arXiv:2601.05695v1 [math.DG] 9 Jan 2026

有限维流形上的驻定曲线

Tobias Starke

2024

致谢

在此，我谨向在完成这篇论文期间给予我支持的所有人表示衷心的感谢。

首先，我要感谢我的导师 Michael Breuß 教授。在撰写这篇论文期间，他始终以许多有益的建议和建设性的批评给予我支持。

此外，我还要特别感谢 Friedrich Sauvigny 教授。他在勃兰登堡工业大学于2021年冬季学期至2023年夏季学期讲授的微分几何系列课程，激发了我对微分几何问题的兴趣。

最后，我也要感谢我的母亲和祖父在整个学习期间给予我的支持。

目录

1 引言 **1**

2 拓扑 **5**

3 度量空间 1 **1**

4 代数中的重要概念（线性代数）2 **1**

4.1 群论.21 4.2 向量空间.25 4.3 赋范空间和预希尔伯特空间.29 4.4 乘积拓扑和拓扑向量空间.37 4.5 张量.44

5 分析基础 **51**

6 有限维流形与张量丛 65

6.1 拓扑流形.65 6.2 可微流形.68 6.3 切向量与切丛.75 6.4 张量丛中的光滑向量场与光滑截面 87

7 黎曼流形 9 **3**

7.1 黎曼流形的角度概念 . . . . . 95 7.2 长度泛函 $\mathbb{L}$ 与（弱）测地线 . . . . . 96 7.3 测地线方程 .107 7.4 能量泛函 .128

8 总结 **131**

9 展望：无限维流形上的测地线与图像匹配问题 13

3

Lite文献 13 **9**

1 引言

在本文中，我们将研究流形上的所谓长度泛函驻定曲线，即所谓的弱测地线。这项工作的出发点是此类曲线在物理学和图像处理领域中的众多应用。

例如，在广义相对论中，时空被建模为四维且与度量相容的洛伦兹流形，因此观测到的引力现象可以通过流形的内曲率，也就是内在几何来解释 [17]。

实现这一点的方法是规定：仅受引力作用的粒子沿时空流形的（弱）测地线运动，而（弱）测地线通常取决于时空流形的内在几何。另一方面，时空流形的内在几何由宇宙中的能量密度分布通过爱因斯坦场方程决定。

然而，在图像处理领域，尤其是在所谓的图像匹配中，人们会以如下方式使用（弱）测地线：首先，我们将两个图像分别记作 P_1 和 P_2，并为它们关联函数 $\mathcal{I}_1$，$\mathcal{I}_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$，其中 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 被视为图像像素的（有界）集合。具体做法可以是，例如为每个像素分配一个着色程度，并用一个实数表示。这里假设两个图像展示的是同一事物。不过，这些图像在视觉上通常并不完全相同，因为它们可能是通过不同的方法生成的。

一个非常具体的例子是用于人脑成像的技术。如今，要获得一幅脑部图像，我们可以采用多种不同的方法，例如磁共振成像（MRI）、正电子发射断层扫描（PET）或计算机断层扫描（CT）。例如，前一种方法会利用强磁场，并利用脑内原子核自旋会沿该磁场方向排列这一现象；而 PET 方法则会使用一种弱放射性物质，通过它获得脑部的可视化图像。

由于成像方法各不相同，通过不同方法生成的图像所编码的脑部信息通常也各不相同。例如，MRI 方法能够清晰呈现大脑的结构，而 PET 方法则能够清晰呈现脑部活动。考察两种用于人脑的具体成像方法时，这些方法生成的图像 P_1 和 P_2 不仅在所存储的信息方面可能不同，相互之间也可能呈现变形。这两种可能出现的情况会导致两幅图像在视觉上往往差异很大，难以直接相互对应。也就是说，通常无法立即看出图像 P_1 中的某个区域究竟对应图像 P_2 中的哪个区域。

不过，确实可能会希望按照上述含义将两个图像相

互对应起来，以便将各自图像中存储的信息合理地汇总到一个图像中。因此，我们要寻找的是一个所谓的匹配函数，它介于与图像 P_1 和 P_2 相关联的函数 $\mathcal{I}_1$ 和 $\mathcal{I}_2$ 之间，我们将其记为 φ。这个匹配函数指出，一个图像中的哪些点分别对应另一个图像中的哪些点。因此，匹配至少是一个形如 $\Omega \longrightarrow \Omega$ 的双射函数，它

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \circ \varphi \tag{1}$$

成立，其中 $\circ$ 表示通常的函数复合。不过，随之而来的一个直接问题是，如何（尽可能高效地）找到这样的匹配。

一种可能的微分几何方法是，将匹配函数 φ 视为 Ω 上的光滑微分同胚，并在 Ω 上所有光滑微分同胚构成的空间中寻找匹配 φ，该空间记作 $Diff(\Omega)$ [21]。可以证明，集合 $Diff(\Omega)$ 是一种所谓的无限维 Fréchet 流形 [12]，在其上我们可以引入曲线长度概念，从而得以在 $Diff(\Omega)$ 上定义（弱）测地线的概念。其基本思想是，我们从恒等映射 $id_\Omega \in Diff(\Omega)$ 出发，该映射定义为

$$id_\Omega(x) = x \qquad \forall x \in \Omega, \tag{2}$$

沿着一条（弱）测地线朝匹配 φ 移动。这个基本思想构成了所谓测地线射击算法的基础，借助该算法可以近似所需的匹配函数 φ。

为了理解（弱）测地线这一概念具体指什么——它是上述两种应用的基础——我们首先要探讨拓扑和有限维微分几何中的一些基本概念，并进一步阐明拓扑和有限维流形究竟是什么。此外，我们还将考察有限维流形上的曲线，并说明如何为它们赋予有意义的长度。

本文的首要目标是阐述一些基本概念，以便能够严谨地理解上述应用。首先，我们也希望严谨地阐明（弱）测地线究竟是什么。本文主要考察所谓的有限维流形，具体来说有两个原因：

一方面，我们希望对微分几何中的许多不同概念形成良好而直观的理解。讨论这些概念和思想时，最好将其置于有限维微分几何的背景下加以阐释。只要我们理解了有限维理论，就可以基于从有限维微分几何中获得的认识，轻松地阐释相应无限维理论中那些抽象得多的概念。

另一方面，有限维理论中的许多概念也会在无限维情形中再次出现。这意味着，要理解无限维微分几何中的某些构造，我们无论如何都必须研究有限维情形。

尽管本文仅讨论有限维理论，但在本文最后的第9章中，我们还将更详细地探讨无限维理论的相关概念。我们将大致说明，有限维微分几何中的概念如何推广到无限维情形。因此，在第9章中，我们将概略勾勒出我们究竟应如何理解无限维流形，以及如何将曲线长度概念合理地推广到无限维情形。

此外，在本文最后，我们还希望更详细地探讨（弱）测地线概念在图像匹配领域中的应用，其中我们将主要参考 [21] 。

2 拓扑

本章给出的定义主要参照[15]。

正如引言中已经提到的，所谓长度泛函的驻定曲线（此时我们姑且不论它究竟是什么）对我们来说十分重要，因此我们首先必须引入曲线这一概念。现在不妨运用直觉，粗略说明一下我们究竟想把抽象集合 X 中的曲线理解为何物。

为此，设 X 是任意集合，且 x_1，$x_2 \in X$ 是该集合中的两个点。直观来看，集合 X 中从 x_1 到 x_2 的曲线 $\mathcal{F}$ 应当是 X 的一个一维子集，它将点 x_1 和 x_2 连接起来。我们通过函数或映射来对此进行数学描述：

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow X, \tag{3}$$

其中 a，$b \in \mathbb{R}$ 满足 $-\infty < a < b < +\infty$。根据函数的定义，$\gamma$ 为每个 $c \in [a, b]$ 恰好指定一个 $x \in X$。并且有

$$\mathcal{F} = \{x \in X \mid \exists\, c \in [a, b] : \gamma(c) = x\}, \tag{4}$$

也就是说，$\gamma(c) = x$ 是曲线 $\mathcal{F}$上的一个点，并且

$$\gamma(a) = x_1,\ \gamma(b) = x_2. \tag{5}$$

那么，为什么说 γ 是对曲线 $\mathcal{F}$的合理建模呢？一方面，通过将 $\mathcal{F}$ 参数化到区间 $[a, b]$ 上，体现了上文仅粗略提及的曲线的一维性；另一方面，式 (5) 则编码了这样一个事实：在所选的建模方式中，曲线 $\mathcal{F}$是 γ 的像，它从 x_1 开始，并在 x_2 结束。

我们对曲线概念还迫切需要的另一个条件是连续性！不过，我们此前还没有提到这一点。我们自然期待 $\mathcal{F}$ 在某种意义上是一个连通的整体，并且随着我们遍历区间 $[a, b]$，也以类似的方式遍历 $\mathcal{F}$。直观地说，这意味着如果 c，$d \in [a, b]$ 彼此靠近，那么 $\gamma(c)$ 和 $\gamma(d)$ 也彼此靠近。现在我们遇到了第一个问题：区间 $[a, b]$ 上以及 X上的邻近意味着什么？

到目前为止，关于 $[a, b]$ 和 X，我们面对的只是一个尚未定义邻近概念的裸集合。尽管例如对于区间 $[a, b]$，我们有一种关于邻近的直观概念，但这种直观概念始终源自集合上额外定义的一种结构；正是这种结构在集合上解释了邻近概念。

$[a, b]$ 上的直观邻近概念来自绝对值函数 $f(\cdot) \coloneqq |\cdot|$，它通过函数 $d(x, y) := f(x - y) = |x - y|$ 与 $x, y \in [a, b]$ 引入了一个距离概念，进而引入了邻近概念。两个数 $x, y \in [a, b]$彼此接近，意味着 $d(x, y) < \epsilon$，其中 $\epsilon > 0$ 是一个预先给定的（较小的）数。我们也说，y 比 x 更接近 $[a, b]$中所有与 x 的距离大于或等于 ϵ 的点。要在 $[a, b]$ 上建立直观的邻近概念，我们首先必须定义前面提到的映射 d：$[a, b] \times [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ 在 $[a, b]$ 上。

就集合 $[a,b]$ 而言，正如我们将会看到的，我们其实已经做得比原本需要做的更多，因为为了在 $[a,b]$ 上引入直观的邻近概念，我们定义了一个距离概念。也就是说，我们引入了一个函数 d，借助它可以测量任意两个点 $x,y\in[a,b]$ 之间的距离。

为了让由 d定义的距离概念真正有意义，函数 d当然必须满足某些˜性质；我们之后也将把它称为度量，因为并非任意函数 d 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上都能定义出有意义的距离概念。例如，对于距离函数d：$[a,b]\times[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$，必须满足

i) $\tilde{d}(x,y)\geq 0$ und $\tilde{d}(x,y)=0 \iff x=y \quad \forall x,y\in[a,b]$

ii) $\tilde{d}(x,y)=\tilde{d}(y,x) \quad \forall x,y\in[a,b]$

iii) $\tilde{d}(x,z)\leq\tilde{d}(x,y)+\tilde{d}(y,z) \quad \forall x,y,z\in[a,b]$

条件*i)* 表示，在 $[a,b]$ 中，如果 x 和 y 不同，那么两点之间的距离总是大于零；当且仅当两点相同时，两点之间的距离才为零。这也符合直觉，因为点到自身的距离理应为零。相反，条件*ii)* 表示，从 x 到y 的距离和从 y 到 x 的距离并无区别，两种情况下得到的结果应当相同。最后，条件*iii)* 表示，两个点 x 和 y 之间的直接路径 总是比经过点 y绕行更短。

上面定义的函数 $d(x,\ y)=|x-y|$ 自然满足所有这些性质，因此它也定义了一个合理的距离概念。不过，现在我们来考察抽象集合 X，此时的问题是，如何在其中定义这样一个距离函数。视集合 X 而定，这有时会成为一项艰巨的挑战，尤其是在我们对由距离函数导出的邻近概念提出某些额外要求时。

此外，我们必须牢记，我们只在 X （以及 $[a,b]$）上寻找一个邻近概念，而不是距离概念。距离概念虽然会导出一个邻近概念，但反过来却未必成立。

因此，为了尽可能保持一般性，我们转而寻找一种替代性的结构，它可以引入到 $[a,b]$ 和 X 上，并由此在其中引入一个邻近概念。我们将这种更一般的结构称为拓扑。接下来，我们将首先考察拓扑的抽象定义，然后说明拓扑确实会导出一种（合理的）邻近概念。

定义 2.1. 设 X 是任意非空集合，$\mathcal{P}(X)$ 是 X的相应幂集，也就是 X所有子集组成的集合。那么，拓扑 τ 是 $\mathcal{P}(X)$的一个子集，也就是 $\tau\subseteq\mathcal{P}(X)$，满足以下性质：

i) $\emptyset, X\in\tau$

ii) 设 $\mathcal{I}$ 是任意指标集，且 $\mathcal{O}_i \in \tau \ \forall i \in \mathcal{I}$。于是可得

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{O}_i \in \tau. \tag{6}$$

iii) 设 $\mathcal{I}$ 是一个有限指标集，且 $\mathcal{O}_i \in \tau \ \forall i \in \mathcal{I}$。于是可得

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{O}_i \in \tau. \tag{7}$$

我们在下文中将元素 $\mathcal{O} \in \tau$ 称为开集。我们将元组(X, τ) 称为拓扑空间。

那么，拓扑 τ 如何在 X 上定义邻近概念呢？一个初步的合理性说明是：正如我们马上将看到的，借助拓扑可以定义邻域概念和收敛概念。现在或许有人会问，既然借助拓扑可以在集合 X 上定义邻域概念和收敛概念，这一事实为何能在该集合上引入邻近概念？为此，我们以收敛概念为例，并回想一下，序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ 收敛到一个 $x \in X$ 究竟意味着什么。

直观地说，这恰恰意味着，当 $n \in \mathbb{N}$ 不断增大时，数列项 x_n 实质上会越来越接近元素 $x \in X$。因此，收敛概念总是蕴含着邻近概念，否则收敛这一概念便毫无意义。那么，如何用 X 上的拓扑 τ 来解释邻域概念和收敛概念呢？

基本思路如下：设 (X, τ) 是一个拓扑空间。再设给定一个 $x \in X$。首先，我们想直观地解释什么是点 x 的所谓开邻域，以及这种邻域概念如何导出邻近概念。

定义 2.2. 每个具有性质 $x \in \mathcal{O}$ 的 $\mathcal{O} \in \tau$ 都称为 $x \in X$的（开）邻域。具有性质 $\mathcal{O} \in \tau \setminus \{X\}$、包含 x 的（开）邻域 $\mathcal{O}$ 称为 x 的非平凡邻域。因此，若能找到一个满足 $x \in \mathcal{O}$ 的 $\mathcal{O} \in \tau \setminus \{X\}$，使得 $y \in \mathcal{O}$，则点 $y \in X$ 位于 x的一个非平凡邻域中。

基于拓扑 τ 的这种邻域定义，已经可以隐约看出由拓扑诱导的邻近概念，因为我们现在自然可以说，若存在两个非平凡邻域 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \tau$，分别属于 x，且满足 $y_1 \in \mathcal{O}_1, y_2 \in \mathcal{O}_2$ 和 $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$，以及$y_2 \notin \mathcal{O}_1$，那么 $y_1 \in X$ 更接近 $y_2 \in X$ 于 x。因此，拓扑作为 $\mathcal{P}(X)$ 的一个子集，通俗地说，可以理解为一套规则，告诉我们 X 中的点如何相互粘合，尤其是粘合得有多紧密。例如，当存在集合 $\mathcal{O} \in \tau$，满足$\mathcal{O} \subset X$，使得 $y_1, y_2 \in \mathcal{O}$ 成立时，我们也会说点 y_1 和 y_2 彼此非平凡地接近。

不过，通过引入收敛概念，基于拓扑来阐明邻近的概念，效果最好；因为如上所述，直观地说，序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ 恰好在数列项 x_n 随着指标 $n \in \mathbb{N}$ 不断增大而越来越接近某个 $x \in X$ 邻近时收敛。

定义 2.3。设 X 中的序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$，且 $x \in X$。若$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x \in X$，记作 $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$，则有：

$$\forall \mathcal{O} \in \tau \ mit \ x \in \mathcal{O} : \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{O} \ \forall n \geq N \tag{8}$$

在这种情况下，我们称 x 是 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个极限。

直观地说，这一定义意味着，对于 x 的任意邻域 $\mathcal{O} \in \tau$，总能找到一个自然数 $N \in \mathbb{N}$，使得序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的所有数列项（满足 $n \geq N$）都位于 $\mathcal{O}$ 中。反过来说，这意味着对于固定选取的 x 的邻域 $\mathcal{O}$，只有有限多个数列项可能位于 $\mathcal{O}$ 之外。

结合上述关于由邻域概念导出的邻近概念的说明，我们由此得到了拓扑空间框架下收敛的直观图景。

现在，我们已经认识了拓扑的概念，并理解了它如何在集合 X 上诱导出一个邻近概念。然而，至少还有两个问题需要提出：

i) 在上述收敛概念下，序列的极限是否唯一？*ii)* 任意子集 $\rho \subseteq \mathcal{P}(X)$ 难道不都会按照上述意义诱导出一个邻近概念吗？那么，上述拓扑定义中的要求 *i)*、*ii)* 和*iii)*又有何必要？

回答第一个问题很重要，因为我们需要使用集合 X 上给定的拓扑。尤其是，当我们之后要研究所谓的赋范空间及其上的数学分析时，这个问题的答案将具有重要意义。

而第二个问题的答案，则有助于我们理解为什么要以这种方式定义拓扑。因为不难验证，确实，X 的幂集的每个子集 ρ 都按照上述意义定义了一个邻近概念。

这一点可以从以下事实看出：在此前的定义中，我们并未利用拓扑的性质。正如我们在关于度量空间 的章节中将会看到的，我们实际上希望得到一种特殊的邻近概念：它一方面足够强，能够让我们妥善地运用这些概念；另一方面又尽可能贴近传统的邻近概念，从而将实分析中的通常收敛和连续性等概念推广开来。

不过，首先我们要着手回答第一个问题。为此，我们来看下面这个例子：

例 2.1. 考虑一个集合 X，我们为其赋予拓扑 $\tau = \{\emptyset, X\}$。不难看出，τ 确实是一个拓扑。现在进一步设$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ 是 X 中的一个序列，$x \in X$是 X中的任意元素。那么$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 x，因为 x 唯一的（开）邻域是 $X \in \tau$，而对于这个邻域，显然有$x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$。

这意味着，在(X,τ)中，每个序列都收敛，而且收敛到 X中的任意一个元素。因此，这里选取的拓扑 τ也常被称为平凡拓扑或混沌拓扑。

因此可知，一般而言，关于任意拓扑，序列的极限不一定是唯一的。

从上述例子中我们也了解到，一般而言，拓扑空间中序列的极限不一定是唯一的。为后续章节做准备，我们还要认识一类特殊的拓扑空间：所谓的 豪斯多夫空间。

定义 2.4。 设 (X,τ)是一个拓扑空间。如果对于所有 $x,y\in X$，满足 $x\neq y$，则称(X,τ)为豪斯多夫的：

$$\forall x,y\in X\ \ mit\ x\neq y\ \exists\mathcal{O}_x,\mathcal{O}_y\in\tau\ \ mit\ x\in\mathcal{O}_x,y\in\mathcal{O}_y\ \ und\ \mathcal{O}_x\cap\mathcal{O}_y=\emptyset \tag{9}$$

直观地说， X 中的不同点可以用来自 τ 的邻域分离开来。豪斯多夫空间的一个重要性质是，在其中收敛数列的极限是唯一的：

定理 2.1。 设 *(X, τ)* 是一个豪斯多夫空间，且 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ 是一个收敛数列。那么，该序列的极限 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是唯一确定的。今后，我们还将把这个唯一的极限记作 $\lim_{n\longrightarrow\infty}x_n$ 。

证明。 设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$是 X中的一个序列。假设有 $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$，并且 $x_n\xrightarrow{n\to\infty}y$满足 $x\neq y$，即

$$\forall\mathcal{U}\in\tau\ \ mit\ x\in\mathcal{U}:\exists N\in\mathbb{N}:x_n\in\mathcal{U}\ \forall n\geq N \tag{10}$$

und

$$\forall\mathcal{V}\in\tau\ \ mit\ y\in\mathcal{V}:\exists M\in\mathbb{N}:x_n\in\mathcal{V}\ \forall n\geq M. \tag{11}$$

根据豪斯多夫性质，存在开集 U， $V\in\tau$满足 $x\in U$、$y\in V$和 $U\cap V=\emptyset$。由上述两个表达式可知，存在一个 $N_U\in\mathbb{N}$和一个 $M_V\in\mathbb{N}$，使得

$$x_n\in U\ \forall n\geq N_U \tag{12}$$

und

$$x_n\in V\ \forall n\geq M_V \tag{13}$$

我们令 $K:=max\{N_V,M_U\}$。于是得到

$$x_n\in U\cap V\ \forall n\geq K, \tag{14}$$

这与 $U\cap V=\emptyset$矛盾。因此，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限必定唯一。

□

豪斯多夫空间的这一性质在我们之后讨论赋范向量空间理论时，将证明非常有用。

作为本章的总结，我们还要了解一种有用的方法，可以直观地说，通过函数 $f\colon X\longrightarrow Y$，将定义在集合 Y 上的拓扑传递到另一个集合 X 上。之后我们还会在本文中再次讨论这种方法。

引理 2.1. 设 X 是任意集合，(Y,τ) 是一个拓扑空间，且 $f{:}X \longrightarrow Y$ 是任意映射。那么集合系

$$\tau_f := \{f^{-1}(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in \tau\} \subseteq \mathcal{P}(X) \tag{15}$$

借助 $f^{-1}(\mathcal{U})\colon = \{x \in X \mid f(x) \in \mathcal{U}\}$，即所谓的 $\mathcal{U}$ 在 f 下的原像，在 X 上构成一个拓扑。τ_f 称为在映射 f 下的拉回拓扑。

证明。为了说明 τ_f 确实是一个拓扑，我们验证定义 2.1. 中的拓扑公理。

i) 由于 τ 是 Y 上的一个拓扑，因此 $\emptyset$ 和 Y 属于 τ。此外，$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ 且 $f^{-1}(Y) = X$，由此可知 $\emptyset$ 和 X 属于 τ_f。

ii) 设 $\mathcal{I}$ 是任意指标集，并且对所有 $i \in \mathcal{I}$， $\mathcal{U}_i \in \tau_f$ 均任意给定。对于每个 $i \in \mathcal{I}$，根据 τ_f 的定义，存在一个 $\mathcal{V}_i \in \tau$，使得 $\mathcal{U}_i = f^{-1}(\mathcal{V}_i)$。于是

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i &= \bigcup_{i\in\mathcal{I}} f^{-1}(\mathcal{V}_i) \\
&= \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \{x \in X \mid f(x) \in \mathcal{V}_i\} \\
&= \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{V}_i \right\} \\
&= f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{V}_i \right).
\end{aligned} \tag{16}$$

由于 τ 是 Y 上的一个拓扑，且对所有 $i \in \mathcal{I}$，都有 $\mathcal{V}_i \in \tau$，因此可得 $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{V}_i \in \tau$。由此又根据 τ_f 的定义可知，(16) 的右侧属于 τ_f，进而可得 $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i$ 属于 τ_f。

iii) 设 $\mathcal{I} := \{1, ..., n\}$ 满足 $n \in \mathbb{N}$。再任取对所有 $i \in \mathcal{I}$ 均成立的 $\mathcal{U}_i \in \tau_f$。对每个 $i \in \mathcal{I}$，根据 τ_f 的定义，存在一个 $\mathcal{V}_i \in \tau$，使得 $\mathcal{U}_i = f^{-1}(\mathcal{V}_i)$。于是

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i &= \bigcap_{i\in\mathcal{I}} f^{-1}(\mathcal{V}_i) \\
&= \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \{x \in X \mid f(x) \in \mathcal{V}_i\} \\
&= \left\{ x \in X \mid f(x) \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{V}_i \right\} \\
&= f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{V}_i \right).
\end{aligned} \tag{17}$$

由于 τ 是 Y 上的一个拓扑， $\mathcal{I}$ 是一个有限指标集，且对所有 $i \in \mathcal{I}$，都有 $\mathcal{V}_i \in \tau$，因此可得 $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{V}_i \in \tau$。由 τ_f的定义可知，(17) 的右侧属于 τ_f，进而可得$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i$ 属于 τ_f。

由此证明，拉回拓扑 τ_f 确实是X 上的一个拓扑。

□

3 度量空间

在本章中，我们将探讨为何要以这样的方式定义拓扑。这里给出的定义主要参考了 [22]。

正如我们在上一章中已经指出的，之所以给出一个看起来相当特殊的拓扑定义，是因为我们想要说明一种邻近概念，并借此将 $\mathbb{R}$ 中的通常收敛概念以及函数 f 的连续性，有意义地推广到更一般的空间，具体而言，就是拓扑空间。

我们先重述 $\mathbb{R}$ 中收敛和定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数连续性的直观且通常的定义，然后将其转换为度量空间的语言。首先给出 $\mathbb{R}$ 中通常收敛概念的定义：

定义 3.1。 设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$。如果满足以下条件，我们就称 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于一个 $x \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \epsilon \ \forall n \geq N \tag{18}$$

我们继续介绍形如 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的实值函数通常连续性的定义：

定义 3.2. 设 $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$。我们称 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，当且仅当对所有 $x \in \mathbb{R}$，都有

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} \ mit \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{19}$$

这两个定义都借助其中出现的绝对值函数，刻画了一个直观的邻近概念。现在，我们要将它们推广到所谓的度量空间。为此，我们首先需要定义度量空间这一概念：

定义 3.3. 设 X 是一个集合，且 $d:\ X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ 是一个函数。若满足以下条件，我们称 d为 X上的度量：

i) $d(x, y) \geq 0$ *und* $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$

ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

我们将元组 (X, d) 称为度量空间。

从前面关于拓扑的章节中我们已经知道，任何满足度量定义中上述度量公理 *i)*、*ii)* 和*iii)* 的函数 $d:\ X \times X \longrightarrow [0, \infty)$，都可以视为抽象的距离函数。

因此，在度量空间 (X, d) 中，我们能够借助 d 定义两点 $x, y \in X$之间的距离 $d(x, y)$。度量公理确保数值 $d(x, y)$ 确实是点 x 和 y 之间有意义的距离。

借助度量空间中的抽象度量 d，现在可以将上述关于自然数集 $\mathbb{R}$ 上的通常收敛以及实数集 $\mathbb{R}$ 上实值函数通常连续性的两个定义推广到一般度量空间 (X, d):

定义 3.4. 设 (X, d) 是一个度量空间，且 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X中的一个序列。我们称$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到一个 $x \in X$，如果

$$\forall \delta > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \delta \ \forall n \geq N. \tag{20}$$

在这种情况下，我们称 $x \in X$ 是序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限。

若取 $X = \mathbb{R}$ 和 $d = |\cdot|$，那么上述定义恰好给出了 $\mathbb{R}$中通常收敛的定义。

将连续性定义推广到两个度量空间 $(X, \ d_X)$ 和 $(Y, \ d_Y)$ 之间的函数 $f : X \longrightarrow Y$，可得:

定义 3.5. 设(X, d_X) 和(Y, d_Y) 是两个度量空间，$f\colon X \longrightarrow Y$是一个函数。若对于所有 $x \in X$，都有 .....，则称 f 在 X 上连续。

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall y \in X \ \ mit \ d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon \tag{21}$$

在此同样可以轻易看出，这个定义是对形如 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的函数的通常连续性定义的直接推广。为此，只需令 $X = Y = \mathbb{R}$ 和 $d = |\cdot|$。

接下来我们将讨论由度量诱导的拓扑这一概念：我们考察一个度量空间 (X, d)。进一步地，我们考察任意一点 $x \in X$，并将所谓的 δ-邻域 $\mathcal{U}_\delta(x)$ 定义为 x 的

$$\mathcal{U}_\delta(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\}. \tag{22}$$

现在我们通过以下方式定义一个集合系 $\tau_d \subseteq \mathcal{P}(X)$

$$M \in \tau_d \iff \forall x \in M \ \exists \delta > 0 : \mathcal{U}_\delta(x) \subseteq M. \tag{23}$$

现在我们证明，这样定义的集合系是一个拓扑:

i) </style}结论成立 $\emptyset \in \tau_d$，因为不存在可能违反该条件的 $x \in \emptyset$。此外，结论 $X \in \tau_d$也成立，因为对于所有 $x \in X$，根据定义，$\mathcal{U}_\delta(x)$ 都是 $\subseteq X$。

ii) 设 $\mathcal{I}$是任意指标集，且对所有 $i \in \mathcal{I}$，$M_i \in \tau_d$ 均为任意给定。设 $x \in \bigcup_{i\in\mathcal{I}} M_i$。由此可知，必存在一个 $j \in \mathcal{I}$，使得 $x \in M_j$ 成立。由于$M_j \in \tau_d$ 成立，可知必存在一个 $\delta_j > 0$，使得 $\mathcal{U}_{\delta_j}(x) \subseteq M_j$。但由此可知，$\mathcal{U}_{\delta_j}(x)$ $\subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} M_i$ 成立。由于 x 是从 $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} M_i$ 中任意选取的，因此可得 $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} M_i \in \tau_d$。

iii) 设 $\mathcal{I}:=\{1,...,n\}$，其中 $n\in\mathbb{N}$ 是一个有限指标集。再设对所有 $i\in\mathcal{I}$，$M_i\in\tau_d$ 均为任意给定。任意选取 $x\in\bigcap_{i\in\mathcal{I}}M_i$。可得，对所有 $i\in\mathcal{I}$，$x\in M_i$ 均成立。进而可知，对所有 $i\in\mathcal{I}$，都存在数 $\delta_i>0$，使得 $\mathcal{U}_{\delta_i}(x)\subseteq M_i$。我们定义 $\delta:=\{\delta_1,...,\delta_n\}$。于是 $\mathcal{U}_\delta(x)\subseteq\bigcap_{i\in\mathcal{I}}M_i$，因为对所有 $i\in\mathcal{I}$，均有 $\mathcal{U}_\delta(x)\subseteq\mathcal{U}_{\delta_i}(x)\subseteq M_i$。由此可得 $\bigcap_{i\in\mathcal{I}}M_i\in\tau_d$ 成立。

注记 *3.1.* 现在，τ_d 的一个重要性质是：对于所有 $x\in X$ 和任意的 $\delta>0$，都有 $\mathcal{U}_\delta(x)\in\tau_d$。这一点可以如下看出：任取 $y\in\mathcal{U}_\delta(x)$。令 $\delta_1:=\delta-d(y,x)$。再任取 $z\in\mathcal{U}_{\delta_1}(y)$。于是有 $d(x,z)\leq d(z,y)+d(y,x)<(\delta-d(y,x))+d(y,x)=\delta$。由此可得 $z\in\mathcal{U}_\delta(x)$。由于 $z\in\mathcal{U}_{\delta_1}(y)$ 是任意选取的，因此可得 $\mathcal{U}_{\delta_1}(y)\subseteq\mathcal{U}_\delta(x)$。由于 $y\in\mathcal{U}_\delta(x)$ 是任意选取的，因此可得 $\mathcal{U}_\delta(x)\in\tau_d$。

需要指出的是，在特殊情形 $X=\mathbb{R}$ 中，当 $d(x,y)=|x-y|,\forall x,y\in\mathbb{R}$ 时，我们将由 d 诱导的拓扑 τ_d 称为（$\mathbb{R}$ 上的）标准拓扑。

度量空间的另一个重要性质是：如果我们为其赋予由度量 d 诱导的拓扑 τ_d，那么拓扑空间 (X,τ_d) 自动就是一个豪斯多夫空间：

定理 3.1。设 (X,d) 是一个度量空间，τ_d 是由度量 d 诱导的拓扑，则拓扑空间 (X,τ_d) 是一个豪斯多夫空间。

证明。我们证明 (X,τ_d) 满足豪斯多夫性质。为此，任取两个具有性质 $d(x,y):=d>0$ 的元素 $x,y\in X$。由 $d(x,y)>0$，利用度量公理可得 $x\neq y$。现在考察集合 $\mathcal{U}_{\frac{d}{2}}(x)$ 和 $\mathcal{U}_{\frac{d}{2}}(y)$。根据上面的说明，有 $\mathcal{U}_{\frac{d}{2}}(x)\,\mathcal{U}_{\frac{d}{2}}(y)\in\tau_d$。我们证明 $\mathcal{U}_{\frac{d}{2}}(x)\cap\overline{\mathcal{U}_{\frac{d}{2}}(y)}=\emptyset$：假设并非如此，即存在一个 $z\in\mathcal{U}_{\frac{d}{2}}(x)\cap\overline{\mathcal{U}_{\frac{d}{2}}(y)}$。那么根据 x 和 y 的 $\frac{d}{2}$-邻域定义，有 $d(x,z)<\frac{d}{2}$ 以及 $d(y,z)<\frac{d}{2}$。然而

$$d=d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)<\frac{d}{2}+\frac{d}{2}=d, \tag{24}$$

因此得到 $d<d$，这显然是矛盾的。 □

现在我们要证明，定义 3.4.和 3.5.也可以通过相关度量所诱导的拓扑来等价地表述。我们先从度量空间中序列的收敛概念开始：

定理 3.2 设 (X,d) 是一个度量空间，τ_d 是由度量 d 诱导的相应拓扑。再设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ 是 X 中的一个序列，且 $x\in X$。那么以下命题等价：

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 关于度量 d 收敛于 x，也就是说，

$$\forall\delta>0\ \exists N>0:d(x_n,x)<\delta\ \forall n\geq N. \tag{25}$$

ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 关于拓扑 τ_d 收敛于 x，即

$$\forall\mathcal{O}\in\tau_d\ mit\ x\in\mathcal{O}:\exists N\in\mathbb{N}:x_n\in\mathcal{O}\ \forall n\geq N. \tag{26}$$

证明。*i)* $\Longrightarrow$ *ii)*: 我们首先注意到，根据 $\mathcal{U}_\delta(X)$的定义，*i)* 中的表达式等价于

$$\forall \delta > 0 \ \exists N > 0 : x_n \in \mathcal{U}_\delta(x) \ \forall n \geq N \tag{27}$$

是。现在任取 $\mathcal{U} \in \tau_d$ 和 $x \in \mathcal{U}$ 。那么存在一个 $\rho > 0$，使得$\mathcal{U}_\rho(x) \subseteq \mathcal{U}$ 成立。然而，由*i)* 的等价表达式可知，对于这个ρ，恰有一个 $N \in \mathbb{N}$ 存在，使得对所有 $n \geq N$， $x_n \in \mathcal{U}_\delta(x) \subseteq \mathcal{U}$ 成立，这就证明了第一个方向。

ii) $\Longrightarrow$ *i)*: 假设*ii)* 成立。在*ii)* 中，我们对集合 $\mathcal{O}$ 取集合$\mathcal{U}_\delta(x)$，其中 $\delta > 0$ 任意。这样做是允许的，因为 $x \in \mathcal{U}_\delta(x)$，并且根据上面的说明，也有 $\mathcal{U}_\delta(x)$ $\in \tau_d$ 成立。由于 $\delta > 0$ 是任意选取的，由 $\mathcal{U}_\delta(x)$的定义可得命题*i)*。 □

借助这个定理，我们还证明了，在度量空间中，由度量d定义的收敛序列的极限是唯一确定的，因为我们在定理 3.1. 中证明了(X, τ_d)是一个豪斯多夫空间，而由定理 2.1. 可知，豪斯多夫空间中的收敛序列具有唯一确定的极限。

接下来我们将证明，度量空间之间函数 $f : X \longrightarrow Y$ 的度量连续性概念可以用相应的诱导拓扑等价地表述:

定理 3.3. 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是两个度量空间， τ_{d_X}和 τ_{d_Y} 分别是度量 d_X 和 d_Y 所对应的诱导拓扑。再设f : $X \longrightarrow Y$ 是从 X 到 Y 的函数。那么以下命题等价:

i) f 是从 X 到 Y 的连续函数，相对于度量 d_X 和 d_Y而言，即对所有 $x \in X$，都有

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall y \in X \ \ mit \ d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon. \tag{28}$$

ii) f 是从 X 到 Y 的连续函数，相对于拓扑 τ_{d_X} 和τ_{d_Y}而言，即

$$\forall \mathcal{V} \in \tau_{d_Y} : f^{-1}(\mathcal{Y}) \in \tau_{d_X}. \tag{29}$$

这里， $f^{-1}(\mathcal{V}) := \{x \in X \mid f(x) \in \mathcal{V}\}$仍表示集合$\mathcal{V}$ 在 f下的原像。

证明。*i)* $\Longrightarrow$ *ii)*: 任意选取 $\mathcal{V} \in \tau_{d_Y}$。由 τ_{d_Y} 的定义可知，对于每个 $z \in \mathcal{V}$，必定存在一个 $\epsilon_z > 0$，使得对所有 $z \in \mathcal{V}$ 都有

$$\mathcal{V}^Y(\epsilon_z, z) := \{w \in Y \mid d_Y(z, w) < \epsilon_z\} \subseteq \mathcal{V} \tag{30}$$

是。进一步有:

$$\mathcal{V} = \bigcup_{z \in \mathcal{V}} \mathcal{V}^Y(\epsilon_z, z), \tag{31}$$

因为设 $w \in \mathcal{V}$，那么一方面存在一个 $\epsilon_w > 0$，使得 $\mathcal{V}^Y(\epsilon_w, w) \subseteq \mathcal{V} \subseteq \bigcup_{z\in\mathcal{V}} \mathcal{V}^Y(\epsilon_z, z)$ 成立；另一方面，$\bigcup_{z\in\mathcal{V}} \mathcal{V}^{-1}(\epsilon_z, z) \subseteq \mathcal{V}$由如下事实推出：对于所有 $z \in \mathcal{V}$，集合 $\mathcal{V}^Y(\epsilon_z, z) \subseteq \mathcal{V}$。现在我们必须证明 $f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_{d_X}$：假设 $f^{-1}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$（否则无需证明，因为 $\emptyset \in \tau_{d_X}$），那么存在一个 $x \in f^{-1}(\mathcal{V})$，使得 $f(x) \in \mathcal{V}$成立。由 $\mathcal{V} = \bigcup_{z\in\mathcal{V}} \mathcal{V}^Y(\epsilon_z, z)$可知，$f(x) \in \mathcal{V}^Y(\epsilon_{f(x)}, f(x)) \subseteq \mathcal{V}$。由 i) 可知存在一个$\delta > 0$，使得:

$$\forall y \in X \ \ mit \ d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon_z \tag{32}$$

换句话说

$$\forall y \in X \ \ mit \ y \in \mathcal{U}_\delta^X(x) \implies f(y) \in \mathcal{V}^Y(\epsilon_{f(x)}, f(x)) \subseteq \mathcal{V}, \tag{33}$$

其中 $\mathcal{U}_\delta^X(x) := \{u \in X \mid d_X(x, u) < \delta\}$。然而，由此立即得到 $\mathcal{U}_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}(\mathcal{V})$。由于 $x \in f^{-1}(\mathcal{V})$ 是任意选取的，因此 $f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_{d_X}$，这就证明了命题*ii)* 。

ii) $\implies$ *i)*: 设 $x \in X$，并任意选取一个 $\epsilon > 0$。由上面的备注可知，集合

$$\mathcal{V}_\epsilon^Y(f(x)) := \{z \in Y \mid d_Y(f(x), z) < \epsilon\} \tag{34}$$

属于拓扑 τ_{d_Y}，即 $\mathcal{V}_\epsilon^Y(f(x)) \in \tau_{d_Y}$。由于*ii)* 成立，因此得到

$$f^{-1}(\mathcal{V}_\epsilon^Y(f(x))) \in \tau_{d_X} \tag{35}$$

成立。由于 $x \in f^{-1}(\mathcal{V}_\epsilon^Y(f(x)))$ 成立，根据拓扑 τ_{d_X} 的定义，存在一个$\delta > 0$，使得

$$\mathcal{U}_\delta^X(x) := \{y \in X \mid d_X(x, y) < \delta\} \subseteq f^{-1}(\mathcal{V}_\epsilon^Y(f(x))). \tag{36}$$

然而，由该表达式立即可得，对于所有满足 $d_X(x, y) < \delta$ 的 $y \in X$，都有$d_Y(f(x) \ f(y)) < \epsilon$。由于 x 和 ϵ 是任意选取的，因此命题得证。 □

由此我们看到，序列收敛和函数连续性这两个直观概念，在度量空间中都可以完全通过（诱导出的）拓扑来定义，并且等价于相应的度量定义。由于每个度量都会生成一个拓扑，因此拓扑空间具有更一般的结构。

那么，如果我们想要以合理的方式将序列收敛和函数连续性的直观概念推广到一般拓扑空间中，前面两个定理便展示了可行的方法。为完整起见，我们还要简要给出一般拓扑空间中的连续性概念定义:

定义 3.6。 设(X, τ_X)和(Y, τ_Y)是两个拓扑空间，且 $f\colon X \longrightarrow Y$是一个函数。如果满足下述条件，我们称其为 $f(\tau_X, \tau_Y)$-连续，或简称连续（当上下文能够确定相应的拓扑时）：

$$\forall \mathcal{V} \in \tau_Y : f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_X \tag{37}$$

现在我们再简要考察连续函数的一个有用性质。

引理 3.1。 设 (X, τ_X)、(Y, τ_Y)和(Z, τ_Z)分别为拓扑空间，且$f:\ X \longrightarrow Y$和 $g:\ Z \longrightarrow X$ 分别为连续映射。则函数 $h:\ Z \longrightarrow Y$，定义为

$$h(z) := f(g(z)) \quad \forall z \in Z, \tag{38}$$

是一个连续映射。

证明。 任取 $\mathcal{V} \in \tau_Y$。由于 $f:\ X \longrightarrow Y$是连续的，因此可知 $f^{-1}(\mathcal{V})$ 是 $\in \tau_X$。由于 $g:\ Z \longrightarrow X$ 是连续的，因此可知 $g^{-1}(f^{-1}(\mathcal{V}))$ 是 $\in \tau_Z$。进一步有

$$\begin{aligned} g^{-1}(f^{-1}(\mathcal{V})) &= \{z \in Z \mid g(z) \in f^{-1}(\mathcal{V})\} \\ &= \{z \in Z \mid f(g(z)) \in \mathcal{V}\} \\ &= \{z \in Z \mid h(z) \in \mathcal{V}\} \\ &= h^{-1}(\mathcal{V}), \end{aligned} \tag{39}$$

由此即可得到所要证明的结论。 □

现在简要总结一下我们为何如此定义拓扑：在一个我们熟悉的度量空间中，即 $(\mathbb{R},\ d)$，其中 $d(x,\ y) = |x-y|\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$，序列收敛和实函数连续性的直观概念可以借助度量 d 得到解释；该度量引入了一个自然且直观的邻近概念。度量 d 由此诱导出一个特殊的集合系 τ_d，它满足拓扑公理。

借助这个集合系，我们可以改写关于序列收敛和实值函数连续性的直观定义，使度量 d 不再显式出现。也就是说，我们可以在不明确借助长度概念的情况下表述这些概念，而定义它们所需的仅仅是这个特殊的集合系 τ_d，我们称之为诱导拓扑。

现在，如果我们想转向更一般的空间 X，在这些空间中不必预先定义度量，但我们仍希望讨论收敛等概念，那么就可以通过 X 的幂集的一个子集来引入这些概念。

不过，我们并不使用幂集的任意子集，而是将范围限定在所谓的拓扑上。也就是说，如果我们想在一个集合上引入邻近概念，就要关注幂集中的一些特殊子集，它们模仿了由度量诱导的邻近概念的某些性质。

这样做的好处是，我们在拓扑空间上的邻近概念仍然具有足够的结构，因此可以证明关于拓扑空间的重要且有趣的定理；因为一个特殊的数学对象具有的结构越多，随之而来的性质就越美好。

豪斯多夫空间很好地说明了这一点：如果我们想确保序列的极限唯一，就必须限制所考虑的拓扑集合。因此，在这种情况下，我们例如只关注满足豪斯多夫性质的拓扑。也就是说，我们赋予拓扑更多结构，因为这样便能证明序列的极限唯一等更优良的性质。

正是出于这个原因，在集合 X 上引入邻近概念时，我们也将范围限制在 $\mathcal{P}(X)$ 的特殊子集上。由于集合系 τ_d 在度量空间的情形下具有重要意义，因此很自然地，我们会将该集合系的性质作为对我们的子集 $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ 的要求。

最后我们还可以问，为什么偏偏选取这三个特定的集合系性质作为一般拓扑 $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ 的公理，而不是选取 τ_d 的其他任意性质。原因如下：由于我们想通过 X 幂集的一个（特殊）子集来引入邻近概念，因此我们是在一个非常集合论的框架下进行讨论。集合论的基本运算是集合的并集 $\cup$、集合交 $\cap$和补集的构造。

因此，首先利用 $\cup$和$\cap$ 关于 τ_d 的性质作为 τ 的公理是合理的。请注意，对于诱导拓扑 τ_d，我们只能证明，来自 τ_d 的元素的有限集合交仍属于 τ_d。一般而言，来自 τ_d 的元素的任意集合交不一定仍属于 τ_d，以下例子便说明了这一点：设拓扑空间 $(\mathbb{R}, \tau_d)$ 满足 $d(x,y) = |x-y|$，对所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 均成立。我们考察集合 $\{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \tau_d \mid n \in \mathbb{N}\}$。于是有

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\} \tag{40}$$

并且 $\{0\}$ 相对于 τ_d 不是开集。由此立即可知，对于一般的度量诱导拓扑，所谓的关于集合交的闭包仅由 τ_d 中的有限多个集合构成。

此外，还要求 X 中的所有点彼此之间存在某种联系，也就是说，彼此之间某种程度上较为接近，因此要求 X 本身属于 τ 也是有意义的，正如 $\mathbb{R} \in \tau_d$ 所成立的那样。

关于补集运算，对于 τ_d，我们目前只知道 $\mathbb{R}$的补集，也就是 $\emptyset$，必定属于 τ_d。除此之外，τ_d 通常并不对其元素的补集运算封闭。可以如下看出这一点：我们再次考虑拓扑空间（$\mathbb{R}$，τ_d），其中对于所有 x、$y \in \mathbb{R}$，都有 $d(x, y) = |x-y|$。那么，开集（a，b）的补集 $\in \tau_d$不属于 τ_d，因为（a，b）的补集是集合（$-\infty$，$a] \cup [b, \infty)$ $=:$ $\mathcal{W}$。由于对点 a 和 b，找不到任何 $\epsilon > 0$，使得相应的 ϵ-邻域仍包含在集合 $\mathcal{W}$ 中，因此可知 $\mathcal{W}$ 相对于（$\mathbb{R}$，τ_d）不是开集。因此，对于抽象拓扑 τ，我们也只要求 $\emptyset$ 属于 τ。

这样一来，我们就弄清了为什么拓扑要如此定义，也看到了在一个拓扑空间（X，τ）上，我们的邻近概念仍与度量空间的邻近概念足够接近，因此我们拥有足够的结构，能够很好地处理这类空间。

那么，在简要探讨了度量空间理论之后，我们现在回到最初的问题：如何用数学方式对集合 X中的曲线进行建模。在第2章中，我们已经说明了为什么一条

曲线 $\mathcal{F} \subseteq X$（直观上从 $x_1 \in X$ 开始，到 $x_2 \in X$ 结束）应通过函数 $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{F}$ 进行建模，其中 $\gamma(a) = x_1$ 且 $\gamma(b) = x_2$。

此外，我们在第2章还指出，对于 γ，我们也应该要求某种形式的连续性。现在我们知道如何引入这个概念：首先为 X 和 $[a,b]$ 赋予拓扑，然后就可以要求函数 γ 相对于这些拓扑是连续的。

在空间 X 中，我们希望允许使用任意拓扑；而在下文中，我们想在 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 上引入一种特殊的拓扑，即 $\mathbb{R}$的标准拓扑。原因是，$[a,b]$ 对应于一个熟悉的集合，因此我们也希望在其上建立一个熟悉的邻近概念。

