arXiv:2601.05673v1 [cs.DM] 9 Jan 2026

语言的局部生成：单调二进制序列

Mathieu Hoyrup*

2026年1月12日

摘要

在上一篇文章中，我们引入了语言局部生成的问题，其中生成过程所依托的通信由一个单纯复形刻画。我们详细研究了二进制单调序列这一语言中的该问题。我们证明了一般性结果，并确定了生成这一语言的若干类最小单纯复形。

目录

1 引言 2 **2 定义 5**

2.1 背景 .5 2.2 区间 .7 2.3 复形的图形表示 .9 2.4 对称性 .9

3 生成 Mon 复形的示例 Mon_n 10

3.1 一个复形生成 Mon_5 .11 3.2 一个复形生成 Mon_7 .13 3.3 一个复形生成 Mon_8 .15

*洛林大学′，法国国家科学研究中心、法国国家信息与自动化研究院，南锡，54000，法国

4 结构性结果 17
4.1 分解 .174.2 通信仅通过区间进行 .194.3 顶点删除与插入 .194.3.1 顶点删除 .204.3.2 顶点插入.21

5 丢弃复形的框架 24
5.1 推理系统 .255.2 Mon 的规则Mon$_n$ .275.3 关键技术工具 .275.4 一项更具技术性的结果 .29

6 生成 Mon 的极小复形族$_n$ 29
6.1 族 K_2 .306.2 族 K_5 .316.3 族 K_8 .346.4 n 的较小值.35

7 $3/4$ 比率 36
7.1 上界 .377.2 下界 .38

8 未来方向 42
8.1 通过组合拓扑进行语言生成 . . . . . 428.2 开放问题 .43

A 附录 46
A.1 引理 5.2 的证明 .46A.2 定理 6.3 的证明.47

1 引言

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们考虑由单调的二进制序列组成的语言 $\mathrm{Mon}_n \subseteq \{0,1\}^n$，即非递减或非递增的序列。例如，

$$\mathrm{Mon}_4 = \{0000, 0001, 0011, 0111, 1111, 1110, 1100, 1000\}.$$

我们研究如何以局部方式生成 Mon_n 中的字符串。具体而言，$I_n = \{0, \ldots, n-1\}$ 中的每个单元都必须生成一个比特，使它们共同生成 Mon_n 中的任意字符串。为实现这一目标，

这些单元需要进行通信，我们将分析它们之间需要多少通信。

让我们使用 [Hoy25c] 中引入的框架，精确地表述这个问题。语言是一个集合 $L \subseteq A^I$，其中 A 和 I 是某些有限集合；而 L 的生成过程就是一个从字符串到字符串的函数，其像为 L（输入字符串是某些有限集合 B 和 J 的 B^J 中的元素）。这样的函数 $f: B^J \to A^I$ 具有内在的通信结构：I 中的输出单元通过读取 J 中公共输入单元的内容来进行隐式通信。通信复形 K_f 捕捉了 f 的这一结构，其顶点集为 I，其单形是 I 中读取同一个输入单元的那些子集。于是，如果存在一个函数 f 生成 L，使得 $K_f \subseteq K$，我们就称 I 上的单纯复形生成 L。因此，一般问题就是确定生成给定语言 L 的单纯复形，而确定其中的极小复形就足够了。

我们将这一框架应用于 Mon_n，其行为结果表明具有特别丰富的性质。特别是，当 n 增大时，似乎不存在一种统一的方法来描述生成 Mon_n 的极小复形。

主要结果概述。 每一种生成 Mon_n 的方式，都可以按以下简单方式扩展为 Mon_{n+1} 的生成过程：生成 Mon_n 中的一个元素，并在给定位置插入一位。新位允许取的值只取决于插入位置两侧两个位置上出现的值，因此新位置只需与这两个位置通信。于是，每个生成 K Mon_n 的复形 Mon_{n+1}都会诱导出生成 K Mon K 的复形：以某种方式在（定义 4.3）中插入一个顶点即可得到。 的极小性并不总能推出新复形的极小性，但我们确定了保持极小性的判据（命题4.4）。

因此，生成 Mon_n 的极小复形分为两类：要么通过顶点插入从生成 Mon_{n-1} 的极小复形得到，要么在这个特定的 n值下出现，从而提供一种生成 Mon_n的新方式。对于 $n = 2$，有 $\mathsf{Mon}_2 = \{0, 1\}^2$，因此存在一种完全不需要单元之间通信的平凡生成过程，该过程由复形 $K_2 = \langle\{0\}, \{1\}\rangle$ 体现：它由两个顶点组成且没有边。我们证明，对于 $n = 5$，7和 8，会出现新的生成过程，由我们自然地称为 K_5，K_7 和 K_8的复形加以体现（命题3.1、3.2 和 3.3）。

接下来，我们对生成 Mon_n 的极小复形进行部分分类。

命题 (命题6.1)。生成 Mon$_n$且包含若干个大小为 $n-1$ 的单形的极小复形，均可由 K_2 经顶点插入得到，其形式为 $\langle I_n \setminus \{a\},\ I_n \setminus \{b\}\rangle$ 其中 $a,\ b \in I_n$ 互不相同。

定理 (定理6.1)。 生成 Mon$_n$ 且包含一个大小为 $n-1$ 的单形的极小复形，可通过在顶点处插入，从 K_5 得到。

在所有这些复形中，极大单形结果都是区间，即形如 $[i,j]$ 或 $[0,i]\cup[j,n-1]$ for $0 \le i < j < n$ 的集合（将 I_n 与 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$视为相同并将其排列在圆上时，它们确实是区间）。我们将证明这并非巧合。

定理 (定理4.2)。 设 K 是生成 Mon$_n$的极小复形。 K 的极大单形都是区间。

我们还证明了一个对所有 n都成立的结果，研究生成 Mon$_n$ 的复形的区间可以有多小。更准确地说，令 $\mu(n)$为满足以下条件的最小 k：存在一个生成 Mon$_n$ 的复形，其区间长度至多为 k。我们证明 $\mu(n) \simeq \frac{3n}{4}$。

定理 (定理 7.1)。 对于 $n \ge 8$，有

$$\left\lfloor \frac{3n+1}{4} \right\rfloor \le \mu(n) \le \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil .$$

我们还引入了一个推理系统，原则上可用于表达大多数证明复形不生成某种语言的论证。该推理系统已实现 [Hoy25b]，并用于通过穷举搜索帮助找到本文中一些最具技术性的论证。请注意，这种自动化工具更接近证明助手，而非自动定理证明器，并且仅用于检验假设和解决特定情形。当 n 增大时，它很快就变得不切实际，而且无法独自找到诸如定理7.1这样的普遍性陈述的证明。

以局部方式进行计算、尽量减少单元之间的通信，这一思想已被形式化，并以多种方式加以研究：元胞自动机 [Kar05，DFP12], 自动机网络 [GM90，Gad19，GGPT21],分布式反应系统 [PR90], 分布式网络 [NS95], 分布式图自动机 [Rei15], 分布式环境 [FG18], 分布式计算 [HS99，HKR13]。通常使用图或单纯复形来表示分布式环境中的通信结构：自动机网络中的交互图 [Gad19]，或输入和输出

分布式计算中的复形 [HS99]。正如 [Hoy25c], 本文所研究的局部生成问题可以借助组合拓扑重新表述，如 [HS99、HKR13], 我们还简要讨论了文章末尾Mon$_n$ 情形下的这种重新表述。

本文结构安排如下。在第2节，我们简要介绍主要定义。在第3节，我们找出一些生成Mon$_n$的 $n = 5$、7、8。在第4 节，我们证明若干结构性结果，例如，生成Mon$_n$ 的极小复形总是由区间构成。在第5 节，我们介绍一个统一框架，用于呈现否定性结果的证明，并介绍后续论证中使用的技术工具。在第6节，我们证明第Mon$_n$ 节中介绍的生成3的复形族具有极小性。在第7节，我们证明，在生成Mon$_n$的复形中，其区间的最大长度至少约为 $\binom{3n}{4}$，且这个下界是紧的。在第8节，我们简要讨论用组合拓扑术语重新表述该问题，并列出几个开放问题。部分技术性证明放在第A节。

2 定义

2.1 背景

我们简要回顾 [Hoy25c] 中引入的主要概念。本研究有两个主要对象：语言和通信复形。

语言是一个集合 $L \subseteq A^I$，其中 A、I 是有限集合。我们常考虑 $I = I_n = [0, n-1]$ 的情形，其中 $n \geq 1$，并将 A^{I_n} 记作 A^n。若 B、J 是有限集合，则函数 $f\colon B^J \to A^I$ 在 $L = \mathrm{im}(f)$ 时生成 L。I 的元素称为输出单元，J 的元素称为输入单元。每个输出单元 $i \in I$ 都会计算自己的函数 $f_i(x)$，它是位置 i 处 $f(x)$ 的值。通常，它只取决于输入 x 在某些输入单元上的值。为了共同生成 L 的字符串，输出单元需要一定程度的协调；通过读取共同的输入单元所允许的隐式通信，使这种协调成为可能。f 的通信复形刻画了这种底层通信结构。每个 $i \in I$ 都关联一个输入窗口 $\mathcal{W}_f(i) \subseteq J$，它是决定 f_i 值的最小子集 $W \subseteq J$；也就是说，对于所有 x、$y \in B^J$，若它们在 W 上的限制相同，记作 $x|_W = y|_W$，则 $f_i(x) = f_i(y)$。对偶窗口对 $j \in J$ 定义为 $\mathcal{W}^f(j) = \{i \in I\colon j \in \mathcal{W}_f(i)\}$。$f$ 的可见性图是集合 $\{(i,j) \in I \times J\colon j \in W_f(i)\} = \{(i,j) \in I \times J\colon i \in W^f(j)\}$，并以二值矩阵表示。对于 $S \subseteq I$，我们

定义

$$\mathcal{W}_f(S) = \bigcap_{i \in S} \mathcal{W}_f(i) = \{j \in J : S \subseteq \mathcal{W}^f(j)\},$$

它是 S 中所有输出单元都能看到的输入单元集合。 f 的**通信复形**记为 K_f，它是定义在顶点集 I 上的单纯复形，对 $S \subseteq I$ 定义如下：

$$S \in K_f \iff \mathcal{W}_f(S) \neq \emptyset.$$

我们通常将单纯复形 K 写作 $K = \langle S_0, \ldots, S_k \rangle$，其中 S_i 是 K 的极大单形。

定义 2.1（语言生成）。设 $L \subseteq A^I$ 是一种语言， K 是定义在顶点集 I 上的单纯复形。若存在 B, J 以及函数 $f\colon B^J \to A^I$，使得 $\mathrm{im}(f) = L$ 且 $K_f \subseteq K$，则称 K **生成** L。

本研究的总体目标是：对于任意给定的语言 L，描述所有生成 L 的单纯复形所构成的集合。这个集合是向上闭合的，即若 $K \subseteq K'$ 和 K 生成 L，那么 K' 也生成 L；因此，我们的目标是找出生成 L 的极小复形。

我们列出 [Hoy25c] 中的一些一般性结果，本文将用到这些结果。首先，如果一个复形生成一种语言，那么可以用规范的方式选择生成函数的输入空间。

命题 2.1（规范形式）。设 $L \subseteq A^I$ 和 K 是定义在顶点集 I 上、生成 L 的复形。设 $B = L$，且令 J 为 K 的极大单形集。存在一个函数 $f\colon B^J \to A^I$，它生成 L，使得 $K_f \subseteq K$，并且对于每个 $x \in L$， $f(x, \ldots\ldots, x) = x$。

特别地，总存在一个按如下方式工作的生成过程：为每个极大单形指定一个 B 中的值，而每个顶点 $i \in I$ 都有一条局部规则，该规则读取与其关联的单形的值后，确定一个 A 中的输出值并将其指定给 i。此外，可以选择 $B = L$；如果与某个顶点 i 关联的所有单形都具有相同的值 $x \in L$，那么 v 取值为 x_i。

如果语言 M 是语言 L 在某个函数 f 下的像，那么 L 的任意生成函数通过复合都会诱导出 M 的一个生成函数。它对通信复形的变换方式可以用 f 表示如下。

命题 2.2 (语言的像)。 设 $L \subseteq {A_0}^{I_0}$ 和 $f: {A_0}^{I_0} \to {A_1}^{I_1}$。如果复形 K 生成 L，那么复形 $f_*(K)$ 生成 $f(L)$，其中 $f_*(K)$ 由以下集合诱导而成，对 $S \in K$:

$$f_*(S) = \bigcup_{j \in S} \mathcal{W}^f(S).$$

设 $L \subseteq A^I$。我们称两个不同的位置 $i, j \in I$ 相对于 L 独立，如果对于所有满足 $x_i = a$ 和 $y_j = b$ 的 $a, b \in A$，只要存在满足 $z_i = a$ 和 $z_i = b$ 的 $x, y \in L$，就存在满足 $z_i = a$ 和 $z_i = b$ 的 $z \in L$。直观来说，在 L 中生成字符串时，这些位置上的值可以独立选择，也就是说，i 和 j 之间没有通信。事实上，正如 Hoy25c 的推论 2.4], 所证明的，如果 i 和 j 相对于 L 独立，那么复形 $K = \langle I \setminus \{i\}, I \setminus \{j\} \rangle$ 会生成 L。这个想法很简单：i 和 j 直接从两个不同的输入单元中获取各自的值，而所有其他输出单元都能看到这两个输入单元；因此，这些输出单元都知道 i 和 j 取了什么值，于是便能共同商定 L 中一个扩展这些值的序列。

在本文中，我们分析语言 $\mathsf{Mon}_n \subseteq \{0,1\}^n$，它是由单调（即非递减或非递增）二进制序列构成的集合。具体而言，

$$\mathsf{Mon}_n = \{0^{n-k}1^k : 0 \leq k < n\} \cup \{1^{n-k}0^k : 0 \leq k < n\}.$$

我们的目标是确定对于 n的任意取值，所有生成 Mon_n 的单纯复形。

2.2 区间

将 $I_n = [0, n-1]$ 与 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$对应起来会很方便；后者可以在圆上图示排列。正如我们将在第 4.2节中看到的，对 Mon_n 的分析表明，由“连续”位置构成的单形——我们称之为区间——发挥着重要作用。

更确切地说，对于 $a,\ b \in \mathbb{Z}$ 我们如下定义 $[\![a,\ b]\!] \subseteq I_n$：

$$[\![a, b]\!] = \{c \bmod n : c \in \mathbb{Z}, a \leq c \leq b'\},$$

其中，$b' \in \mathbb{Z}$ 是满足 $a \leq b < a + n$的 b 模 n 的唯一代表元。**区间**是 $[\![a,\ b]\!]$，其中 $a,\ b \in \mathbb{Z}$。注意，$[\![a,\ a+n-1]\!] = I$，但 $[\![a,\ a+n]\!] = [\![a,\ a]\!] = \{a\}$。由于区间 $[\![a,\ b]\!]$只取决于 a 和 b 模 n的等价类，我们有时会使用记号 $[\![a,\ b]\!]$，其中 $a,\ b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。

