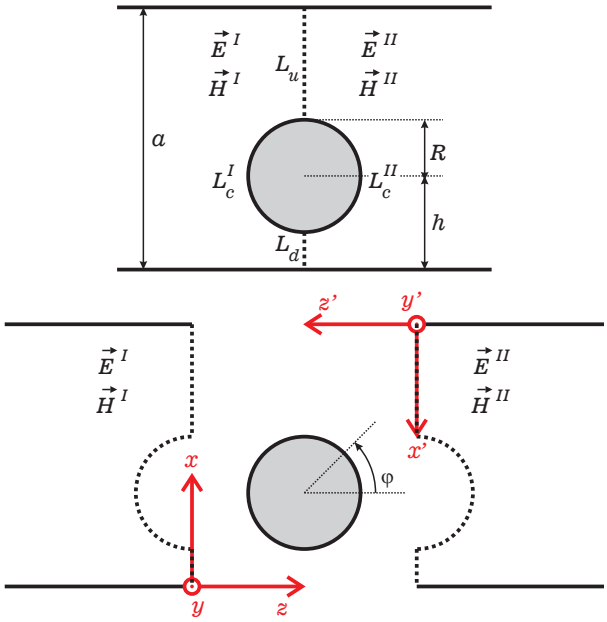

图1. 所研究波导结的几何结构

连接段长度为零，并按惯例将端口I设在 $z = 0$ 平面，将端口II设在 $z' = 0$ 平面。圆柱形物体未完全包含在连接段内（截面长度为零），并不影响分析的有效性，这一点已通过更大的假设圆柱体 [8], [13]得到验证。分析需要定义两个端口横截面上的电场和磁场：

$$E_y^I(x,z) = \sum_{m=1}^{M} p_m G_m (a_m^I e^{-\gamma_m z} + b_m^I e^{\gamma_m z}) \sin(p_m x) \quad (1)$$

$$E_y^{II}(x',z') = \sum_{m=1}^{M} p_m G_m (a_m^{II} e^{-\gamma_m z'} + b_m^{II} e^{\gamma_m z'}) \sin(p_m x') \quad (2)$$

$$H_x^I(x,z) = \sum_{m=1}^{M} p_m \frac{G_m}{Z_m} (b_m^I e^{\gamma_m z} - a_m^I e^{-\gamma_m z}) \sin(p_m x) \quad (3)$$

$$H_x^{II}(x',z') = \sum_{m=1}^{M} p_m \frac{G_m}{Z_m} (b_m^{II} e^{\gamma_m z'} - a_m^{II} e^{-\gamma_m z'}) \sin(p_m x') \quad (4)$$

其中，参数 $p_m = m\pi/a$、$\gamma_m = \sqrt{p_m^2 - \omega^2\mu\varepsilon}$、$G_m = \sqrt{(2\mathrm{j}\omega\mu)/(\gamma_m a b p_m^2)}$、$Z_m = \mathrm{j}\omega\mu/\gamma_m$ 取决于波导介质。系数 a_m^I、b_m^I、a_m^{II} 和 b_m^{II} 分别表示端口I和端口II处的入射信号和出射信号。

两个端口中的电场和磁场切向分量在区段 $L_d = \{x \in [0, h-R] \wedge z = 0\}$ 和 $L_u = \{x \in [h+R, a] \wedge z = 0\}$上必须连续。在有导体边界的情况下 $L_c^I = \{x(\varphi) = h + R\sin(\varphi) \wedge z(\varphi) = R\cos(\varphi)$，其中 $\varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]\}$和 $L_c^{II} = \{x'(\varphi) = a - h - R\sin(\varphi) \wedge z'(\varphi) = -R\cos(\varphi)$，其中 $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$只有电场的切向分量等于零：

$$\begin{cases} H_x^I(x,0) = H_{x'}^{II}(x',0)\Big|_{L_d \cup L_u} \\ E_y^I(x,0) = E_{y'}^{II}(x',0)\Big|_{L_d \cup L_u} \\ E_y^I(x,z)\Big|_{L_{c1}} = 0 \\ E_{y'}^{II}(x',z')\Big|_{L_{c2}} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

用于描述各端口中场的局部坐标系之间的坐标关系非常简单：$x' = a - x$、$y' = y$ 和 $z' = -z$。各坐标系的轴向方向如下：$\vec{\ }$、$\vec{\ }$、$\vec{\ }$、$\vec{\ }$、$\vec{\ }$、$\vec{\ }$、$i_{x'} = -i_x$、$i_{y'} = i_y$ 和 $i_{z'} = -i_z$。