只有一个问题阻碍我们在 $[a,b]$ 上引入这一直观的邻近概念：$\mathbb{R}$ 的标准拓扑定义在整个 $\mathbb{R}$ 上，而$[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个有限区间。那么，我们如何将定义在 $\mathbb{R}$ 上的拓扑传递到子集 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$上呢？回答这个问题便引出了以下定义：

定义3.7. 设(X,τ)是一个拓扑空间，且 $\mathcal{W} \subseteq X$。我们将 $\mathcal{W}$ 的所谓子空间拓扑定义为集合系

$$\tau_{\mathcal{W}} := \{\mathcal{U} \cap \mathcal{W} \mid \mathcal{U} \in \tau\}. \tag{41}$$

所谓的子空间拓扑实际上确实是一种拓扑：

引理3.2. 设(X,τ)是一个拓扑空间，且 $\mathcal{W} \subseteq X$。那么，子空间拓扑 $\tau_{\mathcal{W}}$ 是一种拓扑。

证明. 我们来验证拓扑公理：

i) 由于 $\emptyset \in \tau$和 $\emptyset \cap \mathcal{W} = \emptyset$ 成立，可得 $\emptyset \in \tau_{\mathcal{W}}$。此外，$X \in \tau$ 且$X \cap \mathcal{W} = \mathcal{W}$ 成立，这意味着 $\mathcal{W} \in \tau_{\mathcal{W}}$。

ii) 设 $\mathcal{I}$ 是任意指标集，并任意给定对所有 $i \in \mathcal{I}$ 的 $M_i \in \tau_{\mathcal{W}}$。由于对所有 $i \in \mathcal{I}$ 都有 $M_i \in \tau_{\mathcal{W}}$，可得对所有 $i \in \mathcal{I}$，存在一个 $\mathcal{U}_i \in \tau$，使得 $M_i = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{W}$ 成立。因此

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} M_i = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{W}) = \Big(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i\Big) \cap \mathcal{W}, \tag{42}$$

根据定义可立即得出 $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} M_i \in \tau_{\mathcal{W}}$ 成立，因为 $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i \in \tau$。式（42）中的最后一个等式可如下推出：设 $x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{W})$，则存在一个 $j \in \mathcal{I}$，使得 $x \in \mathcal{U}_j \cap \mathcal{W} \subseteq \big(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i\big) \cap \mathcal{W}$，因为$\mathcal{U}_j \subseteq \big(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i\big)$。反过来，对于 $x \in \big(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i\big) \cap \mathcal{W}$，有 $x \in \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i$且 $x \in \mathcal{W}$。由此可知，存在一个 $j \in \mathcal{I}$，使得 $x \in \mathcal{U}_j$ 且 $x \in \mathcal{W}$。但这恰好意味着 $x \in \mathcal{U}_j \cap \mathcal{W} \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{W})$成立。

iii) 设 $\mathcal{I} := \{1,...,n\}$ 且 $n \in \mathbb{N}$。进一步，任取满足 $M_i \in \tau_{\mathcal{W}}$的 $i \in \mathcal{I}$。由于对所有 $i \in \mathcal{I}$ 都有 $M_i \in \tau_{\mathcal{W}}$，可知对所有 $i \in \mathcal{I}$，存在一个 $\mathcal{U}_i \in \tau$，使得 $M_i = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{W}$。因此有

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} M_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{W}) = \Big(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i\Big) \cap \mathcal{W}, \tag{43}$$

由此立即可得 $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} M_i \in \tau_{\mathcal{W}}$ 成立，因为 $\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{U}_i \in \tau$ 。最后一个等式的推导如下：设 $x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{W})$，也就是说，对所有 $i \in \mathcal{I}$都有 $x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{W}$。但由此可得，对所有 $i \in \mathcal{I}$和 $x \in \mathcal{W}$都有 $x \in \mathcal{U}_i$，进而得到 $x \in \left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{U}_i\right) \cap \mathcal{W}$。反过来，由 $x \in \left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{U}_i\right) \cap \mathcal{W}$可得$x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{U}_i$ 且 $x \in \mathcal{W}$ 成立，因此对所有 $i \in \mathcal{I}$都有 $x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{W}$，最终这就证明了等式。

□

结合我们已知的子空间拓扑确实是 $\mathcal{W} \subseteq X$ 上的一种拓扑，再来看子空间拓扑的定义，我们也能看出，它确实是将 X 上的拓扑结构继承到子集 $\mathcal{W}$ 上的一种方式，因为我们并没有向拓扑 $\tau_{\mathcal{W}}$ 中添加任何全新的元素。因此， $\tau_{\mathcal{W}}$ 中的开集只有那些原本就包含在 $\mathcal{W}$ 中的 τ的开集，以及其他所有开集与 $\mathcal{W}$的交集。

借助子空间拓扑，我们现在也能够表述并证明连续函数的另一个重要性质。在本文后续部分讨论将连续曲线限制在子区间上时，我们还会用到这一性质。

引理 3.3. 设(X, τ_X) 和(Y, τ_Y) 是两个拓扑空间， $A \subseteq X$是 X 的任意子集，且 $f : X \longrightarrow Y$ 是一个连续函数。进一步地，我们将函数 f 在集合 A 上的限制定义为函数 $f|_A \colon A \longrightarrow Y$，其定义为 $f|_A(x) = f(x)$，对所有 $x \in A$均成立。若赋予 A由 τ_X 诱导的子空间拓扑 $\tau_{X,A}$ ，则函数 $f|_A(\tau_{X,A}, \tau_Y)$连续。

证明。 任意选取 $\mathcal{V} \in \tau_Y$。我们必须证明集合 $(f|_A)^{-1}(\mathcal{V})$ 包含在拓扑 $\tau_{X,A}$ 中。成立的是

$$\begin{aligned}(f|_A)^{-1}(\mathcal{V}) &= \{x \in A \mid f|_A(x) \in \mathcal{V}\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A,\ f|_A(x) \in \mathcal{V}\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A,\ f(x) \in \mathcal{V}\} \\ &= A \cap \{x \in X \mid f(x) \in \mathcal{V}\} \\ &= A \cap f^{-1}(\mathcal{V}). \end{aligned} \tag{44}$$

由于 f 连续，因此 $f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_X$。但根据子空间拓扑 $\tau_{X,A}$ 的定义可知， $A \cap f^{-1}(\mathcal{V})$ 位于 $\tau_{X,A}$ 中。由此可知， $f|_A(\tau_{X,A}, \tau_Y)$ 连续。

□

总之，借助子空间拓扑的概念，我们现在也知道，如何将定义在 $\mathbb{R}$ 上的拓扑传递到有限区间 $[a, b]$ 上，使得 $[a, b]$ 本身成为一个拓扑空间。

因此，我们将迄今为止关于拓扑空间 X 中曲线的认识总结为一个定义。

定义 3.8. 设 (X, τ) 是一个拓扑空间，给定 x_1和 x_2，它们取自 X并满足 $x_1 \neq x_2$，以及一个区间 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$，其中 $-\infty < a < b < +\infty$，配备有

子空间拓扑 $\sigma_{[a,b]}$，其中我们用 σ 表示 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑。那么，我们称连续函数

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow X, \tag{45}$$

用 $\gamma(a) = x_1$ 和 $\gamma(b) = x_2$ 连接 X中的一条曲线。

需要注意的是，根据上述定义，具有性质（4）和（5）的连续函数 γ 将被称为这条曲线。集合 $\mathcal{F} \subseteq X$则被称为曲线 γ的曲线的迹。这样做的原因是，如果我们想研究曲线，实质上处理的是将集合 $\mathcal{F}$ 参数化的函数，而不是单纯的集合 $\mathcal{F}$。在本文接下来的内容中，我们还将看到为什么会这样。

这样，我们现在就知道了一般应如何定义曲线这一概念。由于我们之后将研究定义在所谓*(*弱*)*测地线上的特殊曲线，这些曲线位于所谓的流形 （特殊的拓扑空间）上，因此曲线这一概念将在本文中继续发挥非常重要的作用。

不过，在讨论（弱）测地线之前，我们必须先引入流形的概念。为此，下面我们将回顾线性代数中的一些重要概念，它们是定义流形概念所必需的。

4 线性代数的重要概念

本章中，我们将探讨包括预希尔伯特空间和拓扑向量空间在内的重要概念。之后，我们将用到前一个概念，以便定义有限维黎曼流形；随后，我们将在该流形上阐述前面已经多次提及的长度泛函。

不过，拓扑向量空间的概念我们将在第9章中用到。在该章中，我们还将大致了解如何将有限维情形中的概念推广到无限维情形。

这里讨论的许多定义、定理和证明都涉及 [7]。

4.1 群论

首先，一个重要的代数概念是数学群，它将成为许多构造的基础，我们将在接下来的章节中讨论这些构造。

定义 4.1. 设 G 是一个集合，并配备一个二元运算 n

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\longrightarrow G, \\ (g,h) &\longmapsto g \circ h =: gh \in G \end{aligned} \tag{46}$$

如果元组 $(G,\circ)$ 满足以下条件，我们就称它为一个群：

$$\begin{aligned} &i)\ g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k && \forall g,h,k \in G \\ &ii)\ \exists e \in G : e \circ g = g \circ e = g && \forall g \in G \\ &iii)\ \forall g \in G\ \exists g^{-1} \in G : g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e \end{aligned}$$

条件 *i)* 也简称为（二元运算的）结合律。此外，如果还满足

$$g \circ h = h \circ g \qquad \forall g,h \in G, \tag{47}$$

那么运算 $\circ$ 称为交换的，群 $(G,\circ)$ 称为阿贝尔的。

上述定义中的条件 $ii)$ 意味着存在一个所谓的单位元 $e \in G$。它具有这样的性质：与群中的任意元素 $g \in G$ 进行运算，结果仍然是g 。而数学群定义中的条件 $iii)$ 则表明，每个元素 $g \in G$ 都存在一个所谓的逆元$g^{-1} \in G$，使得 g 与其逆元关于 $\circ$进行运算后，得到群的单位元 e。

虽然我们引入群这一概念，主要是为了之后能够介绍对我们很重要的向量空间概念，但我们还是想花一点时间来说明群这一概念的意义，以便更好地理解

群为何通常很重要，以及为什么值得研究群。

对上述定义的一个初步动机，正如刚才提到的，是（我们马上就会看到）许多熟悉且非常重要的数学对象都自然地具有群结构，因此我们可以将上述定义理解为对这些数学对象自身结构的纯粹抽象。

那么，研究抽象群的一个理由是，许多重要的数学对象本身就是群，而研究一般的群也有助于我们进一步研究这些重要的数学对象。

另一个更直接地引出群的概念的方法，是考察几何对象的对称性：例如，考虑平面上的一个正方形，我们可以对它施加各种运算。

例如，我们可以在正方形所在的平面内，将它旋转一定角度，或沿某条轴将它反射。现在，我们可以只考虑那些固定正方形中心点的变换（也就是说，正方形的非平凡平移不在我们的考察范围内），然后思考哪些运算不会改变正方形的外观。

此类变换的例子包括绕正方形中心旋转 $\frac{\pi}{2}$。我们很容易想到，这类运算的集合（我们称之为正方形的 对称变换），在运算的连续执行下构成一个数学群。

例如，两个对称变换连续执行后仍是一个对称变换（两次旋转 $\frac{\pi}{2}$ 会得到一次旋转，角度为 π，它再次使正方形的外观保持不变）。

此外，不对正方形做任何操作也属于一种对称变换，它是群的单位元。再者，我们当然也可以对每个对称变换进行逆变换，而其逆元自然也属于对称变换（例如，旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的逆变换是旋转角度为 $-\frac{\pi}{2}$ 的变换，它同样是正方形的一种对称变换）。 – –

最后，运算的连续执行也是一种结合运算，因此正方形的所有对称变换构成了一个自然的群。

因此，要正确研究一个几何对象，也必须研究与该对象相关的对称群，即所谓的 对称群。而要进一步深入研究这个对称群，考察一般群论也是很有帮助的。

最后还要提到，正如前面已经指出的，我们在本文中引入群的概念，主要是因为需要将其作为辅助工具，来构造某些对我们很重要的数学对象。不过，了解了上述动机之后，群为何会在数学中频繁地作为有用的辅助工具出现，也就不那么令人意外了。

群的一个重要性质，我们在下文中（例如 in

在即将给出的所谓范数函数的定义中）将反复间接地用到，就是下面这一条：

定理 4.1。 设 $(G,\circ)$ 是一个群。那么，该群的单位元 $e \in G$ 是唯一确定的。

证明。 假设情况并非如此，即还存在另一个元素$e' \in G$，使得

$$e' \circ g = g \circ e' = g \tag{48}$$

对所有 $g \in G$ 均成立。于是可得

$$e \circ g = g = e' \circ g. \tag{49}$$

将此方程右乘 g^{-1} ，可得

$$e \circ g \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = e' \circ g \circ g^{-1} \tag{50}$$

从而

$$e \circ e = e = e' \circ e. \tag{51}$$

然而，这推出 $e = e'$ ，因此群的单位元是唯一确定的。

□

群的另一个重要性质是逆元的唯一性 n:

定理 4.2. 设$(G,\circ)$ 是一个群，其单位元为 $e \in G$ ， $g \in G$ 是群的一个元素。再设 g^{-1} 是 g的一个逆元。那么 g^{-1} 是唯一确定的。

证明。 假设 g^{-1} 不是唯一确定的，也就是说，存在另一个元素 $h \in G$，满足 $h \neq g^{-1}$和 $g \circ h = h \circ g = e$。由 $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$可知， $g \circ g^{-1} = g \circ h$ 成立。将这个表达式左乘 g^{-1} ，并利用结合律和单位元的性质，可得 $g^{-1} = h$，这与假设矛盾。因此， $g \in G$ 的逆元是唯一确定的。

□

既然我们已经谈了一些群的概念的重要性，也了解了群的一些重要性质，接下来就来看看一些重要的群的例子。

例 4.1. 群的重要例子有：

i) 实数集在通常的加法下，即$(\mathbb{R},+)$，以及集合 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 在通常的乘法下，即$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$，分别构成一个群。在$(\mathbb{R},+)$ 中，单位元是0；而在$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ 中，单位元是1 。

ii) 设 $\mathbb{C} := \{re^{i\phi} \mid r \in [0,\infty) \quad \phi \in [0,2\pi) \quad i^2 = -1\}$ 为复数集，且 $\mathbb{S}^1$: $= \{e^{i\phi} \mid \phi \in [0,2\pi)\} \subseteq \mathbb{C}$ 为复单位圆。那么$(\mathbb{S}^1,\cdot)$ 是一个群，其中 $e^{i\phi} \cdot e^{i\eta} = e^{i(\phi+\eta)}$ 。

iii) 设Ω 为一个集合， G 为所有双射函数的集合 $f : \Omega \longrightarrow \Omega$。那么， G与函数复合 $\circ$一起构成一个群，其中函数复合定义为$(f \circ g)(x) := f(g(x))\ \forall x \in \Omega$。该群的单位元是函数 id_Ω，定义为 $id_\Omega(x) = x$ ，对所有 $x \in \Omega$均成立。

iv) 我们考察集合 $SL(2, \mathbb{C}) := \{M \in \mathbf{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid det(M) = 1\}$，其中 $\mathbf{Mat}_2(\mathbb{C})$ 表示所有具有复数元素的 2×2 阶矩阵的集合，而函数 $det : \mathbf{Mat}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ 表示所谓的行列式函数。集合 $SL(2, \mathbb{C})$ 也被称为域$\mathbb{C}$ 上的二阶特殊线性群，该集合中的元素称为幺模矩阵。若赋予此集合通常的矩阵乘法

$\circ$ ，则$(SL(2, \mathbb{C}) \circ)$ 同样是一个群。

在解释对我们而言十分重要的向量空间概念之前，我们还需要简要引入域的概念:

定义 4.2。 设 $\mathbb{K}$ 是一个集合，并赋予其以下两个二元运算

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \tag{52}$$

und

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}. \tag{53}$$

若满足以下条件，三元组 $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ 称为域:

i) $(\mathbb{K}, +)$ 是一个阿贝尔群，其中我们将单位元记作0。

ii) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ 是一个阿贝尔群。

iii) $(a + b) \cdot c = a \cdot b + b \cdot c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$

域的上述定义中的性质*iii)* 也称为分配律 ，并且我们将在下文中把群 $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ 的单位元记作 $\mathbf{1}$。

请注意，由域的定义显然可以推出 $0 \neq 1$。然而，如果不要求只有 $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ 而不是 $(\mathbb{K}, \cdot)$ 构成一个群，就会出现一种我们通常试图避免的情况：一方面，如果没有这一要求，可能会出现 $1 = 0$ ，从而根据分配律可以推出

$$\alpha = 1 \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha = (0 + 0) \cdot \alpha = (1 + 1) \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha = \alpha + \alpha \tag{54}$$

因此，对于所有 $\alpha \in \mathbb{K}$ ，都有 $\alpha = 0$ 。另一方面，如果没有上述要求，单位元 0 必然会相对于 $\cdot$拥有一个逆元 0^{-1} 。然而，由此将推出

$$1 = 0^{-1} \cdot 0 = 0^{-1} \cdot (0 + 0) = 0^{-1} \cdot 0 + 0^{-1} \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \tag{55}$$

因而又是 $1 = 0$，这反过来又意味着 $\mathbb{K}$ 是平凡的。因此，为了排除这类平凡情形，我们直接通过定义要求:

是 $0 \neq 1$，由此又可推出，0 在 $\mathbb{K}$ 中不可能存在关于 $\cdot$ 的逆元。

在下文中，我们用 $-a$表示与 $a \in \mathbb{K}$互为加法逆元的元素，用 $\frac{1}{a}$ 表示与 $a \in \mathbb{K}$ 互为乘法逆元的元素。此外，对于 $a, b \in \mathbb{K}$，我们将不再写作 $a + (-b)$，而简写为 $a - b$。

重要的数学域实例包括实数 $\mathbb{R}$和复数 $\mathbb{C}$，二者都配备通常的加法与乘法。因此，数学域可以被理解为对我们通常数系的抽象，因为在域中可以像往常一样进行运算。

4.2 向量空间

现在我们可以解释向量空间这一对我们非常重要的概念:

定义 4.3. 设 $\mathbb{K}$ 是一个带有单位元 1 的域，且 $(V, \oplus)$ 是一个阿贝尔群。此外，设有一个二元运算

$$\odot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \tag{56}$$

满足以下性质

$$\begin{aligned}
&i)\ \alpha \odot (v \oplus w) = \alpha \odot v \oplus \alpha \odot w && \forall \alpha \in \mathbb{K},\ v, w \in V \\
&ii)\ (\alpha + \beta) \odot v = \alpha \odot v \oplus \beta \odot v && \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ v \in V \\
&iii)\ (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \cdot (\beta \odot v) && \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ v \in V \\
&iv)\ 1 \odot v = v && \forall v \in V
\end{aligned}$$

给定。于是，我们称 $\odot$为数乘，并将三元组 $(V, \oplus, \odot)$称为域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，或简称为 $\mathbb{K}$-向量空间。我们将 V 中的元素称为向量，并将与 V 相关的域 $\mathbb{K}$ 称为 V 的标量域或基域。

因此，直观而言，一个 $\mathbb{K}$-向量空间 V 是一个阿贝尔群，其元素可以通过数乘任意乘以标量域 $\mathbb{K}$ 中的元素，并且满足通常的运算规则，数乘的结果最终仍属于 V。

我们来考察一些向量空间的例子

例 4.2. 向量空间的重要例子有:

i) 一个对我们非常重要的 $\mathbb{K}$-向量空间例子，具有 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 和 $d \in \mathbb{N}$，是 $(\mathbb{R}^d, \oplus, \odot)$，其中

$$\mathbb{R}^d := \{(x^1, x^2, ..., x^d) \mid x^i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1, 2, ..., d\}\} \tag{57}$$

并且向量加法 $\oplus$和数乘 $\odot$ 定义如下:

– 设 $x=(x^1,...,x^d)\quad y=(y^1,...,y^d)\in\mathbb{R}^d$。那么 $x\oplus y$ 定义为

$$x\oplus y:=(x^1+y^1,...,x^d+y^d)\in\mathbb{R}^d. \tag{58}$$

其中，$+$是通常的实数加法。设 $x=(x^1,...,x^d)\in\mathbb{R}^d$和$\alpha\in\mathbb{R}$。那么 $\alpha\odot x$ 定义为

$$\alpha\odot x:=(\alpha\cdot x^1,...,\alpha\cdot x^d)\in\mathbb{R}^d. \tag{59}$$

其中，$\cdot$是通常的实数乘法。

特殊情形 $d=3$对于物理学尤其重要，因为三维物理空间通常可以用 $\mathbb{R}^3$来建模。正如我们马上将看到的，集合 $\mathbb{R}^3$配备额外结构后，也可以作为普通几何的模型。

ii) 另一个重要的 $\mathbb{R}$-向量空间实例，且常具有实际意义，是 $\mathbb{R}$-向量空间 $(\mathcal{L}^2(\Omega\ \mu)\ \oplus,\odot)$。其中，$\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$,$\mu$是 $\mathbb{R}^d$ *[4]* 上的勒贝格测度，且

$$\mathcal{L}^2(\Omega,\mu):=\{f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}\ \ messbar\mid\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2\,d\mu(x)<\infty\}. \tag{60}$$

因此，我们将 $\mathcal{L}^2(\Omega\ \mu)$ 定义中的积分理解为勒贝格积分 *[4]*。此外，我们将 $f\in\mathcal{L}^2(\Omega\ \mu)$ 的可测性理解为相对于在Ω 上任意选取的 σ-代数 $\mathbb{A}$以及 $\mathbb{R}$上的博雷尔σ-代数而言。向量加法 $\oplus$ 和数乘 $\odot$定义如下：

– 设 f、$g\in\mathcal{L}^2(\Omega\ \mu)$。则 $f\oplus g$ 定义为

$$(f\oplus g)(x):=f(x)+g(x)\in\mathbb{R}. \tag{61}$$

其中，$+$ 仍表示通常的实数加法。这样定义的向量加法也称为逐点向量加法。

– 设 $\alpha\in\mathbb{R}$ 以及 $f\in\mathcal{L}^2(\Omega\ \mu)$。则 $\alpha\odot f$ 定义为

$$(\alpha\odot f)(x):=\alpha\cdot f(x)\in\mathbb{R}. \tag{62}$$

其中，$\cdot$仍表示通常的实数乘法。这样定义的数乘也称为逐点数乘。

为求简便，今后我们常用V代替$(V,\oplus,\odot)$，前提是$\oplus$和$\odot$的定义已明确。此外，我们常用 $+$ 代替 $\oplus$，用 $\cdot$ 代替 $\odot$ 。根据上下文，通常可以判断 $+$ 指的是 V 中的向量加法 $\oplus$，还是域 $\mathbb{K}$中的加法 $+$。数乘 $\odot$ 和域 $\mathbb{K}$中的乘法 $\cdot$也是如此。此外，我们将 $v\in V$ 的加法逆元 v^{-1} 简记为 $\ominus v$ 或 $-v$ 。

这一约定源于数乘的性质，因为对于$v \in V$，可得

$$\mathbf{0} = (1-1) \odot v = 1 \odot v \oplus (-1 \odot v), \tag{63}$$

也就是说，根据群中逆元的唯一性，可得

$$v^{-1} = (-1 \odot v) =: \ominus v =: -v \tag{64}$$

一个概念对于我们稍后在讨论流形的章节中将具有重要意义，那就是 $\mathbb{K}$向量空间 V的维数。接下来我们将引入这一概念。我们先从集合 $E \subseteq V$的线性张成这一概念开始。

定义 4.4. 设 V 是一个 $\mathbb{K}$向量空间， $E \subseteq V$ 是 V的一个子集。我们将 E 在 V 中的线性张成定义为集合

$$\{v \in V \mid \exists N \in \mathbb{N}\ \ \alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{R},\ \ v_1, ..., v_N \in E : v = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot v_i\}. \tag{65}$$

我们将这个集合简记为 $span_{\mathbb{K}}(E)$。

E的线性张成，即$span_{\mathbb{K}}(E)$，就是由 E 中的元素构成的所有所谓有限线性组合的集合。

接下来我们定义所谓的 $\mathbb{K}$向量空间 V的生成系这一概念。

定义 4.5. 设 V 是一个 $\mathbb{K}$-向量空间， $E \subseteq V$ 是 V 的子集。若满足以下条件，则称 E 为 V 的生成系：

$$span_{\mathbb{K}}(E) = V \tag{66}$$

ist.

借助这些概念，我们现在可以引入极小生成系这一概念。

定义 4.6. 设 V 是一个 $\mathbb{K}$-向量空间， E 是一个生成系。若对任意 $v \in E$ ， $E \setminus \{v\}$都不再是 V 的生成系，则称 E 为极小生成系。下文中，我们称 V 的极小生成系为 V的基。若 V 中存在一个基 E，使得 $|E| < \infty$ ，则称 V 为有限维 $\mathbb{K}$-向量空间。否则，我们称 V 为无限维。

现在我们可以提出这样一个问题： E 是否是 V 的唯一确定的基？答案是否定的！直观地说，在例 4.2.中，给$V = \mathbb{R}^2$赋予向量加法和数乘后，我们已经可以看出这一点。 $\mathbb{R}^2$ 的一个极小生成系例如为

$$E_1 = \{(1,0), (0,1)\}, \tag{67}$$

因为 $\mathbb{R}^2$ 中的每个向量都可以写成

$$(\alpha, \beta) = \alpha \cdot (1,0) + \beta \cdot (0,1). \tag{68}$$

另一方面，这对.....也成立

$$E_2 = \{(-1,0),(0,-1)\}. \tag{69}$$

因此， E_1 和 E_2 都是基，因为它们都满足极小性，并且都生成整个 $\mathbb{R}^2$。

现在我们来寻找一种快速方法，以判断给定集合 $E \subseteq V$ 是否为极小生成系。为此，我们考察下面的定义：

定义 4.7. 设 V 是一个 $\mathbb{K}$-向量空间， $\{v_1,...,v_m\} \subseteq V$ 是 V 的一个子集，其中 $d \in \mathbb{N}$。如果由

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot v_i = \mathbf{0}, \tag{70}$$

对于所有 $i \in \{1,...,m\}$，由 $\alpha_i \in \mathbb{K}$ 都能推出 $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$ ，那么向量 $+$、...、 称为线性无关。这里，$\mathbf{0} \in V$ 表示$(V,+)$ 的单位元，而 $0 \in \mathbb{K}$ 表示$(\mathbb{K},+)$的单位元。反之，如果存在 $i \in \{1,...,m\}$ 个数 $\alpha_i \in \mathbb{K}$，使得 $\alpha_i \neq 0$，从而(70) 成立，那么我们称集合 $\{v_1,...,v_m\}$ 线性相关。

借助这个定义，我们现在可以证明以下定理，这将使我们今后更容易判断给定的子集 $E \subseteq V$ 是否是 $\mathbb{K}$ 向量空间 V 的一组基。

定理 4.3. 设 V 是一个 $\mathbb{K}$ 向量空间， $E \subseteq V$ 是 V 的一个子集，且满足 $|E| = d < \infty$。那么以下命题等价：

i) E 是 V 的一组基，也就是说，是 V 的一个极小生成系。

ii) E 是 V 中的一个极大线性无关组，也就是说， E 中的所有向量彼此线性无关，并且 $span_{\mathbb{K}}(E) = V$。

证明。*i)* $\Longrightarrow$ *ii)*: 设 E 是 V 的一组基。假设集合 E 不是线性无关的，也就是说，存在数 $\alpha_i \in \mathbb{K}$，它们不全为 $\mathbf{0}$，且满足 $i \in \{1,...,d\}$，使得对于 $\{v_1,...,v_d\} = E$，有

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \cdot v_i = \mathbf{0} \iff \sum_{i=2}^{d} \alpha_i \cdot v_i = -\alpha_1 \cdot v_1. \tag{71}$$

Oh不失一般性，我们假设 $\alpha_1 \neq 0$ 。那么 t

$$\sum_{i=2}^{d} \lambda_i \cdot v_i = v_1 \tag{72}$$

其中 $\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$对所有 $i \in \{1,...,d\}$均成立。现在任取 $w \in V$。由于 E是一个生成系，故存在数 $\beta_i \in \mathbb{K}$、 $i \in \{1,...,d\}$，使得

$$w = \sum_{i=1}^{d} \beta_i \cdot v_i \tag{73}$$

成立。因此

$$w = \sum_{i=2}^{d} \beta_i \cdot v_i + \beta_1 \cdot v_1 = \sum_{i=2}^{d} \beta_i \cdot v_i + \beta_1 \cdot \Big(\sum_{i=2}^{d} \lambda_i \cdot v_i \Big) \tag{74}$$

因此

$$w = \sum_{i=2}^{d} (\beta_i + \beta_1 \cdot \lambda_i) \cdot v_i \in span_{\mathbb{K}}(E \setminus \{v_1\}). \tag{75}$$

由于 $w \in V$ 是任意的，可得 张成$_{\mathbb{K}}(E \setminus \{v_1\}) = V$，这与 E的极小性矛盾。

ii) $\Longrightarrow$ *i)*: 假设 E 是一个线性无关向量集合，且张成$_{\mathbb{K}}(E) = V$，但 E 不是极小的。那么不失一般性，集合 $E \setminus \{v_1\}$（其中 $v_1 \in E$ 选取得当）仍然是一个生成系。但由此可得存在数 α_i、 $i \in \{1, ..., d\}$，使得

$$v_1 = \sum_{i=2}^{d} \alpha_i \cdot v_i. \tag{76}$$

由于 $v_i \neq \mathbf{0}$ ，可知并非所有 α_i 都等于零。但由此可知，集合 E 不可能是线性无关系统。因此， E 必须是一个极小生成系。

□

此外还可以证明，在一个 $\mathbb{K}$ 向量空间中，所有的基 V 都具有相同的长度或基数 [7]。由此引出以下定义：

定义 4.8. 设 V 是一个有限维 $\mathbb{K}$向量空间， $E \subseteq V$ 是 V的一组基。那么我们称 $|E| = d$ 的基数 E 为 $\mathbb{K}$向量空间 V的维数。在这种情况下，我们将 V 称为 d 维 $\mathbb{K}$向量空间。

因此，直观而言，维数这一概念表示生成整个向量空间 V 所需的线性无关向量的个数。若将最小生成集 E（我们简称为基）中的每个向量都与一个自由度联系起来，那么就能直观地理解维数：向量空间 V的维数 V 就是其自由度的个数。

4.3 范数空间与预希尔伯特空间

既然我们已经引入了 $\mathbb{K}$向量空间 V的维数这一概念，接下来就要说明，在 $\mathbb{K}$向量空间 V上可以定义自然且有用的几何概念。我们首先将在抽象意义上引入所谓的范数和内积概念，然后说明在 $V = \mathbb{R}^d$ 的情形下，我们熟悉的许多重要几何概念都可以通过某些范数和内积来定义。

鉴于后续章节的内容，我们在下文中将 $\mathbb{K}$设为 $\mathbb{R}$ 。原因在于，例如在 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的情形下，某个

向量空间上的内积定义与某个 $\mathbb{R}$向量空间上的内积定义有所不同。由于在接下来的章节中，我们只讨论实向量空间，因此复内积的定义与我们无关。

在本章及后续章节中，$|\cdot|$ 也始终表示 $\mathbb{R}$ 上的绝对值函数。

我们首先从所谓的范数这一概念开始。直观地说，我们希望借助范数，能够为 $\mathbb{R}$向量空间 V中的向量赋予一个（抽象的）大小或长度。考虑到后续章节还将讨论流形上的所谓测地曲线，通过范数为向量赋予大小的这一能力将具有重要意义。

定义 4.9。设 V是一个 $\mathbb{R}$向量空间，且 $\|\cdot\|: V \longrightarrow [0,\infty)$ 是定义在 V上的函数。若该函数 $\|\cdot\|$ 满足以下性质，我们称之为范数。

i) 正定性：$\|v\| \geq 0$ 对所有 $v \in V$，当且仅当 $\|x\| = 0$ $x = \mathbf{0}$ 时成立。

ii）正齐次性：$\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ 对所有 $v \in V$以及所有 $\alpha \in \mathbb{R}$均成立。

iii）三角不等式：$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ 对所有 v、$w \in V$均成立。

若 $\|\cdot\|$ 是一个范数，我们就称元组 $(V, \|\cdot\|)$ 为赋范空间。

根据范数函数 $\|\cdot\|$ 的性质，我们确实可以说，$\|v\|$ 是向量 $v \in V$的长度。更准确地说，我们可以将 $\|v\|$解释为 v到零向量 $\mathbf{0} \in V$的距离，因为 $\|\cdot\|$ 实际上总会在 $d_{\|\cdot\|}(v, w)$ 上诱导出一个度量 $d_{\|\cdot\|} := \|v - w\|$。我们简单验证一下，$d_{\|\cdot\|}$ 确实是一个度量：

定理 4.4. 设$(V, \|\cdot\|)$ 是一个实赋范向量空间，并且

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \longrightarrow [0,\infty) \tag{77}$$

一个由下式定义的函数

$$d_{\|\cdot\|}(v, w) := \|v - w\|. \tag{78}$$

那么，$d_{\|\cdot\|}$ 是一个度量。我们称 $d_{\|\cdot\|}$ 为由 $\|\cdot\|$ 诱导的度量 k.

证明. 我们来验证度量公理：

i) 首先注意到，由于 $\|\cdot\|: V \longrightarrow [0,\infty)$，根据定义，$d_{\|\cdot\|}$ 也只能映射到 $[0,\infty)$。此外，由范数公理可知，$\|v\|$ 当且仅当 $v = \mathbf{0}$ 时为零。这意味着 $d_{\|\cdot\|}(v, w) = \|v - w\| = 0$ 当且仅当 $v - w = \mathbf{0}$，或者等价地，当且仅当 $v = w$。这验证了第一条度量公理。

ii) 对于所有 v，$w \in V$均成立

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(v, w) &= \|v - w\| \\ &= \|(-1) \cdot (w - v)\| \\ &= |-1| \cdot \|w - v\| = d_{\|\cdot\|}(w, v). \end{aligned} \tag{79}$$

这验证了第二条度量公理。

iii) 对于 $v, w, r \in V$，有

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(v, r) &= \|(v - w) + (w - r)\| \\ &\leq \|v - w\| + \|w - r\| \\ &= d_{\|\cdot\|}(v, w) + d_{\|\cdot\|}(w, r). \end{aligned} \tag{80}$$

这就验证了第三个度量公理。

因此， $d_{\|\cdot\|}$ 确实是一个度量。 □

因此，每个赋范向量空间也总是一个度量空间；根据前面的第3章，它也总是一个拓扑空间。

由于范数 $\|\cdot\|$ 凭借其性质总会诱导出一个度量 $d_{\|\cdot\|}$，因此只要将 $\|v\| = d_{\|\cdot\|}(\mathbf{0}, v)$ 理解为 $v \in V$ 到零向量 $\mathbf{0} \in V$ 的距离，就很容易理解为什么我们可以将 $\|v\|$ 视为 v的大小（从零向量起算）。

按照上述解释，对于一个为每个向量赋予其大小的函数，自然应当满足：只有零向量的长度 $\mathbf{0}$ 为零，而所有其他向量的长度都大于零。此外，对于这类函数，缩放后的向量 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的长度应当恰好等于未缩放向量的长度乘以缩放因子 $|\alpha|$。

最后，按照上述解释，关于 $\|\cdot\|$ 的三角不等式可以理解为：如果将 $\|v+w\|$理解为 $v+w \in V$到零向量$\mathbf{0}$ 的距离，那么 $v + w$ 到零向量的距离总是小于或等于 v 到零向量的距离与 w 到零向量的距离之和，因为

$$\|v + w\| = d_{\|\cdot\|}(\mathbf{0}, v + w) \leq d_{\|\cdot\|}(\mathbf{0}, v) + d_{\|\cdot\|}(v, v + w) = \|v\| + \|w\|. \tag{81}$$

我们再简要考察一个重要的范数例子：

例4.3。 设 $V = \mathbb{R}^d$。我们定义函数

$$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \tag{82}$$

为

$$\|v\|_{\mathbb{R}^d} := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (v^i)^2} \tag{83}$$

其中 $v = (v^1, \ldots, v^d) \in \mathbb{R}^d$。不难看出， $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ 确实是一个范数。

考察特殊情形 $d = 2$，我们注意到，对于 $v = (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2$，根据勾股定理，表达式 $\|v\|$ 正好对应于一个直角三角形的斜边，其两条直角边的长度分别为 $|v^1|$ 和 $|v^2|$ 。

因此，基于这一长度概念，我们可以将向量空间 $\mathbb{R}^2$ 可视化为二维笛卡尔坐标系，使坐标系原点由零向量表示，并且向量 v

可以在该坐标系中表示为一个箭头，指向坐标对 $[v^1, v^2]$ 。

在这个直观的 $\mathbb{R}^2$ 可视化中，向量 v 自然会具有长度 $\|v\|_{\mathbb{R}^2}$，也就是说，函数 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ 不是抽象长度函数，而是与基于该可视化得到的 v 的几何长度一致。

从这种直观的几何可视化 $\mathbb{R}^2$ 出发，$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ 对应于 v的直观几何长度，这再次表明，如果以 $\mathbb{R}^2$ 的笛卡尔可视化为基础，我们可以将 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ 理解为 $\mathbb{R}^2$ 上的长度函数。

在刚才提到的 $\mathbb{R}^2$ 可视化中，我们已经用到了角的概念，因为在笛卡尔坐标系中，坐标轴毕竟是彼此垂直的。接下来我们将看到，借助 $\mathbb{R}^2$ 上的内积，我们可以定义基于上述可视化的两个向量之间的几何角。

注释 4.1。范数函数 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$有一个有用的性质，我们之后在分析基础一章中也会用到：设 $\mathbb{R}^d$ 配备由范数 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ 所诱导的拓扑。再设$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^d$是一个序列，其中 $x_n = (x_n^1, ..., x_n^d)$ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x = (x^1, ..., x^d) \in \mathbb{R}^d$。也就是说，对所有 $\delta > 0$，都存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$\|x_n - x\|_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + ... + (x_n^d - x^d)^2} < \delta \quad \forall n \geq N \tag{84}$$

成立。因此，对于序列$(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$，其中 $i \in \mathbb{N}$，同样对任意给定的 $\delta > 0$ 都有

$$\begin{aligned} |x_n^i - x_i| &= \sqrt{(x_n^i - x_i)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + ... + (x_n^i - x_i)^2 + ... + (x_n^d - x^d)^2} \\ &= \|x_n - x\|_{\mathbb{R}^d} < \delta \quad \forall n \geq N. \end{aligned} \tag{85}$$

也就是说，由序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛可得，对所有$i \in \{1, ..., d\}$都有 $x_n^i \xrightarrow{n\to\infty} x^i \in \mathbb{R}$ 。反过来，当然也可由对所有 $i \in \{1, ..., d\}$ 都有 $x_n^i \xrightarrow{n\to\infty} x^i \in \mathbb{R}$推出$(x^1, ..., x^d) \in \mathbb{R}^d$收敛。

现在，借助范数函数，我们能够解释几何中重要的长度概念。接下来，我们定义实内积和实预希尔伯特空间。正如我们将看到的，可以借助内积在 V上引入角度概念，这也说明了内积为何是重要的数学量。

定义 4.10. 设 V 是一个有限维的 $\mathbb{R}$-向量空间。再设

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \tag{86}$$

一个双线性映射，即

$$\langle \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2, w \rangle = \alpha_1 \cdot \langle v_1, w \rangle + \alpha_2 \cdot \langle v_2, w \rangle \tag{87}$$

und

$$\langle v, \beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 \rangle = \beta_1 \cdot \langle v, w_1 \rangle + \beta_2 \cdot \langle v, w_2 \rangle \tag{88}$$

对于所有 α_1、α_2、β_1、$\beta_2 \in \mathbb{R}$ 以及所有 v、v_1、v_2、w、w_1、$w_2 \in V$。若 $\langle \cdot$、$\cdot \rangle$ 满足以下性质，我们就将 $\langle \cdot$、$\cdot \rangle$ 称为 V 上的内积：

i) 正定性：对于所有 $v \in V$，$\langle v、\ v\rangle \geq 0$；当且仅当 $v = \mathbf{0}$ 时，$\langle v、\ v\rangle = 0$。

ii) 对称性：$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \quad \forall v, w \in V$

若 $\langle \cdot, \cdot\rangle$ 是内积，则称元组 $(V, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ 为预希尔伯特空间。

我们来看一个重要的内积例子：

例 4.4. 设 $V = \mathbb{R}^d$。接下来定义函数

$$\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \tag{89}$$

如下

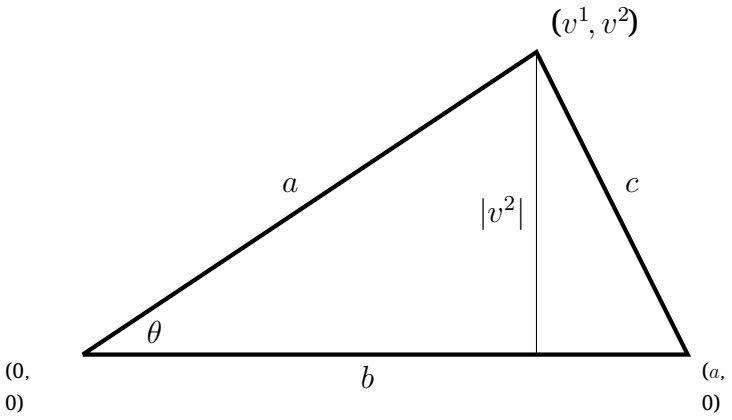
$$\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^d} := \sum_{i,j=1}^{d} v^i \cdot w^j \tag{90}$$

对于 $v = (v^1, ..., v^d)\ \ w = (w^1, ..., w^d) \in \mathbb{R}^d.$

容易看出，$\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}$ 确实是一个对称的正定双线性型。我们将 $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}$ 称为 $\mathbb{R}^d$的标准内积。一个重要的初步观察是，根据例 4.3. 中$\| \cdot \|_{\mathbb{R}^d}$ 的定义以及 $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}$ 的定义可知，$\| \cdot \|_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}}$，即 $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}$ 诱导出范数 $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^d}$。稍后我们将看到，~~每个~~实内积都以这种方式诱导出一个相应的范数。

我们再次考察特殊情形 $d = 2$，以及例 4.3. 中已知的、借助二维笛卡尔坐标系对 $\mathbb{R}^2$ 进行的标准可视化。在这种可视化中，我们将 $\mathbb{R}^2$ 中的点与笛卡尔坐标系中的坐标对对应起来。由此很容易证明，在这种标准可视化中，两个向量之间通常所说的角度概念可以用上述标准内积表示：

我们考虑由向量 $v = (v^1, v^2)$ 和$u = (a, 0)$ 生成的以下三角形：



从图中可以看出，$a = \|v\|_{\mathbb{R}^2}$, $b = \|u\|_{\mathbb{R}^2}$和 $c = \|v - u\|_{\mathbb{R}^2}$.。进一步从图中可以得出，在 $\mathbb{R}^2$的这种标准可视化中，向量 v 和 u夹角为 θ。

根据欧几里得几何，有 $(v^1, v^2) = (a \cdot cos(\theta)\ a \cdot sin(\theta))$，并根据勾股定理可得

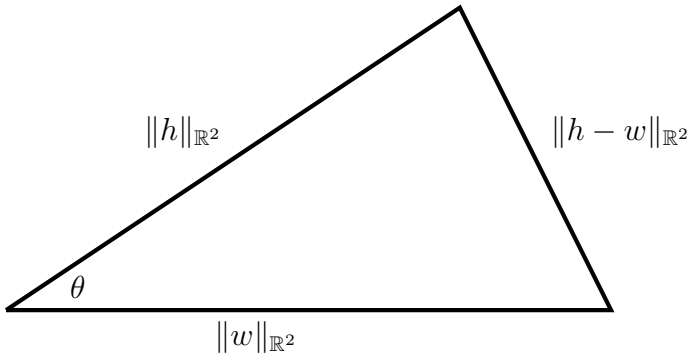
$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a \cdot cos(\theta))^2 + (a \cdot sin(\theta))^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos(\theta) \end{aligned} \tag{91}$$

在最后一步中，我们利用了 $sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$ 这一事实。由此我们证明了，对于上述构造的一般三角形，有

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot cos(\theta) \tag{92}$$

成立。这个结果也称为余弦定理。

现在考虑两个一般向量 $w, h \in \mathbb{R}^2$ 以及由它们在标准可视化中张成的相应三角形。我们假设在这种可视化中，向量 w 和 h 所夹的角为 θ 。



根据上述余弦定理，这个三角形满足

$$\|h - w\|_{\mathbb{R}^2}^2 = \|h\|_{\mathbb{R}^2}^2 + \|w\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 2\,\|h\|_{\mathbb{R}^2}\|w\|_{\mathbb{R}^2} \cdot cos(\theta) \tag{93}$$

另一方面，根据 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$的定义，可得

$$\begin{aligned} \|h - w\|_{\mathbb{R}^2}^2 &= \langle h - w, h - w \rangle_{\mathbb{R}^2} \\ &= \|h\|_{\mathbb{R}^2}^2 + \|w\|_{\mathbb{R}^2}^2 + 2\,\langle h, w \rangle_{\mathbb{R}^2} \end{aligned} \tag{94}$$

由(93) 和(94) 可得

$$\langle h, w \rangle_{\mathbb{R}^2} = \|h\|_{\mathbb{R}^2}\|w\|_{\mathbb{R}^2} cos(\theta). \tag{95}$$

Es 需要指出的是，这个结果很容易推广到 $\mathbb{R}^d$ *st.*

实内积的一个重要性质是所谓施瓦茨不等式的正确性。借助它，我们马上就能证明， $\mathbb{R}$向量空间 V 上的每个内积都会在 V 上诱导出一个范数，因此每个预希尔伯特空间也都是赋范空间，进而也是度量空间和拓扑空间。

定理 4.5。设$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是一个实的有限维预希尔伯特空间。那么柯西-施瓦茨不等式成立:

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle \tag{96}$$

对所有 $v, w \in V$。

证明。 任取 $v, w \in V$，不失一般性，假设 $v \neq \mathbf{0}$且 $w \neq \mathbf{0}$。否则，不等式显然成立，因为若 $v = \mathbf{0}$或 $w = \mathbf{0}$或 $v = w = \mathbf{0}$ ，根据内积的双线性，立即可知不等式两边均为零。现在，由内积的正定性、对称性和双线性可得，对任意 $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle v - \alpha \cdot w, v - \alpha \cdot w \rangle = \langle v, v \rangle - 2\alpha \cdot \langle v, w \rangle + \alpha^2 \cdot \langle w, w \rangle. \tag{97}$$

现在我们选择 $\alpha := \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$。这一对 α 的选择是定义良好的，因为由 $w \neq \mathbf{0}$ 可知 $\langle w, w \rangle > 0$。由此设定可得

$$0 \leq \langle v, v \rangle - 2 \cdot \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} = \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle w, w \rangle} \tag{98}$$

成立。移项可得柯西-施瓦茨不等式

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle. \tag{99}$$

□

对于实预希尔伯特空间 V，由施瓦茨不等式可知，对于任意 v, $w \in V$，若 $v \neq \mathbf{0}$ 且 $w \neq \mathbf{0}$，则

$$\frac{|\langle v, w \rangle|}{\sqrt{\langle v, v \rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w \rangle}} \leq 1 \tag{100}$$

或等价地

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\sqrt{\langle v, v \rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w \rangle}} \leq 1. \tag{101}$$

如例 4。4。 因此，我们可以找到唯一的 $\theta \in [0, \pi)$，使得

$$cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\sqrt{\langle v, v \rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w \rangle}} \tag{102}$$

bzw.

$$\langle v, w \rangle = \sqrt{\langle v, v \rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w \rangle} \cdot cos(\theta) \tag{103}$$

成立。在赋予标准内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^d}$ 的 $\mathbb{R}^d$ 情形中，我们在例 4。4。看到，(103) 中的数 θ 与 $\mathbb{R}^d$ 的笛卡尔可视化中的几何角相一致。然而，在任意有限维预希尔伯特空间 V 中，(102) 是角的抽象定义。

因此，我们现在已经看到，可以借助向量空间 V 上的内积引入角度概念，而在特殊情况下，这一概念与通常的角度概念相一致。借助这一角度概念，我们还可以给出一个有用的定义：

定义 4.11. 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个有限维预希尔伯特空间。如果两个向量 $v, w \in V$ 彼此垂直或正交，则称它们相互垂直或正交，当且仅当

$$\langle v, w\rangle = 0 \tag{104}$$

ist.