$[\![a,\ b]\!]$ 的大小为 $1 + ((b - a) \bmod n)$，即 $1 + b - a$ 在 $[1, n]$中模 n 的代表元。对于 $k \in [1, n]$，k**区间**是大小为 k的区间。

设 $\mathbb{I}$、$\mathbb{J}$为两个区间。若 $\mathbb{I} \angle \mathbb{J}$当且仅当 $\mathbb{I} \cup \mathbb{J} = [\![a, d]\!]$其中 $\mathbb{I} = [\![a, c]\!]$且 $\mathbb{J} = [\![b, d]\!]$。直观地说，这意味着 $\mathbb{I}$ 和 $\mathbb{J}$ 相互重叠，并且 $\mathbb{I}$ 位于 $\mathbb{J}$"之前"。我们给出一个简单的判据，如图 1所示。

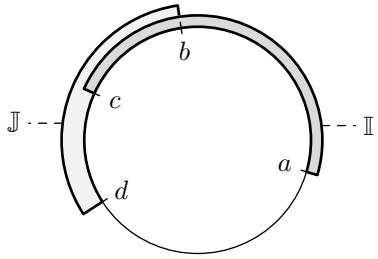


图 1：$\mathbb{I} \angle \mathbb{J}$

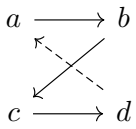
引理 2.1。设 a、b、c、$d \in \mathbb{Z}$。若 $a \le b \le c \le d < a + n$，则 $[\![a, c]\!] \angle [\![b, d]\!]$。

证明。由于 $a \le b \le c \le d$，$\mathbb{Z}$ 中的区间满足 $[a, c] \cup [b, d] = [a, d]$。

设 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是一个将数映射到其模 n 等价类的函数。对于一对 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$，若 $x \le y < x + n$，则 $f([x, y]) = [\![x, y]\!]$。

引理的条件意味着数对 $(a,\ c)$、$(b,\ d)$ 和 $(a,\ d)$ 满足这些不等式，因此 $[\![a,\ c]\!] \cup [\![b,\ d]\!] = f([a, c]) \cup f([b, d]) = f([a, c] \cup [b, d]) = f([a, d]) = [\![a,\ d]\!]$。 □

使用引理 2.1 证明 $[\![a,\ c]\!] \angle [\![b,\ d]\!]$ 时，我们将用下面的图示总结需要检验的不等式：



其中，实线箭头 $a \to b$ 表示 $a \le b$，虚线箭头 $d \dashrightarrow a$表示 $d < a + n$。这些图示的优势将在引理 5.2 和 7.1的证明中显现，因为它们可以串接起来，以简洁的方式概括大量不等式。

2.3 复形的图形表示

本研究中遇到的单纯复形通常维数很高，因而几乎无法可视化。幸运的是，本文讨论的所有单纯复形都由区间生成，因此具有简单的图形表示。下面通过一个例子来说明这种表示，我们将在第 3.1 节再次遇到它。

令 K_5 为定义在 $I_5 = [0,4]$ 上的单纯复形，其定义如下：

$$K_5 = \langle [\![0,2]\!], [\![1,3]\!], [\![2,4]\!], [\![3,1]\!] \rangle.$$

该复形可视化如下图图2所示，其中第一列列出 $[0, n-1]$ 中的顶点，后续各列表示极大区间。这种表示与函数的可见性图密切相关，但更为简洁，因为它只展示极大单形，且每个极大单形恰好展示一次。

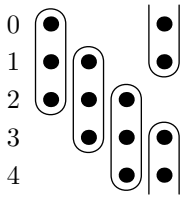


图2： K_5 的图形表示

2.4 对称性

语言 Mon_n 有两种对称性。对于 $b \in \{0,1\}$，令 $\bar{b} = 1-b$。如果 $x = x_0 \dots x_{n-1}$ 是单调的，那么：

- 其反射 $x_{n-1} \dots x_0$ 是单调的，
- 通过循环置换和比特翻转得到的序列 $x_{n-1} x_0 \dots x_{n-2}$ 是单调的。

这些对称性由二面体群的作用所刻画

$$\mathrm{D}_{2n} = \left\langle r, s \middle| r^{2n} = s^2 = (sr)^2 = 1 \right\rangle$$

定义如下：

$$\begin{aligned} r \cdot (x_0 \dots x_{n-1}) &= \overline{x_{n-1}} x_0 \dots x_{n-2}, \\ s \cdot (x_0 \dots x_{n-1}) &= x_{n-1} \dots x_0. \end{aligned}$$

D_{2n} 在 Mon_n 上的作用是传递的，也就是说，如果 $x,\ y \in \mathsf{Mon}_n$，那么存在 $g \in \mathsf{D}_{2n}$，使得 $y = g \cdot x$。事实上，0^n 在 r v 的作用下的轨道会遍历 Mon_n 的每个元素：

$$0^n \to 10^{n-1} \to \ldots \to 1^{n-1}0 \to 1^n \to 01^{n-1} \to \ldots \to 0^{n-1}1 \to 0^n.$$

我们将在一些论证中利用传递性：先对一个序列证明结果，再通过对称性得到完整结果。

Mon_n 的对称性会在生成 Mon_n 的单纯复形类上诱导出对称性。为准确表述这一点，我们考虑 D_{2n} 在 I_n 上的作用：

$$r \cdot i = i + 1 \bmod n,$$
$$s \cdot i = n - 1 - i.$$

这两个作用密切相关：$(g \cdot x)_i$ 是 g 的函数，i 以及 $x_{g^{-1} \cdot i}$，也就是说，它不依赖于 x 在其他位置上的值。

若 K 是 I_n 上的单纯复形，且 $g \in \mathsf{D}_{2n}$，则令 $g \cdot K = \{g \cdot S : S \in K\}$，其中 $g \cdot S = \{g \cdot i : i \in S\}$，对 $S \subseteq I_n$ 均成立。

命题 2.3 (对称性)。若复形 K 生成 Mon_n，则对每个 $g \in \mathsf{D}_{2n}$，复形 $g \cdot K$ 都生成 Mon_n。

证明。令 $g \in \mathsf{D}_{2n}$，并考虑函数 $f : x \mapsto g \cdot x$。为了计算 $f_i(x)$，只需知道 x 在位置 $g^{-1} \cdot i$ 的值：它要么是 $x_{g^{-1} \cdot i}$，要么是 $\overline{x_{g^{-1} \cdot i}}$。因此，有 $\{g^{-1} \cdot i\}$ 取决于 $\mathcal{W}_f$ 和 i。于是对任意复形 $j = g \cdot j$，$\mathcal{W}_{f_*K}$ 均成立。命题 2.2 表明，若 $f_* K = g \cdot K$ 生成 Mon_n，则 K 生成 $f(\mathsf{Mon}_n) = \mathsf{Mon}_n$。 □

类似的结果已在 [Hoy25c的命题 2 中得到证明。6], 假设对称群通过置换符号作用于语言。在这里，该作用还会翻转符号的值，但论证基本相同。

3 生成Mon_n的复形示例

在本节中，我们找出若干生成 Mon_n 的复形，并将在后文证明它们的极小性。这些例子是特殊情形；目前我们还没有对生成 Mon_n 的极小复形（任意 $n \in \mathbb{N}$）作出完整分类。

首先要注意，对于 $n \geq 2$，任意一对不同元素 i， $j \in I_n$ 相对于 Mon_n 都是独立的，因为对 i和 j 赋予任意二进制值，都可以将其扩展为一个单调序列。如第2.1节所述，这意味着复形 $\langle I_n \setminus \{i\},\ I_n \setminus \{j\}\rangle$ 生成 Mon_n。待我们建立必要的工具后，就能证明这个复形是极小的。

事实证明，对于 $n \geq 5$，还有其他生成 Mon_n 的复形。我们给出 $n = 5$、7 和 8 的三个示例。相应的生成过程是先排除其他复形，然后通过试错设计出相应的生成过程。稍后我们将看到，这些复形是生成 Mon_n 的极小生成复形。

3.1 生成Mon_5 的复形

对于 $n = 5$，令

$$K_5 = \langle [\![0,2]\!], [\![1,3]\!], [\![2,4]\!], [\![3,1]\!] \rangle$$

该复形已在图 2 中展示过，我们在此于图 3 中再次给出。我们证明它生成 Mon_5。

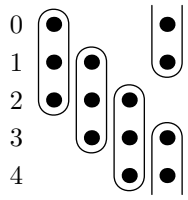


图3：复形 K_5

命题 3.1。 复形 K_5 生成 Mon_5。

证明。 将 $[0,4]$ 中的元素重新命名为 A， B， C， D， E很方便。我们设计了一个生成过程，它是一个函数 f： $\{0,1\}^{\{a,b,c,d,e\}} \to \{0,1\}^{\{A,B,C,D,E\}}$ 以二进制序列为输入，并对其进行修正，使其变为单调序列。其可见性图如图 4所示（第 A 行、第 a 列中的方格表示 A 读取 a，即 $a \in \mathcal{W}_f(A)$，或等价地 $A \in \mathcal{W}^f(a)$）。

函数 f 使用三元多数函数 $\mathsf{maj}: \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$，它能纠正输入缺乏单调性的问题，也就是说，该函数

$$\begin{aligned} \{0,1\}^3 &\to \{0,1\}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto (x, \mathrm{maj}(x,y,z), z) \end{aligned}$$

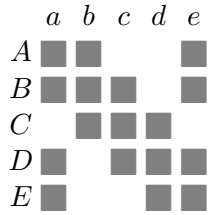


图4：生成 Mon_5 的函数的可见性图

始终输出单调序列，并且当输入序列已经单调时保持不变。注意，maj 与比特翻转可交换：

$$\mathrm{maj}(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \overline{\mathrm{maj}(x,y,z)}.$$

输出单元具有以下局部规则：

$$\begin{aligned}
\mathtt{A}(\mathtt{e},\mathtt{a},\mathtt{b}) &= \mathtt{maj}(\overline{\mathtt{e}},\mathtt{a},\mathtt{b})\\
\mathtt{B}(\mathtt{e},\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}) &= \mathtt{maj}(\mathtt{A},\mathtt{b},\mathtt{c})\\
\mathtt{C}(\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d}) &= \mathtt{maj}(\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d})\\
\mathtt{D}(\mathtt{c},\mathtt{d},\mathtt{e},\mathtt{a}) &= \mathtt{maj}(\mathtt{c},\mathtt{d},\mathtt{E})\\
\mathtt{E}(\mathtt{d},\mathtt{e},\mathtt{a}) &= \mathtt{maj}(\mathtt{d},\mathtt{e},\overline{\mathtt{a}}),
\end{aligned}$$

其中，maj(A，b，c) 表示 maj(A(e，a，b)，b，c) = maj(maj(e，a，b)，b，c)，maj(c，d，E) 也类似。直观来说，每个输出单元都会读取相应的输入单元及其邻居，并进行多数投票；需要注意的是，B 使用的是输出值 A，而非输入值 a，且 D使用的是输出值 E，而非输入值 e。

验证。令 $f: \{0,1\}^{\{a,b,c,d,e\}} \to \{0,1\}^{\{A,B,C,D,E\}}$ 为由这些局部规则导出的全局函数。根据构造，其通信复形为 K_5；我们来验证其像是 Mon_5。

首先，如果 $abcde$ 是单调的，那么 $f(abcde) = abcde$，因此 $\mathrm{im}(f)$ 包含 Mon_5。反过来，我们证明 f 的每个输出都是单调的。由于 f与比特翻转可交换，即 $f(abcde) = f(\overline{abcde})$，因此只需证明 $a = 0$时的结果。假设 $a = 0$，f 的部分求值如下表所示：

$\mathtt{e}=0$	$\mathtt{e}=1$
$\mathtt{A}=\mathtt{b}$	$\mathtt{A}=0$
$\mathtt{B}=\mathtt{b}$	$\mathtt{B}=\mathtt{b}\wedge\mathtt{c}$
$\mathtt{C}=\mathtt{maj}(\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d})$	$\mathtt{C}=\mathtt{maj}(\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d})$
$\mathtt{D}=\mathtt{d}$	$\mathtt{D}=\mathtt{c}\vee\mathtt{d}$
$\mathtt{E}=\mathtt{d}$	$\mathtt{E}=1$

容易验证， $ABCDE$ 始终是单调的。 □

3.2 一个生成 Mon 的复形$_7$

对于 $n=7$，复形

$$K_7=\{[\![0,4]\!],[\![1,5]\!],[\![2,6]\!],[\![4,1]\!],[\![5,2]\!]\}$$

如图 5所示，生成 Mon_7。

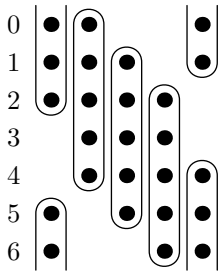


图5：复形 K_7

命题 3.2。 复形 K_7 生成 Mon_7。

证明。 我们定义一个函数 f： $\{0,1\}^{\{a,b,d,f,g\}}\to\{0,1\}^{\{A,B,C,D,E,F,G\}}$，其可见性图如图6所示。

正如命题 3.1所述，每个输出单元都使用输入值和输出值的混合进行多数投票：

$$\begin{aligned}
\mathtt{A}(\mathtt{g},\mathtt{a},\mathtt{b})&=\mathtt{maj}(\overline{\mathtt{g}},\mathtt{a},\mathtt{b})\\
\mathtt{B}(\mathtt{g},\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{d})&=\mathtt{maj}(\mathtt{A},\mathtt{b},\mathtt{d})\\
\mathtt{C}(\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{d},\mathtt{f})&=\mathtt{maj}(\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{D})\\
\mathtt{D}(\mathtt{b},\mathtt{d},\mathtt{f})&=\mathtt{maj}(\mathtt{b},\mathtt{d},\mathtt{f})\\
\mathtt{E}(\mathtt{b},\mathtt{d},\mathtt{f},\mathtt{g})&=\mathtt{maj}(\mathtt{D},\mathtt{f},\mathtt{g})\\
\mathtt{F}(\mathtt{d},\mathtt{f},\mathtt{g},\mathtt{a})&=\mathtt{maj}(\mathtt{d},\mathtt{f},\mathtt{G})\\
\mathtt{G}(\mathtt{f},\mathtt{g},\mathtt{a})&=\mathtt{maj}(\mathtt{f},\mathtt{g},\overline{\mathtt{a}}).
\end{aligned}$$

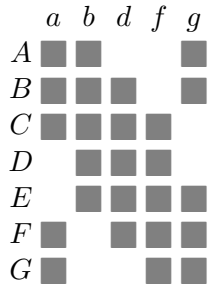


图 6：生成 Mon 的函数的可见性图[7]

验证。 我们首先证明该过程只生成单调序列。由于它与比特翻转可交换，因此我们只需考虑 $a = 0$ 的情况。下一个表格给出了该函数的部分求值。注意，maj(x、 y和 0) $= x \wedge y$ 以及 maj(x、 y和 1) $= x \vee y$。