连续性条件 (5) 通常通过使用一组合适的函数进行投影来满足。然而，沿整个结截面定义的全局函数 ($L_d \cup L_c^I \cup L_u$) 或 ($L_d \cup L_c^{II} \cup L_u$) 在数值上条件较差；随着函数数量的增加，其线性无关性会恶化，从而导致病态系统。在所提出的方法中，我们采用了一维（一阶）有限元法中的局部基函数。其受限定义域改善了数值条件，此外，大多数积分都可以解析地计算。边界段 (L_d、L_c^I、L_c^{II} 和 L_u) 均匀离散为子域 Ω_k，并在这些子域上定义如下局部函数（见图2）。每个局部函数 $\alpha_k(t)$ 仅在其指定的子域 Ω_k 上非零。公式如下

$$\alpha_k(t) = 1 - \frac{2|t - t_k|}{t_{k+1} - t_{k-1}}, \quad t \in [t_{k-1}, t_{k+1}] = \Omega_k \quad (6)$$

对于定义域的内部区域，其中 $k = 1, \ldots, K-1$；而对于边缘

$$\alpha_0(t) = 1 - \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}, \qquad t \in [t_0, t_1] = \Omega_0 \quad (7)$$

$$\alpha_K(t) = 1 + \frac{t - t_K}{t_K - t_{K-1}}, \quad t \in [t_{K-1}, t_K] = \Omega_K \quad (8)$$

其中 $t_k = t_0 + k(t_k - t_0)/K$。表 I 中列出了每条极限曲线对应函数的值域和确切形式。

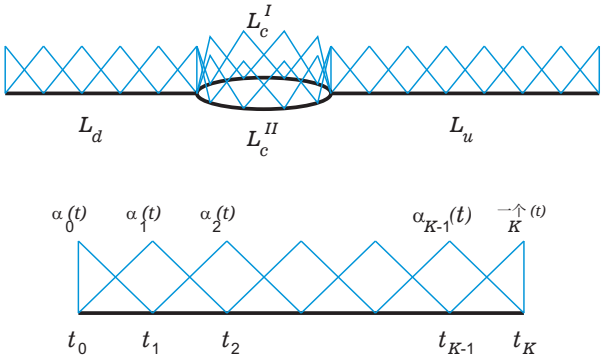

图2. 边界上局部基函数的可视化

表 I 局部基函数参数

	t	t_0	t_K	K	Ω_k
α_k^d α_k^u	x	0 $h+R$	$h-R$ a	K_d K_u	Ω_k^d Ω_k^u
α_k^{cI} α_k^{cII}	φ	$\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$	K_{c1} K_{c2}	Ω_k^{cI} Ω_k^{cII}

利用上述定义的局部函数对条件 (5) 进行投影，可得一个方程组，其中唯一的未知数是表示端口 I 和 II 处入射信号与出射信号的系数。我们得到 $2K_d$个方程（对于 $k = 1, \ldots, K_d$）

$$\int_{L_d} H_x^I(x,0)\alpha_k^d(x)\,dx = \int_{L_d} H_{x'}^{II}(x',0)\alpha_k^d(x)\,dx \quad (9)$$

$$\int_{L_d} E_y^I(x,0)\alpha_k^d(x)\,dx = \int_{L_d} E_{y'}^{II}(x',0)\alpha_k^d(x)\,dx \quad (10)$$

对于关于线段 L_d 的条件。同样，将有 $2K_u$ 个方程（对于 $k = 0, \ldots, K_u - 1$）

$$\int_{L_u} H_x^I(x,0)\alpha_k^u(x)\,dx = \int_{L_u} H_{x'}^{II}(x',0)\alpha_k^u(x)\,dx \quad (11)$$

$$\int_{L_u} E_y^I(x,0)\alpha_k^u(x)\,dx = \int_{L_u} E_{y'}^{II}(x',0)\alpha_k^u(x)\,dx \quad (12)$$

对于线段 L_u。定义在圆柱壁L_c^I和 L_c^{II} 上的条件会产生 2($K_c + 1$) 个方程（对于 $k = 0, \ldots, K_c$）

$$\int_{L_c^I} E_y^I(x(\varphi), z(\varphi))\alpha_k^{cI}(\varphi)\,d\varphi = 0 \quad (13)$$

$$\int_{L_c^{II}} E_{y'}^{II}(x'(\varphi), z'(\varphi))\alpha_k^{cII}(\varphi)\,d\varphi = 0 \quad (14)$$

