电磁远场建模的复杂度

Torben K¨olle、Alexander Stutz-Tirri 和 Christoph Studer

瑞士苏黎世联邦理工学院信息技术与电气工程系，邮箱：*tkoelle@ethz.ch*、*alstutz@ethz.ch*、*studer@ethz.ch*

arXiv:2601.05674v1 [cs.IT] 9 Jan 2026

摘要—**现代无线系统有望采用这样的天线架构：不仅能够发射和接收电磁波，还能有意反射并可能转换入射电磁波。本文提出了一个以麦克斯韦方程组为基础、在数学上严谨的框架，用于分析一般天线架构的电磁远场建模复杂度。我们证明，在具有物理意义的假设下，此类天线架构的复杂度有限，即可用有限个参数通过有限秩算子进行建模。此外，我们构造了一个有限秩算子序列；当算子秩超过与天线架构及分析频率相关的有效带宽后，其近似误差将以超指数速度衰减。这些结果为在数字计算平台上高效、准确地建模一般天线架构奠定了基础。**

I. 引言

在传统无线通信系统中，天线单元通常仅用于发射和接收电磁波（EM 波），而不会反射从系统外部入射的电磁波。在这类系统中，远场相互作用[1] 可用精确的有限秩描述 [1,第 II-B 节4]。[2] 因此，原则上，传统无线系统可以用有限个参数建模。

近年来，更通用的无线架构——例如阵列透镜 [2] 和可重构智能表面（RIS） [3], [4]——日益普及。对于这类架构，对从系统外部入射的电磁波进行反射（或透射）至关重要。因此，一个问题随之而来：这类现代无线系统架构中的远场相互作用，能否继续用有限个参数精确建模，或至少以任意高的精度近似建模？如果这一点成立，那么我们就称其具有有限复杂度。有限复杂度是将无线系统模型应用于数字计算平台的基本前提。

TK、AST 和 CS 的研究部分由瑞士教育、研究与创新国务秘书处（SERI）通过 SwissChips计划资助；还通过 SNSF 项目拨款 20CH21 218704，获得 CHIST-ERA 项目 CHASER（CHIST-ERA-22-WAI-01）的资助；此外，欧盟委员会在项目 6G-REFERENCE（面向无蜂窝相干通信与感知的6G硬件使能技术）框架内提供资助，该项目由欧盟“地平线欧洲”计划资助，资助协议编号为 101139155。AST 的研究部分由 armasuisse 资助。1

远场相互作用是指与电磁波的相互作用，其中这些电磁波（i）从足够远处入射，因此可表示为会聚球面波；（ii）向外传播至远场区域。

[2]具体而言，远场相互作用可由 [1, 式 17] 中引入的有限秩算子 $\mathbb{S}_{\mathrm{R_{RR}}}$、$\mathbb{S}_{\mathrm{R_{FR}}}$和 $\mathbb{S}_{\mathrm{R_{RF}}}$ 来表征。

A. 贡献

本文从线性系统理论的视角研究无线系统建模的复杂度。我们分析系统的外部相互作用是否具有有限复杂度。具体而言，我们研究系统是否能够通过有限秩算子序列任意精确地逼近，也就是说，原则上能否使用有限个参数对其建模。为此，我们提出了一个以麦克斯韦方程组为基础的严格数学框架，用于分析无线系统中远场相互作用的建模复杂度。借助该框架，我们证明，一大类天线系统的远场相互作用确实具有有限复杂度，这一性质由定理 1 确立。此外，我们明确展示了如何构造有限秩算子序列，使其近似误差在秩超过与天线架构和分析频率相关的有效带宽后呈超指数衰减，这一性质由定理 2 确立。

B. 既有研究

在文献 [5], [6], 中，Bucci 和 Franceschetti 证明了散射电磁场表现出类似带限信号的特性。具体而言，他们证明了：当距离散射体足够远时，（i）散射场可以用有限个基函数的和进行一致近似；（ii）相应的近似误差随所用基函数数量的增加呈阶梯式变化；（iii）误差开始快速下降的阈值（即有效空间带宽）取决于散射体的电尺寸。然而，这些结果量化的是散射场的复杂度，而不是散射算子本身的复杂度，并且仅适用于电尺寸较大的散射体。相比之下，我们给出的结果直接涉及系统的复杂度，而非系统输出的复杂度；此外，我们的定理不局限于大型系统。

在参考文献 [7]–[9], 中，作者分析了格林函数的近似性质。然而，参考文献 [7], [8]仅限于标量格林函数。此外，参考文献 [7]未讨论近似误差的阶梯状行为，而 [8], [9] 分析了这种阶梯状

过渡的位置；然而，他们的分析仅限于小型系统或大型系统。此外，这三项工作都关注标量或并矢格林函数的近似误差，而非其在电磁场中产生的误差。相比之下，我们不限制系统规模为小型或大型，而是：(i) 直接分析无线系统的复杂度；(ii) 确定并刻画阶梯状近似误差过渡发生的位置。

在参考文献 [10],Koivisto 中，Koivisto 分析了天线辐射的电磁场展开。具体而言，与我们的框架类似，这些场使用球谐基函数表示。然而，该论文没有给出适用于一般系统的有效带宽通用表达式。相比之下，在定理 2 中，我们给出了适用于一般系统的有效带宽公式。

C. 符号

对于一般向量（例如，a），我们使用小写粗体；对于一般矩阵（例如，A），我们使用大写粗体。对于相量（参见 [1, Def. 1]）以及包含相量的向量，我们分别使用粉色无衬线字体（例如，a）和粉色无衬线粗体（例如，a）。上标 T 和 H 分别表示转置（例如，A^{T}）和共轭转置（例如，A^{H}）。我们用 $\|\cdot\|_2$ 表示欧几里得范数。对于算子，我们使用黑板粗体（例如，$\mathbb{S}$）。给定一个算子 $\mathbb{S}$，我们用 $\mathrm{range}\{\mathbb{S}\}$ 表示其值域，用 $\|\mathbb{S}\|_{\mathrm{op}}$ 表示其算子范数。给定两个算子 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$，我们用 $\mathbb{A}\circ\mathbb{B}$ 表示它们的复合。我们用 $j \triangleq \sqrt{-1}$ 表示虚数。对于复数 $z \in \mathbb{C}$，其共轭记作 z^*。对于集合，我们使用花体（例如，$\mathcal{V}$）；自然数、整数、实数和复数集合除外，它们分别记作 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$。给定 $N \in \mathbb{N}$，我们定义集合 $[N] \triangleq \{1,\ldots,N\}$。给定向量空间中的元素 $\{\mathsf{e}_k\}_k$，我们用 $\mathrm{span}\{\{\mathsf{e}_k\}_k\}$ 表示它们的张成空间。给定集合 $\mathcal{V}$，我们用 $L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)$ 表示由 $\mathcal{V}$ 上的勒贝格测度空间和 $\mathbb{C}^3$ 上的典范希尔伯特空间所诱导的 Bochner空间。给定希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 以及 $\mathsf{a},\mathsf{b} \in \mathcal{H}$，我们用 $\langle \mathsf{a},\mathsf{b}\rangle_{\mathcal{H}}$ 表示对第一个变量线性的内积，并定义简写记法 $[\mathsf{a}]_{\mathsf{b}} \triangleq \langle \mathsf{a},\mathsf{b}\rangle_{\mathcal{H}}$。