若 g = 1	若 g = 0 且 d = 0	且 d = 1
A = 0	A = b	A = b
B = b ∧ d	B = b	B = b
C = b ∧ (d ∨ f)	C = b ∧ f	C = b
D = 多数函数(b，d，f)	D = b ∧ f	D = b ∨ f
E = (b ∧ d) ∨ f	E = b ∧ f	E = f
F = d ∨ f	F = f	F = f
G = 1	G = f	G = f

无论如何，都很容易验证输出序列是单调的。反过来，我们将证明每个单调序列都能得到。由于该函数与比特翻转可交换，只需验证每个以 A = 0 开头的序列都能得到。下表显示，每个这样的序列都是某个输入序列的像。要验证某个特定输入的像是某个特定输出，例如 0001111，只需验证 CD = 01，因为这样 0001111 就是它唯一的单调扩展。下表中，我们将需要验证的输出值加了下划线:

abdfg	ABCDEFG
00000	$\underline{0}000000$
00001	$0000\underline{01}$
00010	$0000\underline{01}1$
00011	$000\underline{01}11$
00110	$00\underline{01}111$
01011	$0\underline{011}1111$
01111	$\underline{01}11111$

□

3.3 生成复形Mon_8

对于 $n = 8$，该复形

$$K_8 = \langle [\![0, 5]\!], [\![2, 7]\!], [\![4, 1]\!], [\![6, 3]\!] \rangle$$

如图所示：7生成Mon_8。

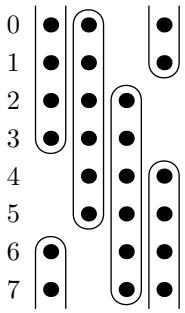


图 7：复形 K_8

命题 3.3。复形 K_8 生成 Mon_8。

证明。我们设计一个函数 ϕ： $\{0,1\}^{\{a,b,c,d,e,f,g,h\}} \to \{0,1\}^{\{A,B,C,D,E,F,G,H\}}$。将输出单元和输入单元配对汇集起来会更方便：若 $\Sigma = \{00, 01, 10, 11\}$，则该函数可视为 ϕ： $\Sigma^{\{ab,cd,ef,gh\}} \to \Sigma^{\{AB,CD,EF,GH\}}$。其可见性图见图 8。

我们定义一个校正规则 ρ: $\Sigma^3 \to \Sigma$，然后令

$$\begin{aligned}
\mathtt{AB}(\mathtt{gh}, \mathtt{ab}, \mathtt{cd}) &= \rho(\overline{\mathtt{gh}}, \mathtt{ab}, \mathtt{cd}),\\
\mathtt{CD}(\mathtt{ab}, \mathtt{cd}, \mathtt{ef}) &= \rho(\mathtt{ab}, \mathtt{cd}, \mathtt{ef}),\\
\mathtt{EF}(\mathtt{cd}, \mathtt{ef}, \mathtt{gh}) &= \rho(\mathtt{cd}, \mathtt{ef}, \mathtt{gh}),\\
\mathtt{GH}(\mathtt{ef}, \mathtt{gh}, \mathtt{ab}) &= \rho(\mathtt{ef}, \mathtt{gh}, \overline{\mathtt{ab}}).
\end{aligned}$$



图 8：生成 Mon_8 的函数的可见性图

为了定义 ρ，我们称 $x \in \Sigma$ 是常值块，如果 $x = 00$ 或 $x = 11$。如果 $x \in \Sigma$，那么 x_0 表示它的首位比特。对于 x，y，$z \in \Sigma$，$\rho(x, y, z)$ 的定义取决于 x，y，z 中常值块的数量 k：

- 若 $k = 0$ or 3，则 $\rho(x, y, z) = pp$，其中 $p = \mathsf{maj}(x_0, y_0, z_0)$，
- 若 $k = 1$，则 $\rho(x, y, z)$ 是唯一的常值块，
- 若 $k = 2$：若 y 是常数，则 $\rho(x, y, z) = y$；否则 $\rho(x, y, z) = x_0 z_0$。

我们首先验证，若 xyz 单调，则 $\rho(x, y, z) = y$。注意，$k = 2$ or 3。若 $k = 3$，则 $\rho(x, y, z) = y$。若 $k = 2$ 且 y 是常数，则 $\rho(x, y, z) = y$。若 $k = 2$ 且 y 非常数，则 $x \neq z$，因此 $\rho(x, y, z) = x_0 z_0 = y$。

因此，如果 $xyzt$ 是单调的，那么 $\phi(x, y, z, t) = xyzt$，所以 f 的像包含 Mon_8。

我们证明 $\mathsf{im}(f) \subseteq \mathsf{Mon}_8$。先给出一个初步观察。

断言 1. 函数 $\phi_0 : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^4$ 定义如下：

$$\phi_0(x, y, z, t) = (\mathrm{maj}(\overline{t}, x, y), \mathrm{maj}(x, y, z), \mathrm{maj}(y, z, t), \mathrm{maj}(z, t, \overline{x}))$$

生成 Mon_4。

如果 $xyzt$ 是单调的，那么 ϕ_0 将该序列映射到自身，因此 $\mathsf{Mon}_4 \subseteq \mathsf{im}(\phi_0)$。我们证明每个 $s = \phi_0(x, y, z, t)$ 都属于 Mon_4。由于 ϕ_0与群 D_8，的作用可交换，只需证明如果 $s_0 = s_3$，那么 s 是常数。事实上，每个字符串 s 都可以通过迭代 D_8 的作用变为满足 $s'_0 = s'_3$ 的字符串 s'：如果 $s_0 \neq s_3$，那么存在 $i \in [0, 2]$ 使得 $s_i \neq s_{i+1}$，因此 $s' = r^{3-i} \cdot s$ 满足 $s'_0 = s_{i+1} = s_i = s'_3$。

假设 $s_0 = s_3$。必须有 $x = t$ 和 $y = s_0 = s_3 = z$，因此 $s_1 = s_2 = y = z$，所以 s 是常数。命题得证。

令 k 为 x、y、z、t 中常值块的数量：

- 如果 $k = 0$ 或 $k = 4$，那么 $\phi(x、\ y、\ z、\ t) = ppqqrrss$ 其中 $pqrs = \phi_0(x_0、\ y_0、\ z_0、\ t_0)$. 由于 $pqrs$是单调的， $ppqqrrss$也是单调的。

- 若 $k = 1$，由对称性可设 y 为常数。存在某个 $p \in \{0, 1\}$，使得 $\phi(x,\ y,\ z,\ t) = yyypp$，因此它是单调的，

- 若 $k = 2$，那么由对称性可设 x为常数，且 y 或 z 为常数。第一种情况下， $\phi(x,\ y,\ z,\ t) = xyyx$ 是单调的；第二种情况下， $\phi(x,\ y,\ z,\ t) = xx_0z_0zz_0x_0$ 是单调的，

- 若 $k = 3$，由对称性可设 t不是常数。存在 $\phi(x,\ y,\ z,\ t) = xppzz_0x_0$，其中 $p =$是多数函数$(x_0,\ y_0,\ z_0)$，它是单调的。

□

备注 3.1。 生成 Mon_8 的函数定义相当技术化，不如生成 Mon_5 和 Mon_7的函数表述得优雅。若能找到更清晰的定义或函数，将会很有意义。

4 结构性结果

现在，我们证明关于任意 n 的 Mon_n 生成的一般结果。

我们先给出一个关于一般语言的结果，随后将其应用于 Mon_n，以证明生成 Mon_n 的极小复形仅以区间作为极大单形。

4.1 分解

我们从 [Hoy25c] 回顾，若语言 $L \subseteq A^I$ 存在一个非平凡划分 $I = X \sqcup Y$，使得对每个 $w \in A^I$，若 $w|_X$和 $w|_Y$ 在 L中有扩展，则 $w \in L$。直观来说，这意味着 X 和 Y 的内容可以独立选择。我们在 [Hoy25c]中证明，在这种情况下，每个生成 L的极小复形都由包含于 X 或 Y中的单形构成，因此 X 与 Y之间不存在通信。

对于 $n \geq 3$，语言 Mon_n 是不可约的，因此无法应用这一结果。不过，我们通过放宽 X 与 Y 不相交这一条件，证明了该结果的一个推广。

定义 4.1。令 $X,\ Y \subseteq I$ 满足 $X \cup Y = I$。如果对每个 $w \in A^I$，当 $w|_X$ 和 $w|_Y$ 在 L 中具有扩展时都有 $w \in L$，则称 X 和 Y**分解** $L \subseteq A^I$。

直观地说，在固定 $X \cap Y$ 的内容后，可以彼此独立地填充 $I \setminus X$和 $I \setminus Y$ 的内容。

定理 4.1。设 $X \cup Y = I$，并假设 X 和 Y 分解 L。若 K是生成 L的极小复形，则每个同时与 X 和 Y 相交的极大单形都与 $X \cap Y$相交。

证明。设 J 是 K的极大单形集合，B 是有限集，且 $f\colon B^J \to A^I$ 生成 L，使得 $K_f \subseteq K$（因此 $K_f = K$ 根据 K的极小性）。由命题 2.1 可知此函数存在。反设对某个 $p \in J$，$\mathcal{W}^f(p)$ 同时与 X和 Y相交，但不与 $X \cap Y$相交，即 $\mathcal{W}^f(p) \subseteq X \cup Y$。

思路是将输入单元 p 替换为两个新的输入单元 p_X 和 p_Y。每个原本读取 p 的输出单元 $i \in I$，现在会根据 $i \in X$ 或 $i \in Y$，改为读取 p_X 或 p_Y。问题在于，一般情况下 p_X和 p_Y 存储的值并不相同，因此对于一般的语言，输出未必正确；但分解假设意味着输出确实正确。

更精确地，令 $J' = J \setminus \{p\} \cup \{p_X, p_Y\}$。令 $\varphi\colon J' \to J$将 p_X和 p_Y分别映到 p，并将其他每个元素映到自身。令 ψ_X，$\psi_Y\colon J \to J'$分别将 p映到 p_X和 p_Y，并将其他每个元素映到自身。注意，$\varphi \circ \psi_X = \varphi \circ \psi_Y = \mathrm{id}_J$。对于 $u \in B^{J'}$，令 $u_X = x \circ \psi_X$（分别地，$u_Y = u \circ \psi_Y$）由将 p_X（分别地，p_Y）的内容复制到 p中得到。

我们定义 $g\colon B^{J'} \to A^I$ 如下：对于 $u \in B^{J'}$ 和 $i \in I$，

$$g_i(u) = \begin{cases} f_i(u_X) & \text{if } i \in X, \\ f_i(u_Y) & \text{if } i \in Y. \end{cases}$$

我们先证明当 $i \in X \cap Y$ 时它是良定义的。序列 u_X和 u_Y除可能在 p 处外处处相同。因此，当 $i \in X \cap Y$ 时，有 $i \notin \mathcal{W}^f(p)$，所以 $f_i(u_X) = f_i(u_Y)$。

显然，$L = \mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{im}(g)$。事实上，对于每个 $u \in B^J$，都有 $g(u \circ \varphi) = f(u)$，因为对于每个 $i \in I$，$g_i(u \circ \varphi)$ 等于 $f_i(u \circ \varphi \circ \psi_X) = f_i(u)$ 或 $f_i(u \circ \varphi \circ \psi_Y) = f_i(u)$。

最后，我们证明 $\mathrm{im}(g) \subseteq L$。令 $u \in B^{J'}$ and $w = g(u)$。根据 g 的定义，w 在 X 上与 $f(u_X)$ 一致，在 Y 上与 $f(u_Y)$ 一致，因此，w 在 X 和 Y 上的限制都能扩展到 L 中。这意味着 $w \in L$，因为 X 和 Y 分解了 L。

通信复形 K_g 真包含于 K。事实上，

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^g(p_X) &= \mathcal{W}^f(p) \cap X \subseteq \mathcal{W}^f(p) \setminus Y \subsetneq \mathcal{W}^f(p),\\ \mathcal{W}^g(p_Y) &= \mathcal{W}^f(p) \cap Y \subseteq \mathcal{W}^f(p) \setminus X \subsetneq \mathcal{W}^f(p),\\ \mathcal{W}^g(q) &= \mathcal{W}^f(q) \text{ for every } q \in J \setminus \{p\}.\end{aligned}$$

这与 K的极小性矛盾。 □

由此可推得前面提到的关于不可约语言的结果：若 X 与 Y 不相交，则 K 的任何极大单形都不会同时与 X 和 Y相交，因为它不可能与 $X \cap Y = \emptyset$相交。

4.2 通信仅通过区间发生

现在我们将此结果应用于 Mon_n。

定理 4.2 (极小复形由区间构成)。 设 K 是生成Mon_n的一个极小复形。 K 的极大单形都是区间。

证明。 设 $0 \le a < b < n$ 彼此不同。我们证明区间 $[\![a, b]\!]$和 $[\![b, a]\!]$ 将 Mon_n分解。原因是，若 w 是单调的，则 w_a 和 w_b 的值唯一确定了 w 在 $[\![a, b]\!]$或 $[\![b, a]\!]$上的值。

假设 $w \in \{0,1\}^n$ 到 $[\![a,\ b]\!]$ 和 $[\![b,\ a]\!]$ 的限制是单调的。有两种情况：

- 如果 $w_a = w_b = v$，由于$w|_{[\![a,\ b]\!]}$ 是单调的，它取常值 v。由于$w|_{[\![b,\ a]\!]}$ 是单调的， w也如此。
- 如果$w_a = \overline{w}_b = v$，由于$w|_{[\![b,\ a]\!]}$ 是单调的， w 在 $[\![0,\ a]\!]$ 上取常值 v，在 $[\![b,\ n-1]\!]$上取常值 v。由于$\overline{w}|_{[\![a,\ b]\!]}$ 是单调的， w也如此。

无论哪种情况， w 都是单调的，因此 $[\![a,\ b]\!]$ 和 $[\![b,\ a]\!]$ 确实分解了 Mon_n。

设 $S \subseteq I_n$ 是 K的一个极大单形。若 S 不是区间，则存在不同的元素 a、 $b \in I_n \setminus S$使得 S同时与 $[\![a$、 $b]\!]$以及 $[\![b$、 $a]\!]$相交。这与定理4.1矛盾，因为 S不与 $[\![a$、 $b]\!] \cap [\![b$、 $a]\!] = \{a, b\}$相交。 □

4.3 顶点删除与插入

有一些简单的方法可以将生成 Mon_n 的复形转换为生成 Mon_{n+1} 的复形，反之亦然。

4.3.1 顶点删除

首先可以观察到，删除一位的操作会将长度为 $n+1$ 的单调序列集合映射到长度为 n 的单调序列集合。因此，只需删除一个顶点并重命名其余顶点，就可以轻松地将任何生成 Mon_{n+1} 的复形转换为生成 Mon_n 的复形。下面将这一想法形式化。