所得方程组可简要写成矩阵表示法

$$\mathbf{Lb} = \mathbf{Ra} \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H^{xId}} & \mathbf{H^{xIId}} \\ \mathbf{E^{yId}} & -\mathbf{E^{yIId}} \\ -\mathbf{H^{xIu}} & \mathbf{H^{xIIu}} \\ \mathbf{E^{yIu}} & -\mathbf{E^{yIIu}} \\ \mathbf{E^{yIcb}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E^{yIIcb}} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H^{xId}} & \mathbf{H^{xIId}} \\ -\mathbf{E^{yId}} & \mathbf{E^{yIId}} \\ -\mathbf{H^{xIu}} & \mathbf{H^{xIIu}} \\ -\mathbf{E^{yIu}} & \mathbf{E^{yIIu}} \\ -\mathbf{E^{yIca}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E^{yIIca}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

据此

$$\mathbf{a} = \left[a_1^I, a_2^I, \ldots, a_M^I, a_1^{II}, a_2^{II}, \ldots, a_M^{II}\right]^T \quad (17)$$

$$\mathbf{b} = \left[b_1^I, b_2^I, \ldots, b_M^I, b_1^{II}, b_2^{II}, \ldots, b_M^{II}\right]^T \quad (18)$$

而子矩阵定义如下:

$$\mathbf{H^{xId}}_{k,m} = -\int_{\Omega_k^d} p_m \frac{G_m}{Z_m} \sin(p_m x)\alpha_k^d(x)\,dx \quad (19)$$

$$\mathbf{H^{xIId}}_{k,m} = -\int_{\Omega_k^d} p_m \frac{G_m}{Z_m} \sin(p_m x')\alpha_k^d(x)\,dx \quad (20)$$

$$\mathbf{H^{xIu}}_{k,m} = -\int_{\Omega_k^u} p_m \frac{G_m}{Z_m} \sin(p_m x)\alpha_k^u(x)\,dx \quad (21)$$

$$\mathbf{H^{xIIu}}_{k,m} = -\int_{\Omega_k^u} p_m \frac{G_m}{Z_m} \sin(p_m x')\alpha_k^u(x)\,dx \quad (22)$$

$$\mathbf{E^{yId}}_{k,m} = \int_{\Omega_k^d} p_m G_m \sin(p_m x)\alpha_k^d(x)\,dx \quad (23)$$

$$\mathbf{E^{yIId}}_{k,m} = \int_{\Omega_k^d} p_m G_m \sin(p_m x')\alpha_k^d(x)\,dx \quad (24)$$

$$\mathbf{E^{yIu}}_{k,m} = \int_{\Omega_k^u} p_m G_m \sin(p_m x)\alpha_k^u(x)\,dx \quad (25)$$

$$\mathbf{E^{yIIu}}_{k,m} = \int_{\Omega_k^u} p_m G_m \sin(p_m x')\alpha_k^u(x)\,dx \quad (26)$$

$$\mathbf{E^{yIcb}}_{k,m} = = \int_{\Omega_k^{cI}} p_m G_m e^{\gamma_m z} \sin(p_m x)\alpha_k^{cI}(\varphi)\,d\varphi \quad (27)$$

$$\mathbf{E^{yIIcb}}_{k,m} = = \int_{\Omega_k^{cII}} p_m G_m e^{\gamma_m z'} \sin(p_m x')\alpha_k^{cII}(\varphi)\,d\varphi \quad (28)$$

$$\mathbf{E^{yIca}}_{k,m} = = \int_{\Omega_k^{cI}} p_m G_m e^{-\gamma_m z} \sin(p_m x)\alpha_k^{cI}(\varphi)\,d\varphi \quad (29)$$

$$\mathbf{E^{yIIca}}_{k,m} = = \int_{\Omega_k^{cII}} p_m G_m e^{-\gamma_m z'} \sin(p_m x')\alpha_k^{cII}(\varphi)\,d\varphi \quad (30)$$

需要强调的是，积分 (19)-(26) 可以解析计算，与经典方法 [8],[11] 相比，这显著提高了计算效率。

适当选择模式和基函数的数量（必须满足方程组 $M < K_u + K_d + K_c + 1$ 的确定性条件），即可由关系式（15）得到散射矩阵 S 的表达式。

$$\mathbf{b} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{Ra} = \mathbf{Sa} \quad (31)$$