我们采用球坐标系的物理学家约定，其中 [11]，r 表示径向距离，θ 表示极角，φ 表示方位角。为简化记号，我们分别用$\mathbf{r}$ 和 $\hat{\mathbf{r}}$ 表示球坐标 (r,θ,φ) 和角坐标 (θ,φ)。对于每个位置$\mathbf{r}$，我们将沿 $\hat{r}$、θ 和 φ 增大方向的局部正交单位向量分别记为 $\hat{\mathbf{r}}$、$\boldsymbol{\theta}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$。最后，我们用 $\Omega \triangleq [0,\pi]\times[0,2\pi)$ 表示所有角坐标构成的集合。

本文中，f 表示待分析的频率，μ_0 表示自由空间磁导率，ε_0 表示自由空间介电常数，$k \triangleq 2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 表示自由空间波数，Z_0 表示自由空间阻抗。

II. 问题设置与主要结果

我们考虑有限尺寸的一般单天线或多天线系统。具体而言，我们分析满足假设1的辐射结构。

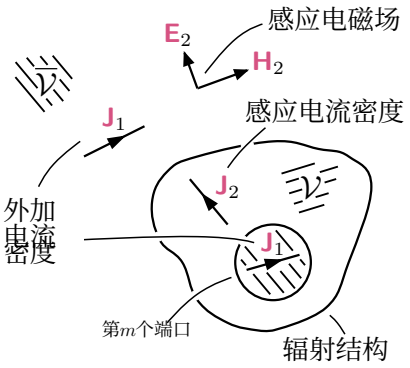

图1. 所分析的问题设置：我们考虑一个占据体积 $\mathcal{V}$、具有 M 个端口且嵌入自由空间中的辐射结构。在该结构体积之外的区域 $\mathcal{V}$内，施加电流密度J_1 。这种激励会在辐射结构内部产生感应电流密度J_2 ，进而感应出电磁场(E_2,H_2)。

定义1 （辐射结构）。 辐射结构是与周围电磁场相互作用的被动物理对象。

假设1 (有限尺寸)。 我们假设所分析的辐射结构尺寸有限。具体而言，存在一个有限半径 $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得该辐射结构完全包含在球体

$$\mathcal{B}_a \triangleq \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|\mathbf{r}\|_2 \leq a\right\}. \tag{1}$$

给定一个辐射结构，我们用 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ 表示其物理体积，用 $\mathcal{V} \triangleq \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{V}$表示其周围区域。此外，我们固定任意一个分析频率 $f \in \mathbb{R}_{>0}$，并关注与之相关的单频分量。在该频率下，辐射结构的激励可由外加电流密度 $\mathsf{J}_1 \in L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)$ 来表征。如图1所示，我们用 $\mathsf{J}_2 \in L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)$ 表示由 J_1在辐射结构中感应出的电流密度。此外，我们用 E_2,$\mathsf{H}_2 \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^3)$ 表示由 J_2感应出的电磁场。

除了假设结构具有有限尺寸（参见假设1）外，我们还将讨论范围限定为：(i) 线性时不变（LTI）辐射结构（见假设2）；(ii) 具有有限个天线端口（见假设3）；(iii) 其感应电流密度 J_2 受可与该辐射结构相互作用的最大功率限制（见假设 4）。

假设 2 （线性及时不变性）。 我们假设该辐射结构是一个线性时不变系统；也就是说，将外加电流密度 J_1 映射为感应电流密度J_2 的算子是线性且时不变的。

备注1。 根据假设 *2* 以及 *Maxwell* 方程的线性特性可直接得出，将外加电流密度 J_1 映射为感应电磁场 (E_2,H_2) 的算子同样是线性且时不变的。

[3]由于根据定义1，辐射结构是无源的，因此只需考虑外部 激励。

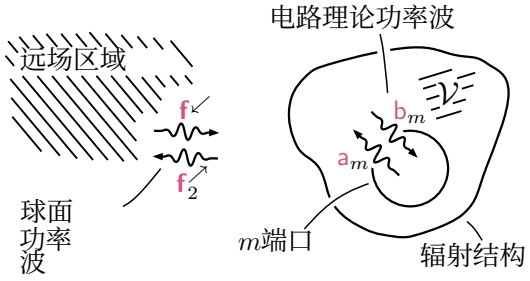

图2。我们考虑辐射结构与以下两者的相互作用：(i)其 M 端口处的电路理论功率波，以及(ii)辐射结构远场区域中足够远处的球面功率波。前者由相量向量a 和b表征；后者则由入射会聚波的角谱$\mathsf{f}^{\swarrow}$ 以及出射发散波中由电流密度$\mathsf{f}_2^{\nearrow}$ 直接感应的分量的角谱J_2表征。

假设3（有限数量的端口）。 我们假设，辐射结构与其所嵌入设备的其余部分（例如射频前端）之间的接口，可以使用有限数量的电路理论端口来表示。

假设 4 (功率有界电流响应)。 我们假设感应电流密度$\mathsf{J}_2 \in L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)$ 有上界：

$$\|\mathsf{J}_2\|^2_{L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)} \le CP_1, \tag{2}$$

其中 $C \in \mathbb{R}_{>0}$ 是一个有限常数，且 $P_1 \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ 是给定外加电流密度$\mathsf{J}_1 \in L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)$时，能够与给定辐射结构相互作用的最大功率。

注释2。 如果所有材料的欧姆电阻均有一个正的下界，则假设*4*成立。

如图2所示，我们考虑辐射结构通过（i）其端口以及（ii）其远场区域发生的相互作用。为了表征前一种相互作用，我们采用电路理论功率波（见定义2）；为了表征后一种相互作用，我们采用球面功率波（见定义3）。

定义2（电路理论功率波）。 给定一个具有 $M \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 个电路理论端口的系统。对于 $m \in [M]$，我们将沿第 m个端口进入和离开系统的电路理论功率波定义为

$$\mathsf{a}_m \triangleq \frac{1}{2\sqrt{R_0}}(\mathsf{v}_m + R_0\mathsf{i}_m),\quad \mathsf{b}_m \triangleq \frac{1}{2\sqrt{R_0}}(\mathsf{v}_m - R_0\mathsf{i}_m). \tag{3}$$