设 $i \in [0,n]$。集合 $[0,n] \setminus \{i\}$ 可通过函数 $\rho_i^-\colon [0,n] \setminus \{i\} \to [0,n-1]$ 和 $\rho_i^+\colon [0,n-1] \to [0,n] \setminus \{i\}$与 $[0,n-1]$ 对应，这些函数定义如下

$$\rho_i^-(j) = \begin{cases} j & \text{if } j < i, \\ j-1 & \text{if } j > i, \end{cases} \quad \text{and} \quad \rho_i^+(j) = \begin{cases} j & \text{if } j < i, \\ j+1 & \text{if } j \geq i. \end{cases}$$

这两个函数互为逆函数。

定义 4.2（顶点删除）。若 K 是 $[0,n]$ 上的复形，则在 K 中删除 i 所得的复形，是由以下方式定义的 $[0,n-1]$ 上的复形

$$\begin{aligned} \mathrm{del}_i(S) &= \rho_i^-(S \setminus \{i\}), \\ \mathrm{del}_i(K) &= \{\mathrm{del}_i(S) : S \in K\}. \end{aligned}$$

它确实是一个复形：若对某个 $S \in K$，有 $T \subseteq \mathsf{del}_i(S)$，则 $T = \mathsf{del}_i(T')$，其中 $T' = \rho_i^+(T)$ 属于 K，因为 T' 包含于 S。

在复形 K的图形表示中，新复形 $\mathsf{del}_i(K)$ 通过移除行 i、将下方各行上移并移除非极大区间得到（见图9）。



(a) 复形 K_5　　(b) 复形 $\mathsf{del}_1(K_5)$

图 9：顶点删除

命题 4.1 (顶点删除与生成)。设 $i \in [0,n]$。若一个复形 K 在 $[0,n]$ 上生成 Mon_{n+1}，则 $\mathrm{del}_i(K)$ 生成 Mon_n。

证明。为简化记号，根据对称性，我们可以假设 $i = n$，因此 ρ_i^-是恒等映射。将最后一位删除的函数 $f\colon \{0,1\}^{[0,n]} \to \{0,1\}^{[0,n-1]}$ 满足 $f(\mathsf{Mon}_{n+1}) = \mathsf{Mon}_n$，并且

$$\mathcal{W}^f(j) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } j = n \\ \{j\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，$f_*(K)$生成Mon_n，根据命题2.2。如果 $S \in K$，那么 $f_*(S) = \bigcup_{j \in S} \mathcal{W}^f(j) = S \setminus \{n\}$。最后，$f_*(K)$是由这些集合诱导的复形，而我们已经看到这些集合本身就构成一个复形。 □

然而，如果 K 是极小生成Mon_{n+1}，那么删去$_i(K)$后可能并不是极小生成Mon_n。例如，我们将在第6.2节看到，K_5是极小生成Mon_5，，然而删去$_1(K_5)$后并非极小，因为它适当地包含了 $\langle I_4 \setminus \{0\},\ I_4 \setminus \{1\}\rangle$ 而后者已经生成了Mon_4（见图9）。

4.3.2 顶点插入

反过来，有一种简单的方法可以将生成 Mon_n 的复形扩展为生成 Mon_{n+1} 的复形，其依据是以下观察：每个 $w \in \mathsf{Mon}_{n+1}$ 都可以通过从某个 $u \in \mathsf{Mon}_n$ 开始，并在某个位置 i 插入一个比特来得到。插入比特的可能值仅取决于 u_{i-1} 和 u_i的值。因此，新单元只需通过读取它们所读取的所有输入单元，与 $i-1$ 和 i进行通信。

同样，通信复形的相应变换也可以很容易地表示出来：它包括添加一个新的顶点，将其添加到包含 $i-1$ 或 i 的所有极大单形中，并对顶点重新命名。

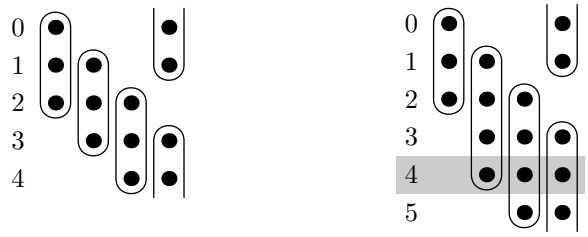
定义 4.3（顶点插入）。令 $i \in [0,n]$。如果 K 是定义在 $[0,n–1]$，上的复形，那么 $\mathsf{ins}_i(K)$ 是由下列集合诱导的、定义在 $[0,n]$ 上的复形

$$\mathrm{ins}_i(S) = \begin{cases} \rho_i^+(S) \cup \{i\} & \text{if } S \text{ contains } i-1 \bmod n \text{ or } i \bmod n, \\ \rho_i^+(S) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $S \in K$。

ins 的图形表示$_i(K)$通过在位置 i 插入一行，并将原索引为 $i-1$ 模 n 和 i 模 n 的行的内容复制到该行中得到（见图 10 ）。

命题 4.2 (顶点插入和生成**)**。设 $i \in [0,n]$。一个复形 K 生成 Mon_n，当且仅当 $\mathrm{ins}_i(K)$生成 Mon_{n+1}。



(a) 复形 K_5 (b) 复形 $\mathrm{ins}_4(K_5)$

图 10：顶点插入

证明。 首先，如果 $\mathrm{ins}_i(K)$ 生成Mon_{n+1}，那么 $K = \mathrm{del}_i(\mathrm{ins}_i(K))$ 根据命题 Mon_n 4.1生成。

现在假设 K 生成 Mon_n。为简化记法，根据对称性，我们假设 $i = n$，因此新顶点是 n，且无需重新命名其他顶点，即 ρ_i^+是恒等映射。

其思路非常简单：$[0, n-1]$ 中的每个输出单元都使用生成 Mon_n的同一生成过程，而新单元 n 读取 0 和 $n-1$所读取的所有输入单元，计算它们的输出值，然后输出任意一个能使扩展序列保持单调的值（如果 0 和 $n-1$ 取相同的值，那么 n 可以取任意值；否则，n 取与 $n-1$相同的值）。此外，新的输出单元还可以访问一个新的输入单元 p，其中包含一个任意数 $k \in \{0,1\}$，因此，如果 0 和 1 两个值都可行，它就输出 k（如果只有一个输出值 a 可行，那么它会忽略 k 并输出 a）。

令 $f\colon B^J \to \mathsf{Mon}_n$ 生成 Mon_n，其中 $K_f \subseteq K$。令 $J' = J \cup \{p\}$，其中 $p \notin J$。Mon_{n+1} 的新生成过程是一个函数 $g : B^{J'} \to \mathsf{Mon}_{n+1}$。有 $\mathcal{W}^g(p) = \{n\}$，且对于 $j \in J$，

$$\mathcal{W}^g(j) = \begin{cases} \mathcal{W}^f(j) & \text{if } \mathcal{W}^f(j) \cap \{0, n-1\} = \emptyset, \\ \mathcal{W}^f(j) \cup \{n\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，$K_g = \mathrm{ins}_n(K_f) \subseteq \mathrm{ins}_n(K)$，所以 $\mathrm{ins}_n(K)$ 生成 Mon_{n+1}。 □

例 4.1。 对于 $n = 2$，复形 $K_2 = \langle \{0\}, \{1\} \rangle$ 生成 $\mathsf{Mon}_2 = \{0,1\}^2$，通过恒等映射 $\mathsf{id} : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}^2$。通过依次插入顶点可从 K_2 得到的复形是形如 $\{I_n \setminus \{i\}, I_n \setminus \{j\}\}$的复形，它们确实生成 Mon_n，如第 3 节开头所述。

如果 K 是 Mon_n的极小生成集，那么复形 $\mathrm{ins}_i(K)$ 可能不是 Mon_{n+1}的极小生成集，即 $\mathrm{ins}_i(K)$ 中的一些极大区间可能会被

更小的区间所替代。我们证明，$\mathsf{ins}_i(K)$ 的一些极大区间无法移除。

命题 4.3. 设 $n \geq 2$ 和 K 是极小生成的 Mon_n。设 $i \in [0, n]$ 和 $K' \subseteq \mathrm{ins}_i(K)$ 生成 Mon_{n+1}。若 I 是 K的一个极大区间，且包含 $\{i-1 \bmod n, i \bmod n\}$，或者与 $\{i-1 \bmod n, i \bmod n\}$不相交，那么 K' 包含$\mathrm{ins}_i(I)$。

证明。为简化记号，利用对称性，不妨设 $i = n$。

注意到 $\mathsf{del}_n(\mathsf{ins}_n(K)) = K$。若 $K' \subseteq \mathsf{ins}_n(K)$ 生成 Mon_{n+1}，则 $\mathsf{del}_n(K') \subseteq \mathsf{del}_n(\mathsf{ins}_n(K)) = K$ 生成 Mon_n，因此根据 K的极小性，$\mathsf{del}_n(K') = K$ 。

因此，若 I 是 K的一个极大区间，则存在 K' 的一个区间 J，使得 $I \subseteq \mathsf{del}_n(J)$。若 I 满足陈述中的条件，则我们证明 $\mathsf{ins}_n(I) \subseteq J$，从而推出 $\mathsf{ins}_n(I) \in K'$。由于 $I = \mathsf{del}_n(J)$，我们已经知道 J 包含 I。

- 如果 I既不包含 0，也不包含 $n-1$，那么 $\mathsf{ins}_n(I) = I \subseteq J$。
- 如果 I同时包含 0 和 $n-1$，那么 J也如此。由于 J是一个区间， J包含 n 或 $[0, n-1]$。后一种情况不可能成立，因为这意味着 $I = \mathsf{del}_n(J) = [0, n-1]$，所以 $[0, n-1] \in K$，这与 K（以及 $n \geq 2$）的极小性矛盾。因此， $n \in J$，故 $\mathsf{ins}_n(I) \subseteq J$。 □

推论 4.1。设 $n \geq 3$、 K 是极小生成的 Mon_n 和 $i \in [0, n]$。假设 K 的每个极大区间都包含 $\{i-, \text{或与之不相交} 1 \bmod n, i \bmod n\}$。复形 $\mathrm{ins}_i(K)$ 是极小生成的 Mon_{n+1}。

这个条件可以表述为 $i-1$ 模 n 和 i 模 n 属于相同的单形，或者读取相同的输入单元。

我们现在弱化推论4.1中的条件。

命题 4.4 (顶点插入与极小性)。设 $n \geq 2$, K 是极小生成的 Mon_n 和 $i \in [0, n]$。假设每个包含 i模 n 的区间 K 都包含 $i-1$模 n （或者对称地，每个包含 $i-1$模 n 的区间 $i-1$都包含 i 模 n）。复形 插入$_i(K)$ 是极小生成的 Mon_{n+1}。

证明。同样，出于对称性，不妨假设 $i = n$ ，以简化记号。

首先注意，$\mathsf{ins}_n(K) \subseteq \mathsf{ins}_{n-1}(K)$。事实上，设 I 是 K的一个区间:

- If $n-1 \in I$, then $\mathrm{ins}_n(I) = \mathrm{ins}_{n-1}(I)$,

- 若 $n-1 \notin I$，则 $0 \notin I$，因此 $\mathrm{ins}_n(I) = I \subseteq \mathrm{ins}_{n-1}(I)$。

现在，设 $K' \subseteq \mathrm{ins}_n(K)$ 生成 Mon_{n+1}，并设 I 是 的一个极大区间 K。我们证明 K' 包含 $\mathrm{ins}_n(I)$。如果 I 包含 $\{0, n-1\}$或与其不相交，那么 K' 根据命题 n (I) 包含 ins4.3。

若 I 包含 $n-1$ 但不包含 0，则 I 包含 $n-2$（I 是极大的，因此不是单元素集，因为 $n \geq 3$），所以 $\mathrm{ins}_n(I) = \mathrm{ins}_{n-1}(I)$。我们对 $i = n-1$应用命题 4.3。由于 I 同时包含 $n-2$ 和 $n-1$，且 $K' \subseteq \mathrm{ins}_n(K) \subseteq \mathrm{ins}_{n-1}(K)$，根据命题 4.3，$K'$ 包含 $\mathrm{ins}_{n-1}(I)$。

我们已经涵盖了所有可能的极大区间 I，因此 $K' = \mathrm{ins}_n(K)$，它是极小的。□

图 10 所示的顶点插入满足命题 4.4的条件：每个极大单形 K_5 包含 4 时也包含 3，因此如果 K_5 是极小生成的 Mon_5（我们将在第 6.2节证明这一点），那么 $\mathrm{ins}_4(K_5)$ 是极小生成的 Mon_6。

5 排除复形的框架

证明某个复形不生成某种语言的主要方法，是先假设它确实生成该语言，再逐步推导出一些约束，表明某些部分输入会被映射到某些部分输出，并最终从相互冲突的约束中推出矛盾：这些约束将相容的部分输入映射到不相容的部分输出。关于这类结果的大多数 [Hoy25c] 证明以及本文中的证明都遵循这一模式，我们认为提出一个统一框架来表达这些论证有助于阐明问题。不过，为了让论证更易于理解，我们不会过度形式化，也不会在证明中明确提及这一框架，而只将其作为指引。

该框架本质上是一个逻辑推理系统，其价值体现在两个方面：它揭示了许多论证中的共同结构，有望使这些论证更加清晰；同时还可以将其转化为一种用于寻找证明的自动化工具。本文中的一些论证是由一个通过穷举搜索冲突的计算机程序发现的（该程序可见于[Hoy25b]）。然而，由于搜索空间的组合爆炸，这种自动化方法很快便会达到极限。此外，它并不能直接解决寻找生成某种语言的全部复形这一问题，而只能作为一种工具，用于帮助排除特定的复形并检验假设。

5.1 推理系统

现在，我们来介绍这一框架。

设 A和 I 是有限集。 A^I 的一个**部分序列**是 A^D 中的一个元素 α，其中 $D \subseteq I$ 称为 α 的**定义域**，记作 $\mathrm{dom}(\alpha)$。两个部分序列 α，β 若有公共扩展，即它们在 $\mathrm{dom}(\alpha) \cap \mathrm{dom}(\beta)$ 上相同，则称它们**相容**。它们的最小公共扩展记作 $\alpha \cup \beta$。

设 $f : B^J \to A^I$ 是一个函数。**部分输入**是 B^J的一个部分序列，**部分输出**是 A^I的一个部分序列。**约束**是一个陈述 $f(\alpha) \succeq p$，其中 α 是部分输入，p 是部分输出。这表示，对于每个扩展了 α的输入 $x \in B^J$，$f(x)$ 都扩展 p。有时我们将约束 $f(\alpha) \succeq p$ 写作 $f_D(\alpha) = p$，其中 $D = \mathrm{dom}(p)$。此外，如果 $\mathrm{dom}(p)$ 是单元素集 $\{i\}$，且 p 将值 v 赋给 i，我们将 $f(\alpha) \succeq p$ 写作 $f_i(\alpha) = v$。