根据 (103)，当 $\langle v, w\rangle = 0$ 时，我们称向量彼此正交的原因显而易见，因为此时 $cos(\theta) = 0$，因此$\theta = \frac{\pi}{2}$。

接下来，我们还要证明，每个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 都会在$\|v\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \sqrt{\langle v, v\rangle}$上诱导出一个范数$\|\cdot\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$，其中 $v \in V$。

定理 4.6。 设$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个预希尔伯特空间。那么函数

$$\|\cdot\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle} : V \longrightarrow [0, \infty), \tag{105}$$

定义为

$$\|v\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle} := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \tag{106}$$

其中 $v \in V$，是一个范数。我们称$\|\cdot\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ 为由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 诱导的范数。

证明。 我们验证范数公理:

i) 首先注意到，由于内积的正定性，函数$\|\cdot\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ 只能取值于 $[0, \infty)$，并且 $\|v\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ 当且仅当 $v = \mathbf{0}$ 时为零。这证明了第一条范数公理。

ii) 对于所有的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $v \in V$，都有

$$\|\alpha \cdot v\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle}\sqrt{\langle\alpha \cdot v, \alpha \cdot v\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle v, v\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\alpha|\|v\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle} \tag{107}$$

成立。这证明了第二条范数公理。

iii) 设 $v, w \in V$。根据施瓦茨不等式，有

$$\begin{aligned}
\|v + w\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle} &= \sqrt{\langle v + w, v + w\rangle} = \sqrt{\langle v, v\rangle + 2 \cdot \langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle} \\
&\leq \sqrt{\langle v, v\rangle + 2 \cdot |\langle v, w\rangle| + \langle w, w\rangle} \\
&\leq \sqrt{\langle v, v\rangle + 2 \cdot \sqrt{\langle v, v\rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w\rangle} + \langle w, w\rangle} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{\langle v, v\rangle} + \sqrt{\langle w, w\rangle}\right)^2} \\
&= \sqrt{\langle v, v\rangle} + \sqrt{\langle w, w\rangle} \\
&= \|v\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle} + \|w\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle}.
\end{aligned} \tag{108}$$

这证明了第三条范数公理。

由此可知，$\|\cdot\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ 确实是一个范数 . □

由此我们证明了，每个有限维预希尔伯特空间 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 自动也是一个拓扑豪斯多夫空间，并且我们在关于拓扑空间和度量空间的各章中讨论过的所有概念，都可以通过由内积诱导的拓扑推广到这些空间上。由内积诱导的拓扑，就是由度量 $d_{\|\cdot\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle}}$ 诱导的拓扑。

收敛与连续性概念的可迁移性、预希尔伯特空间中收敛序列的极限唯一性，以及内积所编码的几何信息，今后在关于流形的章节中都将具有重要意义；只有理解这些内容，才能正确地处理这些数学对象，并建立对它们有帮助的几何直觉。

总而言之，本节介绍了预希尔伯特空间是什么，它们以自然的方式带有豪斯多夫拓扑，因此我们可以将关于拓扑空间一章中的结果和定义应用于这些空间；我们还了解到，赋予标准内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}$ 的 $\mathbb{R}^d$ 带有通常的欧几里得几何。

4.4 乘积拓扑与拓扑向量空间

本节我们还将探讨积拓扑这一重要概念，并进一步介绍一个关于该概念的重要代数应用示例。这个应用示例一方面旨在说明通常何时需要用到积拓扑，另一方面也为第9章作准备；在第9章中，我们将概述无限维流形这一概念。

因此，本节的首要任务是将迄今为止在拓扑和（线性）代数领域中发展出的概念恰当地结合起来，以便日后在本文中运用本节的结果。

在定义积拓扑之前，我们先考察下面这个定理；稍后，当我们需要简洁地写出积拓扑的定义时，它将很有帮助。

定理 4.7。 设 X 是一个集合，$\mathcal{I}$ 是任意指标集，且对于所有 $i \in \mathcal{I}$，τ_i 都是 X 上的任意拓扑。那么，$\tau := \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \tau_i$ 仍然是 X 上的一个拓扑。

证明。 我们来验证拓扑公理:

i) 由于 $\emptyset \in \tau_i$ 对所有 $i \in \mathcal{I}$ 都成立，因此 $\emptyset \in \tau$。类似地，也可得出 $X \in \tau$。*ii)* 设 $\mathcal{J}$ 是任意指标集，且对所有 $j \in \mathcal{J}$，都有 $\mathcal{U}_j \in \tau$。我们考虑集合 $\mathcal{U} := \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \mathcal{U}_j$。根据 τ 的定义，$\mathcal{U}_j \in \tau_i$ 对所有 $j \in \mathcal{J}$ 及所有 $i \in \mathcal{I}$ 都成立，因此 $\mathcal{U} \in \tau_i$ 对所有 $i \in \mathcal{I}$ 都成立。由此可得 $\mathcal{U} \in \tau$。*iii)* 设 $\mathcal{J} := \{1, ..., m\}$，且 $m \in \mathbb{N}$。进一步，任取对所有 $j \in \mathcal{J}$ 给定的 $\mathcal{U}_j \in \tau$。我们定义集合 $\mathcal{U} = \bigcap_{j\in\mathcal{J}} \mathcal{U}_j$。根据 τ 的定义，$\mathcal{U}_j \in \tau_i$ 对所有 $j \in \mathcal{J}$ 及所有 $i \in \mathcal{I}$ 都成立，因此 $\mathcal{U} \in \tau_i$ 对所有 $i \in \mathcal{I}$ 都成立。由此可得 $\mathcal{U} \in \tau$。

□

下面我们来考察一个可数的拓扑空间族，也就是说，对所有 $j \in \mathbb{N}$，$(X_j,\ \tau_j)$ 都是拓扑空间。现在我们考察积空间

$$\prod_{j\in\mathbb{N}} X_j := X_1 \times X_2 \times ... := \{(x_1, x_2, ...) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ...\}. \tag{109}$$

接下来，我们要在 $X := \prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$ 上定义一个拓扑 $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$，它应由给定的拓扑 τ_j（其中 $j \in \mathbb{N}$）构造而成。我们该如何构造这样的拓扑，又如何确保这种构造符合直观理解?

基本思想相当简单：既然 τ 应由所有 τ_j 构造而成，那么 τ_j 就应直观地成为 τ 的组成部分或分量。也就是说，我们首先直观地把 τ 看作一个复合对象，其组成部分就是 τ_j。按照这种理解，我们当然可以合理地说，τ 是由 τ_j 构成的。我们该如何用数学方式表述这一要求？为此，我们先定义所谓的投影映射

$$\pi_i : X = \prod_{j\in\mathbb{N}} X_j \longrightarrow X_i \tag{110}$$

如下

$$\pi_i(x_1, x_2, ..., x_i, ...) = x_i \in X_i. \tag{111}$$

即，映射 π_i 从 X 的元素中投影出第 i 个分量。如果 τ 应由所有 τ_j 构成，那么从直观上来说，应有

$$\pi_i(\tau) = \tau_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{112}$$

或者更严谨地说:

$$\forall \mathcal{V} \in \tau \ \ gilt,\ dass\ \pi_i(\mathcal{V}) \in \tau_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{113}$$

und

$$\forall \mathcal{V}_i \in \tau_i\ \exists \mathcal{V} \in \tau : \pi_i(\mathcal{V}) = \mathcal{V}_i \tag{114}$$

在此，我们将 (113) 和 (114) 中的 $\pi_i(\mathcal{V})$ 理解为集合

$$\{x_i \in X_i \mid \exists x \in \mathcal{V}\ \ mit\ \pi_i(x) = x_i\}. \tag{115}$$

方程 (112) 表达的是：直观上构成 τ 的构成部分或分量，恰好就是拓扑 τ_i，因为投影 π_i 应用于 τ 后，恰好给出 τ 的第 i 个组成部分，正如方程 (111) 中的投影 π_i 给出元素 $(x_1, x_2, ..., x_i, ...) \in X$ 的第 i 个分量；其中，我们把 $(x_1, x_2, ..., x_i, ...)$ 想象为由各个$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_i \in X_i, ...$ 构成。

直观地说，我们要求根据（112），对于每个 $\mathcal{V}_i \in \tau_i$，至少存在一个 $\mathcal{V} \in \tau$，使得 $\pi(\mathcal{V}) = \mathcal{V}_i$ 成立，因为只有这样才能满足（112）。一个

对于这个 $\mathcal{V}$，一种自然且显而易见的选择是 $\mathcal{V}_i$ 在 π_i 下的原像，即

$$\begin{aligned}\mathcal{V} = \pi_i^{-1}(\mathcal{V}_i) &= \{x \in X \mid \pi_i(x) \in \mathcal{V}_i\} \\ &= X_1 \times X_2 \times ... \times X_{i-1} \times \mathcal{V}_i \times X_{i+1} \times ... \end{aligned} \tag{116}$$

因此，我们现在要求，对于所有$i \in \mathbb{N}$ 属于 τ， τ_i 中所有元素在 π_i 下的原像都属于 τ。

现在可以问：一个只包含这类集合的集合 τ是否已经是一个拓扑。答案是否，因为在这样的集合中，所有元素都具有（116）的形式。

然而，根据拓扑公理，拓扑例如必须对有限交封闭。因此，设对于 $i < j$ 、$\mathcal{V}_i \in \tau_i$和 $\mathcal{V}_j \in \tau_j$，集合 $X_1 \times ... \times X_{i-1} \times \mathcal{V}_i \times X_{i+1} \times ...$和 $X_1 \times ... \times X_{j-1} \times \mathcal{V}_j \times X_{j+1} \times ...$ 属于 τ，那么就必须推出 $X_1 \times ... \times \mathcal{V}_i \times ... \times \mathcal{V}_j \times ...$ 也属于 τ，但如果 τ 仅由 τ_i 中的开集在所有 $i \in \mathbb{N}$ 下经 π_i 得到的原像组成，这是不可能的。

因此，解决这个问题的一种方法是将上述原像的所有可能的有限集合交加入集合 τ。出于类似的原因，我们当然还必须将来自 τ_i 的开集原像的任意有限集合交的所有可能并集，加入集合 τ 的 π_i 中。

这样一来，τ 就自然地成为一个拓扑，它显然满足拓扑公理。值得注意的是，对于已经加入集合 τ 的集合，我们现在不应再添加其他集合。原因是，这些额外的集合若不能表示为来自 τ_i 的开集原像的有限集合交的任意并集，就不是由 τ_i 构成的；相应地，它们会赋予集合系 τ 超出其根据 τ_i 应有的更多结构，而 τ 直观上应由 τ_i 构成。

因此，由于任意多个拓扑的交仍然是一个拓扑，我们也说这样构造的拓扑 τ 是使投影映射 π_i 按定义 π_i 全部连续的最小拓扑。这就给出了以下定义：

定义 4.12。设对所有 $i \in \mathbb{N}$，(X_i, τ_i) 都是拓扑空间。我们定义集合 $X := \prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$ 以及第 i 个投影映射 $\pi_i : X \longrightarrow X_i$，其中$i \in \mathbb{N}$。那么，所谓的积拓扑 τ 定义在 X 上，它是使所有投影映射 π_i 连续的最小拓扑。

因此，这个积拓扑 τ 直观上应当是定义在乘积空间 $X = \prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$ 上的一个拓扑，它由各个 τ_j 构造而成。这一构造的出发点或动机是 (112)、(113) 和 (114)。最后，我们还可以问：这个积拓扑最终是否真的实现了它应有的作用。

也就是说，我们要问现在这样构造出来的拓扑 τ 是否确实满足 (112)，毕竟 (112) 对我们而言只是一种直观上的动机；迄今为止，我们没有具体理由相信，在加入任意多个集合并以及有限多个来自 τ_i 的开集的 π_i-原像之后，这样构造出来的 τ 仍然满足 (112)。因此，

检查这一点是否仍然成立很重要，因为只有当 (112) 对乘积拓扑 τ 成立时，我们的构造最终才真正有意义或符合直觉。

为了证明积拓扑 τ 满足 (112)，我们首先注意到，(112) 等价于 (113) 和 (114)。根据构造，积拓扑显然满足 (114)，因为所有开集 $\mathcal{V}_i \in \tau_i$ 在 π_i 下的原像都包含于 τ中。因此，对于积拓扑 τ，我们只需证明 (113)。为此，我们引入以下有用的概念:

定义 4.13。 设 (X, τ) 和 (Y, σ) 是两个拓扑空间，且 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是一个映射。如果满足以下条件，我们称该映射 f 为开映射:

$$\forall \mathcal{U} \in \tau : f(\mathcal{U}) \in \sigma \tag{117}$$

成立。其中， $f(\mathcal{U})$ 仍定义为

$$f(\mathcal{U}) := \{y \in Y \mid \exists x \in \mathcal{U} \ \ mit \ f(x) = y\}. \tag{118}$$

利用这个定义，我们现在可以更简洁地表述 (113)，因为 (113) 等价于所有投影 π_i 都是开映射。由此得到以下定理:

定理 4.8。 设(X_i, τ_i) 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都是拓扑空间，并设 $X = \prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$赋予由 τ_i 构造的积拓扑 τ。那么，对所有 $i \in \mathbb{N}$，投影 $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ 都是开映射。

证明。 首先注意到，根据积拓扑的构造，每个元素 $\mathcal{U} \in \tau$ 都可以写成

$$\mathcal{U} = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \bigcap_{k=1}^{n_j} \pi_{i_{k,j}}^{-1}(\mathcal{U}_{k,j}). \tag{119}$$

其中， $\mathcal{J}$ 是一个不一定有限的指标集， $n_j \in \mathbb{N}$, $i_{k,j} \in \mathbb{N}$ 和$\mathcal{U}_{k,j} \in \tau_{i_{k,j}}$。 对于所有 $i \in \mathbb{N}$，我们定义集合 $\mathcal{V}_{i,k,j}$ 如下

$$\mathcal{V}_{i,k,j} \begin{cases} \mathcal{U}_{k,j}, & i = i_{k,j} \\ X_i, & i \neq i_{k,j} \end{cases} . \tag{120}$$

根据定义，$\mathcal{V}_{i,k,j} \in \tau_i$，并且

$$\pi_{i_{k,j}}^{-1}(\mathcal{U}_{k,j}) = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_{i,k,j} \tag{121}$$

ist. 因此，对于任意投影映射 π_l，满足 $l \in \mathbb{N}$，以及一个 m

任意元素 $\mathcal{U} \in \tau$，有

$$\begin{aligned}
\pi_l(\mathcal{U}) &= \pi_l\Big(\bigcup_{j\in\mathcal{J}} \bigcap_{k=1}^{n_j} \pi_{i_{k,j}}^{-1}(\mathcal{U}_{k,j})\Big) \\
&= \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \pi_l\Big(\bigcap_{k=1}^{n_j} \pi_{i_{k,j}}^{-1}(\mathcal{U}_{k,j})\Big) \\
&= \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \pi_l\Big(\bigcap_{k=1}^{n_j} \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_{i,k,j}\Big) \\
&= \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \pi_l\Big(\prod_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=1}^{n_j} \mathcal{V}_{i,k,j}\Big) \\
&= \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \bigcap_{k=1}^{n_j} \mathcal{V}_{l,k,j}. \qquad (122)
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{V}_{l,k,j}$ 对于所有 $j \in \mathcal{J}$ 和所有 $k \in \{1, ..., n_j\}$ 都是 τ_l 中的一个开集，因此 (122) 的右侧表示 τ_l 中元素的有限多个集合交的任意并集，由此可得 $\pi_l(\mathcal{U})$ 是 $\in \tau_l$ 。因此， π_l 是一个开映射。由于 $l \in \mathbb{N}$ 是任意的，所以所有投影都是开映射。

□

因此，我们找到了一种在 $X = \prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$ 上引入拓扑 τ 的方法，这种拓扑直观上是由 τ_j 构造出来的。换句话说，我们由此知道了如何将拓扑空间粘合在一起，而不破坏所得积空间各分量的拓扑结构。从这个意义上说，积拓扑是积空间 X上的自然拓扑。

借助积拓扑，我们现在可以引入拓扑群的概念：

定义 4.14. 设$(G, \circ)$ 是一个群， $\tau \subseteq \mathcal{P}(G)$ 是 G上的一个拓扑。若映射$(G, \tau, \circ)$ 是连续映射，我们称三元组为拓扑群。

$$\begin{aligned}
\circ : G \times G &\longrightarrow G \\
(g, h) &\longmapsto g \circ h \qquad (123)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\cdot^{-1} : G &\longrightarrow G \\
g &\longmapsto g^{-1} \qquad (124)
\end{aligned}$$

在 $G \times G$ 上选取了这样的积拓扑：将拓扑空间(G, τ) 与自身粘合后所得到的拓扑。

因此，拓扑群是一种同时也是拓扑空间的数学群，其群运算和取逆映射（将群中每个元素映射到其逆元）都是连续的。我们还要指出，拓扑群定义中的取逆映射是良定义的，因为根据定理 4.1. ，元素$g \in G$ 的逆元是唯一确定的。

拓扑群这一概念在数学中有许多应用。尤其是，这一概念对于定义所谓的李群至关重要；李群又应用于物理学，也应用于测地线射击算法理论，进而应用于图像处理。

此外，借助拓扑群这一概念，现在也可以定义拓扑向量空间的概念。我们将在第9章中特别使用这一概念，概述如何将我们将在本文第6章讨论的有限维流形概念推广到无限维情形。

定义 4.15。 设$(V, \oplus, \odot)$是一个$\mathbb{R}$向量空间，$\tau \subseteq \mathcal{P}(V)$是$V$上的一个拓扑。若$(V, \tau, \oplus)$构成一个拓扑群，且数乘$\odot\colon \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$连续，则称四元组$(V, \tau, \oplus, \odot)$为一个拓扑$\mathbb{R}$向量空间。其中，我们赋予$\mathbb{R}$由绝对值度量$d$诱导的标准拓扑$\tau_d$，并赋予$\mathbb{R} \times V$由将$(\mathbb{R}, \tau_d)$和$(V, \tau)$粘合为拓扑空间而得到的积拓扑。

赋范空间和预希尔伯特空间是拓扑空间的重要例子，因为它们的向量加法和数乘相对于由范数或内积诱导的拓扑是连续的。为了看清这一点，我们只需证明赋范空间是拓扑向量空间，因为正如我们上面所看到的，每个预希尔伯特空间都以自然方式成为一个赋范空间。我们得到如下定理:

定理 4.9。 设$(V, \|\cdot\|)$是一个赋范$\mathbb{R}$-向量空间，并赋予其范数拓扑τ_V，即由度量d诱导的拓扑，其中$d(v, w) = \|v - w\|$。进一步，设$\mathbb{R}$赋予由绝对值函数诱导的拓扑$\tau_{\mathbb{R}}$。现在分别为$V \times V$和$\mathbb{R} \times V$赋予积拓扑，则可知向量加法

$$\begin{aligned} A := \oplus : V \times V &\longrightarrow V \\ (v, w) &\longmapsto A((v, w)) =: v \oplus w \end{aligned} \tag{125}$$

以及数乘

$$\begin{aligned} S := \odot : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto S((\lambda, v)) =: \lambda \odot v \end{aligned} \tag{126}$$

是连续的。

证明。 以下设$\mathcal{U}_\delta^{\tau_V}(v) = \{w \in V \mid \|v - w\| < \delta\}$且$\mathcal{U}_\delta^{\tau_{\mathbb{R}}}(\lambda) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid |\lambda - \alpha| < \delta\}$。这里提醒一下，$\mathcal{U} \subseteq V$是开集，即$\mathcal{U} \in \tau_V$，若对所有$v \in \mathcal{U}$，都存在一个$\delta > 0$，使得$\mathcal{U}_\delta^{\tau_V}(v) \subseteq \mathcal{U}$成立。$\tau_{\mathbb{R}}$中的开集也有类似的性质。现在我们来检验映射$A$和$S$的连续性:

i) 我们从映射A开始。设$\mathcal{U}$是任意一个开集。我们要证明，$A^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq V \times V$关于$V \times V$上的积拓扑是开集。为此，设$(v, w) \in A^{-1}(\mathcal{U})$，即$v \oplus w \in \mathcal{U}$。由于$\mathcal{U}$是开集，

存在一个 $\delta > 0$，使得 $\mathcal{U}_\delta^{\tau_V}(v \oplus w) \subseteq \mathcal{U}$。再设 $\delta' > 0$ 由$\delta' = \frac{\delta}{2}$给出。我们考察集合 $\mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(v) \times \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(w) \subseteq V \times V$。由于对任意的$z \in V$ 和 $\epsilon > 0$，集合 $\mathcal{U}_\epsilon^{\tau_V}(z)$ 都是开集，由积拓扑的构造可知，集合 $\mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(v) \times \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(w)$ 关于积拓扑是开集。现在任意选取 $x \in \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(v)$ 和 $y \in \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(w)$。于是有

$$\begin{aligned} \|(v \oplus w) \ominus (x \oplus y)\| &= \|(v \ominus x) \oplus (w \ominus y)\| \\ &\leq \|v \ominus x\| + \|w \ominus y\| \\ &< \delta' + \delta' = \delta, \end{aligned} \tag{127}$$

也就是说，$(x \oplus y) \in \mathcal{U}_\delta^{\tau_V}(v \oplus w)$。由此可得，

$$A(\mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(v) \times \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(w)) \subseteq \mathcal{U}_\delta^{\tau_V}(v \oplus w) \subseteq \mathcal{U} \tag{128}$$

成立。进一步可得，$A^{-1}(\mathcal{U})$ 关于积拓扑是开集，因为对于任意的 $(v, w) \in A^{-1}(\mathcal{U})$，我们都能找到一个关于积拓扑的开集 $\mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(v) \times \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(w)$，使得 $(v, w) \in \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(v) \times \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(w) \subseteq A^{-1}(\mathcal{U})$ 成立。容易看出，若$\delta' = \delta'_{(v,w)}$

$$A^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{(v,w) \in A^{-1}(\mathcal{U})} \mathcal{U}_{\delta'_{(v,w)}}^{\tau_V}(v) \times \mathcal{U}_{\delta'_{(v,w)}}^{\tau_V}(w) \tag{129}$$

成立。由于 (129) 的右侧是积拓扑中开集的并集，根据拓扑公理，$A^{-1}(\mathcal{U})$ 是积拓扑中的一个元素。由于 $\mathcal{U} \in \tau_V$ 是任意的，因此 A 连续。

ii) 我们证明映射 S 的连续性。为此，再设 $\mathcal{U} \subseteq V$ 是任意一个开集。我们要证明，$S^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R} \times V$ 关于积拓扑是开集。为此，设 $(\lambda, v) \in S^{-1}(\mathcal{U})$，即 $\lambda \odot v \in \mathcal{U}$。由于 $\mathcal{U}$ 是开集，存在一个 $\delta > 0$，使得 $\mathcal{U}_\delta^{\tau_V}(\lambda \odot v) \subseteq \mathcal{U}$。进一步，取 $\delta' > 0$ 足够小，使得 $\delta'(\|v\| + |\lambda|) + \delta'^2 < \delta$。我们考察集合 $\mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(\lambda) \times \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(v) \subseteq \mathbb{R} \times V$。关于 $\mathbb{R} \times V$ 上的积拓扑，该集合是开集。现在任意选取 $\alpha \in \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_{\mathbb{R}}}(\lambda)$ 和 $w \in \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(v)$。于是有

$$\begin{aligned} \|(\lambda \odot v) \ominus (\alpha \odot w)\| &= \|(\lambda \odot v) \ominus (\alpha \odot v) \oplus (\alpha \odot v) \ominus (\alpha \odot w)\| \\ &\leq \|(\lambda \odot v) \ominus (\alpha \odot v)\| + \|(\alpha \odot v) \ominus (\alpha \odot w)\| \\ &= |\lambda - \alpha|\|v\| + |\alpha|\|v \ominus w\| \\ &< \delta'\|v\| + |\alpha|\delta' \\ &= \delta'(\|v\| + |\alpha - \lambda + \lambda|) \\ &\leq \delta'(\|v\| + |\lambda|) + \delta'^2 < \delta, \end{aligned} \tag{130}$$

也就是说，成立 $(\alpha \odot w) \in \mathcal{U}_\delta^{\tau_V}(\lambda \odot v)$。由此可得，

$$S(\mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(\lambda) \times \mathcal{U}_{\delta'}^{\tau_V}(v)) \subseteq \mathcal{U}_\delta^{\tau_V}(\lambda \odot v) \subseteq \mathcal{U} \tag{131}$$

是。由与*i)* 类似的论证可知，$S^{-1}(\mathcal{U})$是开集。由于 $\mathcal{U}$是 V 中的任意开集，因此 S 是连续的。

□

4.5 张量

为了准备学习关于黎曼流形的这一章，我们现在还要简要讨论一下张量概念。

本节旨在说明，上文讨论的内积是特殊的张量，从而使后文中源自文献的度量张量场定义更加直观。

首先，我们定义线性映射的概念：

定义 4.16. 设 V 和 W 分别是 $\mathbb{R}$-向量空间。若映射 $f : V \longrightarrow W$ 满足下列条件，则称其为线性映射

$$f(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) = \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot f(w) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\, v, w \in V \tag{132}$$

我们在讨论预希尔伯特空间的章节中已经见过映射的线性性质。例如，我们将内积定义为双线性映射，这意味着内积对其两个自变量都是线性的。

注释 4.2. 线性映射有一项重要且实用的性质：所谓线性映射的复合仍然是线性的。这意味着，对于线性映射 $f: V \longrightarrow W$ 和 $g : Z \longrightarrow X$，其中V、W、Z分别是 $\mathbb{R}$-向量空间，定义映射 $h: Z \longrightarrow W$

$$h(z) := f(g(z)) \quad \forall z \in Z, \tag{133}$$

又是一个线性映射。可以如下看出这一点：任取 α、$\beta \in \mathbb{R}$ 和 x、$y \in V$。则有

$$\begin{aligned} h(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) &= f(g(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)) \\ &= f(\alpha \cdot g(x) + \beta \cdot g(y)) \\ &= \alpha \cdot f(g(x)) + \beta \cdot f(g(y)) \\ &= \alpha \cdot h(x) + \beta \cdot h(y), \end{aligned} \tag{134}$$

这表明了 h 的线性性。

根据如下观察，我们可以解释所谓对偶空间的概念：关于通常的加法，$\mathbb{R}$ 本身是一个 $\mathbb{R}$-向量空间；在这种情况下，数乘由通常的实数乘法给出。

定义 4.17. 设 V 是一个 $\mathbb{R}$-向量空间。我们将 V 的（代数）对偶空间 V^* 定义为

$$V^* := \{\eta : V \longrightarrow \mathbb{R} \mid \eta \ ist \ linear\}. \tag{135}$$

容易看出，赋予逐点加法和数乘后，V^*仍然是一个 $\mathbb{R}$向量空间。若 V 还是一个维数为 n的有限维 $\mathbb{R}$向量空间，则可得，对偶空间V^* 也是一个 n维 $\mathbb{R}$向量空间：

定理 4.10。 若 V 是一个维数为 n的有限维 $\mathbb{R}$向量空间，则可得，与 V 相应的对偶空间 V^* 也是一个维数为 n 的有限维 $\mathbb{R}$向量空间。

证明。 设 $\mathcal{A} := \{e_1, ..., e_n\} \subseteq V$ 是 V 的一组基，即 $\mathcal{A}$ 是一组线性无关向量的集合，并且张成整个 V。我们定义对于 $j \in \{1, ..., n\}$ 的映射 $\eta^j : V \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\eta^j(e_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} =: \delta_i^j. \tag{136}$$

将 η^j 线性延拓到 V 上，可知 η^j 属于 V^*。我们首先证明 张成$_{\mathbb{R}}(\{\eta^1, ..., \eta^n\}) = V^*$: 为此任取 $\phi \in V^*$。由于 ϕ 是线性的， ϕ 完全由其对基向量 e_i 的作用确定，因为若 $v = \sum_{k=1}^n v^i e_i$，则有 $\phi(v) = \sum_{k=1}^n v^i \phi(e_i)$。我们令 $\phi(e_i) =: \theta_i$。进一步定义映射 $\sigma = \sum_{k=1}^n \theta_k \eta^k$。由于 $\sigma \in V^*$，可知 σ 完全由其对基 $\mathcal{A}$ 的作用确定。对于 $i \in \{1, ..., n\}$，有

$$\begin{aligned} \sigma(e_i) &= \big(\sum_{k=1}^n \theta_k \eta^k\big)(e_i) \\ &= \sum_{k=1}^n \theta_k \eta^k(e_i) \\ &= \sum_{k=1}^n \theta_k \delta_i^k = \theta_i, \end{aligned} \tag{137}$$

也就是说， σ 和 ϕ 在 $\mathcal{A}$ 上相等。由于根据定义， σ 和 ϕ 都是线性的，因此 σ 和 ϕ 在整个 V 上相等，也就是说， $\sigma = \phi$。不过，根据 σ 的定义，我们可以将ϕ 写成 η^j 的线性组合。由于 ϕ 是任意的，因此集合 $\{\eta^1, ..., \eta^n\}$ V^*张成整个空间。接下来要证明集合 $\{\eta^1, ..., \eta^n\}$线性无关。为此，设对于 $k \in \{1, ..., n\}$ $\lambda_k \in \mathbb{R}$，有

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \eta^k = \mathbf{0} \tag{138}$$

成立。其中， $\mathbf{0} \in V^*$ 表示 V^*的加法零元，它将 V中的每个元素映射到 $0 \in \mathbb{R}$。我们要证明，必然有所有λ_k 都等于 $\mathbf{0}$。由于 $\sum_{k=1}^n \lambda_k \eta^k$ 定义了 V^* 中的一个元素，我们可以用它作用于元素 $v \in V$。对于 $v = e_i$，有

$$\big(\sum_{k=1}^n \lambda_k \eta^k\big)(e_i) = \lambda_i. \tag{139}$$

由（138）可得，对于所有 $i \in \{1, ..., n\}$， $\lambda_i = 0$。这就证明了所要证明的结论 . □

由前面的证明，我们还可以得到以下有用的定义:

定义 4.18。 设 V是一个以 $\mathcal{A} := \{e_1, ..., e_n\}$为基的 n 维 $\mathbb{R}$ 向量空间。那么，与 $\mathcal{A}$ 对应的对偶基是 V^* 中的集合 $\mathcal{B} := \{\eta^1, ..., \eta^n\}$，其定义见 (136)。根据定理 4.10. 的证明，如此定义的 V^* 对偶基确实是 V^*的一个基。

由于 V^* 上的线性结构，可以在 V^*上定义线性映射。由此得到一般（r, s）张量的定义：

定义4.19。 再次设 V 为一个维数为 n的有限维 $\mathbb{R}$向量空间。那么，我们将每个形如

$$T : \underbrace{V \times ... \times V}_{s} \times \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{r} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{140}$$

的映射称为(r, s)-张量。这里的多重线性是指， T 在其$(r + s)$ 个自变量中的每一个上都是线性的。此外，我们将所有这类(r, s)-张量构成的集合记为 $T^r_s(V)$ 。

例4.5。 我们来看两个简单的张量例子。

i）一个简单的(r, s)-张量例子，其中 $r = 0$ 和 $s = 2$ 分别为.....，就是上文讨论过的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。根据定义，它是一个形如.....的双线性映射

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{141}$$

ii）张量的另一个重要例子，尤其是我们之后为张量丛这一概念作铺垫时会用到的，是向量空间中的向量。因此，我们可以将向量 $v \in V$视为一个$(1,0)$-张量。为此，首先注意到，根据定理4.10.， V的对偶空间的对偶空间（即所谓的双对偶空间 V^{**}）的维数同样为 n 。此外，我们知道，所有维数相同的有限维向量空间彼此同构 *[7]*。

这意味着，同一维数的向量空间之间存在一个双射且线性的映射。直观地说，这些向量空间是相同的数学对象，只是其中的元素采用了不同的名称。它们在结构上并无差异。

因此， V 和 V^{**} 彼此同构，我们用符号 $V \cong V^{**}$ 表示。也就是说，我们可以将每个元素 $v \in V$与一个元素 $\sigma \in V^{**}$ 一一对应。现在设

$$\begin{aligned} \beth : V &\longrightarrow V^{**} \\ v &\longmapsto \sigma = \beth(v) \end{aligned} \tag{142}$$

一个映射，定义如下

$$\sigma(\eta) = (\beth(v))(\eta) := \eta(v) \quad \forall \eta \in V^*. \tag{143}$$

正如我们马上将看到的，这个映射是线性且双射的，这意味着 $\beth$ 是一个实现同构 $V \cong V^{**}$ 的同构。双射意味着它既是单射的，也是满射的映射。

如果没有两个元素被映射到同一个元素上，则称函数为单射的；直观地说，如果值域中的每个元素都能被该函数取到，即可称函数为满射的，也就是说，设 $f:\ V \longrightarrow W$ 是集合 V 和 W 之间的一个函数，那么当且仅当

$$\forall w \in W\ \exists v \in V\ \ mit\ f(v) = w. \tag{144}$$

直观地说，双射就是一种1 对1 映射，它将一个集合中的每个元素与另一个集合中的唯一一个元素对应起来，反之亦然。

那么，我们如何看出映射 ⊐ 确实是一个同构?

为此，我们先结合线性映射考察下面两个重要的集合。设 V、W 是两个 $\mathbb{K}$向量空间，并且$f: V \longrightarrow W$ 是一个线性映射。首先，我们将映射 f 的核定义为集合

$$ker(V) := \{v \in V\ \mid\ f(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V. \tag{145}$$

其中， $\mathbf{0}_W$ 表示 W的单位元，也就是零向量。接下来，我们将映射 f 的像定义为集合

$$im(f) := \{w \in W\ \mid\ \exists v \in V\ \ mit\ f(v) = w\} \subseteq W. \tag{146}$$

这两个集合都可以分别看作 V 和 W的 $\mathbb{K}$子向量空间 *[7],* ，这意味着我们可以赋予它们 V 和 W 的向量空间结构，使它们本身成为向量空间。

借助这两个 $\mathbb{K}$向量空间，我们现在可以考察线性映射的两个重要性质:

引理 4.1. 设 V、W 是两个 $\mathbb{K}$向量空间，且 $f:\ V \longrightarrow W$ 是一个线性映射。以下命题等价。

(1) f 是单射的，即对于 v、$w \in V$，有

$$f(v) = f(w) \implies v = w. \tag{147}$$

(2) 映射 f 的核是平凡的，即

$$ker(f) = \{\mathbf{0}_V\}, \tag{148}$$

其中 $\mathbf{0}_V$ 是 V 的单位元，也就是零向量。

证明。（*1*） $\implies$ （*2*）：假设 f 是单射的。设 $v \in V$ 是来自V的一个向量，具有以下性质： $f(v) = \mathbf{0}_W$。我们知道，对于 $f(\mathbf{0}_V) \in V$，有

$$f(\mathbf{0}_V) = f(0 \cdot \mathbf{0}_V) = 0 \cdot f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W. \tag{149}$$

后一个等式由 $0 \cdot w = (0+0) \cdot w = 0 \cdot w + 0 \cdot w$推出。因此可得 $f(v) = f(\mathbf{0}_V)$，再根据单射性可得 $v = \mathbf{0}_V$。这就证明了第一个方向。

(2) $\Longrightarrow$ *(1)*: 假设 f 的核是平凡的，并且对于 $v, w \in V$，有 $f(v) = f(w)$。利用 f 的线性性可得

$$\begin{aligned} f(v) = f(w) &\iff f(v) - f(w) = \mathbf{0}_W \\ &\iff f(v - w) = \mathbf{0}_W \\ &\iff v - w \in ker(f) = \{\mathbf{0}_V\} \\ &\iff v = w. \end{aligned} \tag{150}$$

这就证明了另一个方向。 □

引理 4.2. </style}设 、 是两个有限维 -向量空间，且 :$V \longrightarrow W$ 是一个线性映射。则有如下公式:

$$dim(V) = dim(ker(f)) + dim(im(f)). \tag{151}$$

其中，$dim(\cdot)$ 将相应的向量空间映射为其维数，并约定零向量空间（即仅包含零向量的向量空间）的维数为 0 。

证明. 参见 [7]. □

利用这两个引理，我们现在可以证明 ⊐ 确实是一个同构。首先验证 ⊐ 的线性性：为此，设 α、$\beta \in \mathbb{R}$ 和 v、$w \in V$ 已知。则对所有 $f \in V^*$，有

$$\begin{aligned} (\beth(\alpha \cdot v + \beta \cdot w))(f) &= f(\alpha \cdot v + \beta \cdot w) \\ &= \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot f(w) \\ &= \alpha(\beth(v))(f) + \beta \cdot (\beth(w))(f) \\ &= (\alpha \cdot \beth(v) + \beta \cdot \beth(w))(f). \end{aligned} \tag{152}$$

由于这对所有的 $f \in V^*$ 都成立，因此可得 ⊐的线性。

此外，我们还注意到 ⊐（v） $\in V^{**}$ ，因为根据定义，对于 $\eta \in V^*$，有

$$(\beth(v))(\eta) = \eta(v). \tag{153}$$

由此可得，对于 β_1、$\beta_2 \in \mathbb{R}$ 和 η^1、$\eta^2 \in V^*$

$$\begin{aligned} (\beth(v))(\beta_1 \cdot \eta^1 + \beta_2 \cdot \eta^2) &= (\beta_1 \cdot \eta^1 + \beta_2 \cdot \eta^2)(v) \\ &= \beta_1 \cdot \eta^1(v) + \beta_2 \cdot \eta^2(v) \\ &= \beta_1 \cdot (\beth(v))(\eta^1) + \beta_2 \cdot (\beth(v))(\eta^2) \end{aligned} \tag{154}$$

成立，这表明 $\beth(v)$ 是形如 $V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ 的线性映射。

接下来我们证明 $\beth$的单射性。根据引理4.1，为此我们只需证明 $\beth$ 的核是平凡的。因此，设 $v \in V$ 满足 $\beth(v) = \mathbf{0}_{V^{**}}$。但这意味着

$$(\beth(v))(f) = f(v) = 0 \quad \forall f \in V^*, \tag{155}$$

根据 $\mathbf{0}_{V^{**}} \in V^{**}$的定义。假设 $v \neq \mathbf{0}_V$。那么我们可以在维数为 $dim(V)$ 的 $\mathbb{R}$-向量空间 V中找到形如 $\{v, v_2, ..., v_{dim(V)}\} \subseteq V$ 的一组基。利用这组基，我们可以将下面的线性映射 $g \in V^*$ 定义为

$$g(v) = 1, \ g(v_2) = g(v_3) = ... = g(v_{dim(V)}) = 0 \tag{156}$$

（注意，线性映射由其在一组基上的作用唯一确定！）。由此可得

$$(\beth(v))(g) = g(v) = 1 \neq 0, \tag{157}$$

由此可得 $v = \mathbf{0}_V$ 必定成立。由于 $v \in V$ 是满足$\beth(v) = \mathbf{0}_{V^{**}}$ 的任意向量，因此 $\beth$ 的核是平凡的，进而 $\beth$ 是单射的。

由于 $\beth$ 的核是平凡的，再由引理 *4.2.*可知，$\beth$ 是满射的，因为 $dim(ker(\beth)) = 0$，因此 $dim(im(\beth)) = dim(V) = dim(V^{**})$。由此可得 $\beth$ 是双射的，因为假设 $im(\beth) =: \beth(V) \neq V^{**}$，即 $\beth(V) \subset V^{**}$。由于 $dim(im(\beth)) = dim(V^{**})$，因此存在一组基 $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_{dim(V^{**})}\} \subset V^{**}$，其长度为 $dim(V^{**})$，且属于 $\beth(V)$。由于我们预先假设了 $\beth(V) \subset V^{**}$，因此必定存在一个 $\delta \in V^{**}$，使得

$$\delta \neq \sum_{i=1}^{dim(V^{**})} \alpha^i \cdot \epsilon_i \tag{158}$$

对所有 $\alpha_1, ..., \alpha_{dim(V^{**})} \in \mathbb{R}$。但由此立即可知，集合 $\{\delta, \epsilon_1, ..., \epsilon_{dim(V^{**})}\} \subset V^{**}$ 线性无关，因此我们便在 V^{**} 中找到了一组长度为 $dim(V^{**}) + 1$ 的基，这显然矛盾。由此可得 $\beth$ 的满射性。

利用 $\beth$ 是一个同构这一观察，我们现在可以将 $v \in V$ 理解为如下形式的映射 $V^* \longrightarrow \mathbb{R}$，从而将其视为 $V^{**} = T^1_0(V)$ 的一个元素：

$$\eta(v) = (\beth(v))(\eta) =: v(\eta) \tag{159}$$

A这样一来，V 中的向量本身也可以视为张量。

现在，我们用最后一个有用的定义来结束本节：

定义 4.20. 设 V 是一个 n 维的 $\mathbb{R}$ 向量空间，且 $\mathcal{A} := \{e_1, ..., e_n\}$ 是 V 的一组基。再设 $\mathcal{B} := \{\eta^1, ..., \eta^n\}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 V^* 中对应的对偶基。考虑张量 T，其类型为 (r, s)。我们通过下式定义依赖于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的张量分量：

$$T^{j_1,...,j_r}_{i_1,...,i_s} := T(e_{i_1}, ..., e_{i_s}, \eta^{j_1}, ..., \eta^{j_r}), \tag{160}$$

其中 i_1、...、i_s、j_1、...、$j_r \in \{1, ..., n\}$。

5 分析基础

正如引言中所提到的，本书的目标之一是引入有限维流形上曲线长度的概念，并粗略说明如何解释无限维流形上的长度概念。

原因在于，正如我们已经多次提到的，我们希望在本书最后讨论所谓长度泛函的所谓驻定曲线。顾名思义，粗略地说，长度泛函为每条曲线赋予一个长度。

然而，正如我们将会看到的，要严谨地引入曲线长度的概念，需要用到分析方法。本章将列出所需的分析工具，并展示这些工具的一些有用性质。

从现在起，我们将运用赋范空间中关于数列收敛的熟知运算法则。尽管这些运算法则中的许多都可以借助赋范空间中定义的范数，从数列收敛的定义出发，通过初等方法加以证明，但此处我们请读者参阅 [25]。

我们还要指出，本章将要讨论的数学分析工具主要是在泛函分析的框架下定义的。这样做的一个优点是，我们可以非常一般且严谨地解释要讨论的概念；另一个优点是，这种更抽象的方法有一部分可用于第9章。在该章中，我们将会面对无限维向量空间和流形等内容。

在本章中， $\mathbb{R}^d$ 上的 $d \in \mathbb{N}$ 始终赋予由标准内积所诱导的拓扑，即 $\mathbb{R}^d$上的标准拓扑（注意：由标准内积在 $\mathbb{R}$ 上诱导的范数恰好就是绝对值。）

接下来，我们要说明函数的可微性是什么意思，例如定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的函数。为了阐明函数可微性的概念，我们先考察一个更直观的概念：函数 $f: X \longrightarrow Y$ 的方向导数。该函数定义在赋范空间$(X, \|\cdot\|_X)$上，取值于赋范空间$(Y, \|\cdot\|_Y)$。函数 f的定义域和值域必然都必须是向量空间，因为若没有 X和 Y中的向量加法，我们就无法构造方向导数中直观的差商。

以下所有赋范空间均为实数空间，且不仅包含零向量 $\mathbf{0}$。第二个要求源于两点：一方面，这种平凡情形对我们毫无意义；另一方面，有了这一要求，我们就能够采用一种特别简单且易于使用的定义，来定义稍后将讨论的算子范数。

定义 5.1。 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和$(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是两个赋范空间，且$f: X \longrightarrow Y$ 是一个函数。若极限 f 在点 $x \in X$ 沿方向 $h \in X$存在，则称其在该点沿该方向方向可微。

$$f'(x;h) := \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t} \tag{161}$$

在 Y中存在。在此情况下，我们称 $f'(x;h)$ 为 f在点 x沿方向 h的方向导数。若对所有$h \in X$， f在点 x方向可导，则称其在该点方向可导。最后，若 f 对所有 $x \in \mathcal{U}$ 都方向可导，则称 f 在开集$\mathcal{U} \subseteq X$上方向可导。

在上面的定义中， $t \longrightarrow 0$表示：在（161）右侧用任意序列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ 的一个序列项 t_n 替代 t，其中 $t_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$且对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $t_n \neq 0$，然后令 $n \longrightarrow \infty$ 趋于极限。

还需注意，如果上面的极限存在，那么它是唯一确定的，因为上述隐式序列相对于由范数诱导的拓扑收敛，而赋范空间 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 在这一拓扑下是一个拓扑豪斯多夫空间，这一点我们在前几节中已经知道。

f 在点 $x \in X$ 沿 $h \in X$ 方向的方向导数，表示函数在点 x 沿 h 方向的变化程度。对于 $X = Y = \mathbb{R}$和$h = 1 \in \mathbb{R}$，我们得到形如 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的函数的通常可微性概念。

既然我们现在已经明确了对于形如 $f : X \longrightarrow Y$ 的函数，什么是方向导数，那么我们还可以进一步思考：对于只在开集合 $\mathcal{W} \subseteq X$ 上定义的函数，方向导数应当如何理解。请注意，我们目前对方向导数的定义要求函数定义在整个赋范空间 X 上。

因此，设 $f : \mathcal{W} \longrightarrow Y$ 是一个仅在开集合$\mathcal{W} \subseteq X$ 上定义的函数。我们称该函数在点 $x \in \mathcal{W}$ 方向可微，当且仅当函数

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathcal{W} \\ 0, & x \notin \mathcal{W} \end{cases} \tag{162}$$

在 $x \in \mathcal{W}$ 中方向可微。也就是说，我们只需将函数 $f : \mathcal{W} \longrightarrow Y$ 延拓到整个赋范空间 X 上：在$\mathcal{W}$ 外将其取为零。请注意，方向可微性的定义确实可以如此直接地推广到形如 $\mathcal{W} \longrightarrow Y, \mathcal{W} \subseteq X$ 的开函数，因为 $\mathcal{W}$ 一方面是开集，另一方面，方向可微性的定义中使用了极限 $t \longrightarrow 0$ 。

类似地，我们解释函数 f 的方向可微性：在开集合 $\mathcal{W} \longrightarrow Y$：设 $\mathcal{W} \subseteq X$ 为开集，并给定函数 $f : \mathcal{W} \longrightarrow Y$。如果函数在开集合 $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ 上满足以下条件，我们称其为方向可微：

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathcal{W} \\ 0, & x \notin \mathcal{W} \end{cases} \tag{163}$$

在 $\mathcal{U}$ 上方向可微。

接下来，我们要定义所有连续线性算子的集合。这里说明，所谓连续函数 $f : X \longrightarrow Y$，定义在赋范空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 上并映射到赋范空间 $(Y, \|\|_Y)$，是指关于由范数 $\|\cdot\|_X$和$\|\cdot\|_Y$ 诱导的拓扑连续的函数。

定义 5.2. 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是两个赋范空间。我们用 $\mathcal{L}(X, Y)$ 表示所有如下形式的连续线性映射构成的集合

$$A : X \longrightarrow Y. \tag{164}$$

容易验证，借助逐点加法和数乘，集合 $\mathcal{L}(X, Y)$ 构成一个 $\mathbb{R}$-向量空间。

现在，借助 $\mathcal{L}(X, Y)$，我们可以为函数 $f\colon X \longrightarrow Y$引入盖托可微性的概念:

定义 5.3. </style}设($X, \|\cdot\|_X)$ 和$(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是两个赋范空间，并设$f : X \longrightarrow Y$ 是一个在点 $x \in X$ 处方向可导的函数。若存在一个 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$，使得

$$f'(x; h) = A(h) \qquad \forall h \in X \tag{165}$$

成立，则称 f 在点 x 处盖托可微，并将 $A =: f'(x)$ 称为 f 在点x处的盖托导数或盖托微分。若 f 对开集 $\mathcal{U} \subseteq X$中的所有 $x \in \mathcal{U}$ 都盖托可微，则称 f 在开集 $\mathcal{U} \subseteq X$ 上盖托可微。

请注意，根据上述定义，对于在 $\mathcal{U}$ 上盖托可微的函数，其导数函数 f'（我们简称为 f 的导数）是形如

$$f' : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y) \tag{166}$$

的映射。还请注意，我们在此始终要求集合 $\mathcal{U} \subseteq X$ 是关于由 $\|\cdot\|_X$ 诱导的拓扑的开集。这一要求确保对于每个 $x \in \mathcal{U}$，总存在一个 $\delta > 0$，使得 $\mathcal{U}_\delta(x) = \{y \in X \mid \|x - y\|_X < \delta\} \subseteq \mathcal{U}$。当我们希望构造函数 $f : X \longrightarrow Y$ 的高阶导数时，这些观察尤其重要。

最后，我们再次指出，对于定义在开集 $\mathcal{W} \subseteq X$ 上的函数 $f : \mathcal{W} \longrightarrow Y$，在点 $x \in \mathcal{W}$ 处的盖托可微性，以及在开集 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ 上的盖托可微性，分别如 (162) 和 (163) 所示，都是通过平凡延拓来定义的。

例 5.1。设 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$是在点 $x \in \mathbb{R}$处盖托可微的函数。对于 $h \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} f'(x; h) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0,\, \lambda = t \cdot h} \frac{f(x + \lambda) - f(x)}{t} \\ &= \left(\lim_{t \longrightarrow 0,\, \lambda = t \cdot h} \frac{f(x + \lambda) - f(x)}{\lambda} \right) \cdot h \\ &= \left(\lim_{\lambda \longrightarrow 0} \frac{f(x + \lambda) - f(x)}{\lambda} \right) \cdot h \\ &= f^{(1)}(x) \cdot h. \end{aligned} \tag{167}$$

由于 （167） 关于 $h \in \mathbb{R}$ 是线性且连续的，因此 f 在点 x 处的盖托微分存在，并且为

$$f'(x;h) = f'(x)(h) := f^{(1)}(x) \cdot h. \tag{168}$$

也就是说，函数 f 在点 x 处的盖托微分可以与实分析中已知的通常导数概念 $f^{(1)}$（x）：$= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} {}^{f\ (x+\lambda)\ -f\ (x)\ }{}_{\lambda}$等同起来。因此，这样的函数尤其是一种函数；直观地说，正如实分析中所知，它的函数图像 $\{$（x，f（x）$\mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ 没有折点，更不会出现不连续点。

此外请注意，有

$$f'(x;1) = f'(x)(1) = f^{(1)}(x) \tag{169}$$

ist.