在实际应用中，矩阵 L 不进行求逆；所得方程组是超定的，采用直接方法求解，例如最小二乘法。

III. 数值结果

为验证所开发算法的有效性和准确性，对三种包含导电圆柱的波导结构进行了分析。分析结果与基于有限元法的 InventSim 全波仿真器 [5] 所得结果进行了比较。

第一个结构是一个 WR-62 波导接头（宽度$a = 15.799$ mm，高度 $b = 7.899$ mm），其中包含两个

半径为 $r = 2$ mm 的导电圆柱形柱体。这些柱体相对于波导轴分别偏移 $d_1 = 3$ mm 和 $d_2 = 5$ mm，彼此间距为 l。所分析结构的几何形状如图3所示。

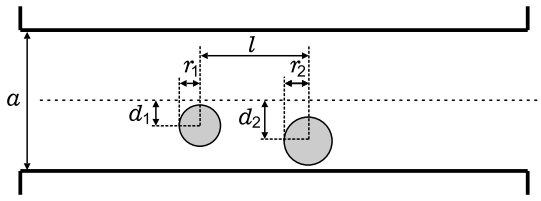

图3. 具有两个圆柱谐振器的矩形波导截面，谐振器半径分别为 r_1 和 r_2，彼此相距 l，且分别与波导轴偏移 d_1 和 d_2 （俯视图）。

针对不同的圆柱间距 l 和不同的模式数量 M 进行了计算，以考察该方法的收敛性。图4、图5和图6分别给出了圆柱间距为15 mm、10 mm和5 mm时的结果。

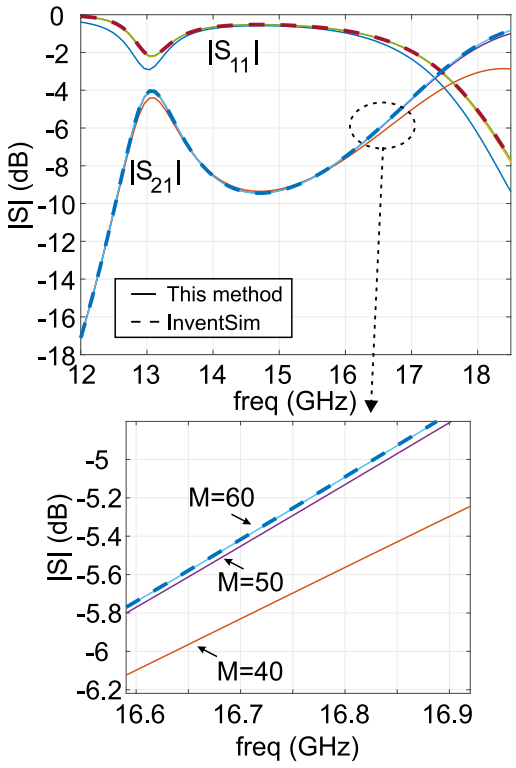

图4. 图3所示结构的频率响应，尺寸如下： $r_1 = r_2 = 2$ mm、 $d_1 = 3$ mm、 $d_2 = 5$ mm、 $l = 15$ mm，位于WR-62波导中。

结果表明，当圆柱体间距为 10 mm 和 15 mm 时，算法在 $M = 60$ 时收敛；而间距较小（例如 5 mm）时，则需要 $M = 70$ 。这一现象是由波导内不连续处（圆柱柱体）激发的高阶场分量所致。尽管这些模式不会在基模频带内传播，但它们的

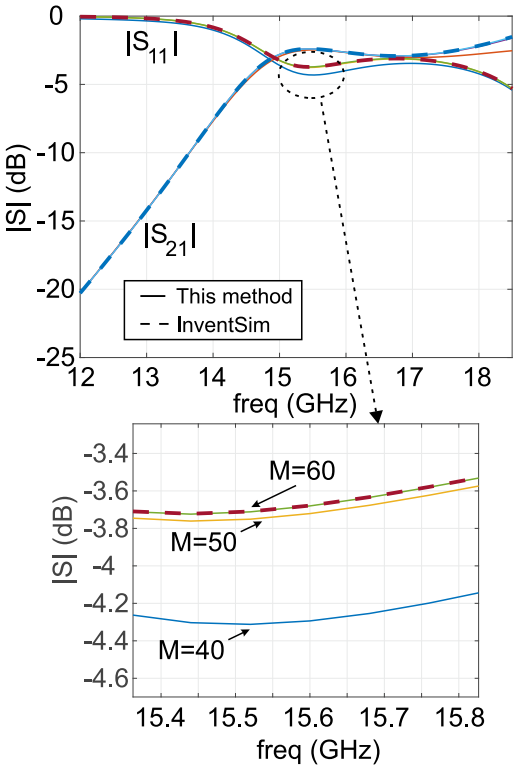

图5. 图3所示结构的频率响应，尺寸如下： $r_1 = r_2 = 2$ mm、 $d_1 = 3$ mm、 $d_2 = 5$ mm、 $l = 10$ mm，位于WR-62波导中。