现在我们将注意力限制在二元语言上，即某个 I 的 $\{0,1\}^I$ 子集。**规则** 是由部分二元序列组成的有序对 (p, q)，记作 $p \to q$。若部分二元序列 r **遵循** 规则 $p \to q$，则 r 满足蕴含式

$$r \text{ extends } p \implies r \text{ extends } q,$$

若语言 L 中的每个元素都遵循规则 L，则称语言 L 遵循该规则。

命题 5.1。对于有限集合 I，每个二元语言 $L \subseteq \{0,1\}^I$ 都由其遵循的规则集合唯一确定。此外，部分序列在 L 中有扩展，当且仅当它遵循 L 所遵循的每条规则。

证明。设 r 是 $\{0,1\}^I$ 中一个在 L 中没有扩展的部分序列。存在一个极小集合 $E \subseteq \subseteq \mathrm{dom}(r)$，使得 $r|_E$ 在 L 中没有扩展。由于 L 非空，E 也非空。设 $i \in E$ 且 $p = r|_{E\setminus\{i\}}$。根据 E 的极小性，p 有一个扩展 $y \in L$，令 $q = y|_E$。注意，对于任意扩展 p 的 $z \in L$，必有 $z_i \neq r_i$，否则 $r|_E = z|_E$ 在 L 中有一个扩展 z。特别地，有 $y_i \neq r_i$，因此 r 不扩展 q，故 r 不遵循规则 $p \to q$。

然而，每个 $z \in L$ 都遵循 $p \to q$。事实上，如果 z 扩展了 p，那么我们已经证明 $z_i \neq r_i$，这意味着 $z_i = y_i$（这里我们使用了字母表是二元的这一假设），因此 z 扩展了 q。所以，规则 $p \to q$ 被 L遵循，但不被 r遵循。□

请注意，对于较大的字母表上的语言，一般无法仅用这类规则完整描述。

我们回顾命题 2.1：如果 K 生成 L，那么存在一个生成函数 f ：$L^J \to L$满足 $K_f \subseteq K$，其中 J 是 K的极大单形集合。证明复形 K 不生成给定二元语言 L 的大多数论证，都假设存在这样的生成函数，并利用以下规则推导约束：

语言公理。 对于每个 $w \in L$，都存在 $x \in L^J$ 使得 $f(x) = w$（并且我们可以假设 $x = (w, \ldots, w)$）），

语言规则。 设 $p \to q$ 是 L所遵循的一条规则。如果 $f(\alpha) \succeq p$，那么 $f(\alpha) \succeq q$，

限制规则。 如果 $f_i(\alpha) = a$，那么 $f_i(\alpha|_{\mathcal{W}_f(i)}) = a$，

合并规则。 如果 α，β相容，$f(\alpha) \succeq p$且 $f(\beta) \succeq q$，并且 p，q相容，那么 $f(\alpha \cup \beta) \succeq p \cup q$。

论证最后以此结束：

冲突规则。 如果 α，β相容，$f(\alpha) \succeq p$且 $f(\beta) \succeq q$，而 p，q不相容，那么我们便得到矛盾，这表明 f 不可能存在。

通常，冲突规则会应用于相容的部分输入 α, β，使得 $f_i(\alpha) = 0$ 且 $f_i(\beta) = 1$，其中某个 $i \in I$。

语言公理表达了 f （输入的具体形式来自命题2.1）的满射性。语言规则捕捉了语言所施加的相关性。限制规则和合并规则利用复形 K_f 中某些单形的缺失，通过缩小相关部分输入的定义域，最终导出矛盾陈述。

不难看出，该推理系统是可靠的：也就是说，使用这些规则能够推导出的任何约束 $f(\alpha) \succeq p$，在假设 f 存在的情况下确实为真；而且，如果能够应用冲突规则，就会得到矛盾，因此 f 不可能存在。

然而，这个系统并不完备：在 [Hoy25c] 中，我们证明了复形 $K = \langle [\![1,4]\!], [\![0,2]\!], [\![4,1]\!], \{0,2,3\}, \{0,2,4\} \rangle$ 无法生成 U_5，它是长度为 5 且恰好包含一个 1 的二进制字符串集合。计算机程序进行的穷举搜索表明，对于 K 和U_5，

5.2 Mon 的规则$_n$

部分序列 p 在 Mon$_n$ 中有扩展，当且仅当它遵循以下规则：对于 $0 \le i < j < k < n$ 和 $v \in \{0,1\}$:

- 若 $p_i = p_k = v$，则 $p_j = v$,
- 若 $p_i = p_j = v$，则 $p_k = v$,
- 若 $p_j = p_k = v$，则 $p_i = v$。

5.3 关键技术工具

本节将证明一项技术性结果，该结果将在对 Mon$_n$ 的分析中得到广泛应用，以证明前述复形的极小性以及更一般的结果。证明中隐含地使用了推理系统。

单调序列具有刚性，即有时两个单元的值就能决定所有其他单元的值。例如，若 $y \in$Mon$_n$ 满足 $y_0 = y_{n-1} = 0$，那么 $y_j = 0$ 对所有 j都成立。因此，在生成过程中，单元需要彼此通信，才能处理这些相关性。下一个结果阐明了这一思想，并特别指出，若复形 K 生成 Mon$_n$，那么它包含许多区间：对于所有 $i,\ j \in I_n$，区间 $[\![i+1,\ j]\!]$ 和 $[\![j,\ i]\!]$ 中至少有一个属于 K。

给定一个函数 $f\colon B^J \to A^I$，我们回顾一下，若 $S \subseteq I$，则 $\mathcal{W}_f(S) = \bigcap_{i \in S} \mathcal{W}_f(i)$ 是所有 S 中输出单元可见的输入单元集合；当且仅当 $S \in K_f$ 时，该集合非空。

定理 5.1 (主要工具)。设 $i, j \in I_n$ 和 $v \in \{0,1\}$。如果 f 生成 Mon$_n$，那么存在一个部分输入 α，使得

- $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathcal{W}_f([\![i+1, j]\!]) \cup \mathcal{W}_f([\![j, i]\!])$,
- $f_j(\alpha) = v$.

特别是，这一结果意味着区间 $[\![i+1, j]\!]$和 $[\![j, i]\!]$ 中至少有一个必须属于 K，否则定义域(α)将为空，因此 f_j将恒等于 v；然而它取值既有 0 又有 1，这就产生了矛盾。

由对称性，只需证明 $i = n-1$ 和 $v = 0$的情形：对于任意 j，存在 α，使得 dom(α) $= \mathcal{W}_f([\![0,\ j]\!]) \cup \mathcal{W}_f([\![j,\ n-1]\!])$，且 $f_j(\alpha) = 0$。这可由以下更一般的结论推出。为简化记号，我们现在省略 $\mathcal{W}_f$中的下标 f。

引理 5.1。 设 $0 \le i \le j \le k < n$ 和 $v \in \{0,1\}$。设 α, β 为相容的部分输入，满足 $f_i(\alpha) = f_k(\beta) = v$。则 $f_j(\gamma) = v$，其中

$$\gamma = \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,j]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}([\![j,k]\!])}.$$

证明。 我们假设 $v = 0$，另一种情况的证明类似。我们先证明一个较弱的命题。

断言 2。 在相同假设下，有 $f_j(\mu) = 0$，其中

$$\mu = \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,j]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}(j)}.$$

我们固定 $0 \le i \le k < n$，并对 $j \in [i,k]$ 使用归纳法证明。对于 $j = i$，有 $\mu = \alpha|_{\mathcal{W}(i)} \cup \beta|_{\mathcal{W}(i)}$，这将 $\alpha|_{\mathcal{W}(i)}$ 扩展，因此确有 $f_i(\mu) = 0$。我们假设结论对 $j < k$ 成立，并证明其对 $j+1$ 也成立。令 $\mu_j = \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,j]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}(j)}$。根据归纳假设，有 $f_j(\mu_j) = f_k(\beta) = 0$。由于 μ_j 与 β 相容，$f_{j+1}((\mu_j \cup \beta)|_{\mathcal{W}(j+1)}) = 0$。有

$$\begin{aligned}(\mu_j \cup \beta)|_{\mathcal{W}(j+1)} &= \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,j+1]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}(j) \cap \mathcal{W}(j+1)} \cup \beta|_{\mathcal{W}(j+1)} \\ &= \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,j+1]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}(j+1)} \\ &= \mu_{j+1}\end{aligned}$$

这就证明了归纳步骤。断言得证。

然后，我们通过对 j 进行递减归纳法，利用这一断言证明引理的陈述。

对于 $j = k$，有 $\gamma = \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,k]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}(k)}$，它扩展了 $\beta|_{\mathcal{W}(k)}$，因此确实有 $f_k(\gamma) = 0$。我们假设 $j > i$ 的结果成立，并证明它对 $j-1$ 也成立。令 $\gamma_j = \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,j]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}([\![j,k]\!])}$。根据归纳假设，有 $f_i(\alpha) = f_j(\gamma_j) = 0$。由于 α 和 γ_j 相容，我们可以应用断言 2，从而得到 $f_{j-1}(\delta) = 0$，其中

$$\begin{aligned}\delta &= \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,j-1]\!])} \cup \gamma_j|_{\mathcal{W}(j-1)} \\ &= \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,j-1]\!])} \cup \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,j]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}([\![j-1,k]\!])} \\ &= \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,j-1]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}([\![j-1,k]\!])} \\ &= \gamma_{j-1}\end{aligned}$$

这就证明了归纳步骤。 □

定理的证明 *5.1*。 我们证明 $i = n-1$ 和 $v = 0$的情形，其他情形由对称性可得。令 $j \in I_n$，即 $0 \le j < n$。令 α 为满足 $f(\alpha) = 0 \ldots 0$的输入。由引理 5.1 应用于 $\beta = \alpha$、$i' = 0$、j和 $k = n-1$，可得 $f_j(\gamma)$，其中 $= 0$，因此 γ满足规定的条件。 □

备注 5.1（对称版本）。 由对称性，引理 5.1 更一般地推出以下结论。令 $v \in \{0,1\}$ 和 α，β 为相容的部分输入：

- If $0 \le i < j \le k < n$, $f_i(\beta) = \overline{v}$ and $f_j(\alpha) = v$, then $f_k(\gamma) = v$, where
$$\gamma = \alpha|_{\mathcal{W}([\![j,k]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}([\![k,i]\!])},$$
- If $0 \le i \le j < k < n$, $f_j(\beta) = v$ and $f_k(\alpha) = \overline{v}$, then $f_i(\delta) = v$, where
$$\delta = \alpha|_{\mathcal{W}([\![k,i]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}([\![i,j]\!])}.$$

它们可以通过引理 5.1 令 $r \in \mathrm{D}_{2n}$ 的某个幂作用于 I_n 和Mon_n 得到。

5.4 一个更具技术性的结果

下面这个技术性结果是接下来若干证明的核心。它的表述看起来非常特设，但它是通过辨识多个论证中的共同模式得出的。我们将其证明推迟到附录（第 A.1 节）。

引理 5.2. 设 $1 < i < j < n-1$。如果一个复形 K 生成 Mon_n，那么 K 至少包含以下区间之一：

$$[\![0,j]\!], [\![j+1,i]\!], [\![i+1,1]\!], [\![i,0]\!], [\![1,n-1]\!].$$

当然，这个引理也有对称版本：如果 K 生成 Mon_n，那么对于任意对称性 $g \in \mathrm{D}_{2n}$，$g \cdot K$ 生成 Mon_n，因此包含这些区间之一。

6 生成Mon_n的极小复形族

现在我们确定生成 Mon_n 的极小复形族。每个复形族都由一个特定的复形在若干位置插入顶点而得到。特别地，我们证明第 3 节中介绍的复形都是极小的。

6.1 The K_2 族

我们首先确定所有生成 Mon_n 且包含多个（$n-1$）区间的极小复形。这是定理 5.1 的首次应用。

定义 6.1。 The K_2 **族** 是由以下复形组成的族

$$\langle I_n \setminus \{a\}, I_n \setminus \{b\} \rangle$$

对于 $n \geq 2$ 和互不相同的 $a,\ b \in I_n$。

它们恰好是可以通过 K_2 进行顶点插入而得到的复形，如例 4.1中所述。它们见图 11。

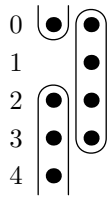


图 11：复形 $\langle I_n \setminus \{a\},\ I_n \setminus \{b\} \rangle$，其中 $n = 5$、$a = 1$ 和 $b = 4$

命题 6.1 （若干个（$n-1$）-区间）。 设 $n \geq 2$。生成 Mon_n 且具有若干个（$n-1$）-区间的极小复形，是 K_2 族中的成员。

证明。 我们证明 $K_{a,b} = \langle I_n \setminus \{a\}, I_n \setminus \{b\} \rangle$ 是极小的。设 $K \subseteq K_{a,b}$生成 Mon_n。我们利用 K 不包含边 $\{a, b\}$ 这一事实，证明 K必须包含 $K_{a,b}$。我们证明 K 包含 $I_n \setminus \{a\}$；对于 $I_n \setminus \{b\}$ 的情形，证明是对称的。

令 $a^- = a - 1$ 模 n 和 $a^+ = a + 1$ 模 n。

我们两次应用定理 5.1 。首先，对于 $i = a^-$ 和 $j = b$，存在一个部分输入 α，使得 $f_b(\alpha) = 0$ 并且

$$\mathrm{dom}(\alpha) = \mathcal{W}_f([\![a, b]\!]) \cup \mathcal{W}_f([\![b, a^-]\!]) = \mathcal{W}_f([\![b, a^-]\!])$$

因为 K 没有包含 a 和 b的单形。接下来，对于 $i = a$ 和 $j = b$，存在一个部分输入 β，使得 $f_b(\beta) = 1$ 并且

$$\mathrm{dom}(\beta) = \mathcal{W}_f([\![a^+, b]\!]) \cup \mathcal{W}_f([\![b, a]\!]) = \mathcal{W}_f([\![a^+, b]\!]).$$

因此 α 和 β 不能相容，这意味着 $\mathrm{dom}(\alpha)$ 和 $\mathrm{dom}(\beta)$ 必须有交集。它们的交集是 $\mathcal{W}_f([\![a^+, a^-]\!])$，所以 $[\![a^+, a^-]\!] = I_n \setminus \{a\}$

属于 K。根据对称性， K 也包含 $I_n \setminus \{b\}$，这表明 $K_{a,b}$ 是极小的。

现在，如果一个极小复形生成 Mon_n，并且至少包含两个 $(n-1)$-区间，那么它包含一个 $K_{a,\,b}$ 族的成员 K_2，因此由极小性可知它等于 $K_{a,\,b}$。 □

6.2 K_5 族

现在我们确定恰好包含一个 $(n-1)$-区间的生成复形。它们仅在 $n \geq 5$ 时存在，并且由 K_5 通过顶点插入诱导得到。

定义6.2。 K_5 **族**由以下复形及其循环置换构成。对于 $n \geq 5$ 和 $1 < i < j < n-1$，令

$$K^n_{i,j} = \langle [\![1, n-1]\!], [\![0, j-1]\!], [\![j+1, i-1]\!], [\![i+1, 0]\!] \rangle.$$