其中，v_m 和i_m 分别是端口 m处电压和电流的相量；$R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ 是任意参考阻抗（50Ω 是常用的选择）。

注释 3. 辐射结构的端口之间的相互作用完全由电路理论功率波表征。

定义3（球面功率波）。 给定一个有限尺寸的系统，置于坐标系原点处。在远离系统处，特别是当 $r \to \infty$ 时，与系统相互作用相关的电场可分解如下[4] *[12,式5.12]*:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\sqrt{Z_0}} r\mathsf{E}(r,\theta,\varphi) = \mathsf{f}^{\swarrow}(\theta,\varphi)e^{+jkr} + \mathsf{f}^{\nearrow}(\theta,\varphi)e^{-jkr}. \tag{4}$$

此处 $\mathsf{f}^{\swarrow} \in L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$ 和 $\mathsf{f}^{\nearrow} \in L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$ 分别表示 入射、会聚球面功率波 和出射、发散球面功率波的角谱。

注释 4. 根据假设 *2* 以及麦克斯韦方程组的线性性质，可以进一步将出射发散球面功率波分解为 $\mathsf{f}^{\nearrow} = \mathsf{f}_1^{\nearrow} + \mathsf{f}_2^{\nearrow}$，其中 $\mathsf{f}_1^{\nearrow}$，$\mathsf{f}_2^{\nearrow} \in L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$ 分别是由电流密度 J_1 和 J_2, 直接激发的分量。

注释 5. 在远场区域，辐射结构中激发的出射 电磁波完全由出射发散球面功率波角谱中的相应分量表征，如 *[13,节 4]*

$$\mathsf{E}_2(r,\theta,\varphi) \approx \sqrt{Z_0}\mathsf{f}_2^{\nearrow}(\theta,\varphi)\frac{e^{-jkr}}{r} \tag{5}$$

$$\mathsf{H}_2(r,\theta,\varphi) \approx \frac{1}{\sqrt{Z_0}}\big(\hat{\mathbf{r}} \times \mathsf{f}_2^{\nearrow}(\theta,\varphi)\big)\frac{e^{-jkr}}{r}. \tag{6}$$

注 6。 在距离辐射结构足够远处，射向辐射结构的入射电磁波可由入射会聚球面功率波的角谱充分表征，如 *[12,式 5 所示。12]*

$$\mathsf{E}_1(r,\theta,\varphi) \approx \sqrt{Z_0}\mathsf{f}^{\swarrow}(\theta,\varphi)\frac{e^{jkr}}{r} \tag{7}$$

$$\mathsf{H}_1(r,\theta,\varphi) \approx \frac{1}{\sqrt{Z_0}}\big(-\hat{\mathbf{r}} \times \mathsf{f}^{\swarrow}(\theta,\varphi)\big)\frac{e^{jkr}}{r}. \tag{8}$$

由注 3–6 可知，可以通过以下效应算子 $\mathbb{T}$ 来分析辐射结构的端口与远场相互作用[5]： $\mathbb{C}^M \times L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3) \to \mathbb{C}^M \times L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$，其定义如下：

$$(\mathsf{b}, \mathsf{f}_2^{\nearrow}) \triangleq \mathbb{T}(\mathsf{a}, \mathsf{f}^{\swarrow}). \tag{9}$$

本文证明，效应算子 $\mathbb{T}$ 具有有限复杂度，即可以用有限秩算子序列任意精确地逼近它（见定理 1）。此外，我们给出一个收敛至 $\mathbb{T}$ 的有限秩算子显式序列，并确定一个有效带宽，超过该带宽后收敛速度为超指数级（见定理 2）。

定理 1（远场相互作用的有限秩表示）。 设自由空间中存在一个满足假设 *1–4* 的辐射结构。对于任意固定的分析频率 $f \in \mathbb{R}_{>0}$，令 $\mathbb{T}$ 表示式 *(9)* 中引入的效应算子。则效应算子 $\mathbb{T}$ 可以在一致算子拓扑下由有限秩算子任意精确地逼近。

[4]归一化 $\sqrt{Z_0}$因子确保 $\|\mathsf{f}^{\swarrow}\|^2_{L^2}$ 和 $\|\mathsf{f}^{\nearrow}\|^2_{L^2}$ 分别等于总入射功率和总出射功率。

[5]具体而言，我们分析两类电磁波的相互作用：(i) 从足够远处入射、可表示为会聚球面波的电磁波，以及 (ii) 向远场区域传播的电磁波。

定理 1 的证明见第 III 节。

定义4 (标量球谐函数)。 对于整数 $\ell \geq 0$和 $|m| \leq \ell$，次数为 ℓ、阶数为 m 的（标量）球谐函数是函数 Y_ℓ^m: $\Omega \to \mathbb{C}$，定义为 *[14,式5.2(1)]*

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) \triangleq \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos(\theta))e^{jm\varphi}, \tag{10}$$

其中 P_ℓ^m 是次数为 ℓ、阶数为 m 的勒让德多项式。

备注 7。 标量球谐函数构成 $L^2(\Omega\ \mathbb{C})$ *[15, Sec. 2]* 的完备酉基。

定义 5 (矢量球谐函数 (VSHs))。 对于整数 $\ell \geq 0$ 和 $|m| \leq \ell$，次数为 ℓ、阶数为 m 的矢量球谐函数是定义域为Ω、陪域为 $\mathbb{C}^3$ 的函数，其定义为 *[15,Sec. 3]*

$$\mathbf{Y}_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}) \triangleq \hat{\mathbf{r}} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}), \tag{11}$$
$$\mathbf{\Psi}_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}) \triangleq r\nabla Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}), \tag{12}$$
$$\mathbf{\Phi}_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}) \triangleq \mathbf{r} \times \nabla Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}). \tag{13}$$

注释 8。 矢量球谐函数构成$L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$ *[15, Sec. 3]* 的完备正交基。

定义 6 (矢量球谐投影算子)。 对于整数 $L \geq 0$，次数为 L 的矢量球谐投影算子是算子 $\mathbb{P}_L$: $L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3) \to L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$，它将矢量场映射为其在次数至多为 L 的矢量球谐函数张成的子空间上的正交投影

$$\mathcal{V}_L \triangleq \operatorname{span}\left\{ \mathbf{Y}_\ell^m, \mathbf{\Psi}_\ell^m, \mathbf{\Phi}_\ell^m \;\middle|\; 0 \leq |m| \leq \ell \leq L \right\}. \tag{14}$$