接下来我们将解释 Fréchet可微性的概念:

定义 5.4。 设 （X，$\|\cdot\|_X$） 和 （Y，$\|\cdot\|_Y$） 是两个赋范空间，并设 f ： $X \longrightarrow Y$ 是一个函数。若存在一个 $A \in \mathcal{L}$（X，Y） 以及一个映射 r_x ： $X \longrightarrow Y$，使得对于所有 $h \in X$ 都有，则称函数 f 在点 $x \in X$ 处 ***Fréchet***可微。

$$f(x+h) = f(x) + A(h) + r_x(h) \tag{170}$$

und

$$\frac{\|r_x(h)\|_Y}{\|h\|_X} \longrightarrow 0 \qquad \textit{für} \ \ \|h\|_X \longrightarrow 0 \tag{171}$$

是。在这种情况下，我们称 A 为 f在点 $x \in X$处的弗雷歇导数或全微分。进一步地，如果 f 在 $\mathcal{U} \subseteq X$的所有 $x \in \mathcal{U}$ 处都弗雷歇可微，则称 f 在 $\mathcal{U} \subseteq X$上全可微。

我们再次将仅在开集 $\mathcal{W} \subseteq X$ 上定义的函数f：$\mathcal{W} \longrightarrow Y$称为在点 $x \in \mathcal{W}$ 处或在开集$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$上弗雷歇可微，当且仅当 f 在 x 处或在 $\mathcal{U}$ 上的相应平凡延拓（162）是弗雷歇可微的。

现在很容易看出，每个弗雷歇可微函数也都是盖托可微的，并且盖托导数与弗雷歇导数一致:

定理 5.1。 设$(X, \|\cdot\|_X)$ 和$(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是两个赋范空间，且 $f\colon X \longrightarrow Y$是一个弗雷歇可微函数。那么 f 也盖托可微，并且弗雷歇导数与盖托微分一致。

证明。 由于 f：$X \longrightarrow Y$Fréchet 可微，因此存在一个 $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ 和一个 r_x：$X \longrightarrow Y$，使得对于任意 $h \in X$

$$f(x+h) - f(x) - A(h) = r_x(h) \tag{172}$$

满足$\frac{\|r_x(h)\|_Y}{\|h\|_X} \longrightarrow 0$)，其中 $\|h\|_X \longrightarrow 0$。我们令 $h = t \cdot v$，其中 $t \in \mathbb{R}$ 且 $v \in X$。由 A 的线性可得，

$$\frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t} - A(v) = \frac{r_x(t \cdot v)}{t} \tag{173}$$

成立。因此有 $\frac{\|r_x(t \cdot v)\|_Y}{|t| \cdot \|v\|_X} \longrightarrow 0$，对于 $\|t \cdot v\|_X = |t| \cdot \|v\|_X \longrightarrow 0$。这意味着

$$\frac{\|r_x(t \cdot v)\|_Y}{|t|} = \left\| \frac{r_x(t \cdot v)}{t} \right\|_Y \longrightarrow 0 \tag{174}$$

对于 $t \longrightarrow 0$。由极限的定义可得

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t} = A(v). \tag{175}$$

由于 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 和 $h \in X$ 是任意的，而 $v \in X$ 也因此是任意的，所以可得：f 在 x 上盖托可微，其盖托微分为 A。 □

鉴于这一观察，我们也将弗雷歇导数简写为 $f'(x)$。此外，我们还由此得到了对弗雷歇导数的直观解释：根据 (170)， $f'(x)$ 一方面是 f 的线性近似；另一方面，根据刚才的观察， $f'(x)$ 还编码了 f 在点 $x \in X$ 处变化的程度。

在下文中，若函数 $f\colon X \longrightarrow Y$ 到 $\mathcal{U} \subseteq X$ 满足：对于所有点 $x \in \mathcal{U}$， f 均为 Fréchet 可微，且

$$f' : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y) \tag{176}$$

连续。为了能够讨论函数 f' 的连续性，我们给 $\mathcal{U}$赋予由 $\|\cdot\|_X$ 在 X 上诱导的拓扑所生成的子空间拓扑，而 $\mathcal{L}(X,\ Y)$ 则赋予由所谓的算子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$诱导的拓扑。算子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ 定义如下：

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathcal{O}} &:= \sup_{x \in X,\ x \neq \mathbf{0}} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \\ &:= \sup \left\{ \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in X \ \ mit\ x \neq \mathbf{0} \right\}, \end{aligned} \tag{177}$$

由此，向量空间 $\mathcal{L}(X,\ Y)$ 本身成为一个赋范空间。这里，集合算子 $\sup : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$（我们称之为上确界算子）是指将子集 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ 映射到其最小上界的算子，即映射到满足对于所有 $b \in \mathcal{A}$ 都有 $b \leq a$ 的最小 $a \in \mathbb{R}$。

接下来，若 f 且函数 f'作为从 $\mathcal{U}$ 到赋范空间$\mathcal{L}(X, Y)$的函数在 $\mathcal{U}$上连续可微，我们就称函数 f 在 $\mathcal{U}$上二阶连续可微。这里，我们将 f' 的导数记作 f''。以此为基础，对 $k \in \mathbb{N}$ 归纳定义在 $\mathcal{U}$ k上 f阶连续可微函数的概念。我们将所有在 $\mathcal{U}$ k 上 f阶连续可微的函数 $X \longrightarrow Y$：$\mathcal{C}^k$组成的集合记作 $\mathcal{C}^k(\mathcal{U}, Y)$。最后，我们把在 $\mathcal{U}$ 上无穷次可微的函数定义为满足下列条件的函数 f：

$$f \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\mathcal{U}, Y) =: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, Y) \tag{178}$$

成立。下文中，我们也将 $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, Y)$的元素简称为光滑函数。

如此定义的 $\mathcal{U}$ k 次连续可微函数的概念，乍看之下可能相当抽象。不过，对于形如 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的函数，这一概念在某种意义上与实分析中熟悉且直观的 $\mathcal{U}$ k 次连续可微函数的定义一致。在实分析中，开集上的 $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ k 次连续可微函数 f 是归纳定义的：它是一个 $(k-1)$ 次连续可微函数，并且其 $(k-1)$ 阶导数 $f^{(k-1)}$ 满足以下表达式：

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f^{(k-1)}(x+t) - f^{(k-1)}(x)}{t} =: f^k(x) \tag{179}$$

对所有 $x \in \mathcal{U}$ 均存在，并且函数 $f^k : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ 将每个 $x \in \mathcal{U}$ 映射到函数值 $f^k(x)$，且该函数是连续的。泛函分析中的定义与实分析中熟悉的 $\mathcal{U}$ k 次连续可微函数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的定义在何种意义上于 $k = 1$ 情形下相一致？以下定理给出了答案：

定理 5.2。 设 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续函数。那么下列命题等价：

i f 在 $\mathcal{U}$ 上按泛函分析的意义连续可微，即 f' 存在且连续。

ii) f 在 $\mathcal{U}$ 上按实分析的意义连续可微，即 $f^{(1)}$ 存在且连续。

此外，还可以将函数 f'与函数 $f_{(1)}$对应起来。

证明。 我们首先假设函数 f'和 $f_{(1)}$存在，并证明在这种情况下可以将二者相互对应起来。为此，我们先断言，可以将集合 $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 与集合 $\mathbb{R}$ 对应起来。我们的意思是， $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 中的每个元素都与 $\mathbb{R}$ 中的一个元素一一对应，反之亦然。因此，我们要寻找一个映射

$$\mathcal{J} : \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{180}$$

具有这些性质

a) $\mathcal{J}(A) = \mathcal{J}(B) \implies A = B$ für alle $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

b) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\mathcal{J}(A) = a$,

因为这些性质恰好编码了这样的要求：集合$\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$与 $\mathbb{R}$ 之间存在一一对应。这样的映射可能是什么样的呢？一种自然的选择 $\mathcal{J}$ 由以下观察给出：我们知道，由于线性，映射 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$由其对元素 $1 \in \mathbb{R}$ 的作用唯一确定。 $A(1) = a \cdot 1 = a$成立，其中 $a \in \mathbb{R}$。对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$同样有

$$A(\lambda) = A(\lambda \cdot 1) = \lambda \cdot A(1) = a \cdot \lambda, \tag{181}$$

也就是说，我们可以将 A 与 a 识别。于是，对映射 $\mathcal{J}$ 的一个显然且自然的选择由下式给出

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \mathcal{J}(A) = a \ \ mit \ A(1) = a. \end{aligned} \tag{182}$$

为看出如此定义的映射满足上述两个性质，我们首先注意到，每个 $a \in \mathbb{R}$ über

$$\lambda \longmapsto a \cdot \lambda =: A(\lambda) \quad \forall \lambda \tag{183}$$

定义了一个线性且连续的映射，根据构造有 $A(1) = a$ 成立。连续性可明确地由下述事实看出：对于所有 $\epsilon > 0$，我们都能找到一个 $\delta > 0$，满足 $\delta < \frac{\epsilon}{|a|}$，从而对于所有 $\lambda, \rho \in \mathbb{R}$ 都有

$$|A(\lambda) - A(\rho)| = |a \cdot \lambda - a \cdot \rho| = |a| \cdot |\lambda - \rho| < |a| \cdot \delta < \epsilon \tag{184}$$

成立。因此，对于每个 $a \in \mathbb{R}$，我们都可以找到一个算子 $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$，使得 $\mathcal{J}(A) = a$ 成立，这就表明了上述性质 *b)*。进一步，由映射 $\mathcal{J}$ 的定义立即可得，上述性质 *a)* 得以满足，从而 $\mathcal{J}$ 实际上表示一个一一映射。

因此，现在我们可以用自然的方式将集合 $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 与 $\mathbb{R}$ 视为相同。结合这一观察、定理 5.1. 以及例 5.1.，我们现在可以将定义在 $\mathcal{U}$ 上的函数 f' 与定义在 $\mathcal{U}$ 上的函数 $f_{(1)}$ 相互对应，反之亦然。事实上，设 $f'(x)$ 是 f 在点 $x \in \mathcal{U}$ 处的弗雷歇导数，并且 $f^{(1)}(x)$ 表示函数 f 在点 $x \in \mathcal{U}$ 处按照实分析中定义的 1. 阶导数，那么根据定理 5.1.，我们知道 $f'(x)$ 是 f 的盖托微分。进一步，根据例 5.1.，我们知道 f 的盖托微分具有如下性质

$$f'(x,h) = f'(x)(h) = f^{(1)}(x) \cdot h \quad \forall h \in \mathbb{R} \tag{185}$$

满足，即有

$$\mathcal{J}(f'(x)) = f^{(1)}(x). \tag{186}$$

因此，我们可以将 $f' \colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 与函数 $f^{(1)} \colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ 等同起来，方法是对所有 $x \in \mathcal{U}$，令 $f'(x)$ 等于 $f^{(1)}(x)$。

接下来我们注意到，根据例 5.1.，f' 的存在性蕴含 $f_{(1)}$ 的存在性。反向推导如下：设给定 $x \in \mathcal{U}$。首先利用 $f^{(1)}(x) \in \mathbb{R}$ 定义线性连续算子 $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$，其定义为 $f'(x)(\lambda) := f_{(1)}(x) \cdot \lambda$。根据例 2.7，它就是 f 的盖托微分。进一步，对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，根据 $f^{(1)}(x)$ 的定义

$$\begin{aligned} \frac{|f(x+\lambda) - f(x) - f'(x)(\lambda)|}{|\lambda|} &= \left| \frac{f(x+\lambda) - f(x) - f^{(1)}(x) \cdot \lambda}{\lambda} \right| \\ &= \left| \frac{f(x+\lambda) - f(x)}{\lambda} - f^{(1)}(x) \right| \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{187}$$

für $|\lambda| \longrightarrow 0$ 是。由此可知，f 在点 $x \in \mathcal{U}$ 处 Fréchet 可微。

因此只需证明， f'连续当且仅当 $f_{(1)}$连续。为说明这一点，我们考察定义在 $\mathcal{L}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ 上的算子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$。对于任意满足 $A(1) = a$ 的$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$，有

$$\begin{aligned}\|A\|_{\mathcal{O}} &= \sup\left\{\frac{|A(\lambda)|}{|\lambda|}\ \middle|\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{|a|\cdot|\lambda|}{|\lambda|}\ \middle|\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0\right\} \\ &= |a| = |\mathcal{J}(A)|,\end{aligned} \tag{188}$$

也就是说， $|\mathcal{J}(A)| = \|A\|_{\mathcal{O}}$。此外，根据 $\mathcal{J}$的定义很容易看出， $\mathcal{J}$ 是一个线性映射。因此可得

$$\begin{aligned}&(\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |\lambda - \rho| < \delta \implies |f^{(1)}(\lambda) - f^{(1)}(\rho)| < \epsilon) \\ \iff &(\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |\lambda - \rho| < \delta \implies |\mathcal{J}(f'(\lambda)) - \mathcal{J}(f'(\rho))| < \epsilon) \\ \iff &(\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |\lambda - \rho| < \delta \implies |\mathcal{J}(f'(\lambda) - f'(\rho))| < \epsilon) \\ \iff &(\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |\lambda - \rho| < \delta \implies \|f'(\lambda) - f'(\rho)\|_{\mathcal{O}} < \epsilon),\end{aligned} \tag{189}$$

这最终表明，在 $k = 1$ 的情况下，这两个定义等价。请注意，我们也可以利用这一结果，为在此处使用看似抽象的算子范数提供依据。在下文中，我们将经常使用这一识别。

□

既然我们已经说明了函数 $f : X \longrightarrow Y$ 的可微性是什么意思，接下来简要引入函数 f 的偏导数这一概念；这个概念对我们之后的讨论很有用。该函数具有形式$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 。此外，在下文中，我们将所有形如 $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 的函数统称为欧几里得函数。

定义 5.5。 设 $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个方向可微函数，且 $x =(x^1, ..., x^m) \in \mathbb{R}^m$。记 $f(x) =: f(x^1, ..., x^m)$。那么，对于 $i \in \{1, ..., m\}$， f 在点 x处的第 i个偏导数定义为

$$\partial_i f(x) := f'(x, e_i), \tag{190}$$

其中， $e_i \in \mathbb{R}^m$由 $e_i = (\delta_i^1, ..., \delta_i^m)$ 定义，且

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{191}$$

它们称为标准单位向量。集合 $\{e_1, ..., e_m\}$ 称为 $\mathbb{R}^m$ 的标准基，并构成 $\mathbb{R}^m$的一组基。

设 $x = (x^1, ..., x^m) \in \mathbb{R}^m$。对于形如 $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 且满足以下条件的可微函数，

$$f(x) = f(x^1, ..., x^m) = (f^1(x^1, ..., x^m), ..., f^n(x^1, ..., x^m)) = (f^1(x), ..., f^n(x)) \tag{192}$$

我们可以利用刚定义的偏导数进一步研究函数 $f'(x)$。为此，我们首先计算所谓的（依赖于基的）

函数 $f'(x)$ 的分量。为此，设 $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一组基，且 $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基。对于 $i \in \{1, ..., m\}$，有

$$f'(x)(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j(x) \cdot w_j = f'(x, v_i). \tag{193}$$

若我们分别为 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 选取 $\mathbb{R}^m$ 的标准基和 $\mathbb{R}^n$的标准基，则有

$$f'(x)(v_i) = f'(x, v_i) = \partial_i f(x) = (a_i^1(x), ..., a_i^n(x)). \tag{194}$$

根据 $f'(x, v_i)$ 的定义、关于 $\mathbb{R}^n$ 中标准拓扑的收敛性（注 4.1.），以及方程 (192)，可知在这种情况下

$$a_i^j(x) = \partial_i f^j(x) \tag{195}$$

成立。对于一般的 $y = \sum_{i=1}^m y^i \cdot v_i =$ $(y^1, ..., y^m)$，则有

$$\begin{aligned} f'(x)(y) &= \sum_{i=1}^{m} y^i \cdot f'(x)(v_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \partial_i f^j(x) \cdot y^i \right) \cdot w_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \partial_i f^1(x) \cdot y^i, ..., \sum_{i=1}^{m} \partial_i f^n(x) \cdot y^i \right) \\ &= y \cdot (J_f(x))^T. \end{aligned} \tag{196}$$

在最后一个方程中，$J_f(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$是一个实数（$n \times m$）矩阵，其分量为 $J_f(x)_i^j = \partial_i f^j(x)$，对所有 $i \in \{1, ..., m\}$和 $j \in \{1, ..., n\}$均成立；运算 $\cdot$ 对应于通常的矩阵乘法，而 $\cdot^T$ 表示转置运算，即将矩阵的行与列互换。

矩阵 $J_f(x)$ 通常也称为 f 在点 x 处的雅可比矩阵，并记作 $f'(x)$。若 f 是一个在点 $x \in \mathbb{R}^m$ 处可微的欧几里得函数，那么借助雅可比矩阵 $J_f(x)$，我们显然能够轻松计算所有 $y \in \mathbb{R}^m$ 对应的表达式 $f'(x)(y)$。

最后，我们还要探讨可微性概念对于复合欧几里得函数的一项重要性质。为此，我们先定义一般函数复合的概念。

定义 5.6. 设 X、Y、Z 为任意集合，且 $f\colon X \longrightarrow Y$ 和 $g\colon Z \longrightarrow X$ 是两个函数。那么，我们将函数复合 $f \circ g$ 理解为具有如下形式的函数 $Z \longrightarrow Y$，定义为

$$(f \circ g)(t) := (f(g(t)) \quad \forall t \in Z. \tag{197}$$

下面的定理给出了关于复合欧几里得函数的全微分的一条重要计算法则。紧随定理之后的证明部分在一定程度上参考了 [9]。

定理 5.1。 设 $f=(f^1、...、f^n)$: $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$和 $g=(x^1、...、x^m)$: $\mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m$是两个连续函数。我们假设， g在点 $y=(y^1、...、y^l) \in \mathbb{R}^l$处以及$f$ 在点 $g(y) \in \mathbb{R}^m$ 处连续可微。我们考察函数复合

$$\begin{aligned} z := f \circ g : \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\longmapsto (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x^1(y), ..., x^n(y)). \end{aligned} \tag{198}$$

于是， z 在点 $y \in \mathbb{R}^l$ 处可微，并且在点 y处， z的雅可比矩阵为

$$J_z(y) = J_f(g(y)) \cdot J_g(y). \tag{199}$$

这里， $\cdot$ 在(199) 中仍表示矩阵乘法。

证明。 由于 $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 在点 $x=g(y) \in \mathbb{R}^m$ 处关于 $y \in \mathbb{R}^l$ 连续可微，因此存在一个 $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$以及一个映射 $r_x: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$，使得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + r_x(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^m \tag{200}$$

mit

$$\frac{\|r_x(h)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|h\|_{\mathbb{R}^m}} \longrightarrow 0 \qquad f\ddot{u}r \ \|h\|_{\mathbb{R}^m} \longrightarrow 0 \tag{201}$$

成立。类似地，由 $g: \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $y \in \mathbb{R}^l$处连续可微可知，存在一个 $g'(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$以及一个 $r_y: \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ，使得

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)(k) + r_y(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}^l \tag{202}$$

mit

$$\frac{\|r_y(k)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|k\|_{\mathbb{R}^l}} \longrightarrow 0 \qquad f\ddot{u}r \ \|k\|_{\mathbb{R}}^l \longrightarrow 0 \tag{203}$$

成立。我们证明 $z = f \circ g$ 在点 $y \in \mathbb{R}^l$ 处的可微性。为此，我们对任意的 $k \in \mathbb{R}^l$

$$\begin{aligned} z(y+k) &= f(g(y+k)) \\ &= f(g(y)+u), \qquad u := g(y+k) - g(y) \\ &= f(x+u) \\ &= f(x) + f'(x)(u) + r_x(u) \\ &= (f \circ g)(y) + f'(g(y))(g(y+k) - g(y)) + r_x(u) \\ &= z(y) + f'(g(y))(g(y+k)) - f'(g(y))(g(y)) + r_x(u) \\ &= z(y) + f'(g(y))(g(y) + g'(y)(k) + r_y(k)) \\ &\quad - \ f'(g(y))(g(y)) + r_x(u) \\ &= z(y) + f'(g(x))(g(y)) - f'(g(y))(g(y)) + f'(g(y))(g'(y)(k)) \\ &\quad + \ f'(g(y))(r_y(k)) + r_x(u) \\ &= z(y) + (f'(g(y)) \circ g'(y))(k) + \big(f'(g(y))(r_y(k)) + r_x(u)\big). \end{aligned} \tag{204}$$

注意，由引理 3。1。 和注 4。2。 可知，$(f'(g(y)) \circ g'(y)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^n)$。还需证明，对于由下式定义的映射 $\hat{r}_y : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\hat{r}_y(k) := f'(g(y))(r_y(k)) + r_{g(y)}(g(y+k) - g(y)) \quad \forall k \in \mathbb{R}^l \tag{205}$$

成立,

$$\frac{\|\hat{r}_y(k)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|k\|_{\mathbb{R}^l}} \longrightarrow 0 \tag{206}$$

对于 $\|k\|_{\mathbb{R}^l} \longrightarrow 0$ 成立。注意，由算子范数的定义， $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$在 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 上直接推出，对于 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\|A(h)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|A\|_{\mathcal{O}} \cdot \|h\|_{\mathbb{R}^m} \quad \forall h \in \mathbb{R}^m \tag{207}$$

成立。因此，对于 $k \neq \mathbf{0}$

$$0 \leq \frac{\|\hat{r}(k)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|k\|_{\mathbb{R}^l}} \leq \frac{\|f'(g(y))\|_{\mathcal{O}} \cdot \|r_y(k)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|k\|_{\mathbb{R}^l}} + \frac{\|r_x(u)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|k\|_{\mathbb{R}^l}}. \tag{208}$$

右侧的第一项当 $\|k\|_{\mathbb{R}^l} \longrightarrow 0$ 时收敛于 0。若能证明第二项当 $\|k\|_{\mathbb{R}^l} \longrightarrow 0$ 时也收敛于 0，则整个右侧便收敛于 0。我们注意到， $u = g(y+k) - g(y) = g'(y)(k) + r_y(k)$。进一步，由

$$\frac{\|r_y(k)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|k\|_{\mathbb{R}^l}} \longrightarrow 0 \quad \textit{für } \|k\|_{\mathbb{R}^l} \longrightarrow 0, \tag{209}$$

可知存在一个 $\delta > 0$ ，使得

$$\|r_y(k)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|k\|_{\mathbb{R}^l} \quad \forall k \in \mathbb{R}^l \quad mit \ \|k\|_{\mathbb{R}^l} < \delta \tag{210}$$

成立。由 r_x 的定义可知,

$$\|r_x(u)\|_{\mathbb{R}^n} = \|u\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\psi(u)\|_{\mathbb{R}^n} \tag{211}$$

其中 $\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $\|\psi（u）\|_{\mathbb{R}^m} \longrightarrow 0$ ，对于 $\|u\|_{\mathbb{R}^m} \longrightarrow 0$。但由此可得，对于$\|k\|_{\mathbb{R}^l} < \delta$

$$\begin{aligned}
\|r_x(u)\|_{\mathbb{R}^n} &= \|r_x(g'(y)(k + r_y(k)))\|_{\mathbb{R}^n} \\
&= \|g'(y)(k) + r_y(k)\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\psi(g'(y)(k) + r_y(k))\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \left(\|g'(y)\|_{\mathcal{O}} \cdot \|k\|_{\mathcal{R}^l} + \|r_y(k)\|_{\mathbb{R}^m} \right) \cdot \|\psi(g(y+k) - g(y))\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \|k\|_{\mathbb{R}^l} \left(\|g'(y)\|_{\mathcal{O}} + 1 \right) \cdot \|\psi(g(y+k) - g(y))\|_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned} \tag{212}$$

注意，由于 g 的连续性以及范数收敛的定义，可以立即推出，对于 $\|k\|_{\mathbb{R}^l} \longrightarrow 0$， $\|g(y+k) - g(y)\|_{\mathbb{R}^m} \longrightarrow 0$ 也成立。因此， $\eta(k) := (\|g'(y)\|_{\mathcal{O}} + 1) \cdot \|\psi(g(y+k) - g(y))\|_{\mathbb{R}^n}$ 是一个正函数，并且对于 $\|k\|_{\mathbb{R}^l} \longrightarrow 0$ ，有 $\eta(k) \longrightarrow 0$ 。由此可知，(208)中的最后一项也

当 $\|k\|_{\mathbb{R}^l} \longrightarrow 0$ 趋于0时收敛到0，这最终表明 z 在 y 上可微。

还需证明，相对于规范标准基，表示 $J_z(y)$ 的 $z'(y)$ 矩阵确实具有所需的形式 $J_f(g(y)) \cdot J_g(y)$。为此，分别设 $\{e_1, ..., e_l\} \subseteq \mathbb{R}^l$、$\{v_1, ..., v_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ 和 $\{w_1, ..., w_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^l$、$\mathbb{R}^m$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的规范标准基。由上面的计算 $z'(y) = f'(g(y)) \circ g'(y)$ 以及（196）可得该结论，因为对任意 $h = \sum_{i=1}^{l} h^i e_i \in \mathbb{R}^l$，均有

$$\begin{aligned}
z'(y)(h) &= \sum_{i=1}^{l} h^i \cdot z'(y)(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{l} h^i \cdot f'(g(y))(g'(y)(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{l} h^i \cdot f'(g(y)) \Big(\sum_{j=1}^{m} \partial_i g^j(y) \cdot v_j \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} h^i \cdot \partial_i g^j(y) \cdot f'(g(y))(v_j) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} h^i \cdot \partial_i g^j(y) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} \partial_j f^k(g(y)) \cdot w_k \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{l} \Big(\sum_{j=1}^{m} \partial_i g^j(y) \cdot \partial_j f^k(g(y)) \Big) \cdot h^i \Big) \cdot w_k \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{l} \Big(\sum_{j=1}^{m} \partial_i g^j(y) \cdot \partial_j f^1(g(y)) \Big) \cdot h^i, ..., \sum_{i=1}^{l} \Big(\sum_{j=1}^{m} \partial_i g^j(y) \cdot \partial_j f^n(g(y)) \Big) \cdot h^i \Big) \\
&= h \cdot (J_z(y))^T. \qquad (213)
\end{aligned}$$

然而，由此可得

$$\begin{aligned}
J_z(y)_i^k &= \Big(\sum_{j=1}^{m} \partial_i g^j(y) \cdot \partial_j f^k(g(y)) \Big) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} J_g(y)_i^j \cdot J_f(g(y))_j^k \Big), \qquad (214)
\end{aligned}$$

根据矩阵乘法的定义，由此可得所述结论。 □

注释 5.1。请注意，在刚才讨论的定理的第一部分中，空间 $\mathbb{R}^m$、$\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^l$ 也可以分别由更一般的赋范空间 $(X, \|\cdot\|_X)$、$(Y, \|\cdot\|_Y)$ 以及 $(Z, \|\cdot\|_Z)$ 替代。该更一般表述的证明与定理 51第一部分的证明类似。

前面的定理给出了关于 $l = n = 1$ 的以下重要特殊情形：

定理 5.3. 设 $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ 和 $g = (x^1, ..., x^m)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是两个连续函数。我们假设 g 在点 $t \in \mathbb{R}$ 处连续可微，且 f 在点 $g(t) \in \mathbb{R}^m$处连续可微。我们考虑函数复合

$$\begin{aligned} z := f \circ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(x^1(t), ..., x^m(t)). \end{aligned} \tag{215}$$

那么， z 在点 $t \in \mathbb{R}$ 处可微，并且有

$$z'(t) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i f(x^1(t), ..., x^n(t)) \cdot (x^i)'(t). \tag{216}$$

注意，对于所有 $i \in \{1, ..., m\}$，函数 x^i 都是形如 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$的函数，并且根据定理 5.2. z' 和 $z^{(1)}$，以及（$x^{(i)}$）′ 和（x^i）$^{(1)}$ 对我们而言是同义词。还要注意，根据注释4.1.， g 的可微性意味着对于所有 $i \in \{1, ..., m\}$， x^i 的可微性。

证明。可直接由前面的定理得出（另见（213））。

□

推论 5.1. 结合注释5.1.，利用定理5.1.中的多维链式法则，可以证明：对于 k, $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，两个 $\mathcal{C}^k$ 型函数的复合仍然是一个$\mathcal{C}^{min\{k,l\}}$ 型函数，或者更形式化地说：设 X、Y、Z 为赋范空间，并设 f： $X \longrightarrow Y$ 和 g： $Z \longrightarrow X$ 为两个函数。此外，假设$f \in \mathcal{C}^k$（X， Y） 和 $g \in \mathcal{C}^l$（Z， X）。那么可得（$f \circ g$）$\in \mathcal{C}^{min\{k,l\}}$ （ Z， Y ） 。

证明。 利用定理 5。1，备注 5。1。 以及 [3]。 □

6 有限维流形与张量丛

在前面的章节中，我们已经阐明了拓扑空间和向量空间的含义，现在终于可以来探讨对我们至关重要的流形这一概念了。

6.1 拓扑流形

为了尽可能简洁地给出（拓扑）流形的定义，我们先定义同胚这一概念。

定义 6.1. 设 (X,τ) 和 (Y,σ) 是两个拓扑空间。再设 $f{:}X \longrightarrow Y$ 是一个映射。若满足以下条件，我们称 f 为同胚:

i) f *ist injektiv, d.h. für* $x,y \in X$ *mit* $f(x)=f(y)$ *folgt, dass* $x=y$ *ist.*

ii) f 是满射，即对所有的 $y \in Y$，都存在一个 $x \in X$，使得 $f(x)=y$ 是*t.*

iii) f 以及与 f 对应的逆映射 f^{-1} 关于拓扑 τ 和 σ 是连续的。

如果两个拓扑空间之间存在同胚，则称这两个空间同胚。

成为同胚的前两个条件再次意味着，f 是一个一一映射，即每个元素 $x \in X$ 都通过 f 唯一对应于一个元素 y，反之亦然。条件 *iii)* 确保了这种对应是连续的。

根据定理 3.3. ，我们可以将对 f 和 f^{-1} 的连续性要求理解为： X中彼此接近 的点，在 Y 中也必须彼此接近 ，反之亦然。还需指出，条件 *i)* 和 *ii)* 保证了逆映射 f^{-1} 的存在。

通俗地说，同胚 $f:\ X \longrightarrow Y$ 表示将拓扑空间 X 连续变形为拓扑空间 Y，而两个拓扑空间 X 和 Y 通俗地说当且仅当可以通过连续变形相互转化时才是同胚的。

现在，我们可以借助同胚的概念来解释流形的概念。

定义 6.2. 设$(\mathcal{M},\tau)$ 是一个拓扑豪斯多夫空间。再设给定向量空间 $\mathbb{R}^d$，其为 $\mathbb{R}$ 维，且配备由标准内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}$ 诱导的拓扑 $\tau_{\mathbb{R}^d}$，其中 $d \in \mathbb{N}$ 。如果对每个 $p \in \mathcal{M}$ ，都存在一个 $\mathcal{U} \in \tau$ ，满足 $p \in \mathcal{U}$ ，使得配备由 τ 诱导的子空间拓扑的 $\mathcal{U}$ 同胚于一个开集 $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d$ ，其中 $\mathcal{V}$ 类似地配备由 $\tau_{\mathbb{R}^d}$ 诱导的子空间拓扑，则称$(\mathcal{M},\tau)$ 为 d 维拓扑流形。也就是说，对每个 $p \in \mathcal{M}$ ，都存在一个形如以下的同胚:

$$\phi=(x^1,...,x^d):\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d. \tag{217}$$

也可以说， d 维流形局部同胚于配备标准几何的 $\mathbb{R}^d$。元组$(\mathcal{U}, \phi)$ 称为 $\mathcal{M}$ 的坐标图，其中包含点 $p \in \mathcal{M}$。此外，对于 $q \in \mathcal{U}$ 和 $i \in \{1, ..., d\}$，我们将数 $x^i(q)$ 称为 q 关于坐标图 $\mathcal{U}$ 的第 i 个坐标。

因此， d维拓扑流形是一种特殊的拓扑空间，在局部“看起来”像配备了标准几何的欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$。定义中要求的豪斯多夫性质是一项技术性要求，通常对流形提出这一要求，以便能够对它们进行恰当的分类。

此外，根据上面的定义，我们可以在某种意义上将 d维拓扑流形的一个坐标图$(\mathcal{U}, \phi)$视为开放集合 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的一种地图。基于这种理解，我们引入拓扑流形的图册这一直观概念：

定义 6.3. 设$(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 d维拓扑流形，且 $\mathcal{I}$ 是一个指标集。我们将集合

$$\mathcal{A} := \{(\mathcal{U}_i, \phi_i) \mid \forall i \in \mathcal{I} : \mathcal{U}_i \in \tau,\ \phi_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \phi(\mathcal{U}_i) \subseteq \mathbb{R}^d \ Homöomorphismus\} \tag{218}$$

称为流形 $\mathcal{M}$的一个图册，若

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_i \tag{219}$$

成立。

直观地说， d维拓扑流形的图册就是一组坐标图，它们共同覆盖整个流形。

我们来看一个简单的拓扑流形例子：

例6.1。 单位球在 $\mathbb{R}^3$ 中的球面是一个直观而简单的二维流形。它由拓扑空间 $(\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2})$所刻画。其中，集合 $\mathbb{S}^2$定义为

$$\mathbb{S}^2 := \{p = (p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = 1\} \tag{220}$$

而拓扑 $\tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2}$ 表示相对于 $\mathbb{R}^3$ 中标准拓扑 $\tau_{\mathbb{R}^3}$ 的子空间拓扑，即

$$\tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2} := \{\mathcal{U} \cap \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{S}^2 \mid \mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{R}^3}\}. \tag{221}$$

我们现在先证明拓扑空间 $(\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2})$ 是一个豪斯多夫空间。为此，设 p 和 q 是 $\mathbb{S}^2$ 中的两个点，且满足 $p \neq q$。将 $\mathbb{S}^2$ 视为 $\mathbb{R}^3$ 的子集后，我们可以分别将点 p和 q 看作 $\mathbb{R}^3$ 中的元素。

我们知道，赋予标准拓扑 $\tau_{\mathbb{R}^3}$的 $\mathbb{R}^3$是一个豪斯多夫空间。这是因为标准拓扑 $\tau_{\mathbb{R}^3}$ 是由度量所诱导的拓扑

$$d(p, q) := \|p - q\|_{\mathbb{R}^3} \tag{222}$$

。根据定理3.1.，可直接得出元组（$\mathbb{R}^3, \tau_{\mathbb{R}^3}$） 必定是一个豪斯多夫空间。

现在我们可以利用这一观察：由于对于 p 和 q（现将它们视为 $\mathbb{R}^3$中的元素），有 $p \neq q$，因此我们可以在 $\tau_{\mathbb{R}^3}$ 中找到开集 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$，使得 $p \in \mathcal{U}$、 $q \in \mathcal{V}$且 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$。

然而，根据拓扑的定义 $\tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2}$，现在有 $\mathcal{U} \cap \mathbb{S}^2$ 和 $\mathcal{V} \cap \mathbb{S}^2$ 属于 $\tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2}$。根据 p 和 q的选取，进一步有 $p \in \mathcal{U} \cap \mathbb{S}^2$、 $q \in \mathcal{V} \cap \mathbb{S}^2$ 以及$(\mathcal{U} \cap \mathbb{S}^2) \cap (\mathcal{V} \cap \mathbb{S}^2) = (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cap \mathbb{S}^2 = \emptyset$，因为 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$。

由此，我们在 $\tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2}$ 中找到了两个开集，可以用它们将点 p 和 q 分离，因此 $(\mathbb{S}^2$、$\tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2})$ 是一个豪斯多夫空间。

接下来我们必须为 $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}$ 构造一个图册 $(\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2})$ ：为此，我们先作如下观察：

由于 $(\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2})$ 是一个豪斯多夫空间，因此可推出， $\mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$ 与 $p \in \mathbb{S}^2$ 是关于 $\tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2}$ 的一个开集，因为根据豪斯多夫性质，对于每个 $q \in \mathbb{S}^2$与 $q \neq p$，存在一个集合 $\mathcal{W}_q \in \tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2}$，满足 $q \in \mathcal{W}_q$ 和 $p \notin \mathcal{W}_q$。有

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{p\} \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}} \mathcal{W}_q \tag{223}$$

并且由于对所有 $q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$ 都有 $\mathcal{W}_q \subseteq \mathbb{S}^2$，因此

$$\bigcup_{q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}} \mathcal{W}_q \subseteq \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}, \tag{224}$$

从而总体上可得两个集合相等。根据拓扑的定义，由此可知，集合 $\mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$ 必须是关于 $\tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2}$ 的一个开集。

借助这些知识，现在我们很容易找到两个开集，它们一方面覆盖集合 $\mathcal{S}^2$，另一方面同时也构成我们的坐标图区域。设

$$\mathcal{W} := \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \in \tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2} \tag{225}$$

und

$$\mathcal{Z} := \mathcal{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \in \tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2}. \tag{226}$$

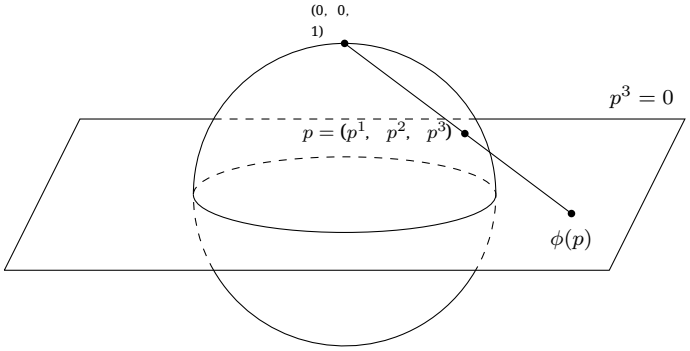
$\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{Z}$ 显然合起来覆盖整个 $\mathbb{S}^2$。现在我们在 $\mathcal{W}$ 上定义坐标映射

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (p^1, p^2, p^3) &\longmapsto \left(\frac{p^1}{1-p^3}, \frac{p^2}{1-p^3} \right) \end{aligned} \tag{227}$$

并在 $\mathcal{Z}$ 上定义坐标映射

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{Z} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (p^1, p^2, p^3) &\longmapsto \left(\frac{p^1}{1+p^3}, \frac{p^2}{1+p^3} \right). \end{aligned} \tag{228}$$

映射 ϕ 和 ψ 分别是从单位球面到 $\mathbb{R}^2$ 的立体投影。下图直观地展示了立体投影的几何意义。



现在可以证明，这两个立体投影 ϕ 和 ψ 是同胚 *[1]*。

流形概念之所以有用，是因为根据上述与 $\mathbb{R}^d$ 的相似性条件，我们可以将通常在 $\mathbb{R}^d$ 中发展起来的数学分析概念，推广到作为更一般框架的流形上。我们将在接下来的小节中详细探讨这种可推广性。

这种可推广性，尤其是将数学分析中已知的可微性概念推广到特定流形上的可能性，之后在引入测地线概念时还会发挥重要作用。事实上，正如我们将会看到的，要在流形上引入曲线的长度概念，需要先有一个可微性概念。

6.2 可微流形

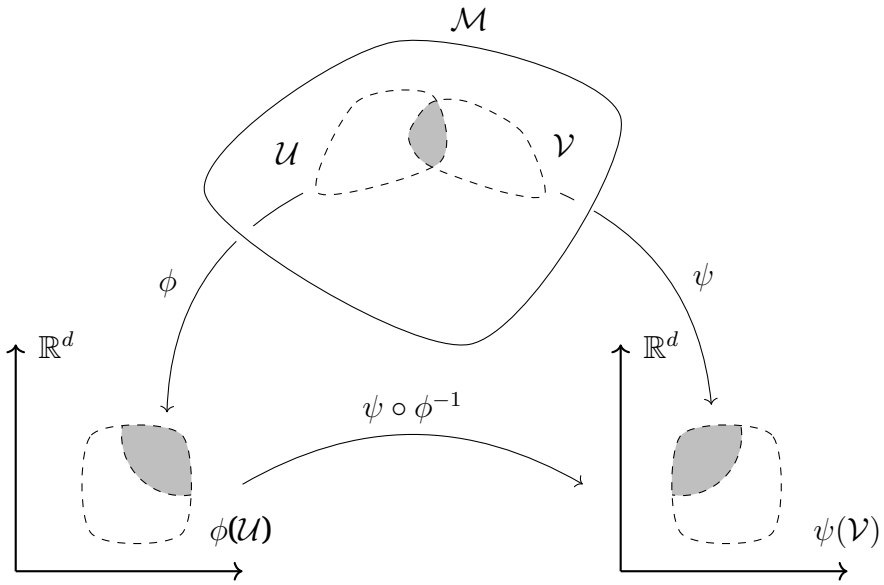
现在我们希望将 $\mathbb{R}^d$ 中的可微性概念推广到拓扑流形（$\mathcal{M}$, τ）上。为此，我们首先考察所谓坐标转换映射的概念。

定义 6.4。 设$(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 d维拓扑流形。此外，设$(\mathcal{U}, \phi)$和$(\mathcal{V}, \psi)$ 是两个坐标图，即 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V} \in \tau$和 ϕ: $\mathcal{V} \longrightarrow \phi(\mathcal{U})$、$\psi$: $\mathcal{V} \longrightarrow \psi(\mathcal{V})$ 是同胚。进一步假设 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$。那么，从坐标图$(\mathcal{U}, \phi)$ 到坐标图$(\mathcal{V}, \psi)$的坐标转换映射定义为映射

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}). \tag{229}$$

注意，映射 $\psi \circ \phi^{-1}$ 是一个从 $\mathbb{R}^d$ 的开子集到 $\mathbb{R}^d$ 的开子集的连续映射（见引理 3.1）。因此，我们可以研究坐标转换映射 $\psi \circ \phi^{-1}$ 是否可微。若映射 $\psi \circ \phi^{-1}$ 对于 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 是一个意义与前一章相同的 $\phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})k$次可微函数，那么我们称 $\psi \circ \phi^{-1}$ 为 k阶可微坐标变换。在$\psi \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})\ \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}))$ 的情况下，我们也将 $\psi \circ \phi^{-1}$ 简称为光滑坐标变换。

直观来看，什么是换图映射？为了对这一映射形成直观认识，我们来观察下面的图示，它展示了两个相互重叠的坐标图区域如何相互作用：



若将 $\phi(\mathcal{U})$ 和 $\psi(\mathcal{V})$ 视为重叠开集 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ 和 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ 的地图，那么借助换图映射 $\psi \circ \phi^{-1}$，我们可以将关于开集 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ 的地图从 $\phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ 切换为 $\psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$。通过这次换图，我们也会更换用于描述某个坐标图中的点（例如 $q \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$）的坐标。例如，若 $\phi = (x^1, ..., x^d)$ 且 $\psi = (y^1, ..., y^d)$，那么在换图 $\psi \circ \phi^{-1}$ 时，我们会从坐标 x^i 切换到坐标 y^j。

可微坐标图过渡映射这一概念引出了以下有用的定义：

定义 6.5. 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个 d 维拓扑流形，且 $(\mathcal{U}, \phi)$ 和 $(\mathcal{V}, \psi)$ 是 $\mathcal{M}$ 上的两个坐标图。对于 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，若它们的坐标过渡映射

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^d \tag{230}$$

und

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subseteq \mathbb{R}^d \tag{231}$$

是 k 次连续可微的，即 $(\psi \circ \phi^{-1}) \in \mathcal{C}^k(\phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})\ \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}))$ 以及 $(\phi \circ \psi^{-1}) \in \mathcal{C}^k(\psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})\ \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}))$。我们进一步规定，如果 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$，则称 $(\mathcal{U}, \phi)$ 和 $(\mathcal{V}, \psi)$ 自动是 $\mathcal{C}^\infty$-相容的，因为在这种情况下不存在可能违反可微性条件的坐标图过渡映射。

借助 $\mathcal{C}^k$-相容性，现在可以引入 k 阶可微图册的概念：

定义 6.6. 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个具有图册 $\mathcal{A}$ 的 d 维拓扑流形。再设 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 给定。若所有坐标图

在 $\mathcal{A}$ 中两两 $\mathcal{C}^k$-相容。进一步，在这种情况下，我们将三元组$(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 称为 d 维 k次可微流形。对于情形$k = \infty$，我们也将 $\mathcal{A}$称为光滑图册，并将$(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 简称为d维光滑流形。

我们来看一个可微流形的例子:

例6.2。 我们考察例6.1中已知的拓扑流形$(\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{R}^3,\mathbb{S}^2}, \mathcal{A}_{\mathbb{S}^2})$。它本身已经是一个光滑流形。为此，我们考察由 *[1]* 已知的立体投影 ϕ 和 ψ的逆映射，它们定义为

$$\phi^{-1}((x^1, x^2)) = \left(\frac{2 \cdot x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}, \frac{2 \cdot x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}, \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1} \right) \tag{232}$$

und

$$\psi^{-1}((y^1, y^2)) = \left(\frac{2 \cdot y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1}, \frac{2 \cdot y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1}, \frac{1 - (y^1)^2 - (y^2)^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1} \right). \tag{233}$$

现在我们必须证明坐标图过渡映射

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) \longrightarrow \psi(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) \tag{234}$$

und

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) \longrightarrow \phi(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) \tag{235}$$

是光滑映射。首先注意到，由例6.1中给出的 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{Z}$ 的定义可知，

$$\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} \tag{236}$$

成立。由此根据坐标映射 ϕ 和 ψ的定义可知，

$$\phi(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) = \psi(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \tag{237}$$

成立。现在我们来计算上述两个坐标转换映射。对于$(\psi \circ \phi^{-1})$，有

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \phi^{-1})((x^1, x^2)) &= \psi(\phi^{-1}((x^1, x^2))) \\
&= \psi\left(\left(\frac{2 \cdot x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}, \frac{2 \cdot x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}, \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1} \right) \right) \\
&= \left(\frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \right)
\end{aligned} \tag{238}$$

且对于 $\phi \circ \psi^{-1}$ 成立

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \psi^{-1})((y^1, y^2)) &= \phi(\psi^{-1}((y^1, y^2))) \\
&= \phi\left(\left(\frac{2 \cdot y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1}, \frac{2 \cdot y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1}, \frac{1 - (y^1)^2 - (y^2)^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + 1} \right) \right) \\
&= \left(\frac{y^1}{(y^1)^2 + (y^2)^2}, \frac{y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2} \right).
\end{aligned} \tag{239}$$

根据多元分析中已知的求导法则 *[13]*可知，在区域 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$ 上，这两个坐标图过渡映射确实是光滑映射。因此，已证明$(\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{R}^3,\ \mathbb{S}^2}, \mathcal{A}_{\mathbb{S}^2})$ 是一个光滑流形。

现在可以将数学分析或泛函分析中的概念引入刚才定义的可微流形。

因此，设 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 且 $(\mathcal{M},\ \tau,\ \mathcal{A})$ 是一个 d 维、 k 次可微流形。我们现在先说明，形如

$$f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{240}$$

的连续函数何时可以称为可微。请注意，何时可以称连续函数 $f:\ \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 可微并非完全显而易见，因为对于此前讨论过的可微函数，我们总是需要定义域和值域都具有向量空间结构，才能写出差商。

但是，对于现在讨论的函数 f，我们无法定义一个朴素的差商，因为一般而言， $\mathcal{M}$ 不具有向量空间结构。也就是说，形如 $\frac{f_{(p+t\cdot q)-f(x)}}{t}$ 的表达式起初并没有意义，因为对于 $p,\ \overline{q \in \mathcal{M}}$ 和 $t \in \mathbb{R}$， $p+t\cdot q$ 应该是什么并不明确；一般而言， $\mathcal{M}$ 上既没有定义加法 $+$，也没有定义数乘 $\cdot$。

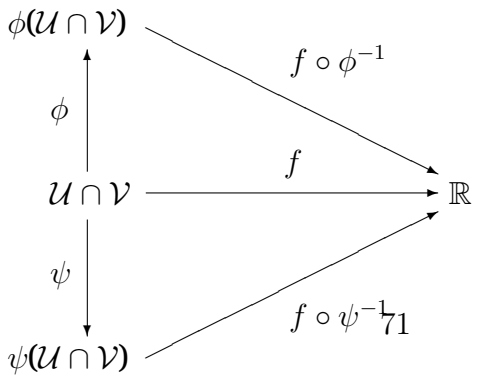
那么，我们如何解释连续函数 $f:\ \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$的可微性呢？思路是通过 k 次可微图册 $\mathcal{A}$ 中的坐标图来解释这类函数 f 的可微性。为此，设 $(\mathcal{U},\phi) \in \mathcal{A}$是 k 次可微图册 $\mathcal{A}$中的任意一个坐标图。我们考察函数

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{241}$$

由于 $\phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个开集（注意， ϕ 是一个坐标映射），因此我们可以按照 (162) 将函数 $f \circ \phi^{-1}$ 视为欧几里得函数，从而像通常那样考察其可微性。

现在的思路是：如果 $f \circ \phi^{-1}:\ \phi(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l次连续可微，我们就称 $f:\ \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为 l次连续可微的，其中 $l \in \{1,...,k\}$。但问题是，这样引入的函数 $f:\ \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的可微性概念是否定义良好。也就是说，我们必须考察这一可微性概念是否依赖于坐标图，或者说是否取决于坐标图 $(\mathcal{U},\phi) \in \mathcal{A}$ 的选取。

为此，设 $(\mathcal{V},\ \psi) \in \mathcal{A}$ 是另一张满足 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ 的坐标图。根据假设，关于坐标图 $(\mathcal{U},\ \phi)$， f 在开集 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ 上是 l 次连续可微的。我们必须证明，关于坐标图 $(\mathcal{V},\ \psi)$，函数 f 在 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}l$ 上也是 l 次连续可微的。我们考虑下面的图表：



.