图示见图12。

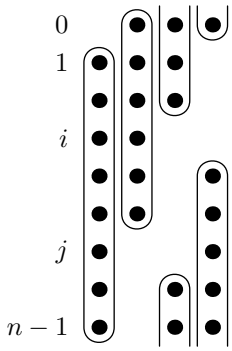


图12：复形 $K^n_{i,\,j}$

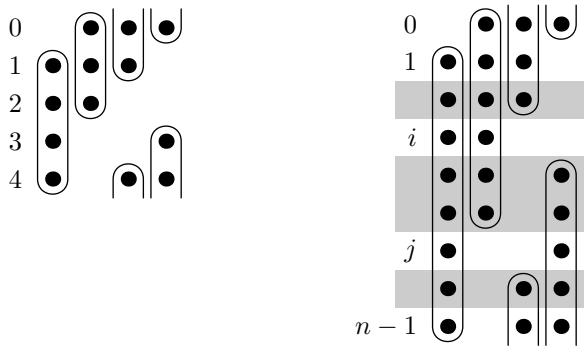
注记 6.1。对这个族的描述并无冗余：容易验证，对于每个 n，如果 $(i,j) \neq (i',j')$，那么这些复形 $K^n_{i,j}$ 彼此不同，甚至在包含关系下互不包含。

我们首先说明这个族名副其实。

命题 6.2。 每个 $K^n_{i,\,j}$ 都可以通过顶点插入和循环置换从 K_5 得到。

证明。对于 $n = 5$， i 和 j 的可能值只有 $i = 2$ 和 $j = 3$。复形 $K^5_{2,3} = \langle [\![1,4]\!], [\![0,2]\!], [\![4,1]\!], [\![3,0]\!] \rangle$ 是 $K_5 = \langle [\![3,1]\!], [\![2,4]\!], [\![1,3]\!], [\![0,2]\!] \rangle$ 在模 5 的循环置换 $x \mapsto x+3$ 下的像。

现在我们证明，每个 $K^n_{i,j}$ 都可以通过连续插入从 $K^5_{2,3}$ 得到。读者只要仔细观察图 13，我们



(a) $K^5_{2,3}$　　(b) $K^n_{i,j}$

图13：从 $K^5_{2,\,3}$ 到 $K^n_{i,\,j}$ 的顶点插入：灰色行对应插入的顶点

尽管如此，仍给出一些细节。设 $1 < i < j < n-1$。在 $K^n_{i,\,j}$ 的某些位置插入一个顶点，会得到同一族中的一个复形：

- 位置 2：$\mathrm{ins}_2(K) = K^{n+1}_{i+1,\,j+1}$,
- 位置 $i+1$：$\mathrm{ins}_{i+1}(K) = K^{n+1}_{i,\,j+1}$,
- 位置 $j+1$：$\mathrm{ins}_{j+1}(K) = K^{n+1}_{i,\,j}$。

因此，若 $n \geq 6$ 且 $1 < i < j < n-1$，则可以从 $K^5_{2,\,3}$ 开始，并依次在合适的位置插入顶点，直到得到$K^n_{i,\,j}$:

- 在位置 2 插入 $i-2$ 个顶点，得到 $K^{i+3}_{i,\,i+1}$,
- 然后在位置 $i+1$ 插入 $j-i-1$ 个顶点，得到 $K^{j+2}_{i,\,j}$,
- 最后在位置 $j+1$ 插入 $n-j-2$ 个顶点，得到 $K^n_{i,\,j}$。 □

定理 6.1 (一个 $(n-1)$-区间)。 生成Mon_n且恰有一个$(n-1)$-区间的极小复形，是 K_5族的成员。

本节其余部分将用于证明这一结果。

首先，这些复形很容易生成 Mon_n ，因为 K_5 生成 Mon_5(命题 3.1)，而每个 $K^n_{i,\,j}$ 都可以通过在 K_5 (命题6.2)中插入顶点，在对称性意义下得到，因此$K^n_{i,\,j}$ 生成 Mon_n (命题4.2)。

现在我们证明，每个生成 Mon_n 且含有一个 $(n-1)$-区间的极小复形，除对称性外，都是某个 $K^n_{i,j}$ ；并且每个 $K^n_{i,j}$ 都是极小的。在接下来的结果中，我们不假设 $n \geq 5$，这将作为推论得出。

引理 6.1. 设 K 生成 Mon_n。对于 $i,\ j \in I_n,\ K$ 必须包含 $[\![0,\ j]\!]$或 $[\![i,\ 0]\!]$ 或 $[\![j+1,\ 0]\!] \cup [\![0,\ i-1]\!]$。

证明。我们假设 K 既不包含 $[\![0,\ j]\!]$，也不包含 $[\![i,\ 0]\!]$，并证明 K包含 $[\![j+1,\ 0]\!] \cup [\![0,\ i-1]\!]$。设 f生成 Mon_n，且带有 $K_f \subseteq K$。我们将定理 5.1 应用两次，分别应用于 $(i', j') = (i-1 \bmod n, 0)$ 和 $(i', j') = (j, 0)$:

- 存在一个部分输入 α 使得 $f_0(\alpha) = 0$，其中

$$\mathrm{dom}(\alpha) = \mathcal{W}_f([\![0, i-1]\!]) \cup \mathcal{W}_f([\![i, 0]\!]) = \mathcal{W}_f([\![0, i-1]\!]),$$

- 存在一个部分输入 β 使得 $f_0(\beta) = 1$，其中

$$\mathrm{dom}(\beta) = \mathcal{W}_f([\![0, j]\!]) \cup \mathcal{W}_f([\![j+1, 0]\!]) = \mathcal{W}_f([\![j+1, 0]\!]).$$

因此，α 和 β 的定义域相交，所以 K 包含 $[\![0,\ i-1]\!] \cup [\![j+1,\ 0]\!]$。□

引理 6.2. 若 K 生成 Mon_n 且没有包含 0 的 $(n-1)$ 区间，则存在 i, j 满足 $1 < i < j < n-1$，使得 K 包含

$$\{[\![0, j-1]\!], [\![i+1, 0]\!], [\![j+1, i-1]\!]\}.$$

证明。令 $i \geq 0$ 为满足 $[\![i+1,\ 0]\!] \in K$ 的最小值，并令 $j \leq n$ 为满足 $[\![0,\ j-1]\!] \in K$的最大值。二者都有定义，因为 K 包含 $\{0\} = [\![n,\ 0]\!] = [\![0,\ 0]\!]$ （否则，生成过程总会给 0 赋予相同的值，但在 Mon_n 中，0 可以取两个二进制值）。此外，有 $i \leq n-1$ 和 $j \geq 1$。

由于 K 没有包含 0 的（$n-1$）-区间，因此有 $i > 1$ 和 $j < n-1$。由 i 的极小性和 j 的极大性，K 既不包含 $[\![0\, j]\!]$，也不包含 $[\![i\, 0]\!]$，所以根据引理 6.1，K 包含 $S := [\![j+1, 0]\!] \cup [\![0, i-1]\!]$。若 $i > j$，则 $S = [0, n-1]$; 若 $i = j$，则 $S = [0, n-1] \setminus \{i\}$。这两种情况都不可能，因为 K 没有包含 0 的（$n-1$）-区间。因此，$i < j$，从而 $S = [\![j+1, i-1]\!]$。□

因此，如果 K 包含一个（$n-1$）-区间，那么经过某个循环置换后，我们可以假设它是 $[\![1,\ n-1]\!]$。由于 K 没有包含 0 的（$n-1$）-区间，K 包含 $K^n_{i,\ j}$ 其中 $i,\ j$ 根据引理 6.2。

命题 6.3. 设 $1 < i < j < n-1$。$K^n_{i,\ j}$ 是极小生成Mon$_n$。

证明. 设 $K' \subseteq K^n_{i,\ j}$ 生成Mon$_n$。我们先证明 K' 必须包含 $[\![1,\ n-1]\!]$。引理 5.2 表明 K' 包含以下区间之一：

$$[\![0,j]\!], [\![j+1,i]\!], [\![i+1,1]\!], [\![i,0]\!], [\![1,n-1]\!].$$

唯一属于 $K^n_{i,\ j}$ 的是 $[\![1,\ n-1]\!]$，因此它必须属于 K'。

由于 $[\![1,\ n-1]\!]$ 是 K'中唯一的（$n-1$）-区间，引理 6.2 表明 K'包含 $K^n_{i',\ j'}$ 其中某个 $i',\ j'$ 满足 $1 < i' < j' < n-1$。因此，$K^n_{i',\ j'} \subseteq K' \subseteq K^n_{i,\ j}$，这意味着 $i' = i,\ j' = j$ 并且 $K' = K^n_{i,\ j}$ 根据备注6.1。□

注记 6.2 ($n \leq 4$)。引理 6.2的结论，即存在 $i,\ j$满足 $1 < i < j < n-1$，只有在 $n \geq 5$ 时才成立。因此，若 K 是生成 Mon$_n$ 的 $n \leq 4$复形，则 I_n 中的每个元素都属于某个 $(n-1)$-区间。这意味着，当 $n \in \{2,3,4\}$时，生成Mon$_n$ 的极小复形就是 K_2 族中的复形。

6.3 The K_8 族

在第 3.3 节中，我们证明复形

$$K_8 = \langle [\![0,5]\!], [\![2,7]\!], [\![4,1]\!], [\![6,3]\!] \rangle$$

生成 Mon$_8$。它由此引出一整个由极小复形构成的族，这些复形在 K_8 中插入顶点后生成 Mon$_n$，其中 $n \geq 8$。

定义 6.3。 The K_8 **族** 由以下复形构成

$$\langle [\![a_3, a_2 - 1]\!], [\![a_2, a_1 - 1]\!], [\![a_1, a_0 - 1]\!], [\![a_0, a_3 - 1]\!] \rangle,$$

其中 $n \geq 8$ 和 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{Z}$ 满足 $a_{i+1} - a_i \geq 2$ 且 $a_3 - a_0 \leq n-2$。

命题 6.4. K_8 族中的元素可以通过对 K_8进行顶点插入和循环置换得到。

证明。对于 $n=8$，唯一的可能性是 $a_{i+1}=a_i+2$，因此该复形为 K_8，或是经过模 8 的循环置换 $a\mapsto a+1$ 后所得的像。

现在设 $n>8$ 和 K 属于 K_8 族。应用一个循环置换，我们可以假设 $a_3=n$，于是

$$K=\langle[\![0,a_2-1]\!],[\![a_2,a_1-1]\!],[\![a_1,a_0-1]\!],[\![a_0,n-1]\!]\rangle.$$

这个复形可以通过插入顶点从 K_8 得到：在位置 1 插入 a_0-2 次，在位置 3 插入 a_1-a_0-2 次，在位置 5 插入 a_2-a_1-2 次，在位置 7 插入 $n-a_2-2$ 次（更准确地说，插入应在新的位置 3、5、7 进行）。 □

定理6.2。 K_8 族的成员是极小生成 Mon_n。

证明。 由命题 3.3可知 K_8 生成 Mon_8，，我们来证明它是极小的。更方便的做法是先应用循环置换 $a\mapsto a+1$ 模 8，得到

$$K_8'=\langle[\![1,6]\!],[\![7,4]\!],[\![5,2]\!],[\![3,0]\!]\rangle.$$

设 $K'\subseteq K_8'$ 生成Mon_8。我们对 5.2应用引理 $i=3$ 和 $j=5$，这意味着 K_8' 包含以下区间之一：

$$[\![0,5]\!],[\![6,3]\!],[\![4,1]\!],[\![3,0]\!],[\![1,7]\!].$$

唯一属于 K_8' 的区间是 $[\![3,\ 0]\!]$，因此它必属于 K'。根据对称性，K' 包含 K_8' 的每个极大区间，因此 $K'=K_8'$。更准确地说，注意到 K_8' 具有很强的对称性：它在循环置换 $a\mapsto a+2 \bmod 8$ 下保持不变。通过反复应用这一置换，可以将 K_8' 的任意极大区间映射到 $[\![3,\ 0]\!]$，因此它必属于 K'。我们已经证明了 K_8' 的极小性，因而也证明了 K_8 的极小性。

对于 $n>8$，在循环置换意义下，K_8 族中的一个复形可通过顶点插入得到，正如命题6.4中所说明的。此外，在 K_8中，以下各对 (0，1)、(2，3)、(4，5) 和 (6，7) 都具有这样一个特殊性质：的每个区间要么包含这一对，要么与它不相交。因此，推论 4.1 表明，所得复形 K 是极小生成的 Mon_n。 □

6.4 n 的较小值

对于较小的 n 值，我们几乎可以完整描述生成 Mon_n 的极小复形。不过有一个例外：对于 $n=6$,

有一个复形，我们不知道它是否生成 Mon_6。它是由所有 4-区间构成的复形，

$$K_6 = \langle [\![0,3]\!], [\![1,4]\!], [\![2,5]\!], [\![3,0]\!], [\![4,1]\!], [\![5,2]\!] \rangle,$$

并在图 14中进行了说明。我们将 K_6 族定义为以下各项组成的族：

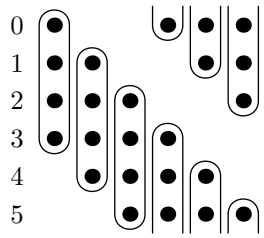


图14：由 K_6得到的复形

通过顶点插入得到的复形。

定理 6.3。 对于 $2 \le n \le 7$，生成Mon_n的极小复形属于 K_2、 K_5、 K_6 或 K_7 这些族。

反过来，我们先前已经看到， K_2、 K_5 和 K_7 这些族中的所有成员都是极小生成Mon_n；至于 K_6 是否确实生成Mon_6，则有待进一步研究。一个计算机程序表明，第5 节中的推理系统未能在 K_6 和Mon_6上发现任何冲突。对于一般语言，该推理系统是不完备的；我们不知道它对于Mon_n是否完备。计算机搜索表明，不存在一个函数 $f\colon \{0,1\}^6 \to \{0,1\}^6$ 能够生成Mon_6 且满足 $K_f \subseteq K_6$ 与否定可交换。

定理6.3的证明见附录第A.2节。

7 The $3/4$ 比率

本节研究以下问题：生成 Mon_n 的复形的区间可以有多小？更确切地说，存在一个生成 Mon_n 且所有区间大小都不超过 k的复形时， k 的最小值是多少？我们证明， k 约为 $\frac{3n}{4}$ 。

定义 7.1. 令 $\mu(n)$ 为最小的 k，使得存在一个生成 Mon_n 的复形，其区间大小均至多为 k。

定理 7.1 （具有最短区间的复形）。 对于所有 n，有

$$\left\lfloor \frac{3n+1}{4} \right\rfloor \leq \mu(n) \leq \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil .$$