定理 2 （远场相互作用的矢量球谐可表示性）。设自由空间中存在一个满足假设 *1–4* 的辐射结构。对于任意固定的分析频率 $f \in \mathbb{R}_{>0}$和任意整数 $L \geq 0$，令 $\mathbb{T}$ 表示式 *(9)* 中引入的效应算子，并令 $\mathbb{T}_L$ 表示效应算子 $\mathbb{T}$ 与次数为 L 的矢量球谐投影算子 $\mathbb{P}_L$ 的复合[6] （见定义 *6*）。此外，将该辐射结构的有效带宽定义为

$$L_{\mathrm{B}} \triangleq \lceil ka \rceil, \tag{15}$$

其中，a 表示使该辐射结构完全包含于式 *(1)* 所定义的球 $\mathcal{B}_a$ 中的最小半径。

则 *(i)* 效应算子 $\mathbb{T}$ 可在一致算子拓扑下由（有限秩）算子 $\{\mathbb{T}_L\}_{L\geq 0}$ 任意精确地近似；*(ii)* 一旦 $L \geq L_{\mathrm{B}}$，近似误差 $\|\mathbb{T}-\mathbb{T}_L\|_{\mathrm{op}}$ 即呈现超指数衰减。具体而言，存在一个形如 $\alpha e^{-\beta(L)L}$ 的函数，其中 $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，且 β： $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{>0}$ 是满足以下条件的单调递增函数：对于 $L \geq L_{\mathrm{B}}$，有 $\lim_{L\to\infty}\beta(L) = \infty$，因此

$$\|\mathbb{T}-\mathbb{T}_L\|_{\mathrm{op}} \leq \alpha e^{-\beta(L)L}, \quad \forall L \geq L_{\mathrm{B}}. \tag{16}$$

[6]具体而言， $\mathbb{T}_L$ 是将矢量球谐投影算子 $\mathbb{P}_L$ 作用于出射感应球面功率波 $\mathsf{f}_2^{\nearrow}$ 而得到的，同时保持出射电路理论功率波 b 不变。

定理 2 的证明见第四节。

注 9. 在（*60*）中，我们给出了 α和 $\beta(L)$ 的显式表达式，使得（*16*）成立。

III. 定理 1 的证明

在开始正式证明之前，我们强调，假设 1-3 确保：(i) 端口处的电路理论功率波定义良好，且可表示为向量 $\mathsf{a},\mathsf{b} \in \mathbb{C}^M$，其中 M是端口数；(ii) 辐射结构周围的球面功率波同样定义良好，可用角谱函数 $\mathsf{f}^{\swarrow},\mathsf{f}_2^{\nearrow} \in L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$描述。

由假设 2 以及麦克斯韦方程组的线性可直接推出，效应算子 $\mathbb{T}$ 是线性的。量 $\|\mathsf{a}\|_2^2$, $\|\mathsf{b}\|_2^2$, $\|\mathsf{f}^{\swarrow}\|_{L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)}^2$，以及 $\|\mathsf{f}_2^{\nearrow}\|_{L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)}^2$ 分别直接表示相应波所携带的功率。因此，根据能量守恒， $\mathbb{T}$ 也有界。

效应算子 $\mathbb{T}$ 可分解为两个线性有界算子， $\mathbb{T}^{\mathsf{b}}$: $\mathbb{C}^M \times L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3) \to \mathbb{C}^M$和 $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}$: $\mathbb{C}^M \times L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3) \to L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$，即

$$(\mathsf{b},\mathsf{f}_2^{\nearrow}) = \mathbb{T}(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow}) = \left(\mathbb{T}^{\mathsf{b}}(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow}), \mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow})\right). \tag{17}$$

$\mathbb{T}^{\mathsf{b}}$ 的陪域是有限维的。因此， $\mathbb{T}^{\mathsf{b}}$是有限秩算子，只需证明 $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}$ 可以由有限秩算子逼近即可。由于 $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}$ 的定义域和值域均为希尔伯特空间，且所有希尔伯特空间都具有逼近性质，因此只需证明 $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}$ 是紧算子 [16, 定理 II-4.4]。

算子 $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}$ 还可进一步分解为两个线性算子 $\mathbb{T}^{\mathsf{J}_2}{}_{(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow})}$: $\mathbb{C}^M \times L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3) \to L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)$ 和 $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}{}_{\mathsf{J}_2}$: $L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3) \to L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$，其定义为

$$\mathsf{J}_2 \triangleq \mathbb{T}^{\mathsf{J}_2}_{(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow})}(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow}), \quad \mathsf{f}_2^{\nearrow} \triangleq \mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}_{\mathsf{J}_2}\mathsf{J}_2. \tag{18}$$

现在我们将证明 (i) $\mathbb{T}^{\mathsf{J}_2}{}_{(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow})}$ 有界，且 (ii) $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}{}_{\mathsf{J}_2}$ 是紧的。由此可知， $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}$ 也紧；见 [16,命题 VI-3.5]。

$\mathbb{T}^{\mathsf{J}_2}{}_{(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow})}$ 的有界性可由以下事实得出：和 $\|\mathsf{a}\|_2^2 + \|\mathsf{f}^{\swarrow}\|_{L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)}^2$ 等于假设 4 中的最大可用功率。因此，根据假设 4 可知，存在一个有限常数 $C \in \mathbb{R}$，使得

$$\|\mathsf{J}_2\|_{L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)} \leq \sqrt{CP_1} = \sqrt{C}\sqrt{\|\mathsf{a}\|_2^2 + \|\mathsf{f}^{\swarrow}\|_{L^2(\Omega,\mathbb{C}^3)}^2}. \tag{19}$$

尚需证明 $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}{}_{\mathsf{J}_2}$ 是紧算子。对于给定方向$\hat{\mathbf{r}}$，相应的角谱为

$$\mathsf{f}_2^{\nearrow}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \lim_{r\to\infty} re^{jkr}\mathsf{E}_2(\hat{\mathbf{r}}) \tag{20}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{Z_0}} \lim_{r\to\infty} re^{jkr} j\omega\mu_0 \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathsf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{21}$$
$$= \frac{\omega\mu_0}{j\sqrt{Z_0}} \lim_{r\to\infty} re^{jkr} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}\left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}^{\mathsf{T}}\right)\mathsf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{22}$$
$$= \frac{\omega\mu_0}{j4\pi\sqrt{Z_0}}\left(\mathbf{I}_3 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\right) \lim_{r\to\infty} \iiint_{\mathcal{V}} e^{jk(r-R)}\mathsf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{23}$$

$$= \frac{\omega\mu_0}{j4\pi\sqrt{Z_0}} \left(\mathbf{I}_3 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\right) \iiint_{\mathcal{V}} e^{jk\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}'} \mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}', \tag{24}$$