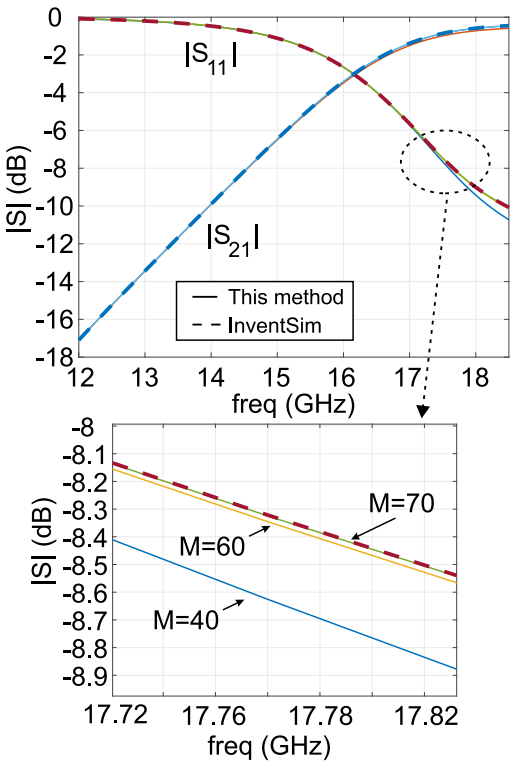

图6. 图3所示结构在以下尺寸下的频率响应： $r_1 = r_2 = 2$ mm、 $d_1 = 3$ mm、 $d_2 = 5$ mm、 $l = 5$ mm，采用WR-62波导。

影响在级联波导段时必须予以考虑。

通过收敛性分析确定合适的模式数量后，对更复杂的滤波器结构进行了分析。第二种和第三种结构分别是具有两个和四个极点的带通滤波器，其反射特性如 [13] 所述。二极点滤波器的结果（见图7）如图8所示，而四极点滤波器的结果（见图9）如图10所示。各结构的尺寸见图注。

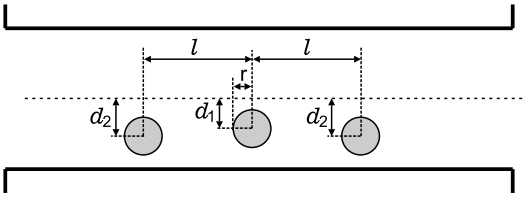

图7. 三柱体导体波导滤波器的结构（俯视图）。

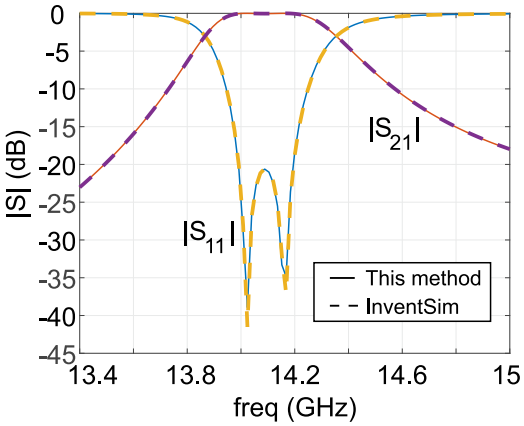

图8. 图7所示三柱体导体波导滤波器的频率响应。尺寸： $r = 2$ 毫米、$l = 14.7404$ 毫米、 $d_1 = 3.4475$ 毫米、 $d_2 = 1.5137$ 毫米，WR-62波导。