当 $n = 0$ 或 1 mod 4 时，下界与上界相同，因此它们给出了 $\mu(n)$ 的精确值。在其他情况下，它们给出的 $\mu(n)$ 的值误差至多为 1。我们在表格1中列出前几个值。

n	$\lfloor \frac{3n+1}{4} \rfloor$	$\mu(n)$	$\lceil \frac{3n}{4} \rceil$
1	1	1	1
2	1	1	2
3	2	2	3
4	3	3	3
5	4	4	4
6	4	?	5
7	5	5	6
8	6	6	6

表 1： $\mu(n)$ 的前几个值及其界

对于 $n = 2,3$ 和 7，上界并非最优，因为 Mon_2和 Mon_3 由 K_2 族中的成员生成，而 Mon_7 由 K_7生成。对于 $n = 6$，我们不知道 k 的确切值；如果 K_6 生成 Mon_6 ，该值为 4，否则为 5。

7.1 上界

上界可以直接从第 K_8 节所介绍的复形族得到6.3。

推论 7.1 (上界)。 对于 $n \geq 8$，存在一个生成 Mon_n 的复形，其所有区间的大小都不超过 $\lceil \frac{3n}{4} \rceil$。

证明。 设 $k = \lceil \frac{3n}{4} \rceil$ 且 $a_i = (i+1)(n-k)$ 。可以验证 $n \geq 8$推出 $n - k \geq 2$，因此 $a_{i+1} - a_i \geq 2$ 且 $n - a_2 \geq 2$。因此，我们可以应用定理6.2：复形

$$K = \{[\![a_3, a_2 - 1]\!], [\![a_2, a_1 - 1]\!], [\![a_1, a_0 - 1]\!], [\![a_0, a_3 - 1]\!]\}$$

生成 Mon_n。其前三个极大区间的长度为 k ，第四个极大区间的长度为 3($n - k$) $\leq k$。

我们注意到， a_i 的这一选择是最优的： K 中四个极大区间的长度之和为 $3n$，因此其中一个的长度必须至少为 $\lceil \frac{3n}{4} \rceil$（否则，长度之和至多为 $4(\lceil \frac{3n}{4} \rceil - 1) < 3n$）。 □

7.2 下界

现在我们给出下界的证明，但遗憾的是，这个证明非常技术性。它是通过对 n 和由小区间构成的复形的较小值自动搜索冲突，再从这些冲突中找出共同模式而得到的。若能找到一种更优雅的论证，同时解释 $3/4$ 比率，那将很有意思。

定理 7.2. 如果一个复形生成 Mon_n，那么它包含一个长度为 $\lfloor \frac{3n+1}{4} \rfloor$ 的区间。

证明。 设 $k = \lfloor \frac{3n+1}{4} \rfloor$。 对于 $n \leq 6$，该结论由定理 6.3 得出。现在假设 $n \geq 7$。我们将用到以下事实： $k < n$且 $3k \geq 2n+1$（后者对 $n \geq 9$ 成立，因为 $3k > 3\,(\frac{3n+1}{4} - 1) = 2n + \frac{n-9}{4} \geq 2n$，并且可以在表格 $n = 7$ 中查得 8 或 1）。

反设 K 生成 Mon_n 且不包含大小为 k 的区间。论证利用第 5 节中的推理系统，构造越来越多的约束，最终导出矛盾。

引理 7.1。 假设 f 生成Mon_n， 且 K_f 不包含 k-区间。令 $b = 2(n-k)$。对于 $2k-n-1 \leq j \leq k-1$，存在 γ 使得 $f_0(\gamma) = 0$并且

$$\mathrm{dom}(\gamma) = \mathcal{W}_f([\![0, j]\!]) \cup \mathcal{W}_f([\![j+1, b+j+1]\!]).$$

证明。 为简化记号，我们省略 $\mathcal{W}_f$中的下标 f。我们对 j使用归纳法证明该结论。注意，由对称性可知，该陈述更一般地意味着：对于任意 $a \in I_n$，存在 γ，使得 $f_a(\gamma) = 0$，且 $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathcal{W}([\![a,\ a+j]\!]) \cup \mathcal{W}([\![a+j+1,\ a+b+j+1]\!])$。这个更一般的陈述将作为归纳假设使用。

对于 $j = 2k-n-1$，结果是定理5.1的直接应用，得出定义域$(\gamma) = \mathcal{W}([\![0, j]\!]) \cup \mathcal{W}([\![j+1, n]\!])$，并且 $b+j+1 = n$(以及任意 a的情形也可由对称性得到)。

我们假设对于满足 $2k-n-1 \leq j < k-1$ 的 j，结论成立，并证明其对 $j+1$ 也成立。令 $a = n-k$，并且

$$\mathbb{I}_0 = [\![0, j]\!] \qquad \mathbb{I}_1 = [\![j+1, b+j+1]\!]$$
$$\mathbb{J}_0 = [\![a, a+j]\!] \qquad \mathbb{J}_1 = [\![a+j+1, a+b+j+1]\!].$$

根据归纳假设，存在部分输入 α 和 β，使得：

- $f_0(\alpha) = 0$ 和定义域$(\alpha) = \mathcal{W}(\mathbb{I}_0) \cup \mathcal{W}(\mathbb{I}_1)$,
- $f_a(\beta) = 0$ 在 $\mathsf{dom}(\beta) = \mathcal{W}(\mathbb{J}_0) \cup \mathcal{W}(\mathbb{J}_1)$ 上。

断言 3. α 和 β 的定义域不相交。

这些定义域的交集是

$$\mathrm{dom}(\alpha) \cap \mathrm{dom}(\beta) = \mathcal{W}(\mathbb{I}_0 \cup \mathbb{J}_0) \cup \mathcal{W}(\mathbb{J}_0 \cup \mathbb{I}_1) \cup \mathcal{W}(\mathbb{I}_1 \cup \mathbb{J}_1) \cup \mathcal{W}(\mathbb{J}_1 \cup \mathbb{I}_0).$$

我们通过证明每个并集 $\mathbb{I}_u \cup \mathbb{J}_v$ 都是长度至少为 k的区间，来证明它是空的。

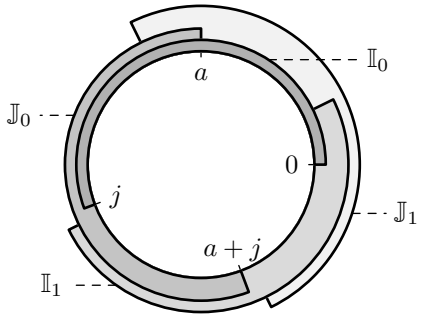
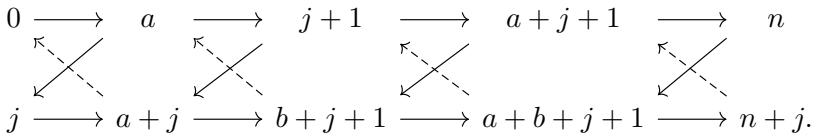


图15： $\mathbb{I}_0 \angle \mathbb{J}_0 \angle \mathbb{I}_1 \angle \mathbb{J}_1 \angle \mathbb{I}_0$

我们检查可知 $\mathbb{I}_0 \angle \mathbb{J}_0 \angle \mathbb{I}_1 \angle \mathbb{J}_1 \angle \mathbb{I}_0$ （如图 15 所示）。事实上，每一对连续区间都可以表示为 $[\![x,\ z]\!] \angle [\![y,\ t]\!]$其中 $x \le y \le z \le t < x + n$ （引理 2.1），如下图所示（参见引理 2.1 后的段落）：



这些不等式均可由以下内容推出：

$$k < n,$$
$$2k - n - 1 \le j < k - 1,$$
$$2n + 1 \le 3k.$$

因此，连续区间并仍是区间：

- $\mathbb{I}_0 \cup \mathbb{J}_0 = [\![0, a+j]\!]$ has size $a+j+1 \in [k,n]$,
- $\mathbb{J}_0 \cup \mathbb{I}_1 = [\![a, b+j+1]\!]$ has size $b+j+2-a \in [k,n]$,
- $\mathbb{I}_1 \cup \mathbb{J}_1 = [\![j+1, a+b+j+1]\!]$ has size $a+b+1 \in [k,n]$,
- $\mathbb{J}_1 \cup \mathbb{I}_0 = [\![a+j+1, n+j]\!]$ has size $n-a = k \in [k,n]$.

因此， K不包含任何 $\mathbb{I}_u \cup \mathbb{J}_v$，这意味着 $\mathcal{W}(\mathbb{I}_u \cup \mathbb{J}_v)$为空。因此， α 和 β 的定义域不相交，命题得证。

这一论断意味着 α 和 β 相容，因此我们可以应用引理5.1。设 $c = n-1 \in [\![a, 0]\!]$。有 $f_c(\gamma) = 0$ 其中

$$\gamma = \alpha|_{\mathcal{W}([\![c,0]\!])} \cup \beta|_{\mathcal{W}([\![a,c]\!])}.$$

区间 $[\![a,c]\!]$ 的大小为 $c+1-a = n-a = k$，因此 $\mathcal{W}([\![a,c]\!])$ 为空。所以， $\gamma = \alpha|_{\mathcal{W}([\![c,0]\!])}$ 的定义域为

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(\gamma) &= \mathrm{dom}(\alpha) \cap \mathcal{W}([\![c,0]\!]) \\ &= \big(\mathcal{W}([\![0,j]\!]) \cup \mathcal{W}([\![j+1, b+j+1]\!])\big) \cap \mathcal{W}([\![c,0]\!]) \\ &= \mathcal{W}([\![n-1, j]\!]) \cup \mathcal{W}([\![j+1, b+j+1]\!]).\end{aligned}$$

由对称性可知，我们可以应用模 n 的循环置换 $x \mapsto x+1$，这意味着存在一个部分输入 δ，使得 $f_0(\delta) = 0$，且 $\mathrm{dom}(\delta) = \mathcal{W}([\![0, j+1]\!]) \cup \mathcal{W}([\![j+2, b+j+2]\!])$，由此证明了归纳步骤。 □

Let

$$\mathbb{I} = [\![k, 2n-k]\!].$$

我们将引理 7.1 应用于 $j = k-1$，得到 γ，使得 $f_0(\gamma) = 0$，且 $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathcal{W}([\![0, k-1]\!]) \cup \mathcal{W}([\![k, 2n-k]\!])$。由于 $[\![0, k-1]\!]$ 的大小为 k， $\mathcal{W}([\![0, k-1]\!])$ 为空，因此 $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathcal{W}(\mathbb{I})$。

Let

$$\begin{aligned}\mathbb{J}_0 &= [\![2k-n, 0]\!] \\ \mathbb{J}_1 &= [\![0, 2k-n-1]\!] = [\![0, 2k-1]\!]\end{aligned}$$

根据定理5.1，存在 α 使得 $f_0(\alpha) = 1$ 且 $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathcal{W}([\![2k-n, n]\!]) \cup \mathcal{W}([\![0, 2k-n-1]\!]) = \mathcal{W}(\mathbb{J}_0) \cup \mathcal{W}(\mathbb{J}_1)$。

我们证明 α 和 γ 具有不相交定义域。因为这些区间的端点满足下图所概括的不等式，所以有 $\mathbb{J}_0 \angle \mathbb{I} \angle \mathbb{J}_1$,

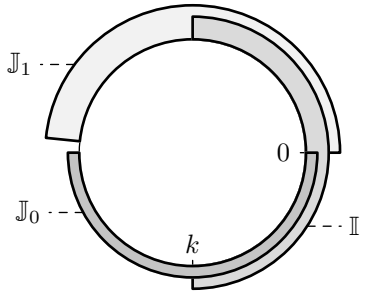


图16： $\mathbb{J}_0 \angle \mathbb{I} \angle \mathbb{J}_1$

$$\begin{tikzcd}
2k-n \arrow[r] & k \arrow[r] \arrow[dl] & n \arrow[dl] \\
n \arrow[r] & 2n-k \arrow[r] \arrow[ul, dashed] & 2k-1, \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

这些不等式都可由 $k \leq n$ 和 $3k \geq 2n+1$推出。因此，

- $\mathbb{J}_0 \cup \mathbb{I} = [\![2k-n,\ 2n-k]\!]$ 大小为 3（$n-k$）$+1 \in [k,n]$,
- $\mathbb{I} \cup \mathbb{J}_1 = [\![k,\ 2k-1]\!]$ 大小为 k。

因此， α 和 γ 的定义域不相交，所以它们相容；但它们对 0 取相反的值，这就产生了矛盾。 □

注 7.1. 人们可能会想用以下方式对作归纳法来证明定理 7.2 。设 $k_n = \lfloor \frac{3n+1}{4} \rfloor$，并反设由所有（$k_n - 1$）区间组成的复形 K 生成 Mon_n。按规则删除 4 个间隔分布的顶点，使得每个极大区间中至少有 3 个顶点被删除。所得复形 K'有 $n-4$个顶点，且区间长度至多为 $k_n - 4 = \lfloor \frac{3(n-1)}{4} \rfloor$。当 $n=2$被 4 整除时，这个量严格小于 k_{n-1}，因此根据归纳假设可得矛盾。

然而，这个论证行不通：无法在 $[0, n-1]$ 中选出 4 个元素，使得每个（$k_n - 1$）区间都至少包含其中 3 个。要让它成立，唯一的办法是稍微增大 k_n至 $\lceil \frac{3n}{4} \rceil + 2$，但这样基础情形就不成立了（而且 k_n会超过上界 $\lceil \frac{3n}{4} \rceil$，所以这个命题无论如何都是错的）。

8 未来方向

8.1 通过组合拓扑生成语言

正如 [Hoy25c], 中所解释的，语言生成问题可以在 [HS99所发展的框架下重新表述，13], 从而能够运用组合拓扑学中的技术分析分布式算法。

特别地，对于每种语言 $L \subseteq A^I$ ，都可以关联一个染色标记单纯复形 $\mathcal{O}_L$，其单形表示 L的元素；其中，共享许多顶点的单形对应于具有许多共同值的字符串。具体而言， $\mathcal{O}_L$ 的顶点是形如 $(i, x_i) \in I \times A$ 的有序对，其中 $i \in I$ 且 $x \in L$；每个字符串 $x \in L$ 都会生成一个单形 $\{(i, x_i) : i \in I\}$。因此， $\mathcal{O}_L$ 是一个维数为 $|I| - 1$的纯单纯复形，也就是说，它的极大单形都具有 $|I|$个顶点。它是染色且带标记的，因为对于每个顶点 (i, a)，其分量 i 被视为颜色，其分量 a 被视为标签，并且每个单形的顶点颜色各不相同。

对于 $n \geq 2$，复形 $\mathcal{O}_{\mathsf{Mon}_n}$作为拓扑空间来看，是圆周与（$n-2$）维球的乘积，如图17、18和19 所示，其中 $n = 2$、3、4。顶点的颜色是 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的元素，并以{○, ◔, ◑, ●}表示；它们的标签属于 $\{0, 1\}$ （在图中，单形的颜色没有特殊含义，仅用于帮助区分它们）。