根据上面的图表， $f \circ \psi^{-1}$ 也可以写作 s

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}). \tag{242}$$

由于 $(\mathcal{U}, \phi)$、$(\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}$ k 次可微图册，可得 $(\phi \circ \psi^{-1}) \in \mathcal{C}^k(\psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})\ \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}))$。此外，由于 $f \circ \phi^{-1}$ l 次连续可微，且 $l \leq k$，可得 $f \circ \psi^{-1}$ 同样是 l 次连续可微的。

请注意，流形的 k 次连续可微图册确保了对于 $l \leq k$， l 次连续可微函数这一概念是定义良好的。我们将所得结论总结为以下定义：

定义 *6.7.* 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d 维 k 次可微流形，满足 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，且 $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续函数。若函数 f l 在开集 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$ 上满足 $l \leq k$，并且相对于 $\mathcal{W}$ l 的坐标表示是 f 次连续可微的，则称其为 f l 次连续可微；也就是说，设 $(\mathcal{U}, \phi) \in \mathcal{A}$ 是任意一个满足 $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$ 的坐标图，那么 $f \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 k 次连续可微映射。我们用 $\mathcal{C}^l(\mathcal{W})$ 表示定义在 $\mathcal{W}$ 上的 l 次连续可微函数 $f : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的集合。若 $l = k = \infty$，则也简称函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{W})$ 为定义在 $\mathcal{W}$ 上的光滑（实值）函数。对于 $\mathcal{W} = \mathcal{M}$，这类函数也简称为光滑函数。

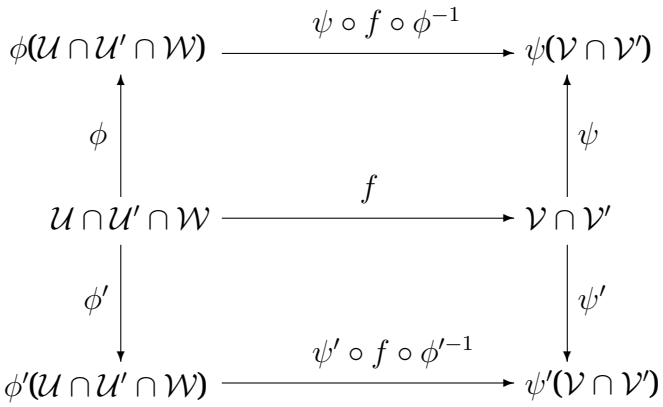
现在几乎可以类似地将这一概念推广到函数 $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$，其定义域为 k 阶可微流形 $\mathcal{M}$，值域为 $\mathcal{N}$。

定义 6.8。 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d 维 k 阶连续可微流形，设 $(\mathcal{N}, \sigma, \mathcal{B})$ 是一个 d' 维 k 阶连续可微流形。再设 $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ 是一个连续函数。如果具有如下形式的坐标表示

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{V})) \longrightarrow \psi(\mathcal{V}) \tag{243}$$

是 l 阶连续可微的，其中 $(\mathcal{U}, \phi)$ 是 $\in \mathcal{A}$，$(\mathcal{V}, \psi)$ 是 $\in \mathcal{B}$，且 $f^{-1}(\mathcal{V})$ 是 $\cap \mathcal{U} \neq \emptyset$。注意，由于 f 连续，集合 $f^{-1}(\mathcal{V})$ 是开集，因此 $\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{V})$ 也是开集。由于 ϕ 是一个同胚，因此集合 $\phi(\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{V}))$ 也是开集。我们将 l 阶连续可微函数 $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ 的集合记为 $\mathcal{C}^l(\mathcal{M}, \mathcal{N})$。当 $l = k = \infty$ 时，我们也称 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 为从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的光滑函数。

如上所述，借助下图很容易看出，这个可微性定义不依赖于 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 中坐标图的选择：



.

在上图中，$(\mathcal{U},\ \phi)$，$(\mathcal{U}',\ \phi')\in\mathcal{A}$，$(\mathcal{V},\ \psi)$，$(\mathcal{V}',\ \psi')\in\mathcal{B}$，其中$\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'\cap\mathcal{W}\neq\emptyset$、$\mathcal{V}\cap\mathcal{V}'\neq\emptyset$，且 $\mathcal{W}=f^{-1}(\mathcal{V}\cap\mathcal{V}')$。显然，函数 $\psi'\circ f\circ\phi'^{-1}$ 也可以写成

$$\psi'\circ f\circ\phi'^{-1}=(\psi'\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\phi'^{-1}). \tag{244}$$

由于 $\psi'\circ\psi^{-1}$ 和 $\phi\circ\phi'^{-1}$ 都属于 $\mathcal{C}^k$ 类，并且我们假设 $\psi\circ f\circ\phi^{-1}$ 属于 $\mathcal{C}^l$ 类，根据推论 5.1.，可知 $\psi'\circ f\circ\phi'^{-1}$ 在 $\phi'(\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'\cap\mathcal{W})$ 上也属于 $\mathcal{C}^l$ 类。由此还可知，刚刚定义的可微流形之间函数的连续可微性概念同样与坐标图的选取无关。

注释 6.1。 我们还要考察一类特殊的连续可微函数，这类函数在本书的引言中曾被提及。

i) 设 $(\mathcal{M}、\ \tau、\ \mathcal{A})$ 和 $(\mathcal{N}、\ \sigma、\ \mathcal{B})$ 是两个 k次连续可微的有限维流形，满足 $k\in\mathbb{N}\cup\infty$ 和 $f:\ \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$ 是定义在 $\mathcal{M}$ 上的 l次连续可微函数，并满足 $l\leq k$。如果 f 此外还是一个同胚，则称 f 为 $\mathcal{C}^l$- 微分同胚。在 $l=k=\infty$ 的情况下，我们还将 f 称为光滑微分同胚。

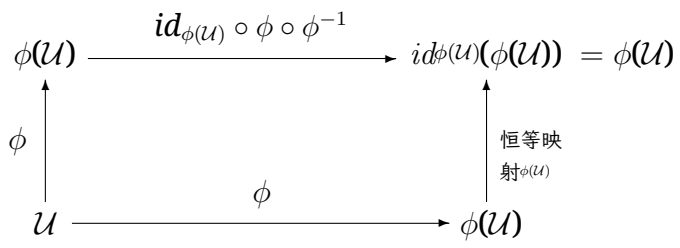
ii) 我们可以将赋予标准拓扑的 $\mathbb{R}^d$理解为具有图册

$$\mathcal{B}:=\{(\mathcal{V},id_{\mathcal{V}})\mid\mathcal{V}\quad offen\ bzgl.\ der\ Standardtopologie\} \tag{245}$$

其中，对于所有开集 $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^d$，映射 $id_{\mathcal{V}}$ 定义为

$$id_{\mathcal{V}}(y)=y\qquad\forall y\in\mathcal{V}. \tag{246}$$

那么，根据上述定义 6.8，坐标图 $(\mathcal{U},\phi)\in\mathcal{A}$ 的所有坐标映射 ϕ都是光滑映射。这一点可以通过下面的图表很容易地看出:



由于 $id_{\phi(\mathcal{U})} \circ \phi \circ \phi^{-1} = id_{\phi(\mathcal{U})}$ 显然是光滑映射，因此映射 ϕ也是光滑的。类似地，可以证明映射 ϕ^{-1} 同样是光滑映射。由于 ϕ 和 ϕ^{-1} 也都是同胚，因此光滑流形的坐标映射都是光滑微分同胚。

接下来，我们将讨论可微曲线 γ 的概念：$(a,\ b) \longrightarrow \mathcal{M}$，其中$(a,\ b) \subseteq \mathbb{R}$是 $a < b$，而$(\mathcal{M},\ \tau,\ \mathcal{A})$则是一个$d$维 k阶可微流形。

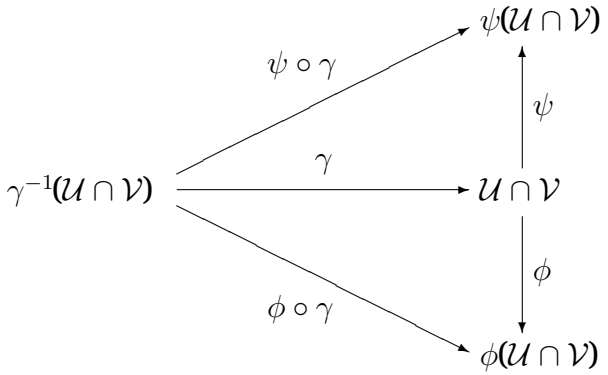
定义 6.9。 设$(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d维 k阶可微流形，并设 $\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathcal{M}$ 是定义在 $\mathcal{M}$上的连续曲线，其中开区间(a, b)赋有由 $\mathbb{R}$上的标准拓扑诱导的子空间拓扑，且 a、$b \in \mathbb{R}$和 $a < b$。若坐标表示 $l \leq k$，我们称该曲线为γ l阶连续可微：

$$\phi \circ \gamma : \gamma^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \phi(\mathcal{U}) \tag{247}$$

是l阶连续可微的。其中$(\mathcal{U}, \phi) \in \mathcal{A}$是一个坐标图，且 $\gamma((a, b)) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$。进一步注意，由于 γ 的连续性，集合 $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ 是(a, b) 上所定义的子空间拓扑中的一个开集；根据子空间拓扑的定义，$\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ 因此也是赋范空间$(\mathbb{R}, |\cdot|)$中的一个开集。当 $l = k = \infty$ 时，我们也称 l阶连续可微曲线为光滑曲线。我们用 $\mathcal{C}^l((a, b)\ \mathcal{M})$表示这类 l阶可微曲线的集合。

请注意，如下图表所示，这样定义的曲线可微性概念再次与坐标图的选择无关：

.



在上面的图表中，$(\mathcal{U},\ \phi)$，$(\mathcal{V},\ \psi) \in \mathcal{A}$与 $\gamma((a,\ b)) \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$。从图表中可以看出，函数 $\psi \circ \gamma$ 也可以写作

$$\psi \circ \gamma = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma). \tag{248}$$

由于根据假设，$\psi \circ \phi^{-1}$ 属于 $\mathcal{C}^k$ 类，并且我们假定$\phi \circ \gamma$ 属于 $\mathcal{C}^l$ 类，根据推论 5。1。，可知函数 $\psi \circ \gamma$ 在$\gamma^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$上必属于 $\mathcal{C}^l$ 类。由此可得，在足够高阶可微的流形上，曲线的可微性概念具有良定义性。

6.3 切向量与切丛

既然我们已经了解了如何将在数学分析和泛函分析中熟知的、针对可微流形之间的函数以及可微流形上的曲线的可微性概念进行推广，那么现在我们将讨论切向量的概念；切向量将在测量曲线长度时发挥重要作用。

正如我们马上就会看到的，我们需要用到刚才讨论的这些概念。下文假设可微流形 $(\mathcal{M},\ \tau,\ \mathcal{A})$ 是光滑流形。此外，除非另有说明，我们假设本节所讨论的所有曲线都是单射的或常值的。

为了引入切向量的概念，我们先考虑一条光滑单射曲线 $\gamma:(a,\ b)\ \longrightarrow\ \mathcal{M}$，其中 $a,\ b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$，以及一个光滑函数 $f:\ \mathcal{M}\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$，再取一点 $p\in\gamma((a,\ b))\ \subseteq\ \mathcal{M}$。我们现在关心的是函数 f 在点 p 沿方向 γ 如何变化，也就是说，我们想直观地计算函数 f 在点 p沿曲线 γ 方向的方向导数。该如何计算呢？思路是，我们先考虑连续函数

$$f\circ\gamma:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R} \tag{249}$$

考虑一个定义在开区间 (a,b) 上的实值函数。直观地说，函数 $f\circ\gamma$ 的意思是，我们只需在曲线 $\gamma((a,b))$ 上对函数 f 求值。设 $(\mathcal{U},\phi)$ 是一张坐标图，且 $p\in\mathcal{U}$。由于

$$f\circ\gamma=(f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\gamma) \tag{250}$$

因此，$f\circ\gamma$ 是一个在 p 处可微的函数。设 $\lambda_0\in(a,b)$ 是 (a,b) 中满足 $\gamma(\lambda_0)=p$ 的实数。那么，函数 f 在点 p 沿方向 γ 的方向导数定义为

$$X_{\gamma,p}f:=(f\circ\gamma)'(\lambda_0). \tag{251}$$

我们将算子 $X_{\gamma,p}:\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$ 称为点 p 沿方向 γ 的切向量。请注意，根据本节中所有曲线都是单射的或常值的这一假设，记号 $X_{\gamma,p}$ 没有歧义：若 γ 不是常值曲线，则只有一个 $\lambda_0\in(a,b)$ 满足 $\gamma(\lambda_0)=p$，因此我们可以将表达式 $X_{\gamma,\ p}f$ 唯一地转换为表达式 $(f\circ\gamma)'(\lambda_0)$。另一方面，若曲线是常值曲线，则无论选择哪个满足 $\gamma(\lambda)=p$ 的 $\lambda\in(a,b)$ 都无关紧要，因为此时 $f\circ\gamma$ 是一个常值函数，因此对所有 $\lambda\in(a,b)$ 都有 $(f\circ\gamma)'(\lambda)=0$。

原则上，我们当然仍然能够将上述切向量的概念推广到非单射曲线上。例如，设 $\eta:(a,\ b)\ \longrightarrow\mathcal{M}$ 是一条曲线，使得存在两个不同的数 $\lambda_1,\ \lambda_2\in(a,\ b)$，满足 $\eta(\lambda_1)=\eta(\lambda_2)=p\in\mathcal{M}$。在这种情况下，如果要构造 η 在点p 处的切向量，就必须在切向量的记号中额外注明曲线参数，以确保切向量的概念定义良好。具体来说，设 $X_{\eta,\ \lambda_i,\ p}:\ \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\ \longrightarrow\mathbb{R}$，其中 $i\in\{1,2\}$ 定义为

$$X_{\eta,\lambda_i,p}f=(f\circ\eta)'(\lambda_i), \tag{252}$$

那么很容易看出，一般而言 $X_{\eta,\ \lambda_1,\ p} \neq X_{\eta,\ \lambda_2,\ p}$ 成立，这也说明了在切向量的记号中额外注明曲线参数是合理的。不过，由于下文主要讨论单射曲线，而这对本文而言已完全足够，因此我们将在曲线的切向量记号中省略曲线参数。

现在我们再次考察表达式 (251)，那么直观上应该很容易理解，为什么我们将 (251) 的右侧称为 f 在p 点沿 γ 方向的方向导数，因为表达式 $(f \circ \gamma)'$（我们仍将其视为函数 $(f \circ \gamma)^{(1)}$）描述了 f 在 γ（a，b）上的函数值变化。不过，可能不那么显而易见的是，为什么将表达式$X_{\gamma,\ p}$ 称为切向量。

暂且将流形 $\mathcal{M}$ 视为嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的二维光滑曲面（这种理解并非毫无根据，例 6.1. 便说明了这一点），那么直观上我们自然会认为，点 $p \in \mathcal{M}$ 处的切向量 $\mathcal{X}_p$ 是点 p 处的一个箭头，并且在该点与 $\mathcal{M}$ 相切。也就是说，点 p 处所有切向量构成的集合会在点 p 处线性逼近流形 $\mathcal{M}$ 。这个关于切向量 $\mathcal{X}_p$ 的直观几何图像，与刚刚引入的切向量 $X_{\gamma,\ p}$ 这一概念有何联系？毕竟，$X_{\gamma,\ p}$ 是一个微分算子，而不是几何箭头。

首先注意到，$X_{\gamma,p}$ 与几何箭头类似，具有一个定向或方向。因此，$X_{\gamma,p}$ 将函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 在点 p 沿 γ 方向的方向导数赋予它。我们可以将这个方向与$X_{\gamma,p}$ 的方向等同起来。此外，由于 $\gamma((a,b)) \subseteq \mathcal{M}$ 在点 p 处也与流形 $\mathcal{M}$相切，因此我们也可以在上述意义下将微分算子 $X_{\gamma,p}$ 理解为切向量。

同时，我们也可以将$X_{\gamma,p}$ 理解为曲线 γ 在点 p处的速度：为此，我们把曲线 γ 的自变量解释为时间，即 $\gamma(\lambda)$ 表示曲线 γ 上我们在时间 λ 所处的点。接着，我们将函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$解释为 $\mathcal{M}$上的地形，并把 f 视为 $\mathcal{M}$ 上的高度图。那么，$X_{\gamma,p} f = (f \circ \gamma)'(\lambda_0)$表示曲线 γ 在点 p处沿途地形的变化。直观地说，这相当于速度，因为我们可以通过周围地形的变化方式来确定自己在曲线 γ 上如何移动。这种地形的变化率由曲线 γ 给出。我们可以如下看出这一点：为此，我们定义曲线

$$\delta(\lambda) := \gamma(2 \cdot \lambda). \tag{253}$$

直观而言，δ 与 γ描述的是同一条几何曲线，只不过若我们再次将轨迹参数 λ 解释为时间，那么这条几何曲线相对于 δ 的运动速度是 γ的两倍。于是，通过链式法则，并将 $\lambda \longmapsto 2 \cdot \lambda$ 视为函数，可得

$$X_{\delta,p} f = (f \circ \delta)'\left(\frac{\lambda_0}{2}\right) = 2 \cdot (f \circ \gamma)'(\lambda_0) = 2 \cdot X_{\gamma,p} f \tag{254}$$

即，也就是说，沿着曲线 δ ，我们以两倍的速度经过点 p ；这一点可以从地形的变化率 f 与$X_{\gamma,\ p} f$相比看出，

要高出一倍。由此计算还可得出，正如上文所述，沿曲线的行进速度已编码在曲线之中。

因此，我们也可以从物理学角度将$X_{\gamma,p}$理解为曲线 γ 在点 p 处的速度。由于沿曲线γ 运动的粒子的速度直观上总是与 $\mathcal{M}$ 相切，而由于 $\gamma((a,b)) \subseteq \mathcal{M}$ 粒子的运动被限制在 $\mathcal{M}$ 上，因此我们可以再次将$X_{\gamma,p}$ 理解为相切，这说明这两种解释彼此兼容。

借助上述两种解释，我们既能够将$X_{\gamma,p}$ 解释为几何上的切向量，也能够为它赋予一种具体的物理解释。综上，我们由此证明了$X_{\gamma,p}$ 这一记号的合理性。

现在我们定义切空间的概念，它表示点 $p \in \mathcal{M}$ 处所有这类切向量构成的整体；直观地说，如上所述，它在线性意义上近似描述流形 $\mathcal{M}$ 在点 p 附近的形状。

定义 6.10. 设$(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d维光滑流形， $p \in \mathcal{M}$ 是该流形上的一个点。我们将点 p 处的切空间定义为

$$\begin{aligned} T_p\mathcal{M} := \{X_{\gamma,p} \mid \exists a,b \in \mathbb{R} \ \textit{mit}\ a<b \ \textit{und}\ \gamma:(a,b) \longrightarrow \mathcal{M} \ \textit{glatt,} \\ \textit{sodass}\ \exists \lambda_0 \in (a,b) : \gamma(\lambda_0) = p\}, \end{aligned} \tag{255}$$

其中对于 $X_{\gamma,p} \in T_p\mathcal{M}$ ，有

$$X_{\gamma,p} f = (f \circ \gamma)'(\lambda_0) \qquad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \tag{256}$$

为真。在定义 $T_p\mathcal{M}$ 中出现的光滑曲线 $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$，满足 $p \in \gamma((a,b))$ ，不一定是单射的。不过，为了简化记号，我们作如下约定：如果曲线 γ 既不是常值曲线，也不是单射的，则假定可以从上下文中判断应使用哪个 $\lambda_0 \in (a,b)$ 与 $\gamma(\lambda_0) = p$ ，来计算表达式 $X_{\gamma,p}f$ 与 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 。

将 $T_p\mathcal{M}$ 解释为点 $p \in \mathcal{M}$处对 $\mathcal{M}$ 的线性近似，已经表明 $T_p\mathcal{M}$ 可以赋予线性结构，也就是说，$T_p\mathcal{M}$ 可以构成一个 $\mathbb{R}$-向量空间。事实上，这是可行的，如下述定理所示：

定理 6.1. 设$(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d 维光滑流形， $p \in \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个点。我们在 $T_p\mathcal{M}$ 上定义以下运算，使 $T_p\mathcal{M}$ 成为一个 $\mathbb{R}$ 向量空间：

i) 数乘：

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_p\mathcal{M} &\longrightarrow T_p\mathcal{M} \\ (\alpha, X_{\gamma,p}) &\longmapsto \alpha \odot X_{\gamma,p}, \end{aligned} \tag{257}$$

其中 $\alpha \odot X_{\gamma,p}$ 定义为

$$(\alpha \odot X_{\gamma,p}) f := \alpha \cdot (X_{\gamma,p} f) \qquad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}). \tag{258}$$

ii) 向量加法:

$$\begin{aligned} \oplus : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} &\longrightarrow T_p\mathcal{M} \\ (X_{\gamma,p}, X_{\sigma,p}) &\longmapsto X_{\gamma,p} \oplus X_{\sigma,p}, \end{aligned} \tag{259}$$

其中 $X_{\gamma,p} \oplus X_{\gamma,p}$ 定义为

$$(X_{\gamma,p} \oplus X_{\gamma,p})f := X_{\gamma,p}f + X_{\sigma,p}f \qquad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}). \tag{260}$$

证明。首先，我们必须证明上述定义的数乘和向量加法具有封闭性，也就是说，我们必须证明，对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 以及所有满足 $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ 和 $\sigma : (c,d) \longrightarrow \mathcal{M}$ 的 $X_{\gamma,p}, X_{\sigma,p} \in T_p\mathcal{M}$，$\alpha \odot X_{\gamma,p}$ 和 $X_{\gamma,p} \oplus X_{\sigma,p}$ 实际上仍属于 $T_p\mathcal{M}$。为此，我们要构造光滑曲线 $\delta : (e,f) \longrightarrow \mathcal{M}$ 和 $\eta : (g,h) \longrightarrow \mathcal{M}$，使得

$$\alpha \odot X_{\gamma,p} = X_{\delta,p} \quad und \quad X_{\gamma,p} \oplus X_{\sigma,p} = X_{\eta,p} \tag{261}$$

成立。为此，先设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 $\gamma(\lambda_0) = p$。那么 δ 由光滑曲线 $\delta : (\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}) \longrightarrow \mathcal{M}$ 给出，其中 $\delta(\lambda) = \gamma(\alpha \cdot \lambda)$。于是有 $\delta(\frac{\lambda_0}{\alpha}) = \gamma(\lambda_0) = p$，并利用多元链式法则

$$X_{\delta,p}f = (f \circ \delta)'\left(\frac{\lambda_0}{\alpha}\right) = \alpha \cdot (f \circ \gamma)'(\lambda_0) = \alpha \cdot X_{\gamma,p}f \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \tag{262}$$

从而 $\alpha \odot X_{\gamma,\ p} = X_{\delta,\ p}$。

接下来考虑 $\alpha = 0$ 的情形。此时，δ 由光滑曲线 δ 给出：$(a,\ b) \longrightarrow \mathcal{M}$，其中 $\delta(\lambda) = \gamma(\lambda_0) = p$。由于 $f \circ \delta$ 是常值函数，因此有

$$X_{\delta,p}f = (f \circ \delta)'(\lambda_0) = 0 = 0 \cdot X_{\gamma,p}f \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \tag{263}$$

从而 $0 \odot X_{\gamma,\ p} = X_{\delta,\ p}$。

现在考虑向量加法。我们按如下方式构造曲线 η：首先，不妨假设曲线 γ 的定义域：$(a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$ 与 σ 的定义域：$(c,d) \longrightarrow \mathcal{M}$ 具有非空交集，即 $(a,b) \cap (c,d) = (g,h) \neq \emptyset$。特别地，应满足存在一个 $\lambda_0 \in (g,h)$，使得 $\gamma(\lambda_0) = \sigma(\lambda_0) = p$。否则，我们将两个区间中的一个（例如区间 (a,b)）平移一个常数 $\alpha \in \mathbb{R}$，然后定义曲线 $\tilde{\gamma} : (a+\alpha, b+\alpha) \longrightarrow \mathcal{M}$，其中 $\tilde{\gamma}(\lambda) = \gamma(\lambda - \alpha)$，从而 $(a+\alpha, b+\alpha) \cap (c,d) \neq \emptyset$。

注意，在这种情况下 $\gamma((a,b)) = \tilde{\gamma}((a+\alpha, b+\alpha))$ 成立，并且 $\tilde{\gamma}$ 在点 p 处的速度与 γ 在点 p 处的速度相同。此外，若 $\sigma(\lambda_0) = \gamma(\lambda_1) = p$，其中 $\lambda_0 \in (c,d)$ 且 $\lambda_1 \in (a,b)$，则取 $\alpha = \lambda_0 - \lambda_1$ 可得 $\tilde{\gamma}(\lambda_0) = \gamma(\lambda_0 - \lambda_0 + \lambda_1) = \gamma(\lambda_1) = p$，由此便证明了上述做法是合理的。

进一步设 $(\mathcal{U}, \phi) \in \mathcal{A}$ 是一个包含 $p \in \mathcal{M}$ 的坐标图。于是我们定义曲线 $\eta : (g,h) \longrightarrow \mathcal{M}$ 为

$$\eta(\lambda) := (\phi^{-1}(\phi(\gamma(\lambda)) + \phi(\sigma(\lambda)) - \phi(p)). \tag{264}$$

注意，由于

$$\phi \circ \eta = \phi \circ \gamma + \phi \circ \sigma - \phi(p) \tag{265}$$

函数 η 本身是一个光滑函数，满足 $\eta(\lambda_0) = \phi^{-1}(\phi(p) + \phi(p) - \phi(p)) = p$。请注意，(265) 中的加法是逐点定义的。现在我们计算表达式 $X_{\eta,\ p} f$，其中 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 任意。为此，令 $\phi = (x^1, \ldots\ldots, x^d)$，则由定理 5。3。中的恒等式 (216) 可得

$$\begin{aligned}
X_{\eta,p} f &= X_{\eta,\lambda_0,p} f = (f \circ \eta)'(\lambda_0) \\
&= \big((f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma + \phi \circ \sigma - \phi(p))\big)'(\lambda_0) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \partial_i (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \cdot (x^i \circ \gamma + x^i \circ \sigma - x^i(p))'(\lambda_0) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \partial_i (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \cdot (x^i \circ \gamma)'(\lambda_0) + \sum_{i=1}^{d} \partial_i (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \cdot (x^i \circ \sigma)'(\lambda_0) \\
&= ((f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma))'(\lambda_0) + ((f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \sigma))'(\lambda_0) \\
&= (f \circ \gamma)'(\lambda_0) + (f \circ \sigma)'(\lambda_0) \\
&= X_{\gamma,p} f + X_{\sigma,p} f \\
&= (X_{\gamma,p} \oplus X_{\sigma,p}) f.
\end{aligned} \tag{266}$$

由于 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 是任意的，因此可得 $X_{\eta,\ p} = X_{\gamma,\ p} \oplus X_{\sigma,\ p}$。

其他向量空间公理可直接由域 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 的性质推出。例如，$\oplus$ 的交换性可由实数加法 $+$ 的交换性推出，这可通过

$$\begin{aligned}
(X_{\gamma,p} \oplus X_{\sigma,p}) f &= X_{\gamma,p} f + X_{\sigma,p} f \\
&= X_{\sigma,p} f + X_{\gamma,p} f \\
&= (X_{\sigma,p} \oplus X_{\gamma,p}) f \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})
\end{aligned} \tag{267}$$

看出。由此可立即得出，$(T_p\mathcal{M}, \oplus)$ 是一个阿贝尔群。类似地，可以验证数乘 $\odot$ 的性质及其与向量加法 $\oplus$ 的相容性。

□

接下来，我们将再次用 $\cdot$ 代替 $\odot$，用 $+$ 代替 $\oplus$。

我们现在还可以进一步证明，$T_p(\mathcal{M})$ 作为一个 $\mathbb{R}$-向量空间，其维数为 d，前提是 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个光滑的 d 维流形；这也符合我们的直觉，因为 $T_p\mathcal{M}$ 直观上应当在点 $p \in \mathcal{M}$ 处对流形 $\mathcal{M}$ 进行线性近似。

定理 6.2。设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d 维光滑流形，且 $p \in \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$中的一点。那么，向量空间 $T_p\mathcal{M}$ 的维数为 d。

证明。我们考虑任意坐标图 $(\mathcal{U}, \phi) \in \mathcal{A}$，它包含点 $p \in \mathcal{M}$，其中 $\phi = (x^1, \ldots\ldots, x^d)$。接下来定义微分算子 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$，其满足 $i \in \{1, \ldots, d\}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f = \partial_i (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \qquad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}). \tag{268}$$

我们首先证明，对于所有 $i \in \{1,...,d\}$，都有 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_p\mathcal{M}$。为此，设$\phi(p) = (y^1, ..., y^d) \in \mathbb{R}^d$，并且

$$\eta_i : (a_i, b_i) \longrightarrow \mathcal{M}, \tag{269}$$

对于由下式定义的 $i \in \{1,...,d\}$ 曲线

$$(a_i, b_i) \ni \lambda \longmapsto \phi^{-1}(y^1, ..., y^{i-1}, \underbrace{\lambda}_{i\text{-}te\ Stelle}, y^{i+1}, ..., y^d). \tag{270}$$

其中，各区间（a_i， b_i）$\subseteq \mathbb{R}$ 均选取为使得

$$\{(y^1, ..., y^{i-1}.\lambda, y^{d+1}, ..., y^d) \mid \lambda \in (a_i, b_i)\} \subseteq \phi(\mathcal{U}) \tag{271}$$

并且成立。注意，由此可知 $\eta_i((a_i, b_i)) \subseteq \mathcal{U}$，且

$$\begin{aligned}(\phi \circ \eta_i)(\lambda) &= (\phi \circ \phi^{-1})(y^1, ..., y^{i-1}, \lambda, y^{i+1}, ..., y^d) \\ &= (y^1, ..., y^{i-1}, \lambda, y^{i+1}, ..., y^d)\end{aligned} \tag{272}$$

根据定义 6.9. 可知，对于所有 $i \in \{1,...,d\}$，曲线 η_i都是光滑曲线。此外，对于所有 $i \in \{1,...,d\}$，还有 η_i是单射的，因为 ϕ^{-1}是单射的，并且 $\eta_i(y^i) = p$。现在，由 $\phi = (x^1, ..., x^d)$以及映射

$$proj^k : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{273}$$

由下式定义： $\mathbb{R}^d \ni v = (v^1, ..., v^{k-1}, v^k, v^{k+1}, ..., v^d) \longmapsto proj^k(v) = v^k$, 其中$k \in \{1,...,d\}$ 为

$$\begin{aligned}(x^k \circ \eta_i)(\lambda) &= x^k(\eta_i(\lambda)) \\ &= x^k(\phi^{-1}(y^1, ..., \lambda, ..., y^d)) \\ &= proj^k(\phi(\phi^{-1}(y^1, ..., \lambda, ..., y^d))) \\ &= proj^k(y^1, ..., \lambda, ..., y^d) \\ &= \begin{cases} y^k, & k \neq i \\ \lambda, & k = i \end{cases}\end{aligned} \tag{274}$$

。接下来，对于任意的 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$，有

$$\begin{aligned}X_{\eta_i,p} f &= (f \circ \eta_i)'(y^i) \\ &= ((f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \eta_i))'(y^i) \\ &= \sum_{k=1}^{d} \partial_k (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \cdot (x^k \circ \eta_i)'(y^i) \\ &= \partial_i (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f\end{aligned} \tag{275}$$

因此

$$X_{\eta_i,p} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \tag{276}$$

成立。由此证明了，对于所有的 $i \in \{1,...,d\}$，$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_p\mathcal{M}$ 都成立。现在设 $X_{\gamma,p} \in T_p\mathcal{M}$ 是 $T_p\mathcal{M}$ 中任意一个切向量。那么，根据多元链式法则，特别是根据恒等式 (216)，可得

$$\begin{aligned} X_{\gamma,p}f &= (f\circ\gamma)'(\lambda_0) \\ &= ((f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\gamma))'(\lambda_0) \\ &= \sum_{i=1}^{d}\partial_i(f\circ\phi^{-1})(\phi(p))\cdot(x^i\circ\gamma)'(\lambda_0) \end{aligned} \tag{277}$$

是。我们注意到，对于所有 $i \in \{1,...,d\}$，表达式 $(x^i\circ\gamma)'(\lambda_0)$ 都是一个固定的实数。我们令

$$X^i := (x^i\circ\gamma)'(\lambda_0) \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1,...,d\}. \tag{278}$$

根据这一设定可得

$$X_{\gamma,p}f = \sum_{i=1}^{d} X^i\cdot\partial_i(f\circ\phi^{-1})(\phi(p)). \tag{279}$$

利用 (268)，方程 (279) 可得恒等式

$$X_{\gamma,p}f = \sum_{i=1}^{d} X^i\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f \qquad \forall f\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \tag{280}$$

从而

$$X_{\gamma,p} = \sum_{i=1}^{d} X^i\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p. \tag{281}$$

(281) 的右侧对应于 $T_p\mathcal{M}$ 中的一个线性组合，并且由于 $X_{\gamma,\,p} \in T_p\mathcal{M}$ 是任意的，这表明 $T_p\mathcal{M}$ 中的每个元素都可以表示为这样的线性组合。这意味着集合 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,...,\left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\} \subseteq T_p\mathcal{M}$ 张成整个切空间 $T_p\mathcal{M}$，记作

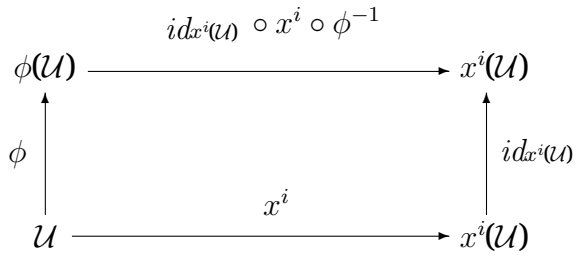
$$span_{\mathbb{R}}\left(\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,...,\left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\right\}\right) = T_p\mathcal{M}. \tag{282}$$

如果我们还能证明集合 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,...,\left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\}$ 线性无关，那么就可以得出该集合是 $T_p\mathcal{M}$ 的一个基，这又意味着切空间 $T_p\mathcal{M}$ 的维数为 d。

因此，我们还要证明集合 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,...,\left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\}$ 线性无关：首先注意，如果像注释 6.1. 中那样，再次将 $\mathbb{R}^d$ 视为光滑流形，那么这些映射

$$x^i : \mathcal{U} \longrightarrow x^i(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}, \tag{283}$$

mit $i \in \{1,...,d\}$，涉及光滑映射，以下图表对此进行了说明 t:



由于

$$\begin{aligned} id_{x^i(\mathcal{U})} \circ x^i \circ \phi^{-1} &= x^i \circ \phi^{-1} \\ &= proj^i \circ \phi \circ \phi^{-1} \\ &= proj^i \end{aligned} \tag{284}$$

根据定义 6.8.，显然映射 x^i 光滑。因此，我们现在可以将映射 $x^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 作为输入传入微分算子 $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$。现在设

$$\mathbf{0}_{T_p\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{d} \alpha^i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \tag{285}$$

由 α^1、.....、$\alpha^d \in \mathbb{R}$ 给出，其中 $\mathbf{0}_{T_p\mathcal{M}}$ 是 $T_p\mathcal{M}$ 的单位元或零向量。则对于 $j \in \{1, ..., d\}$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{d} \alpha^i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p x^j \\ &= \sum_{i=1}^{d} \alpha^i \cdot \partial_i (\underbrace{x^j \circ \phi^{-1}}_{proj^j})(\phi(p)) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \alpha^i \cdot \delta_i^j = \alpha^j. \end{aligned} \tag{286}$$

从而对所有 $j \in \{1, ..., d\}$都有 $\alpha^j = 0$。由此可知，集合 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\}$是线性无关的，因此构成 $T_p\mathcal{M}$ 的一组基。由于该集合的长度或基数为 d，可知 $T_p\mathcal{M}$ 是一个 d维的$\mathbb{R}$向量空间。

□

注记 6.2。 通常将集合 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\} \subseteq T_p\mathcal{M}$ 称为由坐标图 $(\mathcal{U}, \phi) \in \mathcal{A}$ 诱导的基。我们将该基的元素称为由坐标图 $(\mathcal{U}, \phi)$ 诱导的切向量。

在下文中，我们始终将切空间 $T_p\mathcal{M}$ 视为赋有这种向量空间结构。能够为切空间赋予这样的线性结构，不仅对几何解释有影响，也带来了技术上的便利，因为例如我们还能够定义切空间$T_p\mathcal{M}$ 的对偶空间。它也称为点 $p \in \mathcal{M}$ 处的余切空间，简称为 $T_p^*\mathcal{M}$。这些余切空间随后又将

在定义所谓的张量场时发挥关键作用；我们需要张量场等概念来解释流形上曲线的直观长度概念。

注记 6.3。 在前面两个定理为我们对切向量的几何解释提供了合理性依据之后，我们现在还可以简要思考一下，为什么我们将切向量理解为一个定义在$\mathcal{C}^\infty$（$\mathcal{M}$）上的微分算子。

实际上，我们也可以将$X_{\gamma,\ p}$理解为形如 $\mathcal{C}^1$（$\mathcal{M}$） $\longrightarrow\mathbb{R}$ 的算子，因为根据上述构造以及前面的两个证明，无需对函数 f 施加高于 $\mathcal{C}^1$ 的正则性要求。原则上，对于定义中包含的曲线 γ也是如此。

尽管如此，我们仍然只将切向量解释为作用于光滑函数 $f \in \mathcal{C}^\infty$（$\mathcal{M}$） 的微分算子，并且仅针对光滑曲线，这有两个原因：一方面，在具体计算时，我们不希望去考虑所涉及曲线和函数的正则性。另一方面，出于实际原因，在现代微分几何中，可微流形（$\mathcal{M}$、 τ、 $\mathcal{A}$） 上的点 $p \in \mathcal{M}$ 处的切向量通常也被称为位于点 p 处的线性导子

$$\mathcal{D}_p : (\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \odot) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{287}$$

定义为，其中 $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 赋予了逐点乘法 $\odot$，且集合 $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$关于该乘法是封闭的 *[19]*。点 p 处的导子，其形式为 $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\ \odot) \longrightarrow \mathbb{R}$ ，是一个映射 $\mathcal{D}_p$: $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$，它满足以下莱布尼茨法则，这一法则仿照了实分析中熟知的乘积法则*[14]* :

$$\mathcal{D}_p(f \odot g) = \mathcal{D}_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathcal{D}_p(g) \qquad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}). \tag{288}$$

与切向量 $X_{\gamma,p}$ 不同，一般的、位于点 p 处的线性导子 $\mathcal{D}_p$ 并没有具体的形式；粗略地说，它只是定义在可微函数集合上的一个抽象映射，并满足莱布尼茨法则。此外还可以证明，点 p 处所有线性导子 $\mathcal{D}_p$ 构成有限维向量空间，且其维数通常只有在导子定义于集合 $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$上时，才与流形 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 的维数相同。

如上所述，我们希望将 p 处所有线性导子的集合直观地理解为流形$(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$在点 p 处的线性近似，并将点 p 处的各个线性导子解释为附着在点 p 上的切向量。因此，我们需要集合 $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 作为定义域，从而保持对所有位于 p 处的线性导子所构成集合的几何解释。

如果我们想以直观的方式，将上述关于切空间 $T_p\mathcal{M}$ 的处理方式（其中各个切向量都是点 p 处的方向导数）与所有作用于 p 的线性导子组成的集合联系起来，那么

就必须将切向量 $X_{\gamma,\ p} \in T_p\mathcal{M}$ 视为作用于 p 的线性导子，这就隐含地假设 $X_{\gamma,\ p}$ 已定义为作用于 $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 上的线性微分算子。

我们可以将切向量$X_{\gamma,\ p}$ 视为线性导子，理由如下：首先注意，两个函数 f和 $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 的逐点乘法定义为

$$(f \odot g)(p) := f(p) \cdot g(p) \qquad \forall p \in \mathcal{M}. \tag{289}$$

由此可知，对于一条曲线 $\gamma:\ [a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}((f \odot g) \circ \gamma)(p) &= (f \odot g)(\gamma(p)) \\ &= f(\gamma(p)) \cdot g(\gamma(p)) \\ &= (f \circ \gamma)(p) \cdot (g \circ \gamma)(p) \\ &= ((f \circ \gamma) \odot (g \circ \gamma))(p) \qquad \forall p \in \mathcal{M},\end{aligned} \tag{290}$$

由此

$$\begin{aligned}X_{\gamma,p}(f \odot g) &= ((f \odot g) \circ \gamma)'(0) \\ &= ((f \circ \gamma) \odot (g \circ \gamma))'(0) \\ &= (f \circ \gamma)'(0) \cdot g(\gamma(0)) + f(\gamma(0)) \cdot (g \circ \gamma)'(0) \\ &= X_{\gamma,p} f \cdot g(p) + f(p) \cdot X_{\gamma,p} g\end{aligned} \tag{291}$$

可得，也就是说，$X_{\gamma,\ p}$ 可以视为一种特殊的导子。在倒数第二步中，我们用到了实分析中熟知的通常乘积法则 *[14]*。

现在我们已经了解并初步研究了切空间，从而培养对它们的直观认识，并为相关理解提供依据；接下来可以介绍所谓的切丛。非正式地说，切丛不过是光滑流形（$\mathcal{M}$，τ，$\mathcal{A}$）所有切空间的汇总，其中切空间以其定义所在的点 $p \in \mathcal{M}$为参数。形式上，我们得到如下定义。

定义 6.11. 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d 维光滑流形。那么，$\mathcal{M}$ 的切丛作为集合，记作 $T\mathcal{M}$，定义为

$$T\mathcal{M} := \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times T_p\mathcal{M}. \tag{292}$$

直观地说，我们在流形 $\mathcal{M}$ 的每一点 p 处附上相应的切空间 T_p 。当我们在下一节解释光滑流形上的光滑向量场时，这种直观理解将会很重要。在构造 $T\mathcal{M}$ 时使用不交并 $\sqcup$，其合理性在于，根据定义，每个切空间中的零向量都由映射给出

$$\begin{aligned}\mathbf{0}: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto 0.\end{aligned} \tag{293}$$

也就是说，严格来说，切空间并非两两不交。因此，为了维持上述直观图景——在光滑流形的每一点 p处附上相应的切空间 $T_p\mathcal{M}$，从而使每个切向量 $T_p\mathcal{M}$都有唯一的基点 p——我们必须采用上面通过不交并进行的构造。

现在可以进一步定义切丛 $T\mathcal{M}$ 的所谓丛投影 π 。

定义 6.12. 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d 维光滑流形，而 $T\mathcal{M}$ 是其对应的切丛。则切丛的丛投影定义为映射

$$\begin{aligned} \pi : T\mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (p, X_{\gamma,p}) &\longmapsto p. \end{aligned} \tag{294}$$

下文中，我们常常将 $(p, X_{\gamma.p}) \in T\mathcal{M}$ 简写为 $X_{\gamma,p}$。映射 π 的含义是，它将切向量 $X_{\gamma,p}$ 映射到其对应的基点 $p \in \mathcal{M}$，也就是切向量 $X_{\gamma,p}$ （或者与 $X_{\gamma,p}$ 对应的切空间 $T_p\mathcal{M}$ ）直观上附着于该点。通常也会将三元组 $(T\mathcal{M}, \mathcal{M}, \pi)$ 本身称为切丛，有时也将其记作 $T\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$。

切丛 $T\mathcal{M}$ 现在还可以赋予一种典范且自然的拓扑，这种拓扑或多或少是由光滑流形 ($\tau\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}$) 的拓扑诱导而来的，因此 $T\mathcal{M}$ 本身也成为一个拓扑流形。更确切地说，如果 ($\mathcal{M}\tau, \mathcal{A}, d$) 是一个 d 维流形，那么借助这种拓扑，我们可以将切丛 $T\mathcal{M}$ 视为一个 $2d$ 维拓扑流形。

此外，还可以为切丛赋予一种光滑结构，从而我们可以将 $T\mathcal{M}$ 视为一个 $2d$ 维光滑流形。此时我们应当思考这样一个问题：我们为什么要把切丛视为光滑流形?