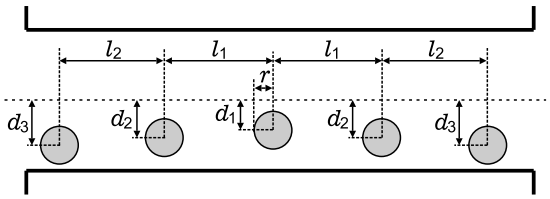

图9. 五柱体导体波导滤波器的结构（俯视图）。

在这两种情况下，结果均与 InventSim 全波仿真器所得结果进行了比较，且吻合良好。

IV. 结论

本文提出了包含导电圆柱体的矩形波导结中电磁波散射的解析公式推导。一种新的

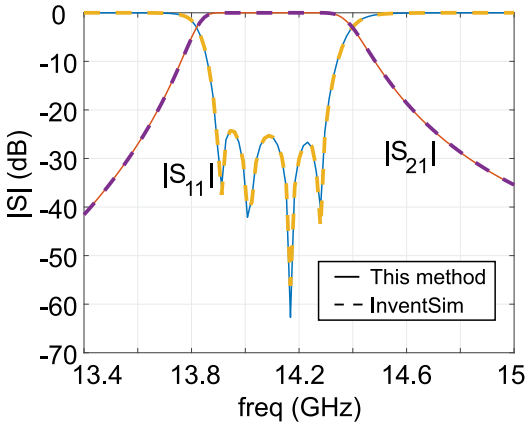

图10. 图9所示五柱导体波导滤波器的频率响应。尺寸： $r = 2$ 毫米、$l_1 = 14.1461$ 毫米、 $l_2 = 15.9014$ 毫米、 $d_1 = 3.9639$ 毫米、$d_2 = 1.7958$ 毫米、 $d_3 = 1.3672$ 毫米，WR-62波导。

基于局部投影函数的场匹配方法，较以往发表的方法具有更好的数值条件性和效率。该算法经过收敛性验证，并与使用商用全波电磁仿真器获得的结果进行了对比验证，结果显示两者高度一致。

参考文献

[1] A. M. H. de la Cruz 等，“包含导体物体的任意形状矩形波导不连续结构的高效积分方程分析”，IEEE J. Microw.，第 5 卷，第 3 期，页 739-749，2025 年 5 月 [2] M. Baranowski 等，“一种具有改进带外性能的卫星通信系统圆形波导双模滤波器”，IEEE Microw. Wire. Comp. Lett.，第 32 卷，第 12 期，页 1403-1406，2022 年 12 月[3] J. Sorocki 等，“降低增材制造全金属波导部件内表面粗糙度的低成本方法”，IEEE Trans. Microw. Theory Techn.，第 72 卷，第 8 期，页 4519-4529，2024 年 8 月[4] A. M. H. de la Cruz 等，“利用埃瓦尔德方法加速格林函数，高效分析三维矩形波导微波电路的积分方程方法”，IEEE Trans. Microw. Theory Techn.，第 72, 10, 5709 5720, 2024 卷，第 期，页 -，10 月 2025 [5] InventSim。（）。EM Invent. 在线。可访问：http://inventsim.com/ [6] ANSYS HFSS 软件。访问日期：2025 年 11 月。 [在线]。可访问：https://www.ansys.com/products/electronics/ansys-hfss [7] CST 软件。访问日期：2025 年 11 月。[在线]。可访问：https://www.3ds.com/products/simulia/cst-studio-suite [8] A. Kusiek、R Lech、J. Mazur，“任意配置圆柱形物体散射分析的新型混合方法”，IEEE Trans. Antennas Propag.，第 56, 6, 1725 1733, 2008 卷，第 期，页 -，6 月 [9] M. Warecka、R. Lech 和 P. Kowalczyk，“由轴对称物体构成结构的混合分析”，IEEE Trans. Microw. Theory Techn.，第 68, 11, 4528 4535, 2020 卷，第 期，页 -，11 月 [10] R. Rezaiesarlak 和 E. Mehrshahi，“加载金属柱的 H 面波导结全波分析”，Inter. J. RF and Microw. Comp.-Aided Eng.，第 21, 3 288 294, 2011 卷，第 期，页 -，4 月 [11] M. Polewski、R. Lech、J. Mazur，“含非均匀介质圆柱体结构的严格模态分析”，IEEE Trans. Microw. Theory Techn.，第 52, 5, 1508 1516, 2004 卷，第 期，页 -，5 月 [12] R. Lech、J. Mazur，“含圆柱形物体的圆形腔体分析”，IEEE Trans. Microw. Theory Techn.，第 55 卷，第 10 期，页 2115 2123, 2007 -，10 月 [13] M. Polewski，“含圆柱形物体结构中的电磁波散射”，博士论文，格但斯克，2004 年