其中我们使用 $\mathrm{R} \triangleq \mathbf{r} - \mathbf{r}'$，$R \triangleq \|\mathrm{R}\|_2$，以及 $\hat{\mathrm{R}} \triangleq \mathrm{R}/R$；而 $\mathsf{G}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^{3\times 3}$ 是并矢格林函数。这里，(20)由定义3得出；(21)和(22)由 [17, 第10节9]得出；(23)是因为，当 $r \to \infty$时，$\mathrm{I}_3 - \hat{\mathrm{R}}\,\hat{\mathrm{R}}^{\mathsf{T}}$收敛于 $\mathrm{I}_3 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}$，且 r/R 收敛于 1；而 (24) 是因为，当 $r \to \infty$ 时，$r - R$ 收敛于 $\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}'$。由(24)可知，$\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}\,\mathbf{J}_2$ 是一个具有平方可积核的积分算子。因此，根据 [16, 命题 II-4.7], , 算子 $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}\,\mathbf{J}_2$是紧的。■

IV. 定理 2 的证明

我们首先指出，定理 2 中的性质 (i) 可直接由性质 (ii) 推出。因而，只需证明性质 (ii)。此外，在整个证明过程中，我们忽略电路理论功率波 $\mathbf{b}$，因为 $\mathbb{P}_L$ 不会改变波 $\mathbf{b}$，因此它们不会对近似误差 $\|\mathbb{T} - \mathbb{T}_L\|_{\mathrm{op}}$产生贡献。

证明分为以下三个步骤：在步骤 I 中，我们构造一个有限秩算子序列 $\{\mathbb{K}_L\}_{L\geq 0}$，并证明存在一个常数 $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和一个函数 $\beta: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{>0}$，该函数在 $L \geq L_{\mathrm{B}}$ 上单调递增，且满足 $\lim_{L\to\infty} \beta(L) = \infty$，使得

$$\|\mathbb{T} - \mathbb{K}_L\|_{\mathrm{op}} \leq \alpha e^{-\beta(L)L}. \tag{25}$$

在步骤 II 中，我们证明对于每个 $L \geq 0$，$\mathbb{K}_L$ 的值域都包含于 $\mathcal{V}_L$。在步骤 III 中，我们运用正交原理证明，对于所有 $L \geq 0$,

$$\|\mathbb{T} - \mathbb{T}_L\|_{\mathrm{op}} \leq \|\mathbb{T} - \mathbb{K}_L\|_{\mathrm{op}}. \tag{26}$$

结合 (25) 和 (26) 可得，对于所有 $L \geq L_{\mathrm{B}}$,

$$\|\mathbb{T} - \mathbb{T}_L\|_{\mathrm{op}} \leq \alpha e^{-\beta(L)L}, \tag{27}$$

这就证明了定理 2。

步骤 I：有限秩逼近：

类似于 (18)，我们将 $\mathbb{T}$ 分解为两个线性算子 $\mathbb{T}^{\mathbf{J}_2}_{(\mathsf{a},\,\mathsf{f}^{\swarrow})}: \mathbb{C}^M \times L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3) \to L^2(\mathcal{V},\ \mathbb{C}^3)$ 和 $\mathbb{T}^{(\mathsf{b},\mathsf{f}_2^{\nearrow})}_{\mathbf{J}_2}: L^2(\mathcal{V}, \mathbb{C}^3) \to \mathbb{C}^M \times L^2(\Omega, \mathbb{C}^3)$. For $L \geq 0$,

$$\mathbb{K}_L \triangleq \tilde{\mathbb{K}}_L \circ \mathbb{T}^{\mathbf{J}_2}_{(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow})}, \tag{28}$$

其中，我们定义 $\tilde{\mathbb{K}}_L$： $L^2(\mathcal{V},\ \mathbb{C}^3) \to \mathbb{C}^M \times L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$ 如下

$$\left(\tilde{\mathbb{K}}_L \mathbf{J}_2\right)(\hat{\mathbf{r}}) \triangleq \frac{\omega\mu_0}{j\sqrt{Z_0}} \left(\mathbf{I}_3 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\right) \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathbf{c}_{\ell,m} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}) \tag{29}$$

并且，对于 $0 \leq |m| \leq \ell$，我们将系数 $\mathbf{c}_{\ell,\,m} \in \mathbb{C}^3$ 定义如下

$$\mathbf{c}_{\ell,m} \triangleq j^\ell \iiint_{\mathcal{V}} \iota_\ell(kr')\overline{Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}')}\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}'. \tag{30}$$

这里，Y_ℓ^m是次数为 ℓ、阶数为 m 的标量球谐函数（参见定义4），而 ι_ℓ 是第一类球贝塞尔函数，次数为 ℓ。[7] 如此构造的 $\{\mathbb{K}_L\}_{L\geq 0}$ 是（线性）有限秩算子。

根据构造，有

$$\|\mathbb{T} - \mathbb{K}_L\|_{\mathrm{op}} = \left\| \left(\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}_{\mathbf{J}_2} - \tilde{\mathbb{K}}_L\right) \mathbb{T}^{\mathbf{J}_2}_{(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow})} \right\|_{\mathrm{op}} \tag{31}$$

$$\leq \left\| \mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}_{\mathbf{J}_2} - \tilde{\mathbb{K}}_L \right\|_{\mathrm{op}} \left\| \mathbb{T}^{\mathbf{J}_2}_{(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow})} \right\|_{\mathrm{op}}, \tag{32}$$

其中 $\left\|\mathbb{T}^{\mathbf{J}_2}_{,\,(\mathsf{af}^{\swarrow})}\right\|_{\mathrm{op}}$ 是有限的，因为 $\mathbb{T}^{\mathbf{J}_2}_{(\mathsf{a},\mathsf{f}^{\swarrow})}$ 有界，正如我们在定理 1 的证明中所示。

为了给 $\left\|\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}_{\mathbf{J}_2} - \tilde{\mathbb{K}}_L\right\|_{\mathrm{op}}$ 确定一个上界，我们现在分析 $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}_{\mathbf{J}_2}$。在定理 1 的证明中，我们推导出 $\mathbb{T}^{\mathsf{f}_2^{\nearrow}}_{\mathbf{J}_2}$ 可以写成式（24）的形式。现在，我们将雅可比–安格尔展开 [18,式 2.46] 应用于（24）中的核：

$$e^{jk\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}'} = \sum_{\ell=0}^{\infty} j^\ell(2\ell+1)\iota_\ell(kr')P_\ell(\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{r}}'). \tag{33}$$

这里，P_ℓ 是次数为 ℓ 的勒让德多项式。将此表达式代入（24）后，我们希望交换隐式极限与积分。为此，我们定义部分和

$$S_L(\mathbf{r}') \triangleq \sum_{\ell=0}^{L} j^\ell(2\ell+1)\iota_\ell(kr')P_\ell(\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{r}}'). \tag{34}$$