如前所述，在下一节中，我们还将讨论光滑向量场，以便借助它们直观地引入所谓的 ($r\,s$,)-张量场的概念。稍后，当我们定义所谓的长度泛函时，这些张量场将发挥重要作用。

顾名思义，直观地说，向量场应当是一个函数，它将流形（$\mathcal{M}$， τ， $\mathcal{A}$）上的每个点映射为一个向量。直观地说，流形的每个点 p都附着着一个切空间 $T_p\mathcal{M}$ ，它涵盖了流形的所有自由度，因此可以认为，向量场在（$\mathcal{M}$， τ， $\mathcal{A}$）上将每个点 $p \in \mathcal{M}$映射为一个切向量 $X \in T_p\mathcal{M}$。也就是说，我们可以将向量场视为一个形如 $\mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ 的函数。

现在，直观地说，许多物理学中已知的现象，例如液体的速度场，应该都能用上述意义下的向量场加以描述，因为对于这类现象，我们同样可以为每个空间点赋予一个（速度）向量，而这种对应关系直观上应当

从点到点连续地，甚至光滑地变化（无论“在此时刻”究竟意味着什么）。因此，如果我们想从微分几何的角度发展向量场这一概念，并使其能够合理地模拟刚才提到的物理现象，那么我们应当确保自己也能够讨论连续的，甚至光滑的向量场。

为了从纯理论上有机会定义所谓的光滑向量场，我们必须将向量场本身视为两个光滑流形之间的函数。由于我们上面已经说明，向量场应当是形如 $\mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ 的函数，因此我们应当尝试将切丛 $T\mathcal{M}$ 视为一个光滑流形。

因此，下面我们简要概述如何为 $T\mathcal{M}$ 配备拓扑和光滑结构。在此过程中，我们主要依据 [28]。

首先，我们必须意识到，我们希望在 $T\mathcal{M}$ 上定义一个自然且实用的邻近概念，从而最终使连续或甚至光滑的向量场恰好符合我们直观上所说的连续或光滑向量场。那么，应该如何在 $T\mathcal{M}$ 上直观地定义邻近概念呢?

为此，我们考虑一个假设为 d 维的光滑流形 $(\mathcal{M},\ \tau,\ \mathcal{A})$，以及与之对应的切丛 $T\mathcal{M}$。接下来，我们考虑 $(\mathcal{M},\ \tau,\ \mathcal{A})$ 的一个坐标图 $(\mathcal{U},\ \phi) \in \mathcal{A}$，其中 $\phi = (x^1,\ ...,\ x^d)$。我们回忆一下，拓扑 τ 在集合 $\mathcal{M}$ 上引入了一个邻近概念，而在坐标图 $(\mathcal{U},\ \tau)$ 中，这个邻近概念是间接编码的，因为 $\mathcal{U} \subseteq \tau$和 $\phi(\tau_{\mathcal{U}},\ \tau_{\mathbb{R}^d,\ \phi(\mathcal{U})})$ 连续。

由于 $\mathcal{M}$ 构建在切丛 $T\mathcal{M}$ 中，而我们直观上希望在 $T\mathcal{M}$ 中获得 $\mathcal{M}$ 的拓扑结构，因此我们首先要求集合 $T\mathcal{U} \subseteq T\mathcal{M}$满足如下定义:

$$T\mathcal{U} := \bigsqcup_{p\in\mathcal{U}} T_p\mathcal{M} := \bigcup_{p\in\mathcal{U}} \{p\} \times T_p\mathcal{M}. \tag{295}$$

在 $T\mathcal{M}$ 中是一个开集，同时也是一个坐标图区域。现在我们来思考坐标映射 ξ 在 $T\mathcal{U}$ 上应当具有怎样的形式。一方面，我们希望将 $\mathcal{M}$的拓扑结构——它编码在坐标映射 ϕ 中——通过坐标图 ξ 传递到 $T\mathcal{M}$ 上。另一方面，我们希望各个切空间连续地依赖于基点 p。因此，我们一方面要将 $\mathcal{M}$ 的拓扑性质传递到 $T\mathcal{M}$ 上，另一方面要编码 $T_p\mathcal{M}$ 如何依赖于 $p \in \mathcal{M}$。

因此，我们考虑一个满足 $p \in \mathcal{U}$ 的 $X \in T_p\mathcal{M}$。关于坐标图 $(\mathcal{U}, \phi)$，我们可以将 X 在坐标图所诱导的基 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\}$ 中表示为

$$X = \sum_{i=1}^{d} X^i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p. \tag{296}$$

展开。这里，所有 $i \in \{1, ..., d\}$ 对应的 X^i 都由坐标映射 ϕ诱导。因此，我们既可以通过坐标（$x^1(p)$ ..., $x^d(p)$）表示点 $p \in \mathcal{U}$ 在 ϕ 上的位置，也可以同样通过 ϕ，用坐标（X^1，...，X^d）描述切向量 X。借助

坐标映射 ϕ，我们便可以统一描述基点及其对应的切向量。从直观上看，这种统一描述中编码了 $T_p\mathcal{M}$ 与 $p \in \mathcal{U}$ 之间的联系。

这启发我们定义如下从 $T\mathcal{U}$ 到 ξ 的坐标映射。由于它依赖于坐标映射 ϕ，我们将其记为 ξ_ϕ：

$$\begin{aligned} \xi_\phi : T\mathcal{U} &\longrightarrow \phi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^d \\ (p, X) &\longmapsto ((x^1(p), ..., x^d(p)), (X^1, ..., X^d)). \end{aligned} \tag{297}$$

由于坐标映射 ϕ 是微分同胚，因此尤其是双射，所以映射 ξ_ϕ 也是双射，因此我们确实可以将 ξ_ϕ 视为 $T\mathcal{U}$ 上坐标图的候选者。

既然最终要使 $T\mathcal{M}$ 成为一个流形，它就必须局部同胚于某个欧几里得空间。映射 ξ_ϕ 表明，这个欧几里得空间很可能是 $\mathbb{R}^{2d}$。为了确保它与 $\mathbb{R}^{2d}$ 局部相似，我们希望直观地通过 ξ_ϕ 将 $\mathbb{R}^{2d}$ 的拓扑传递到 $T\mathcal{U}$ 上。

为此，我们首先在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d =: \mathbb{R}^{2d}$ 上赋予标准拓扑，这样便可以在集合 $\phi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^d \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上定义相应的子空间拓扑。由此，$\phi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^d$ 成为一个拓扑空间。现在，利用映射 ξ_ϕ 以及引理 2.1. 中的拉回拓扑概念，我们可以在 $T\mathcal{U}$ 上诱导出一个拓扑，并将其记为 $\tau_{T\mathcal{U}}$。

如果我们对 $\mathcal{A}$ 中的所有坐标图（$\mathcal{U}$，ϕ）都执行上述操作，就可以在整个切丛 $T\mathcal{M}$ 上定义一种拓扑：在 $T\mathcal{M}$ 上取包含所有（$\mathcal{U}$，ϕ）$\in \mathcal{A}$ 的最小拓扑。由此拓扑，$T\mathcal{M}$ 将成为一个 $2d$ 维拓扑流形，其坐标图恰好由元组（$T\mathcal{U}$，ξ_ϕ）给出。此外还可以证明，关于这些坐标图，由于（$\mathcal{M}$，τ，$\mathcal{A}$）是一个光滑流形，$T\mathcal{M}$ 也将成为一个光滑流形。

在下一节中我们还将看到，在（$\mathcal{M}$，$\tau.\mathcal{A}$）上、相对于刚才在 $T\mathcal{M}$ 上定义的拓扑而定义的光滑向量场，是对向量分析中熟知的直观向量场的推广；这也进一步说明了采用这种拓扑的合理性。

6.4 张量丛中的光滑向量场和光滑截面 l

由于我们可以将切丛 $T\mathcal{M}$ 本身视为流形，因此能够按照定义 6.8. 来考察从 $\mathcal{M}$ 到 $T\mathcal{M}$ 的光滑函数 $s: \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$。这类光滑函数中有一类重要的函数，称为光滑截面，通常也简称为光滑向量场；它们在物理学中尤为重要，例如可用于对物理场建模。

定义 6.13. 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d 维光滑流形，而$T\mathcal{M}$ 是其对应的切丛，视为上述意义下的光滑流形。我们将切丛上的光滑截面理解为一个光滑函数

$$s : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}, \tag{298}$$

并且它还具有如下性质：

$$\pi \circ s = id_{\mathcal{M}} \tag{299}$$

满足 $id_{\mathcal{M}}(p) = p$ 对所有 $p \in \mathcal{M}$ 都成立。方程 (299) 确保通过映射 s 只能为点 $p \in \mathcal{M}$ 指定一个切向量，而且该向量也属于在点 p处定义的切空间 $T_p\mathcal{M}$ 。我们将切丛中所有光滑截面的集合记为 $\Gamma^\infty(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$。

从切丛中光滑截面的定义可以立即看出，为什么它也常被称为 $\mathcal{M}$ 上的光滑向量场。一方面， $\mathcal{M}$ 上的（光滑）向量场是一个函数，它为流形上的每个点指定一个位于该点的向量，这正是由（299）所刻画的。另一方面，（光滑）向量场也可以看作是 $\mathcal{M}$上的流的速度场，因此，指定给各个点的向量应当在该点与流形相切，因为流的运动受限于流形。由此直观地说，流在流形上每一点处的速度向量也必须与流形在该点相切。

接下来，我们想把光滑向量场的概念推广到 $\mathcal{M}$ 。为此，我们回想例 4.5.，其中我们看到，向量空间的元素可以理解为 (1,0)-张量。也就是说，我们也可以将向量空间 $T_p\mathcal{M}$ 写作 $T_0^1(T_p\mathcal{M})$，从而将切丛写作

$$T\mathcal{M} = \bigsqcup_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M} = \bigsqcup_{p\in\mathcal{M}} T_0^1(T_p\mathcal{M}) =: T_0^1\mathcal{M}. \tag{300}$$

由 (300) 可知，如何合理地推广直观的向量场概念。

定义 6.14. 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 为一个 d 维光滑流形。对于数 $r, s \in \mathbb{N}_0$，我们将所谓的 (r, s)-张量丛 $T_s^r\mathcal{M}$ 定义为如下集合：

$$T_s^r\mathcal{M} = \bigsqcup_{p\in\mathcal{M}} T_s^r(T_p\mathcal{M}) = \bigcup_{p\in\mathcal{M}} \{p\} \times T_s^r(T_p\mathcal{M}). \tag{301}$$

其中， $T_s^r(T_p\mathcal{M})$ 如第 4.5 节所定义，是所有如下形式的多重线性映射组成的集合

$$T : \underbrace{T_p\mathcal{M} \times ... \times T_p\mathcal{M}}_{s} \times \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \times ... \times T_p^*\mathcal{M}}_{r} \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{302}$$

此外，也可以为$T_s^r\mathcal{M}$ 赋予一种典范且自然的拓扑[10],，使得一方面 $T_s^r\mathcal{M}$ 成为光滑流形，另一方面，对于 $r = 1$ 和 $s = 0$， $T_s^r\mathcal{M}$ 上的拓扑与我们之前用来使 $T\mathcal{M}$ 成为光滑流形的拓扑一致。这种定义在 $T_s^r\mathcal{M}$ 上的典范拓扑，其构造方式几乎与 $T\mathcal{M}$上的拓扑完全类似。

现在也可以为（r， s）-张量丛 $T_s^r\mathcal{M}$ 定义所谓的丛投影 π_s^r 。

定义 6.15。 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d 维光滑流形，且$T^r_s\mathcal{M}$ 是与之对应的 (r, s)-张量丛。则所谓的 (r, s)-丛投影定义为

$$\begin{aligned} \pi^r_s : T^r_s\mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (p, T) &\longmapsto p \quad mit\ T \in T^r_s(T_p\mathcal{M}). \end{aligned} \tag{303}$$

下面我们仍将用简写，仅写作 T_p，而不再写$(p, T) \in T^r_s\mathcal{M}$。

接下来，类似于切丛中的光滑截面，我们定义（r， s）-张量丛中光滑截面的概念:

定义 6.16。 设$(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d 维光滑流形，$T^r_s\mathcal{M}$ 是相应的(r, s)-张量丛，将其视为上述意义下的光滑流形。那么，(r, s)-张量丛中的一个光滑截面是一个光滑函数

$$\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow T^r_s\mathcal{M} \tag{304}$$

并且具有如下附加性质:

$$\pi^r_s \circ \sigma = id_{\mathcal{M}} \tag{305}$$

由于 σ 直观地为每个点 $p \in \mathcal{M}$ 赋予一个张量 $T_p \in T^r_s(T_p\mathcal{M})$，因此也将 σ 称为光滑(r, s)-张量场。进一步地，我们用 $\Gamma^\infty(\mathcal{M}, T^r_s\mathcal{M})$表示$(r, s)$-张量丛中所有光滑截面的集合。

与光滑（r， s）-张量场相关的另一个有用概念，是光滑（r， s）-张量场的所谓分量函数。由于下文只需要这一概念的一个特殊情形，即光滑（r， s）-张量场的图诱导的分量函数这一概念，因此这里不提供一般定义。

为了引入（r， s）-张量场的图诱导的分量函数这一概念σ，我们先在 d维光滑流形（$\mathcal{M}$， τ， $\mathcal{A}$）上考察一个坐标图（$\mathcal{U}$， ϕ）$\in \mathcal{A}$。

在每个点 $p \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ 处，我们都可以构造切空间 $T_p\mathcal{M}$ 。其中 $T_p\mathcal{M}$ 中的基由坐标图（$\mathcal{U}$， ϕ）诱导的基$\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\} \subseteq T_p\mathcal{M}$给出。

对于每个切空间 $T_p\mathcal{M}$ mit $p \in \mathcal{U}$，我们都可以构造出与 $T_p\mathcal{M}$ 对应的对偶空间，即余切空间 $T^*_p\mathcal{M}$。根据第 4.10. 节中的定理 4.5，我们总能在余切空间 $T^*_P\mathcal{M}$ 中找到一组与基 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\}$ 对应的对偶基，记作 $\{d_px^1, ..., d_px^d\} \subseteq T^*_p\mathcal{M}$。因此，对于所有 $p \in \mathcal{U}$

$$d_px^i\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) = \delta^i_j \qquad \forall i, j \in \{1, ..., d\}. \tag{306}$$

现在我们考虑光滑的 $(r$， $s)$-张量场 σ，它满足

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{M} &\longrightarrow T^r_s\mathcal{M} \\ p &\longmapsto \sigma(p) := T_p \in T^r_s(T_p\mathcal{M}). \end{aligned} \tag{307}$$

那么，我们可以在基 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p\}$ 上计算 T_p 和 $\{d_p x^1, ..., d_p x^d\}$，从而定义 σ 在点 $p \in \mathcal{U}$ 处图诱导的分量函数

$$(T^{i_1,...,i_s}_{j_1,...,j_r})(p) := T_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right)_p, d_p x^{j_1}, ..., d_p x^{j_r}\right), \tag{308}$$

其中 i_1，..... i_s， j_1，..... $j_r \in \{1, ..., d\}$ 是。$(r,\ s)$-张量场 σ 在 $\mathcal{U}$ 上的图诱导的分量函数为

$$i_1, ..., i_s, j_1, ..., j_r \in \{1, ..., d\}$$

定义为

$$\begin{aligned} T^{i_1,...,i_s}_{j_1,...,j_r} : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto (T^{i_1,...,i_s}_{j_1,...,j_r})(p). \end{aligned} \tag{309}$$

一旦我们稍后讨论所谓的黎曼流形，这些$(r,\ s)$-张量场的图诱导的分量函数将再次变得重要。

此外，利用这些图诱导的分量函数，还可以特别直观地进一步说明：在 [10] 上给出的拓扑用于$(r,\ s)$-张量丛是合理的；我们正是利用这一点来解释$(r,\ s)$-张量丛中的光滑截面。事实上可以证明，$\sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{M},\ T^r_s\mathcal{M})$ 当且仅当对于所有图诱导的分量函数，都有

$$T^{i_1,...,i_s}_{j_1,...,j_r} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \tag{310}$$

是 [26]。为什么这能证明使用 [10] 中关于 $T^r_s\mathcal{M}$所给出的拓扑是合理的?

为此，我们考虑 $\mathbb{R}^d$，并再次赋予它注释 6.1.中给出的光滑结构，从而可以将 $\mathbb{R}^d$ 视为光滑流形。考虑坐标图 $(\mathbb{R}^d, id_{\mathbb{R}^d})$，其中 $id_{\mathbb{R}^d} = (x^1, ..., x^d)$，以及与该坐标图对应的由坐标图诱导的基 $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p = e_{1,p}, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)_p = e_{d,p}\} \in T_p\mathbb{R}^d$，其为 $p \in \mathbb{R}^d$。现在，对于所有 $p \in \mathbb{R}^d$ 和所有 $i \in \{1, ..., d\}$，我们将切向量 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = e_{i,p} \in T_p\mathbb{R}^d$ 与向量 $e_i \in \mathbb{R}^d$等同，该向量定义为

$$e_i := (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i\text{-}te\ Stelle}, 0, ..., 0) = \partial_i id^{-1}_{\mathbb{R}^d}(p) \quad \forall p \in \mathbb{R}^d. \tag{311}$$

我们可以进行这一识别，因为 $T_p\mathbb{R}^d$ 对所有 $p \in \mathbb{R}^d$而言，以及$\mathbb{R}^d$ 都具有相同的向量空间维数，因此二者同构[7], ，即$T_p\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$。

请注意，在通过 e_i 进行识别时，$e_{i,\ p}$ 的几何意义并未丧失，因为从直观上看，二者具有相同的几何定向。由（311）可知，$e_{i,\ p}$以及 e_i 都可以借助相同的几何直觉，从坐标图（$\mathbb{R}^d$，$id_{\mathbb{R}^d}$）构造出来，因此，将上述识别称为自然的是合理的，因为表面上看，这两个表达式中编码了相同的几何信息。

当我们给 $\mathbb{R}^d$ 配上稍后将要讨论的黎曼度量 (335)，并将其视为光滑流形时，上述识别的自然性将显得更加显而易见，

这样一来，$e_{i,\ p}$的几何长度便为 1，这与 e_i 的直观长度相对应。

在光滑流形 $\mathbb{R}^d$ 上，按照通常的向量分析，我们将光滑向量场理解为如下形式的函数

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = (v^1, ..., v^d) : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ p &\longmapsto \mathbf{v}(p) = (v^1(p), ..., v^d(p)) = \sum_{i=1}^{d} v^i(p) \cdot e_i,\end{aligned} \tag{312}$$

其中 $v^1, ..., v^d \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$。另一方面，在微分几何中，我们将 $\mathbb{R}^d$ 上的光滑向量场理解为切丛$T\mathbb{R}^d = T_0^1\mathbb{R}^d$中的一个光滑截面 s 。也就是说，光滑函数 s 将每个点 $p \in \mathbb{R}^d$ 映射到一个切向量$X_{\gamma(p),p} \in T_p\mathbb{R}^d$ ，并且我们还可以将切向量$X_{\gamma(p),p}$按基 $\{e_{1,p}, ..., e_{d,p}\} \subseteq T_p\mathbb{R}^d$展开，从而得到表示式

$$s(p) = X_{\gamma(p),p} = \sum_{i=1}^{d} v^i_{\gamma(p)}(p) \cdot e_{i,p} \tag{313}$$

其中 $v^1_{\gamma(p)}(p) ..., v^d_{\gamma(p)}(p) \in \mathbb{R}$。这里， $\gamma(p)$仅表示曲线 γ（相对于该曲线构造点 $p \in \mathbb{R}^d$ 处的切向量）依赖于点 p 本身。与坐标图 $(\mathbb{R}^d, id_{\mathbb{R}^d})$ 相对应的 s 的分量函数，正是 v^i_γ；根据上面的说明，它们属于类 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$。因此，我们现在对所有 $i \in \{1, ..., d\}$ 都进行几何上合理的识别$e_{i,p} \equiv e_i$ ，对于所有 $p \in \mathbb{R}^d$ ，从而可以将光滑向量场 s 与向量分析框架下定义的光滑向量场

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\gamma = (v^1_\gamma, ..., v^d_\gamma) : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ p &\longmapsto \mathbf{v}_{\gamma(p)}(p) = (v^1_{\gamma(p)}(p), ..., v^d_{\gamma(p)}(p)) = \sum_{i=1}^{d} v^i_{\gamma(p)}(p) \cdot e_i,\end{aligned} \tag{314}$$

识别。这样，向量分析中熟知的光滑向量场概念便被推广到了现代微分几何中。这种推广之所以可行，部分原因在于对 $T\mathbb{R}^d$（或更一般地，对$T^r_s\mathbb{R}^d$）所选拓扑的保证，这也为采用 [10] 中给出的(r, s)-张量丛拓扑提供了依据。

在接下来的章节中，我们将认识(0，2)-张量丛中的一个特殊截面类，借助它，我们最终能够阐释光滑流形$(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$上的直观长度概念。

7 黎曼流形

本章将探讨黎曼流形这一概念。通俗地说，黎曼流形是指每个切空间都配备了一个内积的光滑流形。

我们已在第 4.3 节了解到，预希尔伯特空间由于其内积而具有由该内积诱导的几何。所谓黎曼几何的基本思想，是在光滑流形的每个切空间上定义几何，从而在光滑流形本身上诱导出一种几何。

借助这种几何，我们便可以研究光滑流形上的一些几何问题，例如，光滑流形上两点之间最短的连接线段是什么。

这个问题的答案取决于流形上所定义的几何。球面 $\mathbb{S}^2$ （我们再次设想其配备了通常的标准几何）可以直观地说明这一点：在球面上，两点之间最短的连接线段显然是一条曲线，而不是一条简单的直线，因为球面本身就是一个曲面。

我们从黎曼流形的定义开始：

定义 7.1. 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个 d 维光滑流形。我们将光滑截面 $g \in \Gamma^\infty(\mathcal{M}, T_2^0\mathcal{M})$ 称为黎曼张量场或黎曼度量，若对所有 $p \in \mathcal{M}$，都有 $g_p := g(p) \in T_2^0(T_p\mathcal{M})$ 是 $T_p\mathcal{M}$ 上的内积。形式上，这意味着对于光滑截面 g，以下附加命题对所有点 $p \in \mathcal{M}$ 均成立：

i) 映射

$$g_p : T_p\mathcal{M} \times T_P\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{315}$$

是一个双线性映射，也就是说，它对两个自变量分别都是线性的。

ii) 映射 g_p 是对称的，也就是说，

$$g_p(X_{\gamma,p}, X_{\sigma,p}) = g_p(X_{\sigma,p}, X_{\gamma,p}) \qquad \forall X_{\gamma,p}, X_{\sigma,p} \in T_p\mathcal{M}. \tag{316}$$

iii) 映射 g_p 是正定的，也就是说，对所有 $X_{\gamma,\ p} \in T_p\mathcal{M}$ 均有

$$g_p(X_{\gamma,p}, X_{\gamma,p}) \geq 0 \quad und \quad g_p(X_{\gamma,p}, X_{\gamma,p}) = 0 \iff X_{\gamma,p} = \mathbf{0}_{T_p\mathcal{M}}, \tag{317}$$

其中 $\mathbf{0}_{T_p\mathcal{M}}$ 仍然是 $T_p\mathcal{M}$ 的单位元或零向量。

我们进一步将四元组 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}, g)$ 称为黎曼流形。

因此，根据定义 7.1. ，我们要求，用来在 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 上诱导几何的黎曼度量，是 (0,2)-张量丛中的一个特殊光滑截面 g 。直观而言，要求光滑性的理由在于，根据 $T_2^0\mathcal{M}$ 中所阐述的拓扑，

我们希望确保，由 g 诱导的各个几何在切空间 $T_p\mathcal{M}$ 中通过 $p \in \mathcal{M}$ 以光滑的方式彼此联系起来。也可以通俗地说，我们通过光滑性要求，以光滑的方式将切空间中的各个几何粘合起来。

示例 7.1。 黎曼流形的两个直观例子如下：

i) 我们考虑 $\mathbb{R}^3$，并赋予它备注 6.1 中给出的光滑结构。此外，我们考虑坐标图 $(\mathbb{R}^3, id_{\mathbb{R}^3}) \in \mathcal{B}$，其中 $id_{\mathbb{R}^3} = (x^1, ..., x^d)$。此外，令 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 上的标准内积，并

$$e_i := (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^3 \qquad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \tag{318}$$

我们在 $\mathbb{R}^3$ 上定义光滑的 (0,2)-张量场

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow T_2^0\mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto g_p \quad mit \quad g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) := \langle e_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^3}, \end{aligned} \tag{319}$$

其中 $i, j \in \{1, 2, 3\}$。对于 $(0, 2)$-张量场 g，它实际上是 (0,2)-张量丛中的一个光滑截面，因为根据 g 的定义可知，关于坐标图 $(\mathbb{R}^d, id_{\mathbb{R}^d})$ 的图诱导的分量函数是常函数，因此是 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$-函数。

此外，由于 $\langle \cdot$ 和 $\cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ 的性质， g 也是一个黎曼度量，因此 （$\mathbb{R}^3$，$\tau_{\mathbb{R}^3}$，$\mathcal{B}$，g）构成一个黎曼流形。

ii) 我们再次考察在例 6.1 和 6.2 中已知的光滑流形 （$\mathbb{S}^2$，$\tau_{\mathbb{R}^3,\ \mathbb{S}^2}$，$\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}$）。将其视为在 *i)* 中已知的黎曼流形 （$\mathbb{R}^3$，$\tau_{\mathbb{R}^3}$，$\mathcal{B}$，$g$）的子集，则我们可以在（$\mathbb{S}^2$，$\tau_{\mathbb{R}^3,\ \mathbb{S}^2}$，$\mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}$）上诱导出一个黎曼度量 h，方法是将由 （319）定义的黎曼度量 g： $\mathbb{R}^3 \longrightarrow T_2^0\mathbb{R}^3$限制在 $\mathbb{S}^2$ 上，并规定

$$h_p := g_p|_{T_p\mathbb{S}^2 \times T_p\mathbb{S}^2} \quad \forall p \in \mathbb{S}^2 \tag{320}$$

是。这里，表达式 $g_p|_{T_p\mathbb{S}^2 \times T_p\mathbb{S}^2}$ 是双线性型g_p： $T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $T_p\mathbb{S}^2 \times T_p\mathbb{S}^2$ 上的限制；对于所有 $p \in \mathbb{S}^2$，我们可以将集合$T_p\mathbb{S}^2$ 视为 $T_p\mathbb{R}^3$ 的子集。

正如接下来将会明了的，按照构造，黎曼流形$(\mathbb{S}^2, \tau_{\mathbb{R}^3,\ \mathbb{S}^2}, \mathcal{A}_{\mathbb{S}^2}, h)$ 是球面的一种模型，并赋予了通常且直观的标准几何。

那么，光滑的 (0,2) 阶张量场 g 如何在光滑流形上诱导出几何呢？为此，我们首先要问，在一个流形上有几何究竟意味着什么。

例如，直观来说，借助几何，我们应该能够讨论曲线，尤其是直线之类的对象。

此外，我们还应借助几何建立角度概念，从而能够指出相交曲线之间的夹角。由于按照经典且直观的理解，两点之间的连接直线是这两点之间最短的连接曲线，因此我们也希望在光滑流形上，将两点之间的连接直线定义为这两点之间最短的连接曲线。

在一个未经赋予额外结构的光滑流形（$\mathcal{M}$，τ，$\mathcal{A}$）上，无法定义这样的连接直线，因为我们尚未在光滑流形上建立长度度量。也就是说，我们目前还无法测量光滑流形上曲线的长度。

因此，本章的目标是说明，借助黎曼度量 g，我们既能够在光滑流形（$\mathcal{M}$，τ，$\mathcal{A}$）上引入合理的角度概念，也能够借助黎曼度量 g 定义合理的长度度量，进而由此推导出连接直线的概念。

从现在起，我们将不再使用“连接直线”这一说法，而只采用“（弱）连接测地线”这一概念，以便将黎曼流形上的连接直线与经典几何中的普通连接直线区分开来。因此，本章的目的之一是为如下断言提供依据：g 在($\mathcal{M}$，τ，$\mathcal{A}$)上诱导出一种几何。

7.1 黎曼流形的角度概念

我们首先基于黎曼度量 g来建立角度概念。为此，我们考察两条单射光滑曲线 γ：$(a,\ b) \longrightarrow \mathcal{M}$ 和δ：$(c,\ d) \longrightarrow \mathcal{M}$，其中 $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$，以及 $c < d$。此外，我们要求曲线 γ 和 δ 在点 $p \in \mathcal{M}$ 相交，也就是说，存在一个 $\lambda_1 \in (a,\ b)$和一个 $\lambda_2 \in (c,\ d)$，使得 $\gamma(\lambda_1) = \delta(\lambda_2) = p$。

那么，我们如何定义曲线 γ 和 δ 在点 p处的角呢？首先注意到，根据前一章的内容，我们可以将 γ 的切向量 $X_{\gamma,\ p} \in T_p\mathcal{M}$ 以及 δ 的切向量 $X_{\delta,\ p} \in T_p\mathcal{M}$ 理解为在点 p处分别与 γ 和 δ 相切，并且作用于点 p。此外，我们假设两条曲线 γ 和 δ 在点 $p \in \mathcal{M}$ 处是正则的，即 $X_{\gamma,\ p},\ X_{\delta,\ p} \in T_p\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}_{T_p\mathcal{M}}\}$。

此外，我们还知道，黎曼张量场 g 在点 p 处为我们提供了一个标量积 g_p 在 $T_p\mathcal{M}$ 上。我们在第 4.3 节中了解到，向量空间上的标量积为该向量空间赋予了几何结构，因而也定义了角度概念。如方程（102）中所定义的，我们在 $T_p\mathcal{M}$ 上将 θ 与$X_{\gamma,p} \in T_p\mathcal{M}$ 以及$X_{\delta,p} \in T_p\mathcal{M}$ 之间的角定义为

$$cos(\theta) := \frac{g_p(X_{\gamma,p}, X_{\delta_p})}{\sqrt{g_p(X_{\gamma,p}, X_{\gamma,p})} \cdot \sqrt{g_p(X_{\delta,p}, X_{\delta,p})}}. \tag{321}$$

在第 4.3 节中，我们已经探讨了这一定义的合理性，并论证了为什么可以将 (102) 或 (321) 中的 θ 称为（抽象的）角。因此，(321) 在切向量 $X_{\gamma,p}$ 与 $X_{\delta,p}$之间提供了一个有意义的角度概念。

由于在点 p，这两个切向量可以分别视为曲线γ 和 δ 的切向量，因此，很自然地会将点 $p \in \mathcal{M}$ 处曲线 γ 与 δ 之间的角定义为 $X_{\gamma,\ p}$ 与 $X_{\delta,\ p}$ 之间的角。由此得到以下定义，它也对如下断言提供了部分依据：黎曼度量 g 在光滑流形 $(\mathcal{M},\ \tau,\ \mathcal{A})$ 上诱导出一种几何。

定义7.2。 设 $(M, \tau, \mathcal{A}, g)$ 是一个黎曼流形。再设$\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathcal{M}$ 和 $\delta : (c, d) \longrightarrow \mathcal{M}$ 是两条单射的、光滑且正则的曲线，其中$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ 以及 $c < d$，使得存在一个 $\lambda_1 \in (a, b)$ 和 $\lambda_2 \in (c, d)$，满足

$$\gamma(\lambda_1) = \delta(\lambda_2) = p \in \mathcal{M} \tag{322}$$

exi.....。那么，点 p 处 γ 与 δ 之间的角 $\theta \in [0, \pi)$ 定义为 *ch*

$$\theta := cos^{-1}\left(\frac{g_p(X_{\gamma,p}, X_{\delta_p})}{\sqrt{g_p(X_{\gamma,p}, X_{\gamma,p})} \cdot \sqrt{g_p(X_{\delta,p}, X_{\delta,p})}}\right). \tag{323}$$

7.2 长度泛函 $\mathbb{L}$ 与（弱）测地线

在上一节中，我们成功地借助黎曼度量 g 解释了直观的角度概念，现在我们将通过 g来定义直观的长度概念 $\mathbb{L}$。为此，接下来我们将定义一个长度泛函 $\mathbb{L}_{(a,b)}$，其定义域为 $a, b \in \mathbb{R}$，且 $a < b$，通俗地说，它接收形如 $\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathcal{M}$ 的光滑曲线，并为其赋予相应的长度，我们将其记作 $\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma)$。从技术上讲，长度泛函定义为如下形式的映射

$$\mathbb{L}_{[a,b]} : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{324}$$

其中，集合 $\mathcal{C}^\infty([a, b], \mathcal{M})$ 定义为

$$\mathcal{C}^\infty([a, b], \mathcal{M}) :=:= \{\gamma \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathcal{M}) \mid \gamma|_{(a,b)} \in \mathcal{C}^\infty((a, b)\}. \tag{325}$$

这里，集合 $\mathcal{C}^0([a, b], \mathcal{M})$ 表示所有形如 $[a, b] \longrightarrow \mathcal{M}$ 的连续曲线 γ 所构成的集合，而 $\gamma|_{(a,b)}$ 意味着我们将 γ 限定在区间 (a, b) 上。

请注意，目前长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 仍是一个纯粹抽象的函数，原则上可以任意定义。不过，既然我们追求的是一种直观的长度概念，那么最终长度泛函的具体形式就应当编码我们对长度概念的部分直观认识，从而使我们赋予泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 的名称名副其实。$\mathbb{L}_{[a,b]}$ 不应任意选取，还有一个原因：我们最终也希望为长度泛函建立一套理论。为此，我们必须赋予长度泛函一定的结构，也就是说，要求泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 具有某种一般形式；若没有这一附加结构，我们就无法进行妥善的研究。

由于这项附加结构，也就是对长度泛函一般形式的要求，应当编码我们对长度概念的部分直观认识，因此接下来我们将以一个熟悉的框架为基，推导或说明 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 的一般形式。

为此，我们考虑带有标准内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}$ 的 $\mathbb{R}^d$，它诱导出 $\mathbb{R}^d$ 的标准可视化。现在设给定一条连续曲线 $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^d$，满足 $\gamma=(\gamma^1,\ ...,\ \gamma^d)$，使得函数 $\gamma^i:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $(a,\ b)$ 上按照泛函分析中的定义可微，则可知 γ 在 $(a,\ b)$ 上是盖托可微的（注意，$(a,\ b)\subseteq\mathbb{R}$ 是赋范向量空间 $(\mathbb{R},\ |\cdot|)$ 中的一个开集，并且 $(\mathbb{R}^d,\ \|\cdot\|_{\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}})$ 同样是一个赋范向量空间，因此我们可以将泛函分析中的可微性定义应用于 γ），因为对于 $\lambda_0\in(a,\ b)$，$\alpha\in\mathbb{R}$ 以及多元链式法则，有

$$\begin{aligned}\gamma'(\lambda_0;\alpha)&=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\gamma(\lambda_0+t\cdot\alpha)-\gamma(\lambda_0)}{t}\\&=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{(\gamma^1(\lambda_0+t\cdot\alpha),...,\gamma^d(\lambda_0+t\cdot\alpha))-(\gamma^1(\lambda_0),...,\gamma^d(\lambda_0))}{t}\\&=\lim_{t\longrightarrow0}\left(\frac{\gamma^1(\lambda_0+t\cdot\alpha)-\gamma^1(\lambda_0)}{t},...,\frac{\gamma^d(\lambda_0+t\cdot\alpha)-\gamma^d(\lambda_0)}{t}\right)\\&=\alpha\cdot\left((\gamma^1)^{(1)}(\lambda_0),...,(\gamma^d)^{(1)}(\lambda_0)\right)\\&=\alpha\cdot\gamma'(\lambda_0),\end{aligned}\tag{326}$$

其中在最后一步中，我们再次将所有 $i\in\{1,...,d\}$ 的表达式 $(\gamma^i)'$ 与表达式 $(\gamma^i)^{(1)}$ 认同。因此，对所有 $\gamma'=$ 均有 $\gamma^1((^{(1)}),\ ...,\ (\gamma^d)^{(1)})$，其中

$$(\gamma^i)^{(1)}(\lambda_0)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\gamma^i(\lambda_0+t)-\gamma^i(\lambda_0)}{t}=:\frac{d\gamma^i}{d\lambda}(\lambda_0)\tag{327}$$

对所有 $i\in\{1,...,d\}$ 以及 $\lambda_o\in(a,\ b)$ 都成立。注意，由于 $(\mathbb{R}^d,\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d})$ 的几何性质，向量 $\gamma'(\lambda_0)=:\frac{d\gamma}{d\lambda}(\lambda_0)$ 在曲线 γ 于点 $\gamma(\lambda_0)$ 处与其相切。进一步地，如上所述，我们用 $\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma)$ 表示曲线 γ 的长度；在这一具体情形下，我们所说的 $\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma)$ 确实是欧几里得几何中曲线的直观长度概念。现在设
$\mathcal{P}=\{\lambda_0,...,\lambda_{n_\mathcal{P}}\}\subseteq\mathbb{R}$，其中 $n_\mathcal{P}\in\mathbb{N}$ 是 $[a,b]$ 的等距划分，即

$$a=\lambda_0<\lambda_1<...<\lambda_{n_\mathcal{P}-1}<\lambda_{n_\mathcal{P}}=b\tag{328}$$

und

$$\lambda_i-\lambda_{i-1}=\Delta\lambda\qquad\forall i\in\{1,...,n_\mathcal{P}\}.\tag{329}$$

我们用 $|\mathcal{P}|=\Delta\lambda$ 表示等距划分 $\mathcal{P}$ 的网格宽度。对于一个$i\in\{1,...,n_\mathcal{P}\}$，我们考察集合 $\gamma([\lambda_{i-1},\lambda_i])\subseteq\mathbb{R}^d$；当 $\Delta\lambda$ 取得足够小时，它表示曲线 $\gamma([a,b])\subseteq\mathbb{R}^d$ 的一个足够小的曲线段，其长度可用 $ds_{i,\ \mathcal{P}}:=\|\gamma(\lambda_i)-\gamma(\lambda_{i-1})\|_{\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}}$ 进行近似。于是，曲线 γ 的直观长度可以近似表示为

$$\mathbb{L}_{[a,b],\mathcal{P}}(\gamma):=\sum_{i=1}^{n_\mathcal{P}}ds_{i,\mathcal{P}}.\tag{330}$$

直观地说，很明显，对于越来越细的等距划分 $\mathcal{P}$ ，近似式 $\mathbb{L}_{[a,b],\ \mathcal{P}}(\gamma)$ 会越来越接近曲线 γ 的实际直观长度 $\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma)$，即

$$\lim_{|\mathcal{P}|\longrightarrow 0} \mathbb{L}_{[a,b],\mathcal{P}}(\gamma) = \mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma). \tag{331}$$

在此我们指出，由于近似的构造$\mathbb{L}_{[a,b],\ \mathcal{P}}(\gamma)$，我们也就明白了为什么需要要求曲线 γ 定义在区间 $[a,b]$ 上，而不仅仅定义在开区间$(a,\ b)$上。此外，若 $\gamma|_{(a,b)}$ 还属于类 $\mathcal{C}^1((a,\ b)\ \mathbb{R}^d)$，则

$$\begin{aligned}
\lim_{|\mathcal{P}|\longrightarrow 0} \mathbb{L}_{[a,b],\mathcal{P}}(\gamma) &= \int_a^b \|\gamma'(\lambda)\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}}\, d\lambda \\
&= \int_a^b \sqrt{\langle\gamma'(\lambda),\gamma'(\lambda)\rangle_{\mathbb{R}^d}}\, d\lambda \\
&= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{d}((\gamma^i)^{(1)}(\lambda))^2}\, d\lambda \\
&= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{d\gamma^i}{d\lambda}(\lambda)\right)^2}\, d\lambda
\end{aligned} \tag{332}$$

则有 [13]。从直观上看，我们已经可以通过方程

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{[a,b],\mathcal{P}}(\gamma) &= \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{P}}} ds_{i,\mathcal{P}} \\
&= \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{P}}} \|\gamma(\lambda_i)-\gamma(\lambda_{i-1})\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}} \\
&= \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{P}}} \left\|\frac{\gamma(\lambda_i)-\gamma(\lambda_{i-1})}{\Delta\lambda}\right\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}} \cdot \Delta\lambda
\end{aligned} \tag{333}$$

以及普通黎曼积分的定义来猜想到这一结果。综上可得

$$\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\lambda)\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}}\, d\lambda = \int_a^b \sqrt{\langle\gamma'(\lambda),\gamma'(\lambda)\rangle_{\mathbb{R}^d}}\, d\lambda \tag{334}$$

现在再次将 $\mathbb{R}^d$（如注释6.1.中所述）视为光滑流形$(\mathbb{R}^d,\ \tau_{\mathbb{R}^d},\ \mathcal{B})$，其中 $\tau_{\mathbb{R}^d}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的标准拓扑；那么，如例7.1. 所示，我们可以在这个光滑流形上定义如下黎曼$(0,2)$张量场

$$\begin{aligned}
&g : \mathbb{R}^d \longrightarrow T_2^0\mathbb{R}^d \\
&\qquad p \longmapsto g_p \quad mit \quad g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) = \langle e_i, e_j\rangle_{\mathbb{R}^d} \quad i,j\in\{1,...,d\}
\end{aligned} \tag{335}$$

赋予结构，其中再次选取了坐标图 $(\mathbb{R}^d,\ id_{\mathbb{R}^d} = (x^1,\ .....,\ x^d)) \in \mathcal{B}$，并且

$$e_i := (0,...,0,\ \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}},0,...,0) \in \mathbb{R}^d \qquad \forall i\in\{1,...,d\} \tag{336}$$

成立。再次注意， g 实际上是一个 (0，2) 阶张量丛中的光滑截面，因为根据 g 的定义可知，相对于坐标图 $(\mathbb{R}^d, id_{\mathbb{R}^d})$ 的图诱导的分量函数都是常函数，因此它们属于 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ 类。还要注意，根据表达式 (278)（该式说明如何计算$X_{\gamma,\gamma(\lambda)} \in T_p\mathbb{R}^d$ 相对于坐标图 $(\mathbb{R}^d, id_{\mathbb{R}^d})$ 的向量分量），可知

$$X_{\gamma,\gamma(\lambda)} = \sum_{i=1}^{d} (\gamma^i)^{(1)}(\lambda) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(\lambda)} \qquad \forall \lambda \in (a,b) \tag{337}$$

是。因此，对于所有 $\lambda \in (a,b)$，立即可得

$$\begin{aligned} g_{\gamma(\lambda)}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)}, X_{\gamma,\gamma(\lambda)}) &= \sum_{i,j=1}^{d} (\gamma^i)^{(1)}(\lambda) \cdot (\gamma^j)^{(1)}(\lambda) \cdot g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(\lambda)}, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(\lambda)}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} (\gamma^i)^{(1)}(\lambda) \cdot (\gamma^j)^{(1)}(\lambda) \cdot \langle e_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= \langle \gamma'(\lambda), \gamma'(\lambda) \rangle_{\mathbb{R}^d}. \end{aligned} \tag{338}$$

由此，我们可以将欧几里得长度泛函 (334) 改写为

$$\mathbb{L}_{(a,b)}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(\lambda)}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)}, X_{\gamma,\gamma(\lambda)})}\, d\lambda. \tag{339}$$

这启发我们作如下定义：

定义 7.3. 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}, g)$ 是一个黎曼流形，并且设$\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathcal{M})$ 是一条满足 a、$b \in \mathbb{R}$ 和 $a < b$ 的曲线。那么，黎曼长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]} \colon \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(\lambda)}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)}, X_{\gamma,\gamma(\lambda)})}\, d\lambda. \tag{340}$$

注意，在一般流形 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}, g)$ 上，曲线 $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathcal{M})$ 的长度 $\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma)$ 往往指的是一种抽象长度，因为一方面集合 $\mathcal{M}$ 可能是抽象给定的；另一方面，即使在 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^d$ 的情况下，黎曼度量 g 也未必与式 (335) 中的黎曼张量场相同，而后者曾在各个切空间 $T_p\mathcal{M}$ 中诱导出直观的欧几里得几何。

尽管如此，我们对长度概念的一部分直观认识仍编码在泛函（340）中，因为长度泛函（340）的结构形式保证了：在熟悉的邻域（$\mathcal{M}$， τ， $\mathcal{A}$）=（$\mathbb{R}^d$, $\tau_{\mathbb{R}^d}$， $\mathcal{B}$）以及对黎曼度量的选择（335）下，表达式（340）会化为欧几里得几何中通常且直观的长度概念。

关于上述定义 7。3 还需注意，严格来说，如果我们不写作 $X_{\gamma,\ \gamma(\lambda)}$，而改写为 $X_{\gamma,\ \lambda,\ \gamma(\lambda)}$，形式上会更为严谨，因为 γ 完全可能也是一条非单射曲线。不过，为了使记号保持简洁，我们对此不作处理，因为从概念上很清楚这里所指为何。

注记 7.1。 在此还需指出，我们可以将刚刚定义的长度概念推广到 $\mathcal{PC}^\infty([a,b],\mathcal{M})$ 类的曲线，即分段光滑曲线。为此，集合 $\mathcal{PC}^\infty([a,b],\mathcal{M})$ 定义为所有曲线 $\gamma\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathcal{M})$所组成的集合，对于这些曲线，存在一个集合 $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,\lambda_{n+1}\}\subseteq(a,b)$，满足 $n\in\mathbb{N}$、 $\lambda_1=a$ 和 $\lambda_{n+1}=b$，使得 $\gamma|_{(\lambda_i,\lambda_{i+1})}\in\mathcal{C}^\infty((\lambda_i,\lambda_{i+1}),\mathcal{M})$ 对所有 $i\in\{1,...,n\}$ 均成立。对于这样一条曲线，其长度 $\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma)$定义为

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma) &:= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{L}_{[\lambda_i,\lambda_{i+1}]}(\gamma|_{[\lambda_i,\lambda_{i+1}]})\\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\sqrt{g_{\gamma(\lambda)}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)},X_{\gamma,\gamma(\lambda)})}\,d\lambda.\end{aligned}\tag{341}$$

请注意，由于积分的线性性，上述表达式是良定义的。

现在，我们要在黎曼流形 $(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A},g)$ 上引入一个对几何学很重要、对我们而言也很核心的概念，即（弱）测地线；这一概念旨在推广欧几里得几何中的直线概念。

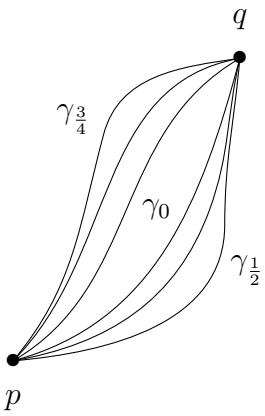
为此，我们首先考察 $\mathcal{M}$ 中给定的两个点 p 和 q，满足 $p\neq q$。进一步地，对于 $a,b\in\mathbb{R}$，满足 $a<b$，我们定义集合 $\mathcal{C}^\infty_{p,q}([a,b],\mathcal{M})$，其中包含所有曲线 $\gamma\in\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathcal{M})$：它们从点 p 出发并在点 q 结束，即对于 $\gamma\in\mathcal{C}^\infty_{p,q}([a,b],\mathcal{M})$，有 $\gamma\in\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathcal{M})$，从而 $\gamma(a)=p$ 且 $\gamma(b)=q$。

接下来，我们定义曲线$\gamma_0\in\mathcal{C}^\infty_{p,\,q}([a,b],\,\mathcal{M})$的连续变形：

定义 7.4。 设$(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A})$ 是一个光滑流形， p 和 q 是其中的点。再设$\gamma_0\in\mathcal{C}^\infty_{p,\,q}([a,b],\mathcal{M})$ 是一条满足 a、 $b\in\mathbb{R}$和 $a<b$的曲线，它始于点p ，终于点 q 。曲线 γ_0 的连续变形由一个族$(\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}\subseteq\mathcal{C}^\infty_{p,\,q}([a,b],\mathcal{M})$ 给出，其中 $\epsilon>0$ 且 $\gamma_{\alpha=0}=\gamma_0$，使得映射

$$\begin{aligned}\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] &\longrightarrow \mathcal{M}\\ (\alpha,\lambda) &\longmapsto \gamma_\alpha(\lambda)\end{aligned}\tag{342}$$