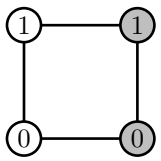
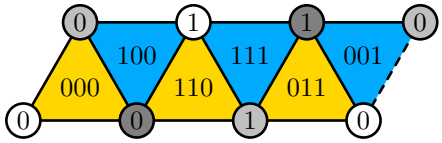


图17：Mon_2 的输出复形是一个圆

每个定义在 I 上的通信复形 K ，连同输入字母表 B，都可以转化为类似的复形 $\mathcal{I}_K(B)$。在该复形中，单形表示 B^J 中的输入，顶点也被赋予颜色 $i \in I$ ，其标签则是输入在 $\mathcal{W}(i)$ 上的限制。于是， K 是否生成语言 L ，等价于是否存在一个保色的满射单纯映射 $f : \mathcal{I}_K(B) \to \mathcal{O}_L$ 。

如果借助组合拓扑中的工具来研究 Mon_n 的局部生成问题，了解这种重新表述是否有所帮助，将会很有意思。

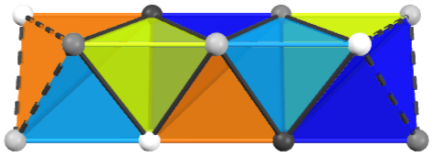


(a) 展平后的版本：左侧和右侧的边粘合在一起

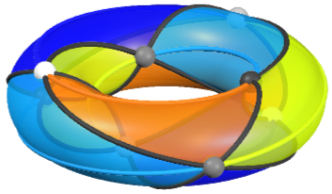


(b) 该复形

图 18：Mon_3 的输出复形是一个圆柱体



(a) 展开后的版本：左侧和右侧的三角形粘合在一起。



(b) 复形的表面

图 1：以下对象的输出复形Mon_4 是一个实心环面（可在以下位置交互式查看这些模型： [Hoy25d]和 [Hoy25a]）

8.2 开放问题

主要的开放问题是，对所有 n，完整分类生成 Mon_n 的极小复形。许多复形可以通过在较小的复形中插入顶点得到，但我们已经看到，对于某些 n 的值，即 $n = 2$、5、7、8，会出现一种生成 Mon_n 的新方法。

我们提出以下问题：

- 是否存在无穷多个 n 值，它们对应于生成 Mon_n 的新方法？还是说，存在一个有限的复形族，通过插入即可得到所有这些复形？

- K_6 能生成 Mon_6 吗？

- 的确切值是多少 $\mu(n)$（定义7.1），是否有简洁优雅的论证可以解释它的值？

引理5.2和定理7.2 的证明属于“经验性”证明，因为它们是在计算机搜索的帮助下得到的（但请注意，这一过程远非自动化，文章中给出的陈述是对特定复形中发现的论证进行统一和推广的成果

，且 n取较小的值）。这些论证实际上无法再缩短，因为它们本质上是在第5节的推理系统中，推导具有最小推导树的矛盾。尽管如此，我们仍可期待更具理论依据的论证，将最繁琐的细节抽象掉。

更一般地说，Mon_n 的行为本质上是混沌的吗？还是说，我们可以从结构上更好地理解这种语言的局部生成特性？

参考文献

[DFP12] Alberto Dennunzio、Enrico Formenti 和 Julien Provillard。非均匀元胞自动机：类别、动力学与可判定性。*Information and Computation*，215:32–46，2012年。[FG18] Bernd Finkbeiner 和 Paul G¨olz。《分布式环境中的综合》。载于 Satya Lokam 和 R. Ramanujam（编），第*37*届*IARCS*软件技术基础与理论计算机科学年会（*FSTTCS 2017*），第93卷，莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*），第28:1–28:14页，德国达格施图尔，2018年。达格施图尔莱布尼茨信息学中心。[Gad19] Maximilien Gadouleau。交互图对有限动力系统的影响。*Natural Computing*，19(1):15–28，2019年。[GGPT21] Guilhem Gamard、Pierre Guillon、Kevin Perrot 和 Guillaume Theyssier。自动机网络的Rice型定理。载于 Markus Bl¨aser 和 Benjamin Monmege（编），第*38*届理论计算机科学专题研讨会（*STACS 2021*），第187卷，莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*），第32:1–32:17页，德国达格施图尔，2021年。达格施图尔莱布尼茨信息学中心。[GM90] Eric Goles 和 Servet Mart´ınez。神经网络与自动机网络：动力学行为及应用。Kluwer Academic出版社，美国，1990年。[HKR13] Maurice Herlihy、Dmitry Kozlov 和 Sergio Rajsbaum。通过组合拓扑研究分布式计算。Morgan

Kaufmann出版社有限公司，旧金山，加利福尼亚州，美国，第一版，2013年。[Hoy25a] Mathieu Hoyrup。甜甜圈。https://www.desmos.com/3d/ rcsfnicp9o，2025年。交互式模型。[Hoy25b] Mathieu Hoyrup。推理系统的实现。https://gitlab.inria.fr/hoyrup/languagegeneration. git，2025年。Python项目。[Hoy25c] Mathieu Hoyrup。语言的局部生成。预印本。https://inria.hal.science/hal-05383269，2025年。[Hoy25d] Mathieu Hoyrup。展开甜甜圈。https://www.desmos.com/ 3d/1cgfllrudd，2025年。交互式模型。[HS99] Maurice Herlihy 和 Nir Shavit。异步可计算性的拓扑结构。《ACM学报》，46(6):858–923，1999年11月。[Kar05] Jarkko Kari。元胞自动机理论：综述。《理论计算机科学》，334(1):3–33，2005年。[NS95] Moni Naor 和 Larry Stockmeyer。哪些问题可以在局部计算？《SIAM计算学报》，24(6):1259–1277，1995年。[PR90] Amir Pnueli 和 Roni Rosner。分布式反应系统难以综合。载于第31届计算机科学基础年会，圣路易斯，密苏里州，美国，1990年10月22日至24日，第二卷，第746–757页。IEEE计算机学会，1990年。[Rei15] Fabian Reiter。分布式图自动机。载于2015年第30届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会，第192–201页，2015年。

A 附录

本节给出部分证明。

A.1 引理 5.2的证明

我们首先回顾引理 5.2的陈述。

引理。 设 $1 < i < j < n-1$。如果一个复形 K 生成 Mon_n，那么 K至少包含以下区间之一：

$$[\![0,j]\!], [\![j+1,i]\!], [\![i+1,1]\!], [\![i,0]\!], [\![1,n-1]\!].$$

证明。 设 f 生成 Mon_n ，其中 $K_f \subseteq K$。同样，我们将 $\mathcal{W}_f$记作 $\mathcal{W}$ 。反设 K，因此 K_f不包含这些区间中的任何一个。

> 断言4。存在一个部分输入 γ ，使得 $\mathsf{dom}(\gamma) = \mathcal{W}([\![1, j]\!])$ 且 $f_i(\gamma) = 0$。

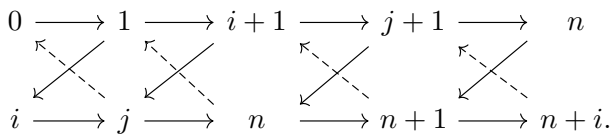
两次应用定理5.1 ，存在部分输入 α， β 使得：

- $f_0(\alpha) = 1$ 且 $\mathsf{dom}(\alpha) = \mathcal{W}([\![i+1, 0]\!]) \cup \mathcal{W}([\![0, i]\!])$,
- $f_1(\beta) = 0$ 且 $\mathsf{dom}(\beta) = \mathcal{W}([\![j+1, 1]\!]) \cup \mathcal{W}([\![1, j]\!])$。

有

$$[\![0,i]\!] \angle [\![1,j]\!] \angle [\![i+1,0]\!] \angle [\![j+1,1]\!] \angle [\![0,i]\!]$$

因为这些区间的端点在 $\mathbb{Z}$ 中有代表元，且这些代表元满足引理2.1 所述的不等式，概括如下图：



因此，这些区间的连续并集为

$$[\![0,j]\!], [\![1,0]\!], [\![i+1,1]\!] \text{ and } [\![j+1,i]\!]$$

它们在 K 中均缺失。因此， α 与 β 的定义域不相交，故二者相容。令 $\gamma = \alpha|_{\mathcal{W}([\![i,0]\!])} \sqcup \beta|_{\mathcal{W}([\![1,i]\!])} = \beta|_{\mathcal{W}([\![1,i]\!])}$。由引理5.1，可得 $f_i(\gamma) = 0$ 并且

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(\gamma) &= \mathrm{dom}(\beta) \cap \mathcal{W}([\![1,i]\!]) \\ &= \mathcal{W}([\![j+1,i]\!]) \cup \mathcal{W}([\![1,j]\!]) \\ &= \mathcal{W}([\![1,j]\!])\end{aligned}$$

于是命题得证。

另一方面，根据定理5.1 存在一个部分输入 δ 使得 $f_i(\delta) = 1$ 的定义域为 $(\delta) = \mathcal{W}([\![0,\ i]\!]) \cup \mathcal{W}([\![i,\ n-1]\!])$。

最后，有

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(\gamma) \cap \mathrm{dom}(\delta) &= \mathcal{W}([\![1,j]\!]) \cap \big(\mathcal{W}([\![0,i]\!]) \cup \mathcal{W}([\![i,n-1]\!])\big) \\ &= \mathcal{W}([\![0,j]\!]) \cup \mathcal{W}([\![1,n-1]\!]) \\ &= \emptyset,\end{aligned}$$

因此 γ 和 δ 相容，但对 i给出相反的值，这就产生了矛盾。

□

A.2 定理6.3 的证明

我们回顾一下定理6.3的陈述。

定理。 对于 $2 \leq n \leq 7$，生成Mon_n 的极小复形属于以下族： K_2、 K_5、 K_6 或 K_7。

情形 $n = 5$。

命题 A.1。 生成Mon_5 的极小复形在对称意义下为：

- 在 K_2 族中，
- K_5。

证明。 我们证明，若 K 生成 Mon_5，则 K 包含一个 4-区间。将引理 5.2 应用于 $i = 2$ 和 $j = 3$， K 至少包含以下这些区间：

$$[\![0,3]\!], [\![4,2]\!], [\![3,1]\!], [\![2,0]\!], [\![1,4]\!],$$

它们都是 4-区间。如果 K 至少包含两个 4-区间，那么根据命题 K_2 ，它属于该族。6.1。如果它只包含一个 4-区间，那么根据定理 K_5 ，它属于该族。6.1。对于 $n = 5$，该族中唯一的成员是 K_5 及其对称形式。

□

情况 $n = 6$。

命题 A.2。 若 K 是生成Mon_6，的极小复形，则

- K 属于 K_2 或 K_5 族，
- 或 $K = K_6$。

证明。 若 K 至少包含一个 5-区间，则它根据命题 K_2 属于 K_5 族或6.1 和定理 6.1属于 K族。现在假设 K不包含 5-区间。将引理5.2 应用于 $i = 3$ 和 $j = 4$， K 至少包含以下这些区间：

$$[\![0, 4]\!], [\![5, 3]\!], [\![3, 1]\!], [\![3, 0]\!], [\![1, 5]\!].$$

除 $[\![3, 0]\!]$ 之外，所有这些区间的长度都是 5，因此 K 包含长度为 4 的 $[\![3, 0]\!]$。根据对称性， K 包含每个 4-区间，因此 $K = K_6$。 □

如前所述，我们不知道 K_6 是否生成 Mon_6。

情形 $n = 7$。 令 K 生成 Mon_7。再次地，如果 K 至少包含一个 6-区间，那么 K 属于 K_2 或 K_5 族。假设 K不包含 6-区间。

命题 A.3。 如果一个复形生成 Mon_7 且不包含6-区间，那么它包含所有4-区间。

证明。 将引理 5.2 应用于 $i = 2$ 和 $j = 5$， K 至少包含以下区间之一：

$$[\![0, 5]\!], [\![6, 2]\!], [\![3, 1]\!], [\![2, 0]\!], [\![1, 6]\!].$$

除 $[\![6, 2]\!]$ 之外，所有这些区间的长度都至少为 6，因此 K 包含 $[\![6, 2]\!]$，后者是一个 4-区间。根据对称性， K 包含每个 4-区间。´ □

令 A 为 K中 5-区间的起点集合。

命题 A.4。 对于每个 $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$， A 与 $\{a, a + 2\}$ 和 $\{a, a + 1, a + 4\}$相交。

证明。 应用引理 5.2 于 $i = 2$ 和 $j = 4$， K 至少包含这些区间中的一个：

$$[\![0, 4]\!], [\![5, 2]\!], [\![3, 1]\!], [\![2, 0]\!], [\![1, 6]\!].$$

前两个区间的长度为 5，其余区间的长度为 6。因此， K包含 $[\![0, 4]\!]$ 或 $[\![5, 2]\!]$ 因此 A 与 $\{5, 0\}$相交，这就说明了情形 $a = 5$。其余情形由对称性可得。

应用引理 5.2 于 $i = 3$ 和 $j = 4$，K 至少包含以下区间之一：

$$[\![0,4]\!], [\![5,3]\!], [\![4,1]\!], [\![3,0]\!], [\![1,6]\!].$$

第二个和最后一个区间的长度为 6，因此 K 包含其他区间之一，即 A 与 $\{3,4,0\}$ 相交。这证明了 $a = 3$ 这一情形，其余情形可由对称性得出。 □

现在我们考虑两种情形。

首先，假设对于某个 a，A 与 $\{a, a+1\}$ 不相交。由对称性，不妨设 $a = 0$，即 A 与 $\{0,1\}$ 不相交。命题 A.4 表明 A 包含 $\{2,3,4,5,6\}$：事实上，A 与 $\{0,2\}$、$\{1,2\}$、$\{5,0\}$、$\{6,1\}$ 和 $\{0,1,4\}$ 相交。由于根据命题 A.3，K 包含每个 4-区间，$K = \langle [\![0, 3]\!], [\![1, 4]\!], [\![2, 6]\!], [\![3, 6]\!], [\![4, 1]\!], [\![5, 2]\!], [\![6, 3]\!] \rangle$，它属于 $\mathsf{ins}_6(K_6)$，因此 K 属于该 K_6 族。

现在假设对于每个 a，A 都与 $\{a, a+1\}$ 相交。由于 K 具有极小性，因此有 $|A| \leq 5$（如果 $|A| \geq 6$，那么 K 严格包含 K_7 的一个循环置换，这与极小性矛盾）。不妨利用对称性假设 $0 \notin A$。这意味着 A 包含 $\{1,2,5,6\}$ 和 3 或 4：根据当前假设，它与 $\{0,1\}$ 和 $\{6,0\}$ 相交；根据命题 A.4，它还与 $\{0,2\}$、$\{5,0\}$ 和 $\{3,4,0\}$ 相交。因此，$|A| \geq 5$，所以 $A = \{1,2,3,5,6\}$ 或 $\{1,2,4,5,6\}$，二者都对应于 K_7 的循环置换。