由于 Jacobi-Anger 展开在 $\mathbb{R}^3$ 的紧子集上一致收敛（见 [18, 第 37]页），且每个 S_L 都是有界函数的有限和，因此序列 $\{S_L\}_{L\geq 0}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的紧子集上一致有界（见 [19, 习题 7.1]）。由于 $\mathcal{V}$ 有界，它包含在 $\mathbb{R}^3$ 的某个紧子集中，且 $\{S_L\}_{L\geq 0}$ 在 $\mathcal{V}$ 上一致有界。因此，对于每个 $L \geq 0$、每个笛卡尔基向量 $\mathbf{e} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ 以及每个位置 $\mathbf{r}' \in \mathcal{V}$，都有

$$\left|S_L(\mathbf{r}')[\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')]_{\mathbf{e}}\right| \leq |S_L(\mathbf{r}')|\,\|\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\|_1 \tag{35}$$

$$\leq K\|\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\|_2, \tag{36}$$

存在某个有限的 $K \in \mathbb{R}$，且与 L 无关。这里，(36) 源于 $\{S_L\}_{L\geq 0}$ 的一致有界性以及 $\mathbb{C}^3$ 上范数的等价性。由 (36) 和 $\mathbf{J}_2 \in L^2(\mathcal{V},\ \mathbb{C}^3)$ 可知，我们可以应用勒贝格控制收敛定理（见 [20, 定理 1.3。3]）。因此，将 (33) 代入 (24) 后，我们可以交换隐式极限与积分，从而得到

$$\iiint_{\mathcal{V}} e^{jk\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\mathbf{r}'} \mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \iiint_{\mathcal{V}} j^\ell(2\ell+1)\iota_\ell(kr')P_\ell(\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{r}}')\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{37}$$

$$= 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} j^\ell Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}) \iiint_{\mathcal{V}} \iota_\ell(kr')\overline{Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}')}\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}', \tag{38}$$

[7]为避免与虚数单位 j混淆，我们偏离通常的约定，使用字母 ι 来定义球贝塞尔函数。

其中，式 (38) 根据球谐加法定理 [18, 定理 29]得出。将式 (38) 代入式 (24) 可得 $\mathbb{T}^{\mathbf{f}_2^{\nearrow}}_{\mathbf{J}_2}$ 可写为

$$\mathbf{f}_2^{\nearrow}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\omega\mu_0}{j\sqrt{Z_0}}\left(\mathbf{I}_3 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\mathbf{c}_{\ell,m}Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}). \tag{39}$$

现在可以将近似误差写为[8]

$$\left\|\mathbb{T}^{\mathbf{f}_2^{\nearrow}}_{\mathbf{J}_2} - \tilde{\mathbb{K}}_L\right\|_{\text{op}}$$

$$= \sup_{\|\mathbf{J}_2\|_{L^2}=1}\left\|\frac{\omega\mu_0}{j\sqrt{Z_0}}\left(\mathbf{I}_3 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\right)\sum_{\ell=L}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\mathbf{c}_{\ell,m}Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}})\right\|_{L^2} \tag{40}$$

$$\leq \sup_{\|\mathbf{J}_2\|_{L^2}=1}\frac{\omega\mu_0}{\sqrt{Z_0}}\left\|\sum_{\ell=L}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\mathbf{c}_{\ell,m}Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}})\right\|_{L^2} \tag{41}$$

$$= \sup_{\|\mathbf{J}_2\|_{L^2}=1}\frac{\omega\mu_0}{\sqrt{Z_0}}\sqrt{\sum_{\ell=L}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\|\mathbf{c}_{\ell,m}\|_2^2}, \tag{42}$$

其中，(40)由(29)和(39)推出；(41)是因为$\mathbf{I}_3 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}$ 是正交投影；(42)则由备注7和帕塞瓦尔定理推出。

(42)中的系数可按如下方式进行界定[9]:

$$\|\mathbf{c}_{\ell,m}\|_2^2 = \left\|\iiint_{\mathcal{V}}\iota_\ell(kr')\overline{Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}')}\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\right\|_2^2 \tag{43}$$

$$= \left\|\int_0^a \iota_\ell(kr')\oiint_\Omega \overline{Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}')}\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{r}}'r'^2\mathrm{d}r'\right\|_2^2 \tag{44}$$

$$\leq \int_0^a \left(\iota_\ell(kr')\right)^2 r'^2\mathrm{d}r' \int_0^a \left\|\oiint_\Omega \overline{Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}')}\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{r}}'\right\|_2^2 r'^2\mathrm{d}r'. \tag{45}$$

这里，(43)直接由(30)推出。在(44)中，我们使用富比尼定理。该定理适用的原因是：(i) $\mathbf{J}_2 \in L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)$ 和 $\mathcal{V}$有界，这意味着 $\mathbf{J}_2$ 的每个分量也属于 $L^1(\mathcal{V},\mathbb{C})$；此外，(ii) ι_ℓ 和 Y_ℓ^m在相关的有界区域上均有界。最后，在(45)中，我们应用柯西–施瓦茨不等式。

现在将(45)代入(42)中的双重求和，得到

$$\sum_{\ell=L}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\|\mathbf{c}_{\ell,m}\|_2^2 \leq \sup_{\ell\geq L}\int_0^a \left(\iota_\ell(kr')\right)^2 r'^2\mathrm{d}r' \times \sum_{\ell=L}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\int_0^a \left\|\oiint_\Omega \overline{Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}')}\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{r}}'\right\|_2^2 r'^2\mathrm{d}r'. \tag{46}$$

现在我们分析(46)中的双重求和项，该项可由以下方式界定

$$\sum_{\ell=L}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\int_0^a \left\|\oiint_\Omega \overline{Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}')}\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{r}}'\right\|_2^2 r'^2\mathrm{d}r'$$

$$\leq \int_0^a \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left\|\oiint_\Omega \overline{Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}')}\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{r}}'\right\|_2^2 r'^2\mathrm{d}r' \tag{47}$$

$$= \int_0^a \oiint_\Omega \|\mathbf{J}_2(\mathbf{r}')\|_2^2\,\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{r}}'r'^2\mathrm{d}r' \tag{48}$$

$$= \|\mathbf{J}_2\|^2_{L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)}, \tag{49}$$

其中，式（47）由单调收敛定理得出，而式（48）由$\mathbf{J}_2 \in L^2(\mathcal{V},\ \mathbb{C}^3)$、富比尼定理和帕塞瓦尔定理得出。

现在将（49）和（46）代入（42），得到

$$\left\|\mathbb{T}^{\mathbf{f}_2^{\nearrow}}_{\mathbf{J}_2} - \tilde{\mathbb{K}}_L\right\|_{\text{op}}$$

$$\leq \sup_{\|\mathbf{J}_2\|_{L^2}=1}\frac{\omega\mu_0}{\sqrt{Z_0}}\sqrt{\sup_{\ell\geq L}\int_0^a \left(\iota_\ell(kr')\right)^2 r'^2\mathrm{d}r'\,\|\mathbf{J}_2\|^2_{L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)}} \tag{50}$$

$$= \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{Z_0}}\sqrt{\sup_{\ell\geq L}\int_0^a \left(\iota_\ell(kr')\right)^2 r'^2\mathrm{d}r'} \tag{51}$$

$$= \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{Z_0}}\sqrt{\sup_{\ell\geq L}\frac{1}{k^3}\int_0^{ka}\left(\iota_\ell(u)\right)^2 u^2\mathrm{d}u} \tag{52}$$

$$= \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{Z_0}}\sqrt{\sup_{\ell\geq L}\frac{\pi}{2k^3}\int_0^{ka}\left(I_{\ell+\frac{1}{2}}(u)\right)^2 u\,\mathrm{d}u}, \tag{53}$$

其中，I_ν 表示 $\nu\in\mathbb{R}_{\geq 0}$阶普通贝塞尔函数。[10] 这里，（52）由代入 $u \triangleq kr'$ 得出；（53）则由 [21, 式 10.1.1] 得出。

接下来，我们利用以下事实：对于 $0\leq x\leq 1$ 和 $\nu>0$, 有 [22,式 8]

$$\left(I_\nu(\nu x)\right)^{\frac{1}{\nu}} \leq f(x) \triangleq \frac{xe^{\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}}. \tag{54}$$

下文中，我们取 $x = \frac{u}{\ell+\frac{1}{2}}$ 和 $\nu = \ell + \frac{1}{2}$。因此，对于 $L \geq L_{\text{B}} \triangleq \lceil ka\rceil$，可以将近似误差界定为

$$\left\|\mathbb{T}^{\mathbf{f}_2^{\nearrow}}_{\mathbf{J}_2} - \tilde{\mathbb{K}}_L\right\|_{\text{op}} \leq \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{Z_0}}\sqrt{\sup_{\ell\geq L}\frac{\pi}{2k^3}\int_0^{ka} f(x)^{2\nu}u\,\mathrm{d}u} \tag{55}$$

$$\leq \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{Z_0}}\sqrt{\frac{\pi}{2k^3}\int_0^{ka} f\left(\frac{u}{L+\frac{1}{2}}\right)^{2\left(L+\frac{1}{2}\right)}u\,\mathrm{d}u} \tag{56}$$

$$\leq \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{Z_0}}\sqrt{\frac{\pi}{2k^3}\int_0^{ka} u\,\mathrm{d}u f\left(\frac{ka}{L+\frac{1}{2}}\right)^{2\left(L+\frac{1}{2}\right)}} \tag{57}$$

$$\leq \frac{\omega\mu_0\sqrt{\pi}a}{2\sqrt{kZ_0}} f\left(\frac{ka}{L+\frac{1}{2}}\right)^{L+\frac{1}{2}} \tag{58}$$

$$\leq \frac{\omega\mu_0\sqrt{\pi}a}{2\sqrt{kZ_0}} f\left(\frac{ka}{L+\frac{1}{2}}\right)^{L} \tag{59}$$

[8]在（40）至（42）中，为简化记号，我们省略了相应博赫纳空间（$L^2(\mathcal{V},\mathbb{C}^3)$ 和 $L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$）的明确说明。

[9]对于不在体积$(r,\ \theta,\ \varphi)$ 内的点 $\mathcal{V}$，我们定义$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$。

[10]为保持符号统一，我们用字母 I 表示普通贝塞尔函数。

$$= \underbrace{\frac{\omega\mu_0\sqrt{\pi}a}{2\sqrt{kZ_0}}}_{\alpha} \exp\left(\underbrace{\ln\left(f\left(\frac{ka}{L+\frac{1}{2}}\right)\right)}_{=-\beta(L)} L \right), \tag{60}$$

其中，(55)由(54)得出，而(56)-(60)则基于以下事实：在区间 $0 \le x < 1$ 上，$f(x)$ 是单调递增函数，且 $0 \le f(x) < 1$。最后，我们有 $\alpha \ge 0$，又因为 $L \ge L_{\mathrm{B}}$，所以 $\beta(L) > 0$ 是一个单调递增函数，满足 $\lim_{L\to\infty} \beta(L) = \infty$，至此步骤 I 得证。

步骤 *II*：*VSH* 子空间包含：

由于矢量球谐函数构成了 $L^2(\Omega\ \mathbb{C}^3)$ 的完备基（参见注释 8），只需证明，对于 $L' > L$ 和 $|m'| \le L'$，矢量球谐函数 $\mathbf{Y}_{L'}^{m'}$，$\mathbf{\Psi}_{L'}^{m'}$ 和 $\mathbf{\Phi}_{L'}^{m'}$ 与任何可表示为式 (29) 右端形式的函数都正交。

为此，我们注意到 $\mathbf{Y}_{L'}^{m'}$ 纯径向，而式 (29) 的右端纯横向，因此二者正交。接下来，我们固定任意系数 $\{\mathbf{c}_{\ell,m}\}_{\ell,m}$。我们用 $\mathbf{X}_{L'}^{m'}$ 作为 $\mathbf{\Psi}_{L'}^{m'}$ 或 $\mathbf{\Phi}_{L'}^{m'}$ 的占位符，并分析内积

$$\left\langle \left(\mathbf{I}_3 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\right) \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathbf{c}_{\ell,m} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}), \mathbf{X}_{L'}^{m'} \right\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{C}^3)}$$

$$= \oiint_\Omega \left(\left(\mathbf{I}_3 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\right) \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathbf{c}_{\ell,m} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}) \right)^{\mathsf{H}} \mathbf{X}_{L'}^{m'} \mathrm{d}^2\hat{\mathbf{r}} \tag{61}$$

$$= \oiint_\Omega \left(\sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathbf{c}_{\ell,m} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}) \right)^{\mathsf{H}} \left(\mathbf{I}_3 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\right) \mathbf{X}_{L'}^{m'} \mathrm{d}^2\hat{\mathbf{r}} \tag{62}$$

$$= \left\langle \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathbf{c}_{\ell,m} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}), \mathbf{X}_{L'}^{m'} \right\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{C}^3)}, \tag{63}$$

其中，在式 (63) 中我们利用了 $\mathbf{\Psi}_{L'}^{m'}$ 和 $\mathbf{\Phi}_{L'}^{m'}$ 的横向性。

由 [14,式 7.3(3)和式 7.3(9)]可得，$\mathbf{X}_{L'}^{m'}$ 可写为

$$\mathbf{X}_{L'}^{m'} = \sum_{\ell=L'-1}^{L'+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathbf{c'}_{\ell,m} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}), \tag{64}$$

其中 $\mathbf{c'}_{\ell,\ m} \in \mathbb{C}^3$。由此表示可知，$\mathbf{X}_{L'}^{m'}$ 涉及最低阶为 $L' - 1 \ge L$的标量球谐函数。然而，式 (63) 中的求和仅包含次数不超过 $L-1$的标量球谐函数，因此不同次数之间不存在重叠。根据标量球谐函数的正交性（参见备注 7），可知 $\mathbf{X}_{L'}^{m'}$ 与式 (29) 右侧所示形式的任意函数正交。

我们得出，对于 $L \ge 0$，有

$$\mathrm{range}\{\mathbb{K}_L\} \subset \mathcal{V}_L. \tag{65}$$

步骤 *III*：正交原理：

对于任意 $L \ge 0$，均有

$$\|\mathbb{T} - \mathbb{T}_L\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\|\mathbf{J}_2\|_{L^2}=1} \|(\mathbb{T} - \mathbb{T}_L)\,\mathbf{J}_2\|_{L^2} \tag{66}$$

$$= \sup_{\|\mathbf{J}_2\|_{L^2}=1} \|(\mathbb{I} - \mathbb{P}_L)\,\mathbb{T}\mathbf{J}_2\|_{L^2} \tag{67}$$

$$= \sup_{\|\mathbf{J}_2\|_{L^2}=1} \|(\mathbb{I} - \mathbb{P}_L)\,(\mathbb{T} - \mathbb{K}_L + \mathbb{K}_L)\,\mathbf{J}_2\|_{L^2} \tag{68}$$

$$= \sup_{\|\mathbf{J}_2\|_{L^2}=1} \|(\mathbb{I} - \mathbb{P}_L)\,(\mathbb{T} - \mathbb{K}_L)\,\mathbf{J}_2\|_{L^2} \tag{69}$$

$$\le \sup_{\|\mathbf{J}_2\|_{L^2}=1} \|(\mathbb{T} - \mathbb{K}_L)\,\mathbf{J}_2\|_{L^2} \tag{70}$$

$$= \|\mathbb{T} - \mathbb{K}_L\|_{\mathrm{op}}, \tag{71}$$

其中，$\mathbb{I}$ 是恒等算子。这里，(69) 直接由 (65) 得出，而 (70) 则源于 $\mathbb{P}_L$ 是一个正交投影。最后，正如第 III 节开头所述，(71) 中的结果完成了证明。■

V. 结论

我们证明了，广泛类别的辐射结构所产生的电磁远场相互作用均可由有限秩算子序列任意精确地逼近（参见定理 1）。此外，我们提出了一种基于矢量球谐函数的方法，用于构造这样的有限秩算子序列。特别是，我们证明，当秩超过有效带宽后，近似误差会超指数衰减（参见定理 2）。我们的结果表明，广泛类别的无线系统的远场相互作用可通过有限复杂度建模——即使用有限个参数——并达到任意精度。这一结果进一步强化了我们在 [1,备注 9]中的论证：[1, 方程 21] 所定义的散射算子能够用有限数量的模型参数准确表示（达到任意精度）。

参考文献

[1] A. Stutz-Tirri、G. Schwan 和 C. Studer，“可重构电磁结构的高效且物理一致建模”，*IEEE*开放通信学会期刊，第 6 卷，第 1610–1633 页，2025 年 2 月。[2] S. Venkatesh、X. Lu、H. Saeidi 和 K. Sengupta，“基于平铺式 CMOS 芯片的高速可编程且可扩展太赫兹全息超表面”，《自然·电子学》，第 3 卷，第 785–793 页，2020 年 12 月。[3] M. Di Renzo、A. Zappone、M. Debbah、M. S. Alouini、C. Yuen、J. de Rosny 和 S. Tretyakov，“可重构智能表面赋能的智能无线电环境：工作原理、研究现状与未来发展”，*IEEE*通信领域精选期刊，第 38 卷，第 11 期，第 2450–2525 页，2020 年 11 月。[4] Q. Wu、S. Zhang、B. Zheng、C. You 和 R. Zhang，“智能反射面辅助无线通信：教程”，*IEEE*通信汇刊，第 69 卷，第 5 期，第 3313–3351 页，2021 年 5 月。[5] O. M. Bucci 和 G. Franceschetti，“关于散射场的自由度”，*IEEE*天线与传播汇刊，第 37 卷，第 7 期，第 918–926 页，1989 年 7 月。[6] ——，“关于散射场的空间带宽”，*IEEE*天线与传播汇刊，第 35 卷，第 12 期，第 1445–1455 页，1987 年 12 月。[7] R. Coifman、V. Rokhlin 和 S. Wandzura，“波动方程的快速多极子法：一种通俗方案”，*IEEE*天线与传播杂志，第 35 卷，第 3 期，第 7–12 页，1993 年 6 月。[8] M. Kalfa、V. B. Ert¨urk 和 ¨O. Erg¨ul，“多层快速多极子算法的闭式表达式误差分析”，*IEEE*天线与传播汇刊，第 69 卷，第 10 期，第 6618–6623 页，2021 年 10 月。

[9] J. Song 和 W. C. Chew，“矢量格林函数多极展开截断的误差分析”，*IEEE* 微波与无线组件快报，第 11 卷，第 7 期，第 311–313 页，2001 年 7 月。[10] P. Koivisto，“天线辐射方向图球面波展开的特征模态功率分布及截断限值的解析解”，电磁波与应用期刊，第 16 卷，第 9 期，第 1307–1328 页，2002 年 4 月。[11] 量和单位 第*2*部分：数学，ISO 80000-2，2019 年。[12] M. Nietro-Vesperinas，《物理光学中的散射与衍射》，第 2 版。新加坡：世界科学出版社，2006 年。[13] *IEEE* 天线术语定义标准，IEEE Std 145 2013，2014 年。[14] D. A. Varshalovich、A. N. Moskalev 和 V. K. Khersonskii，《角动量量子理论》，第 1 版。新加坡：世界科学出版社，1988 年。[15] R. G. Barrera、G. A. Estevez 和 J. Giraldo，“矢量球谐函数及其在静磁学中的应用”，欧洲物理学杂志，第 6 卷，第 4 期，第 287–294，1985年3月。[16] J. B. Conway，《泛函分析教程》，第2版。美国纽约州纽约：施普林格，1990年。[17] R. Panknys，《应用频域电磁学》，第1版。英国奇切斯特：威利出版社，2016年。[18] D. Colton 和 R. Kress，《声学与电磁逆散射理论》，第4版。美国纽约州纽约：施普林格，2013年。[19] W. Rudin，《数学分析原理》，第3版。美国纽约州纽约：麦格劳-希尔，1976年。[20] L. C. Evans 和 R. F. Gariepy，《测度论与函数的精细性质》，第2版。美国佛罗里达州博卡拉顿：CRC出版社，1992年。[21] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun，《数学函数手册：公式、图表与数学表》，第10版。美国华盛顿特区：美国政府印刷局，1972年。[22] K. M. Siegel，“一个涉及自变量近似等于阶数的贝塞尔函数的不等式”，美国数学会会刊，第4卷，第6期，第858–859页，1953年4月。