是连续的。其中，在 $[a,b]$和$(-\epsilon,\epsilon)$上，分别采用由 $\mathbb{R}$的标准拓扑诱导的子空间拓扑，因此$(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]$ 配备了相应的积拓扑。类似地，也可以定义连续变形，其中族中的各个元素来自集合$\mathcal{PC}^\infty_{p,q}([a,b],\mathcal{M})$；这里，$\mathcal{PC}^\infty_{p,q}([a,b],\mathcal{M})$ 定义为 $\mathcal{PC}^\infty([a,b],\mathcal{M})$中所有曲线组成的集合，这些曲线具有如下性质：在 p开始，并在 q结束。



直观上，很容易看出，按照上面的定义，族$(\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$是曲线$\gamma \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}([a,b],\mathcal{M})$的连续变形：一方面，对于 $\alpha = 0$，有 $\gamma_\alpha = \gamma_0$，也就是说，曲线 γ_0 包含在族$(\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 中；另一方面，族$(\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$中的其余曲线也都在点 p 开始、在点 q 结束，并且可由曲线 γ_0 通过连续改变参数 $\alpha \in (-\epsilon,\epsilon)$连续得到。

对于曲线 γ_0 的连续变形 $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$，现在我们针对每个单独的 $\alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$ 考察表达式 $\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_\alpha)$，即曲线 γ_α 的长度。现在我们可以将这个表达式本身视为关于参数 $\alpha \in (-\epsilon,\ \epsilon)$ 的函数 F_γ，也就是说，

$$\begin{aligned} F_\gamma : (-\epsilon,\epsilon) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto F_\gamma(\alpha) := \mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_\alpha). \end{aligned} \tag{343}$$

因此，映射 F_γ 可以解释为一个实值函数，它定义在赋范空间 $(\mathbb{R},\ |\cdot|)$ 的开集 $(-\epsilon,\ \epsilon)$ 上。此外，我们还假设连续变形 $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 的选取方式使得相应的函数 F_γ 在点 $\epsilon = 0$ 处可微（在值域中，我们再次选取绝对值函数 $|\cdot|$作为范数）。借助这些假设，我们现在可以说明泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}|_{\mathcal{C}^\infty_{p,\ q}((a,\ b)\ \mathcal{M})}$ 的平稳曲线是什么意思，其中 $\mathbb{L}_{[a,b]}|_{\mathcal{C}^\infty_{p,\ q}((a,\ b)\ \mathcal{M})}$ 表示将长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$限制在集合 $\mathcal{C}^\infty_{p,\ q}((a,\ b)\ \mathcal{M})$ 上。

定义 *7.5.* 设 $(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A},g)$ 是一个黎曼流形，p和 q是其中的两个点，满足 $\mathcal{M}$ 和 $p \neq q$；a和 b 是两个实数，满足 $a < b$。再设$\mathbb{L}_{[a,b]}|_{\mathcal{C}^\infty_{p,q}((a,b)\ \mathcal{M})}$ 是限制在集合 $\mathcal{C}^\infty_{p,q}((a,b)\ \mathcal{M})$ 上的长度泛函。若对于曲线 $\gamma_0 \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}((a,b)\ \mathcal{M})$ 的所有连续变形 $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$，只要其在 *(343)* 中定义的相应变分函数 F_γ 在点 *0* 处可微，条件

$$\left.\frac{dF_\gamma}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} := F^{(1)}_\gamma(0) = 0 \tag{344}$$

成立。关于$\mathbb{L}_{[a,b]}|_{\mathcal{C}^\infty_{p,\ q}((a,\ b)\ \mathcal{M})}$ 的驻定曲线也称为从 p 到 q 的弱测地曲线，简称弱测地线或关于 p 和 q 的弱测地线。类似地，也可以定义关于集合$\mathcal{PC}^\infty_{p,\ q}([a,b],\mathcal{M})$ 的弱测地线这一概念。

在本文后续内容中，我们始终将长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 视为定义在集合$\mathcal{PC}^{\infty}_{p,\,q}([a,b],\mathcal{M})$上的泛函。

注释 7.2. 方程 (344)中出现的表达式 $\frac{dF_\gamma}{d\alpha}\big|_{\alpha=0}$，通常也称为长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 的一阶变分。在所谓的变分法中，常取 $\mathcal{M}$ 为 $\mathbb{R}^d$，并赋予其注释 6.1. 中所述的通常光滑结构；此时，人们不用本文讨论的曲线 γ_0 的一般连续变形 $(\gamma_\alpha)^{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$，而使用以下对 γ_0的变分:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_\alpha : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ \lambda &\longmapsto \hat{\gamma}_\alpha(\lambda) := \gamma_0(\lambda) + \alpha\cdot\eta(\lambda),\end{aligned} \tag{345}$$

其中 $\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)$ 和 $\eta\in\mathcal{C}^\infty_0([a,b],\mathbb{R}^d)$。集合 $\mathcal{C}^\infty_0([a,b],\mathbb{R}^d)$ 定义为所有满足性质 $\eta(a)=\eta(b)=0$ 的曲线 $\eta\in\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R}^d)$ 所组成的集合；这里，0 表示 $\mathbb{R}^d$ 的零向量。集合 $\mathcal{C}^\infty_0([a,b],\mathbb{R}^d)$ 也称为所有具有紧支撑的曲线 $\eta\in\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R}^d)$ 所组成的集合，是所谓测试函数空间的一个例子。对于每个固定的$\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)$，$\hat{}\gamma_\alpha$ 作为连续曲线之和，仍是一条连续曲线。

注意，对于族 $\hat{}\gamma:=(\hat{}\gamma_\alpha)^{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$，有

$$\hat{\gamma}_\alpha(a)=\hat{\gamma}_0(a)\quad und\quad \hat{\gamma}_\alpha(b)=\hat{\gamma}_0(b) \tag{346}$$

对所有 $\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)$ 都成立，也就是说，该族 $(\hat{}\gamma_\alpha)^{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 中的每条曲线都从点$\hat{}\gamma_0(a)$出发，并在点 $\hat{}\gamma_0(b)$处结束。此外还有

$$\hat{\gamma}_{\alpha=0}=\gamma_0, \tag{347}$$

也就是说，曲线 γ_0 包含在族 $(\hat{}\gamma_\alpha)^{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 中。由于 $\mathcal{M}=\mathbb{R}^d$，我们可以利用 $\mathbb{R}^d$ 的线性结构，这才使我们能够将曲线 $\hat{}\gamma_\alpha$ 定义为两个函数 γ_0和 $\alpha\cdot\eta$的逐点和。由于

$$\|\gamma_0(p)-(\gamma_0(p)+\alpha\cdot\eta(p))\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}}=|\alpha|\cdot\|\eta(p)\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}}\longrightarrow 0 \tag{348}$$

对于 $\alpha\longrightarrow 0$，可知当 $\alpha\in$ 足够小时，$(-\epsilon,\epsilon)$ 曲线 $\hat{}\gamma_\alpha$（或其像）与曲线 γ_0 的像足够接近，因此综合而言，这里的族 $(\hat{}\gamma_\alpha)^{\alpha\in(-\alpha,\alpha)}$ 也可以解释为曲线γ_0 的连续变形。在此框架下，表达式是

$$\left.\frac{dF_{\hat{\gamma}}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{d}{d\alpha}\mathbb{L}_{[a,b]}(\hat{\gamma}_\alpha)\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{d}{d\alpha}\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_0+\alpha\cdot\eta)\right|_{\alpha=0} \tag{349}$$

在“点” γ_0处的方向导数。请注意，在 $\mathcal{M}=\mathbb{R}^d$ 的情况下，集合 $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R}^d)$ 构成一个向量空间，而且可以在其上赋予任意范数$\|\cdot\|$，因为关于 $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R}^d)$ 上的任意范数，都会诱导出变分计算所需的邻近概念，该概念由(348)给出。因此，关于 $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R}^d)$上的任意范数 $\|\cdot\|$

$$\|\gamma_0-\hat{\gamma}_\alpha\|=|\alpha|\cdot\|\eta\|\longrightarrow 0 \tag{350}$$

对 $\alpha \longrightarrow 0$而言。因此，我们确实可以将(349) 视为泛函分析意义下的方向导数。这里也常采用变分计算中惯用的记法

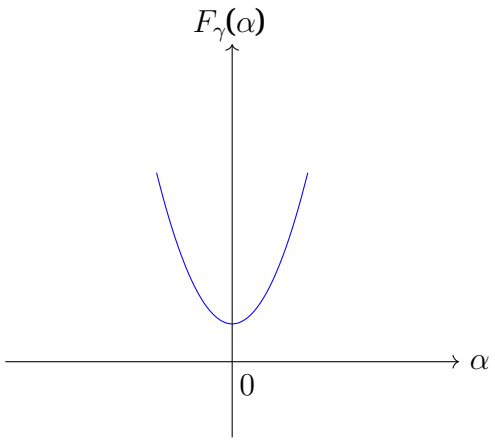
$$\delta\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_0,\eta) := \frac{d}{d\alpha}\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_0+\alpha\cdot\eta)\Big|_{\alpha=0}. \tag{351}$$

那么，直观地说，弱测地线这一概念意味着什么呢？考虑来自 $\mathcal{M}$ 的两个点 p 和 q，其中 $p \neq q$，以及所有将这两个点相互连接起来的光滑曲线的集合。那么，例如，从 p 到 q 的一条弱测地线，就是 $\mathcal{PC}^{\infty}_{p,\,q}([a,b],\ \mathcal{M})$ 中长度最小或最大的那条曲线（当然，前提是在黎曼流形上确实存在这样的曲线）。我们如何看出这种解释是正确的呢?

为此，我们例如假设 $\gamma_0 \in \mathcal{PC}^{\infty}_{p,\,q}([a,b],\ \mathcal{M})$ 是 p 和 q 之间长度最小的曲线，即 γ_0 表示 p 和 q 之间的最短路径。若将 ϵ 取得足够小，则对于曲线 γ_0 的每个连续变形 $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$，每个 $\gamma_\alpha \in(\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 都只表示曲线 γ_0 的一个微小变分。由于 γ_0 是从 p 到 q 的最短路径，因此有

$$\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_0) \leq \mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_\alpha) \qquad \forall\alpha\in(-\epsilon,\epsilon). \tag{352}$$

由于我们还假设所选的连续变形满足： F_γ 在点 $\alpha = 0$ 处可微，因此可知， F_γ 的函数图像在0附近大致呈现如下形状:



根据图示以及我们知道表达式 $F^{(1)}_\gamma(0)$ 表示函数图像在点 0 处的斜率，可以清楚地看出，在这种情况下必须有 $F^{(1)}_\gamma(0) = 0$。反过来，由上图也可推出，如果对于所有任意的连续变形，其对应的变分函数F_γ 在0处可微，并且图像大致呈现上述形状，那么 γ_0 必定是 $\mathbb{L}_{[a,b]}|_{\mathcal{C}^{\infty}_{p,\,q}(a,\ b)\ \mathcal{M})}$ 的一个（局部）极小值。对于从 p 到 q的最长路径，也可以用类似的方式论证。

在结束本节之前，我们还想推广弱测地线的概念。不过，我们必须先明确

我们所说的曲线 $\gamma_0 \in \mathcal{PC}^\infty([a,b],\mathcal{M})$ 的光滑变形 $\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\longrightarrow\mathcal{M}$，其中 $\epsilon>0$ 和 $a,b\in\mathbb{R}$，且 $a<b$，究竟是什么意思。

通俗地说，这应当是曲线 γ_0的一个连续变形，同时还应当是光滑的。但这就引出了这样一个问题：如何定义形如 $\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\longrightarrow\mathcal{M}$ 的光滑函数，其中 $(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A})$ 又是一个 d维光滑流形。

首先注意到，如果 γ 应当是一个连续变形，那么 γ 必须关于 $(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]$ 上的积拓扑以及 $\mathcal{M}$ 上的拓扑 τ是连续的。这里，$(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]$ 上的积拓扑由 $(-\epsilon,\epsilon)$ 和 $[a,b]$上的子空间拓扑诱导，而后者又由实数的标准拓扑诱导。

若将 $(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]$上的积拓扑简记为 $\tau_{\mathcal{P}}$，那么，定义形如 $(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\longrightarrow\mathcal{M}$的光滑函数的第一种尝试，将类似于定义 6.9。 在该定义中，我们特别要求：对于所有满足 $\gamma_0^{-1}(\mathcal{U})\neq\emptyset$ 的坐标图 $(\mathcal{U},\phi)\in\mathcal{A}$，曲线 $\gamma_0:(a,b)\longrightarrow\mathcal{M}$ 是光滑的，此时映射

$$\phi\circ\gamma_0:\gamma_0^{-1}(\mathcal{U})\longrightarrow\phi(\mathcal{U}) \tag{353}$$

是光滑的。$\phi\circ\gamma_0|_{\gamma_0^{-1}(\mathcal{U})}$的光滑性应当按照传统的泛函分析意义来理解。我们之所以能够在泛函分析意义上讨论映射$\phi\circ\gamma_0|_{\gamma_0^{-1}(\mathcal{U})}$ 可能具有的光滑性，是因为定义的构造确保了$\gamma_0^{-1}(\mathcal{U})$可以被视为赋范空间中的开集，这样我们才能运用映射可微性的定义。

因此，为了仿照曲线光滑性的定义，确立形如 $\gamma(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\longrightarrow\mathcal{M}$的光滑映射这一概念，我们必须确保，对于所有坐标图$(\mathcal{U},\phi)\in\mathcal{A}$，集合 $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$都可以被视为赋范空间中的开集。

我们首先作两点观察：首先注意到，我们可以将集合 $(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]$ 理解为 $\mathbb{R}^2$的子集。反过来，我们可以将 $\mathbb{R}^2$理解为赋范空间，其中的范数由标准范数给出，我们将其简记为 $\|\cdot\|_2$，并定义为

$$\|(x,y)\|_2:=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{354}$$

接下来我们注意到，$(-\epsilon,\epsilon)\times(a,b)$上的子空间拓扑由$(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]$上的拓扑 $\tau_{\mathcal{P}}$诱导，根据积拓扑的定义，恰好对应于$(-\epsilon,\epsilon)\times(a,b)$上的积拓扑，前提是区间$(-\epsilon,\epsilon)$和$(a,b)$分别赋予由 $\mathbb{R}$ 上所定义的标准拓扑诱导的子空间拓扑。若我们将$(-\epsilon,\epsilon)\times(a,b)$上的积拓扑记为 τ_p，则根据积拓扑的定义（另请参见即将给出的引理 7.1.. 的证明），还有 $\tau_p\subset\tau_{\mathcal{P}}$成立。

根据积拓扑的构造，我们仍然很容易想到：如果我们为 $\mathbb{R}$ 赋予标准拓扑，那么 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ 上的积拓扑（记作 τ_1）等价于拓扑 τ_2，后者是由范数 $\|\cdot\|_2$ 诱导的拓扑。

如果这确实成立，那么再次根据积拓扑的构造$\tau_p \subset \tau_1$，可得 $\tau_p \subset \tau_2$，从而$\gamma|^{-1}_{(-\epsilon,\ \epsilon)\times(a,\ b)}(\mathcal{U}) \in \tau_2$。这样一来，我们就可以将 $\phi \circ \gamma|_{(-\epsilon,\epsilon)\times(a,b)}$ 理解为一个映射：它定义在赋范空间（$\mathbb{R}^2$，$\|\cdot\|_2$）的一个开子集上，并映射到赋范空间（$\mathbb{R}^d$，$\|\cdot\|_{\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}}$）中，其中$\|\cdot\|_{\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{R}^d}}$表示由 $\mathbb{R}^d$维标准内积诱导的范数。

在这种情况下，光滑变形的定义将很简单：映射 $\gamma: (-\epsilon,\ \epsilon) \times [a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$ 若满足以下条件，则称为曲线 γ_0的光滑变形： γ是曲线 γ_0的连续变形，并且对于所有坐标图 $(\mathcal{U},\ \phi) \in \mathcal{A}$ 满足$\gamma|^{-1}_{(-\epsilon,\ \epsilon)\ \times\ (a,\ b)}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$，映射

$$\phi \circ \gamma|_{(-\epsilon,\epsilon)\times(a,b)} : \gamma|^{-1}_{(-\epsilon,\epsilon)\times(a,b)}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}^d \tag{355}$$

是传统泛函分析意义下的光滑映射。该定义的良定义性，即与坐标图的选择无关，将由定义 6．8．推出，因为由 $\tau_p \subset \tau_2$ 同样可以推出，$(-\epsilon,\ \epsilon) \times (a,\ b) \in \tau_2$ 成立。由于每个开集 $\mathcal{O}$ 都可以通过赋予 $(\mathbb{R}^2,\ \tau_2)$ 子空间拓扑而成为二维光滑流形，

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{O}} &= \{\mathcal{V} \cap \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{V} \in \tau_2\} \\ &= \{\mathcal{V} \in \tau_2 \mid \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}\} \end{aligned} \tag{356}$$

并赋予全局坐标图 $(\mathcal{O}, id_{\mathcal{O}})$ 后，我们也可以将 $\gamma|_{(-\epsilon,\epsilon)\times(a,b)}$ 理解为两个光滑流形之间的映射。

现在只需证明 $\tau_1 = \tau_2$ 确实成立。

定理 7.1. 设集合 $\mathbb{R}$ 赋有标准拓扑。我们构造乘积空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$，并赋予由标准拓扑诱导的乘积拓扑，记为 τ_1。再设 τ_2 是由 $\mathbb{R}^2$ 维标准内积诱导的 $\mathbb{R}^2$ 的标准拓扑。那么 $\tau_1 = \tau_2$。

证明. 要证明这两个拓扑相同，我们一方面必须证明 $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 成立，另一方面必须证明 $\tau_2 \subseteq \tau_1$ 成立，因为这样便证明了 τ_1 中的每个开集也是 τ_2 中的开集，反之亦然。

i) 我们先从 $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 开始：设 $\mathcal{W} \in \tau_1$。根据乘积拓扑的定义，对所有 $(x,y) \in \mathcal{W}$，都存在开区间 $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ 和 $(c,d) \subseteq \mathbb{R}$，使得

$$(x,y) \in (a,b) \times (c,d) \subseteq \mathcal{W} \tag{357}$$

成立。由于区间 (a,b) 和 (c,d) 都是开区间，我们现在可以将它们缩小为 $(\hat{a},b) \subseteq (a,b)$ 和 $(\hat{c},d) \subseteq (c,d)$，使得

$$(x,y) = \left(\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}, \frac{\hat{c}+\hat{d}}{2}\right) \tag{358}$$

成立。接下来，我们通过 $\delta = min\left\{\frac{|\hat{a}-\hat{b}|}{2}, \frac{|\hat{c}-\hat{d}|}{2}\right\}$ 定义~~一个~~ $\delta > 0$。于是可得，

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\delta((x,y)) &= \{(z,w) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(z,w)\|_2 < \delta\} \\ &= \{(z,w) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-z)^2+(y-w)^2} < \delta\} \\ &\subseteq (\hat{a},\hat{b}) \times (\hat{c},\hat{d}) \subseteq \mathcal{W}. \end{aligned} \tag{359}$$

因此，我们可以在每个 $(x,\ y)\ \in \mathcal{W} \in \tau_1$ 周围取一个 δ-邻域，该邻域本身仍包含在 $\mathcal{W}$ 中。根据 (23)，这正是 τ_2 中开集的定义性质，由此可得 $\mathcal{W} \in \tau_2$。由于 $\mathcal{W} \in \tau_1$ 是任意选取的，因此可得 $\tau_1 \subseteq \tau_2$。

ii) 现在考察方向 $\tau_2 \subseteq \tau_1$。设 $\mathcal{U} \in \tau_2$，也就是说，对每个点 $(x,y) \in \mathcal{U}$，都存在一个 $\delta_{(x,y)} > 0$，使得 $(x,y) \in \mathcal{U}_{\delta_{(x,y)}}((x,y)) \subseteq \mathcal{U}$ 成立。我们考察实区间 $\left(x - \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}, x + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right)$ 和 $\left(y - \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}, y + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right)$。设 (z,w) 是 $\left(x - \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}, x + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right) \times \left(y - \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}, y + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right)$ 中的任意元素。那么

$$\begin{aligned}\|(x,y)-(z,w)\|_2 &= \sqrt{(x-z)^2+(y-w)^2} \\ &< \sqrt{\left(x - x + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - y + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\delta_{(x,y)}^2}{2} + \frac{\delta_{(x,y)}^2}{2}} = \delta_{(x,y)}, \end{aligned} \tag{360}$$

由此

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}, x + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right) \times \left(y - \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}, y + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right) &\subseteq \mathcal{U}_{\delta_{(x,y)}}((x,y)) \\ &\subseteq \mathcal{U} \end{aligned} \tag{361}$$

可知。由于根据乘积拓扑的定义，$\left(x - \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}, x + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right) \times \left(y - \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}, y + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right)$ 是关于 τ_1 的开集，并且对于每个 $(x,y) \in \mathcal{U}$，我们都可以找到一个 $\delta_{(x,y)}$，使得 (361) 成立，因此我们也可以将 $\mathcal{U}$ 写成

$$\mathcal{U} = \bigcup_{(x,y)\in\mathcal{U}} \left(x - \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}, x + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right) \times \left(y - \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}, y + \frac{\delta_{(x,y)}}{\sqrt{2}}\right). \tag{362}$$

然而，由拓扑的定义可知，(362) 的右侧必须包含在 τ_1 中，由此立即可得，$\mathcal{U}$ 也必须包含在 τ_1中。由于 $\mathcal{U} \in \tau_2$ 的选取是任意的，因此可得 $\tau_2 \subseteq \tau_1$ 成立。

由此证明了 $\tau_1 = \tau_2$ 成立。 □

借助上述内容，我们现在知道光滑变形的含义。这样，我们便可以推广弱测地线的概念：

定义 7.6。 设$(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}, g)$ 是一个黎曼流形，且 $\gamma_0 \in \mathcal{PC}^\infty_{p,q}([a,b], \mathcal{M})$ 是一条满足 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $a < b$，以及 $p, q \in \mathcal{M}$的曲线。若对于 $\mathbb{L}_{[a,b]}|_{\mathcal{PC}^\infty_{p,q}([a,b],\mathcal{M})}$的所有光滑变形 γ，其对应的变分函数 F_γ 在 $\alpha = 0$ 处可微，并且满足

$$\left.\frac{dF_\gamma}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{363}$$

ist.

由于根据定义，每个光滑变形都是连续变形；而与弱测地线不同，对于测地线，表达式（363）只需对光滑变分成立，因此测地线这一概念实际上是对弱测地线概念的推广。由此，每条弱测地线自动也是测地线，但并非每条测地线都必然是弱测地线。

现在自然会产生这样一个问题：既然与测地线这一概念相比，弱测地线这一概念实际上更强，为什么还要称其为弱测地线呢？之所以这样称呼，是因为对变形所提出的要求较弱。对于弱测地线，变形只需是连续的；而对于测地线，变形还必须是光滑的。

下一节中我们将看到，借助光滑变形这一概念，可以推导出一个易于检验的、弱测地线必须满足的必要条件。

7.3 测地线方程

现在我们将更详细地研究黎曼流形 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}, g)$ 的弱测地线，并推导出一个易于检验的必要条件，该条件对于黎曼流形的弱测地线始终成立。

借助这一判据，我们便能够轻松检验给定的曲线是否确实是弱测地线的候选者。此外，在一个特殊情形下，我们还将看到，可以利用这一判据求出黎曼流形上的测地线。

为了推导这一工具，我们还需简要证明：若给定一条连接点 $\gamma_0(a) = p$和 $\gamma_0(b) = q$ 的弱测地线 $\gamma_0 : [a, b] \longrightarrow \mathcal{M}$ ，那么将其限制在任意区间 $[c, d] \subseteq [a, b]$ 上，仍会得到一条弱测地线，只不过它现在连接的是点 $r := \gamma_0(c)$ 和 $s := \gamma_0(d)$。

直观上，这一结论为何成立是显而易见的。比如，假设 γ_0 是长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 的一个极小值，那么限制 $\gamma_0|_{[c,d]}$ 就必须是长度泛函 $\mathbb{L}_[c, d]$ 的一个极小值；否则，我们就能找到一条（分段）光滑曲线 $\hat{}\gamma_0 : [c, d] \longrightarrow \mathcal{M}$ ，使得 $\hat{}\gamma_0(d) = \gamma_0(c)$ 且 $\hat{}\gamma_0(d) = \gamma_0(d)$，从而

$$\mathbb{L}_{[c,d]}(\hat{\gamma}_0) < \mathbb{L}_{[c,d]}(\gamma_0|_{[c,d]}) \tag{364}$$

成立。对于 $\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_0)$，由积分的线性性可得，

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_0) &= \mathbb{L}_{[a,c]}(\gamma_0|_{[a,c]}) + \mathbb{L}_{[c,d]}(\gamma_0|_{[c,d]}) + \mathbb{L}_{[d,b]}(\gamma_0|_{[d,b]}) \\ &> \mathbb{L}_{[a,c]}(\gamma_0|_{[a,c]}) + \mathbb{L}_{[c,d]}(\hat{\gamma}_0|_{[c,d]}) + \mathbb{L}_{[d,b]}(\gamma_0|_{[d,b]}) \\ &= \mathbb{L}_{[a,b]}(\tilde{\gamma}_0) \end{aligned} \tag{365}$$

由 $\tilde{\gamma}_0 \in \mathcal{PC}^\infty([a, b],\ \mathcal{M})$ 定义，

$$\tilde{\gamma}_0(\lambda) = \begin{cases} \gamma_0(\lambda), & \lambda \in [a, c] \cup [d, b] \\ \hat{\gamma}_0(\lambda), & \lambda \in (c, d) \end{cases} . \tag{366}$$

因此，我们在集合 $\mathcal{PC}^{\infty}_{p,\,q}([a,b],\ \mathcal{M})$ 中找到了这样一条曲线：它是 p 和 q 之间一条严格更短的连接曲线，比 γ_0 更短，这与 γ_0 已经是 $\mathcal{PC}^{\infty}_{p,\,q}([a,b],\ \mathcal{M})$ 中最短的曲线这一事实相矛盾。

那么，我们如何对长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 的所有驻定曲线一般地证明这一结论呢？为此我们需要一个概念，即所谓的连续变形的平凡延拓。

定义 *7.7.* 设 $(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A})$ 仍为一个光滑流形，且 $\gamma_0 \in \mathcal{PC}^{\infty}_{p,q}([a,b],\mathcal{M})$ 满足 $a,b\in\mathbb{R}$ 和 $a<b$，是一条曲线。再设 $[c,d]\subseteq[a,b]$ 已给定，且 $\gamma_0|_{[c,d]} := \hat{}\gamma_0$。此外，设 $\hat{}\gamma = (\hat{}\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 满足 $\epsilon>0$，是 $\hat{}\gamma_0$ 的一个连续变形。那么，连续变形 $\hat{}\gamma$ 沿曲线 γ_0 的所谓平凡延拓定义为由参数 $\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)$ 参数化的连续曲线族 γ_α：$[a,b]\longrightarrow\mathcal{M}$，其中

$$\gamma_\alpha(\lambda)=\begin{cases}\gamma_0(\lambda), & \lambda\in[a,c)\cup(d,b]\\ \hat{\gamma}_\alpha(\lambda), & \lambda\in[c,d]\end{cases}\qquad \forall\alpha\in(-\epsilon,\epsilon). \tag{367}$$

因此，对沿着曲线 γ_0的连续变形$\hat{}\gamma$ 进行平凡延拓，直观上就是对曲线 γ_0进行变形，其中只有曲线段 $\gamma_0([c,d])$ 发生变化。下面我们将明确证明，这种变形实际上确实也是连续变形。

不过，在证明这一点之前，我们还需要下面的引理：

引理 7.1。 设 $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$ 是赋予标准拓扑的实数集，且 (X,τ) 是任意一个拓扑空间。进一步设 $[a,c],[c,d]\subseteq\mathbb{R}$是两个实数子区间，满足 $a,c,d\in\mathbb{R}$ 以及 $a<c<d$。我们分别在 $[a,c]$ 和 $[c,d]$上赋予子空间拓扑 $\tau_{\mathbb{R},\,[a,c]}$ 和$\tau_{\mathbb{R},\,[c,d]}$，并考虑连续函数 $f:[a,c]\longrightarrow X$ 和 $g:\ [c,d]\longrightarrow X$，满足

$$f(c)=g(c). \tag{368}$$

那么，由下式定义的函数 $h:\ [a,d]\longrightarrow X$

$$h(\lambda)=\begin{cases}f(\lambda), & \lambda\in[a,c)\\ g(\lambda), & \lambda\in[c,d]\end{cases}\qquad \forall\lambda\in[a,d]\ , \tag{369}$$

是一个$(\tau_{\mathbb{R},[a,d]},\tau)$-连续函数。

证明。 我们先重申子空间拓扑的定义：

$$\tau_{\mathbb{R},[a,c]} := \{\mathcal{V}\subseteq[a,c]\ |\ \exists\mathcal{X}\in\tau_{\mathbb{R}},\ sodass\ \mathcal{X}\cap[a,c]=\mathcal{V}\} \tag{370}$$
$$\tau_{\mathbb{R},[c,d]} := \{\mathcal{V}'\subseteq[c,d]\ |\ \exists\mathcal{X}'\in\tau_{\mathbb{R}},\ sodass\ \mathcal{X}'\cap[c,d]=\mathcal{V}'\} \tag{371}$$
$$\tau_{\mathbb{R},[a,d]} := \{\mathcal{V}''\subseteq[a,d]\ |\ \exists\mathcal{X}''\in\tau_{\mathbb{R}},\ sodass\ \mathcal{X}''\cap[a,d]=\mathcal{V}''\} \tag{372}$$

现在设 $\mathcal{W}\in\tau$ 是 τ 中任意一个开集。我们考察集合 $h^{-1}(\mathcal{W})$：

$$h^{-1}(\mathcal{W})=f^{-1}(\mathcal{W})\cup g^{-1}(\mathcal{W}) \tag{373}$$

由于 f 和 g 都连续，因此可得 $f^{-1}(\mathcal{W})\in\tau_{\mathbb{R},\,[a,c]}$ 且 $g^{-1}(\mathcal{W})\in\tau_{\mathbb{R},\,[c,d]}$。现在我们分两种情况讨论：

i) $c \notin h^{-1}(\mathcal{W})$

ii) $c \in h^{-1}(\mathcal{W})$

注意，如果 $c \in h^{-1}(\mathcal{W})$ 成立，由于 $f(c) = g(c)$，也可立即得出 $c \in f^{-1}(\mathcal{W})$ 和 $c \in g^{-1}(\mathcal{W})$ 成立。

现在考虑第一种情况 i)。根据拓扑 $\tau_{\mathbb{R}}$ 的定义以及子空间拓扑的定义，由 $\mathcal{V} \in \tau_{\mathbb{R},[a,c]}$ 和 $c \notin \mathcal{V}$可得，此时 $\mathcal{V} \in \tau_{\mathbb{R},[a,d]}$ 成立。由于对称性，类似地也有 $\tau_{\mathbb{R},[c,d]}$和 $\tau_{\mathbb{R},[a,d]}$。这一断言的正确性可如下看出：设$\mathcal{V} \in \tau_{\mathbb{R},[a,c]}$ 且 $c \notin \mathcal{V}$。那么存在一个开集 $\mathcal{X} \in \tau_{\mathbb{R}}$，使得 $c \notin \mathcal{X}$ 且$\mathcal{V} = \mathcal{X} \cap [a, c]$。进一步设 $\mathcal{N} := \mathcal{X} \setminus (-\infty, c]$。根据 $\tau_{\mathbb{R}}$ 的定义，$\mathcal{N}$ 关于 $\tau_{\mathbb{R}}$是开集，因为对于每个点 $\lambda \in \mathbb{N}$，我们仍然可以取一个 δ-邻域，使其完全包含在 $\mathcal{N}$ 中。否则，也就是说，假设存在一个点 $\lambda \in \mathcal{N}$，使得不存在 $\delta > 0$ 满足 $\mathcal{U}_\delta(\lambda) \subseteq \mathcal{N}$。那么至少存在一个 $\mu \in \mathcal{U}_\delta(\lambda)$，它位于 $(-\infty, c]$ 中。但根据$\mathcal{U}_\delta(\lambda)$的定义，可得 $c \in \mathcal{U}_\delta(\lambda)$。由于这对 $\delta > 0$ 成立，且假设 $\mathcal{X}$ 是开集，因此可得 $c \in \mathcal{X}$，这与假设 $c \notin \mathcal{V}$相矛盾。由此可得，$\mathcal{N}$ 必定关于 $\tau_{\mathbb{R}}$ 是开集。用类似的方法可以证明，集合 $\mathcal{G} := \mathcal{X} \setminus [c, \infty)$ 关于 $\tau_{\mathbb{R}}$ 是开集。总之，我们可以将 $\mathcal{X}$ 写成

$$\mathcal{X} = \mathcal{N} \cup \mathcal{G}, \tag{374}$$

其中 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{G}$ 关于 $\tau_{\mathbb{R}}$ 是开集。由集合 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{G}$ 的定义可知,

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} \cap [a, c] = \mathcal{G} \cap [a, c] = \mathcal{G} \cap [a, d] \in \tau_{\mathbb{R},[a,d]} \tag{375}$$

成立。由于由 $h^{-1}(\mathcal{W})$ 可知，$c \notin f^{-1}(\mathcal{W})$ 且 $c \notin g^{-1}(\mathcal{W})$，并且由 f 和 g 的连续性可知，$f^{-1}(\mathcal{W}) \in \tau_{\mathbb{R},[a,c]}$ 且 $g^{-1}(\mathcal{W}) \in \tau_{\mathbb{R},[c,d]}$，因此根据上述结论可知，$f^{-1}(\mathcal{W}) \in \tau_{\mathbb{R},[a,d]}$ 且 $g^{-1}(\mathcal{W}) \in \tau_{\mathbb{R},[a,d]}$。由拓扑的定义可知，$h^{-1}(\mathcal{W}) \in \tau_{\mathbb{R},[a,d]}$。

现在考虑第二种情形*ii)*。因此设 $c \in h^{-1}(\mathcal{W})$。现在考虑两个任意集合$\mathcal{V} \in \tau_{\mathbb{R},[a,c]}$ 和 $\mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{R},[c,d]}$，其中 $c \in \mathcal{V}$ 且 $c \in \mathcal{U}$。由于$\mathcal{V} \in \tau_{\mathbb{R},[a,c]}$ 且 $c \in \mathcal{V}$，存在一个 $\mathcal{X} \in \tau_{\mathbb{R}}$，使得 $c \in \mathcal{X}$ 并且

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} \cap [a, c]. \tag{376}$$

类似地，由于$\mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{R},[c,d]}$和 $c \in \mathcal{U}$，存在一个 $\mathcal{X}' \in \tau_{\mathbb{R}}$，使得 $c \in \mathcal{X}'$并且

$$\mathcal{U} = \mathcal{X}' \cap [c, d]. \tag{377}$$

由于 $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in \tau_{\mathbb{R}}$，根据拓扑的定义，存在 $\tau_{\mathbb{R}}$个数 $\delta_1, \delta_2 > 0$，使得

$$\mathcal{U}_{\delta_1}(c) \subseteq \mathcal{X} \quad und \quad \mathcal{U}_{\delta_2}(c) \subseteq \mathcal{X}'. \tag{378}$$

设 $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$，则有 $\mathcal{U}_\delta(c) \subseteq \mathcal{X}$且 $\mathcal{U}_\delta(c) \subseteq \mathcal{X}'$。现在我们通过以下方式定义两个新集合

$$\mathcal{O} := (\mathcal{X} \cap [a, c]) \cup \mathcal{U}_\delta(c), \tag{379}$$

$$\mathcal{K} := (\mathcal{X}' \cap [c, d]) \cup \mathcal{U}_\delta(c). \tag{380}$$

根据定义，有 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{X}$ 且 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}'$。此外，集合 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{K}$ 关于拓扑 $\tau_{\mathbb{R}}$是开集，因为例如，考虑集合 $\mathcal{O}$，则对所有 $x \in \mathcal{X} \cap [a,c]$，都存在一个 $\delta > 0$，使得 $\delta < \delta$，从而 $\mathcal{U}_{\delta}(x) \subseteq \mathcal{O}$。此外，˜成立：对所有 $x \in \mathcal{U}_{\delta}$，若 c，则由于 $\mathcal{U}_{\delta}(c)$ $\in \tau_{\mathbb{R}}$，存在一个 $\delta > 0$，使得$\mathcal{U}_{\tilde{\delta}}(x) \subseteq \mathcal{U}_{\delta}(c) \subseteq \mathcal{O}$，由此证明了 $\mathcal{O}$ 是关于 $\tau_{\mathbb{R}}$ 的开集。类似地，可以证明 $\mathcal{K} \in \tau_{\mathbb{R}}$。现在有以下集合相等：

$$\mathcal{V} \cup \mathcal{U} = \big([a,c] \cap \mathcal{X}\big) \bigcup \big([c,d] \cap \mathcal{X}'\big) = \big(\underbrace{[a,c] \cup [c,d]}_{[a,d]}\big) \bigcap \big(\underbrace{\mathcal{O} \cup \mathcal{K}}_{\in \tau_{\mathbb{R}}}\big) \tag{381}$$

由这个集合相等显然可得 $\mathcal{V} \cup \mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{R},\,[a,d]}$。因此我们还要证明这个集合等式的正确性。为此，先证明由 $x \in \big([a,c] \cap \mathcal{X}\big) \bigcup \big([c,d] \cap \mathcal{X}'\big)$ 也可推出 $x \in \big([a,c] \cup [c,d]\big) \bigcap (\mathcal{O} \cup \mathcal{K})$。设 $x \in \big([a,c] \cap \mathcal{X}\big) \bigcup \big([c,d] \cap \mathcal{X}'\big)$。那么 x 包含于 $[a,c] \cap \mathcal{X}$ 或 $[c,d] \cap \mathcal{X}'$ 中。于是

$$\begin{aligned} x \in [a,c] \cap \mathcal{X} &\subseteq [a,c] \bigcap \big([a,c] \cap \mathcal{X}\big) \\ &\subseteq [a,c] \bigcap \big(\underbrace{([a,c] \cap \mathcal{X}) \cup \mathcal{U}_{\delta}(c)}_{\mathcal{O}}\big) \\ &\subseteq \big([a,c] \cup [c,d]\big) \bigcap (\mathcal{O} \cup \mathcal{K}) \end{aligned} \tag{382}$$

und

$$\begin{aligned} x \in [c,d] \cap \mathcal{X}' &\subseteq [c,d] \bigcap \big([c,d] \cap \mathcal{X}'\big) \\ &\subseteq [c,d] \bigcap \big(\underbrace{([c,d] \cap \mathcal{X}') \cup \mathcal{U}_{\delta}(c)}_{\mathcal{K}}\big) \\ &\subseteq \big([a,c] \cup [c,d]\big) \bigcap (\mathcal{O} \cup \mathcal{K}) \end{aligned} \tag{383}$$

至此，已证明第一个包含关系。现在设 $x \in \big([a,c] \cup [c,d]\big) \bigcap (\mathcal{O} \cup \mathcal{K})$。我们证明由此可得 $x \in \big([a,c] \cap \mathcal{X}\big) \bigcup \big([c,d] \cap \mathcal{X}'\big)$。由条件 $x \in \big([a,c] \cup [c,d]\big) \bigcap (\mathcal{O} \cup \mathcal{K})$ $x \in [a,c] \cup [c,d]$ $\mathcal{O} \cup \mathcal{K}$ 可知，必须属于 和。以下包含关系成立：

$$\begin{aligned} x \in [a,c] \cap \mathcal{O} &\subseteq [a,c] \cap \mathcal{X} \\ &\subseteq \big([a,c] \cap \mathcal{X}\big) \bigcup \big([c,d] \cap \mathcal{X}'\big), \end{aligned} \tag{384}$$

$$\begin{aligned} x \in [c,d] \cap \mathcal{K} &\subseteq [c,d] \cap \mathcal{X}' \\ &\subseteq \big([a,c] \cap \mathcal{X}\big) \bigcup \big([c,d] \cap \mathcal{X}'\big), \end{aligned} \tag{385}$$

$$\begin{aligned} x \in [a,c] \cap \mathcal{K} &\subseteq [a,c] \cap \mathcal{U}_{\delta}(c) \\ &\subseteq [a,c] \cap \mathcal{X} \\ &\subseteq \big([a,c] \cap \mathcal{X}\big) \bigcup \big([c,d] \cap \mathcal{X}'\big), \end{aligned} \tag{386}$$

und

$$\begin{aligned} x \in [c,d] \cap \mathcal{O} &\subseteq [c,d] \cap \mathcal{U}_{\delta}(c) \\ &\subseteq [c,d] \cap \mathcal{X}' \\ &\subseteq \big([a,c] \cap \mathcal{X}\big) \bigcup \big([c,d] \cap \mathcal{X}'\big). \end{aligned} \tag{387}$$

至此，已证明集合相等。因此，若有两个集合 $\mathcal{V} \in \tau_{\mathbb{R},\ [a,c]}$ 和 $\mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{R},\ [c,d]}$，满足 $c \in \mathcal{V}$ 和 $c \in \mathcal{U}$，则有 $\mathcal{V} \cup \mathcal{U} \in \tau_{\mathbb{R},\ [a,d]}$。因此，若 $c \in h^{-1}(\mathcal{W})$ 成立，便可立即推出 $h^{-1}(\mathcal{W}) \in \tau_{\mathbb{R},\ [a,d]}$。综上，$h$ 是连续的。 □

现在我们可以证明，上述连续变形的平凡延拓确实是连续变形。

定理 7.2. 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个光滑流形，$\gamma_0 \in \mathcal{PC}^{\infty}_{p,q}([a,b], \mathcal{M})$ 且具有 $a, b \in \mathbb{R}$，并且 $a < b$ 是一条在点 $p \in \mathcal{M}$ 开始、在点 $q \in \mathcal{M}$ 结束的曲线。进一步设给定 $[c,d] \subseteq [a,b]$，且 $\gamma_0|_{[c,d]} := \hat{\gamma}_0$。此外，设 $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_\alpha)_{\alpha \in (-\epsilon,\epsilon)}$ 且具有 $\epsilon > 0$，是 $\hat{\gamma}_0$ 的一个连续变形。那么，沿曲线 γ_0 对 $\hat{\gamma}$ 进行的平凡延拓 $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in (-\epsilon,\epsilon)}$，是曲线 γ_0 的一个连续变形。

证明。由引理 7.1 可立即得出，对于所有 $\alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$，都有 $\gamma_\alpha \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathcal{M})$。进一步，由于对于所有满足 $r := \gamma_0(c)$ 和 $s := \gamma_0(d)$ 的 $\alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$，$\gamma_0 \in \mathcal{PC}^{\infty}_{p,q}([a,b], \mathcal{M})$ 且 $\hat{\gamma}_\alpha \in \mathcal{PC}^{\infty}_{r,s}([c,d], \mathcal{M})$，因此对于所有 $\alpha \in (-\epsilon, \epsilon)$，$\gamma_\alpha \in \mathcal{PC}^{\infty}_{p,q}([a,b], \mathcal{M})$ 成立。剩下只需证明 γ 的连续性。为此，设 $\mathcal{U} \in \tau$ 是流形 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 的任意一个开集。可能出现以下几种情况：

i) 若 $\mathcal{U} \cap \gamma([a,b], [-\epsilon, \epsilon]) = \emptyset$，则根据拓扑的定义，$\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \emptyset$ 和 $\emptyset$ 是关于积拓扑 $\tau_{[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)}$ 的开集。

ii) Gilt $\mathcal{U} \cap \gamma([a,b], (-\epsilon,\epsilon)) \subseteq \gamma([a,b] \setminus [c,d], (-\epsilon,\epsilon))$, so folgt

$$\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \gamma_0^{-1}(\mathcal{U}) \times (-\epsilon, \epsilon). \tag{388}$$

由于 $\gamma_0 : [a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$ 是连续函数，因此在这种情况下，$\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ 关于积拓扑 $\tau_{[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)}$ 也是开集。

iii) 设 $\mathcal{U} \cap \gamma([a,b], (-\epsilon,\epsilon)) \subseteq \gamma((c,d), (-\epsilon,\epsilon))$。由引理 7.1. 的证明以及积拓扑的定义可得

$$\tau_{(c,d)\times(-\epsilon,\epsilon)} \subseteq \tau_{[c,d]\times(-\epsilon,\epsilon)} \ \ und \ \ \tau_{(c,d)\times(-\epsilon,\epsilon)} \subseteq \tau_{[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)}. \tag{389}$$

因此有

$$\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \hat{\gamma}^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_{(c,d)\times(-\epsilon,\epsilon)} \subseteq \tau_{[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)}, \tag{390}$$

$\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ 关于积拓扑 $\tau_{[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)}$ 是开集。

iv) 设 $\mathcal{U} \cap \gamma([a,b], (-\epsilon,\epsilon)) \subseteq \gamma((c,d), (-\epsilon,\epsilon)) \cup \gamma([a,b] \setminus [c,d], (-\epsilon,\epsilon))$。则有

$$\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \left(\gamma_0|^{-1}_{[a,c)\cup(d,b]}(\mathcal{U}) \times (-\epsilon,\epsilon)\right) \cup \hat{\gamma}^{-1}(\mathcal{U}). \tag{391}$$

由于 $\gamma_0|_{[a,c)\cup(d,b]}$ 根据引理 3.3. 是一个 $(\tau_{\mathbb{R},[a,c)\cup(d,b]}, \tau)$-连续函数，并且 $\tau_{[a,c)\cup(d,b]\times(-\epsilon,\epsilon)}$ 按照构造是积拓扑 $\tau_{[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)}$ 的一个子集，因此可知 $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ 关于积拓扑 $\tau_{[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)}$ 是开集。

v) 现选择 $\mathcal{U}$，使得集合 $\{c\}\times(-\epsilon,\epsilon)$ 或 $\{d\}\times(-\epsilon,\epsilon)$，或二者均位于 $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ 中。于是得到

$$\gamma^{-1}(\mathcal{U})=\big(\gamma_0|_{[a,c]}^{-1}(\mathcal{U})\times(-\epsilon,\epsilon)\big)\cup\hat{\gamma}^{-1}(\mathcal{U})\cup\big(\gamma_0|_{[d,b]}^{-1}\times(-\epsilon,\epsilon)\big) \tag{392}$$

mit

$$\{c\}\times(-\epsilon,\epsilon)\subseteq\gamma_0|_{[a,c]}^{-1}(\mathcal{U})\times(-\epsilon,\epsilon)\cap\hat{\gamma}^{-1}(\mathcal{U}) \tag{393}$$

和/或

$$\{d\}\times(-\epsilon,\epsilon)\subseteq\gamma_0|_{[c,d]}^{-1}(\mathcal{U})\times(-\epsilon,\epsilon)\cap\hat{\gamma}^{-1}(\mathcal{U}). \tag{394}$$

由于 $\gamma_0|_{[a,c]}$ 和 $\gamma_0|_{[d,b]}$ 连续，根据引理 7。1 证明中的论证以及积拓扑的定义，可知 $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ 关于积拓扑$\tau_{[a,b]\times(-\epsilon,\epsilon)}$ 是开集。

因此，沿曲线γ_0对 γ 作平凡延拓是连续的，由此可知 γ 是一个连续变形。

□

最后一个结果的意义如下：假设曲线 $\gamma_0\in\mathcal{PC}^{\infty}_{p,\,q}([a,b],\,\mathcal{M})$ 是黎曼流形（$\mathcal{M}$, τ, $\mathcal{A}$, g）上的一条曲线，它连接实数集 $\mathcal{M}$ 中的点 p 和 q。此外，设 $[c,d]$ 满足 c, $d\in\mathbb{R}$，且 $c<d$ 是 $[a,b]$ 的一个任意子区间。那么，每个从 $\hat{}\gamma_0:=\gamma_0|_{[c,d]}$ 到 γ_0 的连续变形 $\hat{}\gamma$ 都可以延拓为一个连续变形γ，使得该延拓与沿曲线 γ_0 对 $\hat{}\gamma$ 作的平凡延拓一致。由此，我们可以证明以下定理:

定理 7.3. 设 $(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A},g)$ 是一个黎曼流形， a、 $b\in\mathbb{R}$ 是满足 $a<b$ 的两个数。再设 $\gamma_0\in\mathcal{PC}^{\infty}_{p,q}([a,b],\mathcal{M})$ 是一条弱测地线，它将点 $p=\gamma(a)\in\mathcal{M}$ 与点 $q=\gamma(b)\in\mathcal{M}$ 连接起来。再设 $[c,d]$ 满足 $c,d\in\mathbb{R}$，且 $c<d$ 是 $[a,b]$ 的任意一个子区间。那么曲线 $\hat{}\gamma_0:=\gamma_0|_{[c,d]}\in\mathcal{PC}^{\infty}_{r,s}([c,d],\mathcal{M})$，满足 $r=\gamma_0(c)$ 和 $s=\gamma_0(d)$，是一条弱测地线，即相对于长度泛函 $\mathbb{L}_{[c,d]}|_{\mathcal{PC}^{\infty}_{r,s}([c,d],\mathcal{M})}$ 的一条驻定曲线。

证明。 不失一般性，我们假设所有曲线都属于 $\mathcal{C}^{\infty}$ 类。对于更一般的 $\mathcal{PC}^{\infty}$ 类曲线，论证类似，只是计算长度泛函时必须使用更复杂的表达式 (341)，而不是表达式 (340)；若针对连续变形 $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$ （其中 γ_α 取自$\mathcal{PC}^{\infty}$，且对所有 $\alpha\in(-\epsilon,\ \epsilon)$ 都成立）计算长度泛函，那么积分界限可能会依赖于变形参数 α。在这种变形中，曲线 γ_α不可微的位置直接依赖于参数 α。

现在设 $\gamma_0\in\mathcal{C}^{\infty}_{p,q}([a,b],\mathcal{M})$ 是一条弱测地线，它始于 p，终于 q，并设 $[c,d]\subseteq[a,b]$ 任意给定。我们考察曲线 $\hat{}\gamma_0:=\gamma_0|_{[c,d]}$。由于 γ_0 是一条弱测地线，对于曲线 γ_0的任意连续变形$\tilde{\gamma}$，其变分泛函 $F_{\tilde{\gamma}}$定义为

$$F_{\tilde{\gamma}}(\alpha)=\mathbb{L}_{[a,b]}(\tilde{\gamma}_\alpha), \tag{395}$$

在 $\alpha=0$ 处可微，即

$$\left.\frac{dF_{\tilde{\gamma}}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0 \tag{396}$$

成立。设 $\hat{}\gamma$ 是曲线 $\hat{}\gamma_0$ 的任意连续变形，使得变分泛函 $F_{\hat{\gamma}}$ 在点 $\alpha = 0$ 处关于 $F_{\hat{\gamma}}(\alpha) = \mathbb{L}_{[c,d]}(\hat{}\gamma_\alpha)$ 可微。我们将证明，对于 $\hat{}\gamma_0$ 的此类连续变形，有

$$\left.\frac{dF_{\hat{\gamma}}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{397}$$

是。我们考虑沿曲线 γ_0 的连续变形 $\hat{}\gamma$ 的平凡延拓，并将其记作 γ。根据定理 7.2.，γ 是 γ_0 的连续变形，因此变分泛函 F_γ 在点$\alpha = 0$ 处可微，因为有

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dF_\gamma}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} &= \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b \sqrt{g_{\gamma_\alpha(\lambda)}(X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)}, X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)})}\right) d\lambda\right|_{\alpha=0} \\
&= \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^c \sqrt{g_{\gamma_\alpha(\lambda)}(X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)}, X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)})}\right) d\lambda\right|_{\alpha=0} \\
&\quad + \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\int_c^d \sqrt{g_{\gamma_\alpha(\lambda)}(X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)}, X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)})}\right) d\lambda\right|_{\alpha=0} \\
&\quad + \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\int_d^b \sqrt{g_{\gamma_\alpha(\lambda)}(X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)}, X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)})}\right) d\lambda\right|_{\alpha=0} \\
&= \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^c \sqrt{g_{\gamma_0(\lambda)}(X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}, X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)})}\right) d\lambda\right|_{\alpha=0} \\
&\quad + \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\int_c^d \sqrt{g_{\gamma_\alpha(\lambda)}(X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)}, X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)})}\right) d\lambda\right|_{\alpha=0} \\
&\quad + \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\int_d^b \sqrt{g_{\gamma_0(\lambda)}(X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}, X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)})}\right) d\lambda\right|_{\alpha=0} \\
&= 0 + \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\int_c^d \sqrt{g_{\gamma_\alpha(\lambda)}(X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)}, X_{\gamma_\alpha,\gamma_\alpha(\lambda)})}\right) d\lambda\right|_{\alpha=0} + 0 \\
&= \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\int_c^d \sqrt{g_{\hat{\gamma}_\alpha(\lambda)}(X_{\hat{\gamma}_\alpha,\hat{\gamma}_\alpha(\lambda)}, X_{\hat{\gamma}_\alpha,\hat{\gamma}_\alpha(\lambda)})}\right) d\lambda\right|_{\alpha=0} \\
&= \left.\frac{dF_{\hat{\gamma}}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}.
\end{aligned} \tag{398}$$

综上可得

$$\left.\frac{dF_\gamma}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{dF_{\hat{\gamma}}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}. \tag{399}$$

由于根据假设，右侧在点 $\alpha = 0$ 处可微，因此左侧在点 $\alpha = 0$ 处也必定可微。由于 γ_0 是一条连接点 p 和 q 的弱测地线，因此可得

$$\left.\frac{dF_\gamma}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{400}$$

是。由 (399) 还可得

$$\left.\frac{dF_{\hat{\gamma}}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0. \tag{401}$$

由于 $\hat{}\gamma$ 是 $\hat{}\gamma_0$ 的任意一个连续变形，并且变分泛函$F_{\hat{\gamma}}$ 在点 $\alpha = 0$ 处可微，因此可知 $\hat{}\gamma_0$ 是一条弱测地线，它始于点 $r = \gamma(c)$，终于点 $s = \gamma(d)$。

□

注释 7.3. 正如定理7.9证明的引言中所提到的，上述证明中的论证对于来自类 $\mathcal{PC}^\infty$ 的曲线 γ_0 和变形$(\hat{}\gamma_\alpha)^{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$ 同样适用，因为即使长度泛函由(341) 给出，我们也可以根据积分的线性性，将表达式 $\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_\alpha)$ 与 $\gamma_\alpha \in \mathcal{PC}^\infty([a,b],\mathcal{M})$一样，如$(398)$ 所示拆分为

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{[a,b]}(\gamma_\alpha) &= \mathbb{L}_{[a,c]}(\gamma_\alpha|_{[a,c]}) + \mathbb{L}_{[c,d]}(\gamma_\alpha|_{[c,d]}) + \mathbb{L}_{[d,b]}(\gamma_\alpha|_{[d,b]}) \\ &= \mathbb{L}_{[a,c]}(\gamma_0|_{[a,c]}) + \mathbb{L}_{[c,d]}(\hat{\gamma}_\alpha|_{[c,d]}) + \mathbb{L}_{[d,b]}(\gamma_0|_{[d,b]}) \\ &= \mathbb{L}_{[a,c]}(\gamma_0|_{[a,c]}) + F_{\hat{\gamma}}(\alpha) + \mathbb{L}_{[d,b]}(\gamma_0|_{[d,b]}),\end{aligned} \tag{402}$$

其中右侧只有第二项仍取决于 α 。定理7.9证明中的简化，只是为了确保长度泛函有一个简单的积分表示，从而能够借此轻松而明确地说明，我们为什么能够以以上方式拆分长度泛函。

借助定理 7.9. 的结果，我们现在正朝着推导所谓的（弱）测地线的测地线方程迈进。借助该方程，一方面可以检验给定曲线是否确实可能是黎曼流形 $(\mathcal{M},\ \tau,\ \mathcal{A},\ g)$ 上弱测地线的候选曲线；另一方面，正如我们稍后还会在一个特例中看到的，它也能帮助我们实际计算黎曼流形上的测地线。

我们的下一个目标是推导泛函 $\mathcal{S}_{\mathcal{L},\ [a,b]}\colon \mathcal{C}^\infty([a,b],\ \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M}$ 的所谓欧拉-拉格朗日方程。这些方程应与长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 属于同一类型。接下来的定义将具体说明其含义：

定义 7.8. 设$(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A})$ 是一个光滑流形，$T\mathcal{M}$ 是该流形对应的切丛，将其视为光滑流形。我们将任意一个如下形式的映射称为

$$\mathcal{L} : T\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{403}$$

拉格朗日函数。

例 7.2. 我们考察黎曼流形$(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A},g)$ 以及函数 $\mathcal{L}$，其定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : T\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p,X) &\longmapsto \sqrt{g_p(X,X)},\end{aligned} \tag{404}$$

其中对于(p,X)，有 $X \in T_p\mathcal{M}$ 。

接下来，我们定义光滑曲线 $\gamma_0 :[a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$ 到切丛 $T\mathcal{M}$上的所谓提升。

定义 7.9。 设 $(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A})$ 是一个光滑流形。进一步设 $\gamma_0 \in \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathcal{M})$是定义在 $\mathcal{M}$上的一条光滑曲线，其中 a、$b \in \mathbb{R}$ 和 $a < b$ 。我们将 γ_0 到切丛 $T\mathcal{M}$ 上的所谓提升定义为：

$$\begin{aligned} X_{\gamma_0} : [a,b] &\longrightarrow T\mathcal{M} \\ \lambda &\longmapsto (\gamma_0(\lambda), X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}) \equiv X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)} =: X_\gamma(\lambda). \end{aligned} \tag{405}$$

注记 7.4。 根据定义7.9，人们可能会想到切向量的定义，并询问值 $X_\gamma(a)$ 和 $X_\gamma(b)$究竟是什么样的。其思路是，对于这里所考察的曲线，我们总是假设存在切向量 $X_{\delta,\gamma(a)} \in T_{\gamma(a)}\mathcal{M}$ 和 $X_{\eta,\gamma(b)} \in T_{\gamma(b)}\mathcal{M}$ ，使得

$$X_{\delta,\gamma(a)} f = \lim_{h\to 0+} \frac{(f\circ\gamma)(a+h) - (f\circ\gamma)(a)}{h} \tag{406}$$

und

$$X_{\eta,\gamma(b)} f = \lim_{h\to 0-} \frac{(f\circ\gamma)(b+h) - (f\circ\gamma)(b)}{h} \tag{407}$$

对所有 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ 都成立。其中，$\lim_{h\to 0+}$表示，在上述极限过程(406)中，只考虑满足以下条件的序列$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ： 对于所有 $n \in \mathbb{N}$ ，都有 $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 。类似地，$\lim_{h\to 0-}$表示，在上述极限过程(407) 中，只考虑$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中满足以下条件的序列：对于所有$n \in \mathbb{N}$ ，都有 $h_n < 0$ 。

借助刚刚定义的概念，例如拉格朗日函数以及光滑曲线 γ_0 ： $[a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$ 的提升，我们现在能够定义所谓的作用泛函 $\mathcal{S}_{\mathcal{L},[a,b]}$ ： $\mathcal{C}^\infty([a,b].\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ 。

定义 7.10. 设 $(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A})$ 为一个光滑流形，且 $\gamma_0 : [a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$为一条光滑曲线，其中 a、$b \in \mathbb{R}$ 和 $a < b$。再设 $\mathcal{L}$ 为任意一个拉格朗日函数。那么，相对于 $\mathcal{L}$ 定义的作用泛函 $\mathcal{S}_{\mathcal{L},[a,b]} : \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L},[a,b]}(\gamma_0) = \int_a^b (\mathcal{L}\circ X_{\gamma_0})(\lambda)\, d\lambda. \tag{408}$$

刚刚定义的依赖于拉格朗日函数的作用泛函，可以理解为对长度泛函的结构性形式化。若选择 $\mathcal{L}$ ，如 (404) 中所示，则可得 $\mathcal{S}_{\mathcal{L},[a,b]} \equiv \mathbb{L}_{[a,b]}$ 。

以下设 $(\mathcal{U},\phi)$ 是 d 维光滑流形 $(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A})$ 的一个坐标图，其中 $\gamma_0^{-1}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ 且 $\phi = (x^1, \ldots, x^d)$。进一步，$(T\mathcal{U},\xi_\phi)$ 是与 $(\mathcal{U},\phi)$ 相应的切丛上的坐标图。由于 γ_0 是一条连续曲线，因此 $\gamma_0^{-1}(\mathcal{U})$ 是关于在 $[a,b]$ 上定义的子空间拓扑的开集。于是存在一个区间 $[c,d] \subseteq [a,b]$，使得 $\gamma_0([c,d]) \subseteq \mathcal{U}$，从而 $X_{\gamma_0}([c,d]) \subseteq T\mathcal{U}$。我们关于坐标图 $(T\mathcal{U},\xi_\phi)$ 计算表达式 $\mathcal{S}_{\mathcal{L},[c,d]}(\gamma_0|_{[c,d]})$：

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\mathcal{L},[c,d]}(\gamma_0|_[c,d]) &= \int_c^d (\mathcal{L}\circ X_{\gamma_0|_{(c,d)}})(\lambda)\,d\lambda \\ &= \int_c^d (\mathcal{L}\circ X_{\gamma_0})(\lambda)\,d\lambda \\ &= \int_c^d ((\mathcal{L}\circ\xi_\phi^{-1})\circ(\xi_\phi\circ X_{\gamma_0}))(\lambda)\,d\lambda \\ &= \int_c^d \mathcal{L}_\phi(\xi_\phi(X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}))\,d\lambda \end{aligned} \tag{409}$$

在上面的方程中， $\mathcal{L}_\phi$ 由 $\mathcal{L}\circ\xi_\phi^{-1}$ 给出。根据式（297）中坐标图 $(T\mathcal{U},\xi_\phi)$ 的定义，以及由（278）和（279）可知的切向量 $X_{\gamma_0,\ \gamma_0(\lambda)}$ 关于基 $\{\underline{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)}_{\gamma_0(\lambda)}\ \cdots,\ \underline{\left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)}_{\gamma_0(\lambda)}\}$ 的展开，我们可以将（409）的右端改写为

$$\int_c^d \mathcal{L}_\phi(((x^1(\gamma_0(\lambda)),...,x^d(\gamma_0(\lambda))),((x^1\circ\gamma_0)'(\lambda),...,(x^d\circ\gamma_0)'(\lambda))))\,d\lambda \tag{410}$$

令 $\gamma^i_{0,\phi} := x^i\circ\gamma_0$ ，我们可以将其写得更加简洁:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L},[c,d]}(\gamma_0|_{[c,d]}) = \int_c^d \mathcal{L}_\phi(((\gamma^1_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^d_{0,\phi}(\lambda)),(\gamma^{1\,\prime}_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^{d\,\prime}_{0,\phi}(\lambda))))\,d\lambda \tag{411}$$

作用量的这一坐标表示 $\mathcal{S}_{\mathcal{L},[c,d]}$ 还将在推导欧拉-拉格朗日方程时发挥重要作用。

为了真正推导出欧拉-拉格朗日方程，我们还需要用到多元分析和变分法中的以下重要结果，它通常也称为变分法基本引理。

定理 7.4。设 $d\in\mathbb{N}$ 是自然数， c、$d\in\mathbb{R}$ 是两个给定的实数，满足 $c<d$，且 $\mathcal{L}_i:\ [c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ 对所有 $i\in\{1,...,d\}$ 都是连续函数。若表达式

$$\int_c^d \left(\sum_{i=1}^d \mathcal{L}_i(\lambda)\cdot\eta_i(\lambda)\right)d\lambda = 0 \tag{412}$$

对所有形如（η_1, ..., η_d）且满足 $\eta_i\in\mathcal{C}_0^\infty$（$[c,d]$, $\mathbb{R}$） 的 d 元组均成立，则可推出

$$\mathcal{L}_i\equiv 0 \qquad \forall i\in\{1,...,d\} \tag{413}$$

是。其中，集合 $\mathcal{C}_0^\infty([c,d],\mathbb{R})$ 表示所有从 $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$映射而来的函数所组成的集合，这些函数具有如下性质：它们在 $[a,b]$ 的边界上，即在 a 和 b 处取零。

证明。参见 [23]。 □

借助变分法基本引理，我们现在能够为上述泛函 $\mathcal{S}$ 推导欧拉-拉格朗日方程，将其作为驻定曲线的必要判据。

定理 7.1。 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A})$ 是一个光滑流形， $\mathcal{L}$ 是一个拉格朗日函数，$\mathcal{S}_{\mathcal{L},[a,b]}\colon \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的相应作用泛函，其中 a、$b \in \mathbb{R}$ 和 $a<b$。进一步设 $\gamma_0 \in \mathcal{PC}^\infty_{p,q}([a,b],\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{S}_{\mathcal{L},[a,b]}$ 的一条驻定曲线，也就是说，对于任意连续变形 $\gamma=(\gamma_\alpha)^{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$，若其满足 γ_0 和 $\epsilon>0$，则有

$$\frac{d}{d\alpha}\mathcal{S}_{\mathcal{L},[a,b]}(\gamma_\alpha)\bigg|_{\alpha=0}=0 \tag{414}$$

成立。进一步假设，$(\mathcal{U},\phi=(x^1,...,x^d))\in\mathcal{A}$是一个带有 $\gamma_0^{-1}(\mathcal{U})\neq\emptyset$的坐标图。由 γ_0的连续性，存在一个子区间 $[c,d]\subseteq[a,b]$，使得$\gamma_0([c,d])\subseteq\mathcal{U}$，且$\hat{}\gamma_0:=\gamma_0|_{[c,d]}\in\mathcal{C}^\infty([c,d],\mathcal{M})$成立。进一步，拉格朗日函数$\mathcal{L}$ 的选取还满足：对于γ_0 的所有光滑变形$\hat{}\gamma=(\hat{}\gamma_\alpha)^{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$，以下命题成立：

i) 设 $\mathcal{L}_\phi=\mathcal{L}\circ\xi_\phi^{-1}$且对所有 $i\in\{1,...,d\}$都有$\hat{}\gamma^i_{\alpha,\phi}=x^i\circ\hat{}\gamma_\alpha$。那么函数 *on*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\mathcal{L}:(-\epsilon,\epsilon)\times[c,d]&\longrightarrow\mathbb{R}\\(\alpha,\lambda)&\longmapsto\mathcal{L}_\phi(((\hat{\gamma}^1_{\alpha,\phi}(\lambda),...,\hat{\gamma}^d_{\alpha,\phi}(\lambda)),(\hat{\gamma}^{1\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda),...,\hat{\gamma}^{d\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda))))\end{aligned} \tag{415}$$

连续且连续可微，即函数 $\mathcal{F}_\mathcal{L}$ 的偏导数在$(-\epsilon,\epsilon)\times[c,d]$ 上也连续。

ii) 对于 *i)* 中的函数 $\mathcal{F}_\mathcal{L}$，存在函数 A、B：$[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$，使得对所有 $(\alpha,\lambda)\in(-\epsilon,\epsilon)\times[c,d]$ 以及所有 $m\in\{1,...,2d\}$，以下估计成立

$$|\mathcal{L}_\phi(((\hat{\gamma}^1_{\alpha,\phi}(\lambda),...,\hat{\gamma}^d_{\alpha,\phi}(\lambda)),(\hat{\gamma}^{1\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda),...,\hat{\gamma}^{d\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda))))|\leq A(\lambda) \tag{416}$$

und

$$|\partial_m\mathcal{L}_\phi(((\hat{\gamma}^1_{\alpha,\phi}(\lambda),...,\hat{\gamma}^d_{\alpha,\phi}(\lambda)),(\hat{\gamma}^{1\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda),...,\hat{\gamma}^{d\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda))))|\leq B(\lambda) \tag{417}$$

成立。此外还成立

$$\int_c^d A(\lambda)\,d\lambda<\infty\quad und\quad\int_c^d B(\lambda)\,d\lambda<\infty. \tag{418}$$

在这些假设下，对于 $n\in\{1,...,d\}$，曲线$\hat{}\gamma_0$ 在区间 $[c,d]$上满足所谓的欧拉–拉格朗日方程：

$$\begin{aligned}&\partial_n\mathcal{L}_\phi(((a^1,...,a^d),(b^1,...,b^d)))\Big|_{(((\gamma^1_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^d_{0,\phi}(\lambda)),(\gamma^{1\,\prime}_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^{d\,\prime}_{0,\phi}(\lambda))))}\\&=\frac{d}{d\lambda}\left(\partial_{d+n}\mathcal{L}_\phi(((a^1,...,a^d),(b^1,...,b^d)))\Big|_{(((\gamma^1_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^d_{0,\phi}(\lambda)),(\gamma^{1\,\prime}_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^{d\,\prime}_{0,\phi}(\lambda))))}\right)\end{aligned} \tag{419}$$

证明。 设 $\gamma_0\colon [a,b]\longrightarrow\mathcal{M}$ 是作用泛函 $\mathcal{S}_{\mathcal{L},\,[a,b]}$ 的一条驻定曲线，且 $(\mathcal{U},\ \phi)\in\mathcal{A}$ 是一个坐标图，其中 $\gamma_0^{-1}(\mathcal{U})\neq\emptyset$ 且 $\phi=(x^1,\ .....,\ x^d)$。由于 γ_0的连续性，存在一个闭区间 $[c,d]$，使得 $\gamma_0([c,d])\subseteq\mathcal{U}$。鉴于作用泛函与长度泛函在结构上相似

并且已假定 γ_0 是$\mathcal{S}_{\mathcal{L},\ [a,b]}$ 的一条驻定曲线，因此与定理 7.3.中的结论相同，对于作用泛函可得，$\hat{}\gamma_0$ 是关于作用泛函 $\mathcal{S}_{\mathcal{L},\ [c,d]}$ 的一条驻定曲线。因此，对于$\hat{}\gamma_0$的任意连续变形 $\hat{}\gamma = (\hat{}\gamma_\alpha)^{\alpha\in(-\epsilon,\epsilon)}$ ，有

$$\frac{d}{d\alpha}\mathcal{S}_{\mathcal{L},[c,d]}(\hat{\gamma}_\alpha)\bigg|_{\alpha=0} = 0 \tag{420}$$

是。由于这对 γ_0 的所有连续变形 $\hat{}\gamma$ 都成立，因此该表达式特别也对所有光滑变形成立。于是从现在起，设 $\hat{}\gamma$ 是 γ_0 的一个光滑变形。根据式（411）、第 5.3. 节中的多元链式法则、约定 $\gamma^i_{\alpha,\ \phi} = x^i \circ \gamma_\alpha$ 对所有 $i \in \{1, ..., d\}$ 成立，以及积分的线性性，有

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\alpha}\mathcal{S}_{\mathcal{L},[c,d]}(\hat{\gamma}_\alpha)\bigg|_{\alpha=0} \\
&= \frac{d}{d\alpha}\left(\int_c^d \mathcal{L}_\phi(((\hat{\gamma}^1_{\alpha,\phi}(\lambda), ..., \hat{\gamma}^d_{\alpha,\phi}(\lambda)), (\hat{\gamma}^{1\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda), ..., \hat{\gamma}^{d\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda)))) \, d\lambda\right)\bigg|_{\alpha=0} \\
&= \int_c^d \frac{d}{d\alpha}\left(\mathcal{L}_\phi(((\hat{\gamma}^1_{\alpha,\phi}(\lambda), ..., \hat{\gamma}^d_{\alpha,\phi}(\lambda)), (\hat{\gamma}^{1\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda), ..., \hat{\gamma}^{d\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda))))\right)\bigg|_{\alpha=0} d\lambda \\
&= \int_c^d \sum_{n=1}^d \left(\partial_n \mathcal{L}_\phi(((\gamma^1_{0,\phi}(\lambda), ..., \gamma^d_{0,\phi}(\lambda)), (\gamma^{1\,\prime}_{0,\phi}(\lambda), ..., \gamma^{d\,\prime}_{0,\phi}(\lambda))))\right) \cdot \frac{\hat{\gamma}^n_{0,\phi}(\lambda)}{d\alpha} \, d\lambda \\
&\quad + \int_c^d \sum_{n=1}^d \left(\partial_{d+n} \mathcal{L}_\phi(((\gamma^1_{0,\phi}(\lambda), ..., \gamma^d_{0,\phi}(\lambda)), (\gamma^{1\,\prime}_{0,\phi}(\lambda), ..., \gamma^{d\,\prime}_{0,\phi}(\lambda))))\right) \cdot \frac{\hat{\gamma}^{n\,\prime}_{0,\phi}(\lambda)}{d\alpha} \, d\lambda
\end{aligned} \tag{421}$$

是。在刚才的计算中，根据我们对函数 $\mathcal{L}$ 的假设，我们可以将导数 $\frac{d}{d\alpha}$ 移入积分号内 [5]。由于 $\hat{}\gamma$ 现在是一个光滑变形，并且 x^i 对所有 $i \in \{1, ..., d\}$ 都是光滑的，因此可知 $x^i \circ \hat{}\gamma \colon (-\epsilon,\ \epsilon) \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 对所有 $i \in \{1, ..., d\}$ 也都是光滑的。因此，我们可以对表达式 $\hat{\gamma}^{n\,\prime}_{\alpha,\ \phi(\lambda)\ d\alpha}$ 应用数学分析中广为人知的施瓦茨定理 [24] ，该定理允许我们交换导数的顺序。形式上，这意味着

$$\frac{\hat{\gamma}^{n\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\hat{\gamma}^{n\,\prime}_{\alpha,\phi}(\lambda) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\hat{\gamma}^n_{\alpha,\phi}(\lambda)}{d\lambda}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\hat{\gamma}^n_{\alpha,\phi}(\lambda)}{d\alpha}\right) \tag{422}$$

对所有 $n \in \{1, ..., d\}$ 均成立。请注意，在（422）中，我们利用了数学分析中已知的常微分算子 $\frac{d}{d\lambda}$ 和 $\frac{d}{d\alpha}$ ，对于 $\hat{}\gamma^n_{\alpha,\ \phi}$，根据定义与偏微分算子 $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ 和 $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ 相同这一点。将（422）应用于（421）右侧的第二项，得到

nun

$$\begin{aligned}
&\int_c^d \sum_{n=1}^{d} \left(\partial_{d+n} \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^d(\lambda)), (\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \right) \cdot \frac{\hat{\gamma}_{0,\phi}^{n\,\prime}(\lambda)}{d\alpha} \, d\lambda \\
&= \int_c^d \sum_{n=1}^{d} \left(\partial_{d+n} \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^d(\lambda)), (\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \right) \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\hat{\gamma}_{0,\phi}^{n}(\lambda)}{d\alpha} \right) d\lambda \\
&= \sum_{n=1}^{d} \int_c^d \left(\partial_{d+n} \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^d(\lambda)), (\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \right) \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\hat{\gamma}_{0,\phi}^{n}(\lambda)}{d\alpha} \right) d\lambda.
\end{aligned} \tag{423}$$

现在，对于所有 $n \in \{1, ..., d\}$，根据我们对函数 $\mathcal{L}_\phi$ 的假设，可以将表达式

$$\int_c^d \left(\partial_{d+n} \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^d(\lambda)), (\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \right) \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\hat{\gamma}_{0,\phi}^{n}(\lambda)}{d\alpha} \right) d\lambda \tag{424}$$

分部积分 [8]。由此可得

$$\begin{aligned}
&\int_c^d \left(\partial_{d+n} \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^d(\lambda)), (\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \right) \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\hat{\gamma}_{0,\phi}^{n}(\lambda)}{d\alpha} \right) d\lambda \\
&= -\int_c^d \frac{d}{d\lambda} \left(\partial_{d+n} \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^d(\lambda)), (\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \right) \cdot \frac{d\hat{\gamma}_{0,\phi}^{n}(\lambda)}{d\alpha} \, d\lambda \\
&+ \left[\left(\partial_{d+n} \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^d(\lambda)), (\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \right) \cdot \frac{d\hat{\gamma}_{0,\phi}^{n}(\lambda)}{d\alpha} \right]_c^d .
\end{aligned} \tag{425}$$

现在，(425) 右侧的第二项消失了，因为根据

$$\hat{\gamma}_{\alpha,\phi}^n(c) = x^n(\hat{\gamma}_\alpha(c)) = x^n(\hat{\gamma}_0(c)) \tag{426}$$

und

$$\hat{\gamma}_{\alpha,\phi}^n(d) = x^n(\hat{\gamma}_\alpha(d)) = x^n(\hat{\gamma}_0(d)) \tag{427}$$

对于所有 $n \in \{1, ..., d\}$，这些表达式关于 α 的导数在 $\lambda = c$ 和 $\lambda = d$ 处为零。现在将 (425) 与刚才的观察结合起来代入方程 (423)，再将其代入 (421)，便得到

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\alpha}\mathcal{S}_{\mathcal{L},[c,d]}(\hat{\gamma}_\alpha)\Big|_{\alpha=0} \\
&= \int_c^d \sum_{n=1}^{d} \Bigg(\Bigg(\partial_n \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \Bigg) \cdot \frac{\hat{\gamma}_{0,\phi}^n(\lambda)}{d\alpha} \\
&\quad - \frac{d}{d\lambda}\Bigg(\partial_{d+n}\mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \Bigg) \cdot \frac{\hat{\gamma}_{0,\phi}^n(\lambda)}{d\alpha} \Bigg) d\lambda \\
&= \int_c^d \sum_{n=1}^{d} \Bigg(\Bigg(\partial_n \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \Bigg) \\
&\quad - \frac{d}{d\lambda}\Bigg(\partial_{d+n}\mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \Bigg) \Bigg) \cdot \frac{\hat{\gamma}_{0,\phi}^n(\lambda)}{d\alpha}\, d\lambda.
\end{aligned}
\tag{428}
$$

由于 (428) 对于 $\hat{}\gamma_0$ 的任意光滑变形 $\hat{}\gamma$ 都成立，根据变分法基本引理可知，对于区间 $[c,d]$ 上的所有 $n \in \{1,...,d\}$

$$
\begin{aligned}
&\partial_n \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \\
&- \frac{d}{d\lambda}\Bigg(\partial_{d+n}\mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \Bigg) = 0
\end{aligned}
\tag{429}
$$

成立。这恰好是区间$[c,d]$上曲线 $\hat{}\gamma_0$ 的欧拉-拉格朗日方程。

□

借助欧拉-拉格朗日方程，我们现在可以表述以下重要定理，它给出了黎曼流形$(\mathcal{M},\ \tau,\ \mathcal{A},\ g)$上某些弱测地线的一个必要判据，

定理 7.2。 设$(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A},g)$ 是一个黎曼流形， $a,b \in \mathbb{R}$ 是两个实数，满足 $a<b$，且$\gamma_0 \in \mathcal{PC}^{\infty}_{p,\ q}([a,b],\mathcal{M})$ 是一条弱测地线，它连接 $\mathcal{M}$ 中的点 p 和 q 。此外，我们假设这条弱测地线以单位速度参数化，即应满足

$$
g_{\gamma_0(\lambda)}(X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)},X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}) = 1 \qquad \forall \lambda \in [a,b]. \tag{430}
$$

进一步设$(\mathcal{U},\phi) \in \mathcal{A}$是 $\mathcal{M}$ 的一个坐标图，其中 $\phi=(x^1,...,x^d)$，且 $\mathcal{U}\cap\gamma_0([a,b]) \neq \emptyset$。由于 γ_0 是 $\mathcal{M}$ 上的一条连续曲线，因此 $\gamma_0^{-1}(\mathcal{U})$ 是相对于 $[a,b]$ 上定义的子空间拓扑的一个开集，故存在一个闭区间 $[c,d]\subseteq[a,b]$，使得 $\gamma_0([c,d]) \subset \mathcal{U}$ 且 $\gamma|_{[c,d]} \in \mathcal{C}^\infty([c,d],\mathcal{M})$ 成立。于是，限制 $\gamma_0|_{[c,d]}$满足所谓的测地线方程；根据定理 7.3，它本身也是一条弱测地线。

$$
0 = \gamma_{0,\phi}^{k\,\prime\prime}(\lambda) + \sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_{ij,\phi}^k(\gamma_{0,\phi}(\lambda)) \cdot \gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda) \quad \forall k \in \{1,...,d\} \tag{431}
$$

其中 $\lambda \in [c,d]$。此处，对于 i、j、$k \in \{1,...,d\}$ 和 $\lambda \in [c,d]$ $\gamma_{0,\phi}^k := x^k \circ \gamma$, $\gamma_{0,\phi}(\lambda) = (\gamma_{0,\phi}^1(\lambda) ..., \gamma_{0,\phi}^d(\lambda))$ 以及

$$\Gamma_{ij,\phi}^k(\gamma_{0,\phi}(\lambda)) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{d} g_\phi^{kn}(\gamma_{0,\phi}(\lambda)) \cdot \left(2 \cdot \partial_j g_{ni,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda)) - \partial_n g_{ij,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\right), \quad (432)$$

其中 $g_{ij,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda)) := g_{\gamma_0(\lambda)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma_0(\lambda)}, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma_0(\lambda)}\right)$，而 $g_\phi^{ij}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))$ 与矩阵 $G_{\gamma_0(\lambda)} = (g_{ij,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda)))_{i,j\in\{1,...,d\}}$ 构成逆矩阵（见证明）。

证明。设 $\gamma_0 : [a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$ 是一条按单位速度参数化的弱测地线，并选取 $[c,d] \subseteq [a,b]$ 使得 $\gamma_0([c,d])$ 完全包含在坐标图 $(\mathcal{U},\phi)$ 的坐标图区域 $\mathcal{U}$ 内，其中 $\phi = (x^1,...,x^d)$。现在，为了证明定理的结论，我们首先注意到，由 (279)、(278) 和 (308) 可得，对所有 $\lambda \in [c,d]$

$$\begin{aligned}
&g_{\gamma_0(\lambda)}(X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}, X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}) \\
&\quad = g_{\gamma_0(\lambda)}\left(\sum_{i=1}^{d}(x^i\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma_0(\lambda)}, \sum_{j=1}^{d}(x^j\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma_0(\lambda)}\right) \\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{d}(x^i\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot(x^j\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot g_{\gamma_0(\lambda)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma_0(\lambda)}, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma_0(\lambda)}\right) \\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{d}(x^i\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot(x^j\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot g_{ij}(\gamma_0(\lambda)) \\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{d}(x^i\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot(x^j\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot g_{ij}(\phi^{-1}(\phi(\gamma_0(\lambda)))) \\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{d}(x^i\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot(x^j\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot g_{ij,\phi}(\phi(\gamma_0(\lambda))) \\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{d}(x^i\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot(x^j\circ\gamma_0)'(\lambda)\cdot g_{ij,\phi}((x^1(\gamma_0(\lambda)),...,x^d(\gamma_0(\lambda)))) \qquad (433)
\end{aligned}$$

成立。根据 (308)，$g_{ij}(\gamma_0(\lambda))$ 定义为 $g_{\gamma_0(\lambda)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma_0(\lambda)}, \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma_0(\lambda)}\right)$ 和 $g_{ij,\ \phi} = g_{ij}\circ\phi^{-1}$。进一步，我们定义函数

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\phi : \phi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\
((a^1,...,a^d),(b^1,...,b^d)) &\longmapsto \sum_{i,j=1}^{d} b^i\cdot b^j\cdot g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d)). \qquad (434)
\end{aligned}$$

由此可得，对于 $\lambda \in [c,d]$

$$\begin{aligned}
&g_{\gamma_0(\lambda)}(X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}, X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}) \\
&\quad = \mathcal{R}_\phi(((x^1(\gamma_0(\lambda)),...,x^d(\gamma_0(\lambda))),((x^1\circ\gamma_0)'(\lambda),...,(x^d\circ\gamma_o)'(\lambda)))) \qquad (435)
\end{aligned}$$

成立。采用简记 $\gamma_{0,\phi}^i(\lambda) := (x^i\circ\gamma_0)(\lambda))$，对所有 $i \in \{1,...,d\}$，由此可得

$$\begin{aligned}
&g_{\gamma_0(\lambda)}(X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}, X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}) \\
&\quad = \mathcal{R}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \qquad (436)
\end{aligned}$$

f对所有 $\lambda \in [c,d]$。因此，长度泛函的被积函数为

$$\begin{aligned}\sqrt{g_{\gamma_0(\lambda)}(X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)}, X_{\gamma_0,\gamma_0(\lambda)})} &= \sqrt{\mathcal{R}_\phi(((\gamma^1_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^d_{0,\phi}(\lambda)),(\gamma^{1\,\prime}_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^{d\,\prime}_{0,\phi}(\lambda))))} \\ &=: \mathcal{L}_\phi(((\gamma^1_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^d_{0,\phi}(\lambda)),(\gamma^{1\,\prime}_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^{d\,\prime}_{0,\phi}(\lambda)))). \quad (437)\end{aligned}$$

现在根据定理 7.1.，我们将欧拉-拉格朗日方程应用于 $\mathcal{L}_\phi$ 。首先计算表达式 $\partial_n\mathcal{L}_\phi(((a^1,.....,a^d),(b^1,.....,b^d)))$，其中 $n \in \{1,...,d\}$:

$$\begin{aligned}&\partial_n\mathcal{L}_\phi(((a^1,...,a^d),(b^1,...,b^d))) \\ &\qquad = \frac{\sum_{i,j=1}^d b^i \cdot b^j \cdot \partial_n g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d))}{2\cdot\sqrt{\sum_{i,j=1}^d b^i \cdot b^j \cdot g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d))}} \quad (438)\end{aligned}$$

对于 $(a^1,.....,a^d) = (\gamma^1_{0,\phi}(\lambda).....,\gamma^d_{0,\phi}(\lambda))$ 和 $(b^1,.....,b^d) = (\gamma^{1\,\prime}_{0,\phi}(\lambda).....,\gamma^{d\,\prime}_{0,\phi}(\lambda))$，其中 $\lambda \in [c,d]$，并利用测地线 γ_0 以单位速度参数化这一假设，可得（438）

$$\begin{aligned}&\partial_n\mathcal{L}_\phi(((\gamma^1_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^d_{0,\phi}(\lambda)),(\gamma^{1\,\prime}_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^{d\,\prime}_{0,\phi}(\lambda)))) \\ &\quad = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^d \gamma^{i\,\prime}_{0,\phi}(\lambda)\cdot\gamma^{j\,\prime}_{0,\phi}(\lambda)\cdot\partial_n g_{ij,\phi}((\gamma^1_{0,\phi}(\lambda),...,\gamma^d_{0,\phi}(\lambda))). \quad (439)\end{aligned}$$

接下来，我们计算表达式 $\partial_{d+n}\mathcal{L}_\phi(((a^1,.....,a^d),(b^1,.....,b^d)))$，其中 $n \in \{1,...,d\}$:

$$\begin{aligned}&\partial_{n+d}\mathcal{L}_\phi(((a^1,...,a^d),(b^1,...,b^d))) \\ &\qquad = \frac{\sum_{i,j=1}^d g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d))\cdot\partial_{d+n}(b^i\cdot b^j)}{2\cdot\sqrt{\sum_{i,j=1}^d b^i\cdot b^j\cdot g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d))}} \quad (440)\end{aligned}$$

根据微分学乘积法则 [13]，表达式 $\partial_{d+n}(b^i b^j)$满足

$$\begin{aligned}\partial_{d+n}(b^i\cdot b^j) &= \partial_{d+n}(b^i)\cdot b^j + b^i\cdot\partial_{d+n}(b^j) \\ &= \delta^i_n\cdot b^j + b^i\cdot\delta^j_n, \quad (441)\end{aligned}$$

其中，表达式 δ^k_n 与 k，$n \in \{1,...,d\}$ 表示克罗内克δ，定义为

$$\delta^k_n = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}, \quad (442)$$

表示。因此，(440) 右侧分子的结果为

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^d g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d))\cdot\partial_{d+n}(b^i\cdot b^j) \\ &\quad = \sum_{i,j=1}^d g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d))\cdot(\delta^i_n\cdot b^j + b^i\cdot\delta^j_n) \\ &\quad = \sum_{i,j=1}^d g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d))\cdot\delta^i_n\cdot b^j + \sum_{i,j=1}^d g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d))\cdot b^i\cdot\delta^j_n \\ &\quad = \sum_{j=1}^d g_{nj,\phi}((a^1,...,a^d))\cdot b^j + \sum_{i=1}^d g_{in,\phi}((a^1,...,a^d))\cdot b^i. \quad (443)\end{aligned}$$

由于 g 是黎曼度量，因此 g_p 对所有 $p \in \mathcal{M}$ 都是对称的，由此可得

$$g_{in,\phi}((a^1,...,a^d)) = g_{ni,\phi}((a^1,...,a^d)) \tag{444}$$

对于所有 $i,\ n \in \{1,...,d\}$ 以及所有 $(a^1,\ ...,\ a^d) \in \phi(\mathcal{U})$ 都成立。利用这一观察，并将 (443) 第二个求和中的求和指标重新命名，可得

$$\sum_{i,j=1}^{d} g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d)) \cdot \partial_{d+n}(b^i \cdot b^j) = 2 \cdot \sum_{j=1}^{d} g_{nj,\phi}((a^1,...,a^d)) \cdot b^j. \tag{445}$$

将 (445) 代入 (440)，得到

$$\begin{aligned} &\partial_{n+d}\mathcal{L}_\phi(((a^1,...,a^d),(b^1,...,b^d))) \\ &\qquad = \frac{\sum_{j=1}^{d} g_{nj,\phi}((a^1,...,a^d)) \cdot b^j}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} b^i \cdot b^j \cdot g_{ij,\phi}((a^1,...,a^d))}}. \end{aligned} \tag{446}$$

对于 $(a^1,\ ...,\ a^d) = (\gamma_{0,\ \phi}^1(\lambda)\ ...,\ \gamma_{0,\ \phi}^d(\lambda))$ 和 $(b^1,\ ...,\ b^d) = (\gamma_0^{1\,\prime}{}_{,\ \phi}(\lambda)\ ...,\ \gamma_0^{d\,\prime}{}_{,\ \phi}(\lambda))$，其中 $\lambda \in [c,d]$，再一次利用测地线 γ_0以单位速度参数化这一假设，可得 (446)

$$\begin{aligned} &\partial_{n+d}\mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{d} g_{nj,\phi}((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda) \end{aligned} \tag{447}$$

现在，我们对表达式 (447) 关于曲线参数 λ 求导:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda}\Big(\partial_{n+d}\mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda))))\Big) \\ &\qquad = \frac{d}{d\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{d} g_{nj,\phi}((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda)\Big). \end{aligned} \tag{448}$$

利用微分学乘积法则以及定理 5.3.中的多元链式法则，可得 (448) 右侧

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{d} g_{nj,\phi}((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda)\Big) \\ &\qquad = \sum_{j,k=1}^{d} \partial_k g_{nj,\phi}((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{k\,\prime}(\lambda) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda) \\ &\qquad\quad + \sum_{j=1}^{d} g_{nj,\phi}((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime\prime}(\lambda). \end{aligned} \tag{449}$$

根据欧拉-拉格朗日方程，将表达式 (439) 和 (449) 结合起来,

于是得到方程

$$
\begin{aligned}
0 = & \sum_{j=1}^{d} g_{nj,\phi}((\gamma_{0,\phi}^{1}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d}(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime\prime}(\lambda) \\
& + \sum_{j,k=1}^{d} \partial_k g_{nj,\phi}((\gamma_{0,\phi}^{1}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d}(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{k\,\prime}(\lambda) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda) \cdot \partial_n g_{ij,\phi}((\gamma_{0,\phi}^{1}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d}(\lambda))).
\end{aligned} \tag{450}
$$

我们通过对第二个求和中的求和指标进行重命名，将这个方程改写为

$$
\begin{aligned}
0 = & \sum_{j=1}^{d} g_{nj,\phi}((\gamma_{0,\phi}^{1}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d}(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime\prime}(\lambda) \\
& + \sum_{i,j=1}^{d} \partial_j g_{ni,\phi}((\gamma_{0,\phi}^{1}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d}(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda) \cdot \gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda) \cdot \partial_n g_{ij,\phi}((\gamma_{0,\phi}^{1}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d}(\lambda))).
\end{aligned} \tag{451}
$$

化简后得到

$$
\begin{aligned}
0 = & \sum_{j=1}^{d} g_{nj,\phi}((\gamma_{0,\phi}^{1}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d}(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime\prime}(\lambda) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \Big(2 \cdot \partial_j g_{ni,\phi}((\gamma_{0,\phi}^{1}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d}(\lambda))) \\
& - \partial_n g_{ij,\phi}((\gamma_{0,\phi}^{1}(\lambda), ..., \gamma_{0,\phi}^{d}(\lambda))) \Big) \cdot \gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda).
\end{aligned} \tag{452}
$$

为了进一步化简这个方程，并将其化为定理 7.2. 中的上述形式，我们注意到，双线性型$g_{\gamma_0(\lambda)}$在 $\lambda \in [c, d]$ 下是正定双线性型，即满足

$$
g_{\gamma_0(\lambda)}(X, X) \geq 0 \qquad \forall X \in T_{\gamma_0(\lambda)}\mathcal{M} \tag{453}
$$

und

$$
g_{\gamma_0(\lambda)}(X, X) = 0 \iff X = \mathbf{0}, \tag{454}
$$

其中$\mathbf{0}$ 是 $T_{\gamma(\lambda)}\mathcal{M}$ 的零向量。设 $X \in T_p\mathcal{M}$ 任意，则 X 可在由 ϕ 诱导的基下展开为

$$
X = \sum_{i=1}^{d} X^i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma_0(\lambda)}. \tag{455}
$$

于是有

$$\begin{aligned} g_{\gamma_0(\lambda)}(X,X) &= \sum_{i,j=1}^{d} X^i \cdot X^j \cdot g_{ij}(\gamma_0(\lambda)) \\ &= (X^1,...,X^d) \circ G_{\gamma_0(\lambda)} \circ (X^1,...,X^d)^T. \end{aligned} \tag{456}$$

其中，在方程 (456) 右侧的运算 $\circ$ 是通常的矩阵乘法，而 $\cdot^T$ 是矩阵的转置运算，它将矩阵的行与列互换。此外， $d \times d$-矩阵$G_{\gamma_0(\lambda)}$ 定义为

$$(G_{\gamma_0(\lambda)})_{ij} = g_{ij}(\gamma_0(\lambda)) \tag{457}$$

其中 $i,\ j \in \{1,...,d\}$。现在我们利用矩阵 $G_{\gamma_0(\lambda)}$ 来定义映射

$$\begin{aligned} f_{G_{\gamma_0(\lambda)}} &: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (X^1,...,X^d) &\longmapsto (X^1,...,X^d) \circ G_{\gamma_0(\lambda)} \end{aligned} \tag{458}$$

为了定义它。按照例 4.2.，我们再次为 $\mathbb{R}^d$ 配备按分量进行的加法和数乘。根据矩阵乘法的定义，映射 $f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}$ 是线性的。此外， $f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}$ 是单射的，因为假设情况并非如此，则根据引理 4.1.，存在一个 $(Y^1,...,Y^d) \in \mathbb{R}^d$，满足 $(Y^1,...,Y^d) \neq (0,...,0)$，从而

$$\begin{aligned} f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}((Y^1,...,Y^d)) &= (Y^1,...,Y^d) \circ G_{\gamma_0(\lambda)} \\ &= (0,...,0) \end{aligned} \tag{459}$$

成立。因此，根据 (456) 可知

$$0 = (Y^1,...,Y^d) \circ G_{\gamma_o(\lambda)} \circ (Y^1,...,Y^d)^T = g_{\gamma_0(\lambda)}(Y,Y) \tag{460}$$

满足 $Y = \sum_{i=1}^{d} Y^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma_0\ (\lambda)}$。根据构造， $Y \neq 0$ 成立，这与假设 $g_{\gamma_0\ (\lambda)}$ 是正定双线性型相矛盾。因此， $f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}$ 是单射的；又因为 $f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}$ 是线性的，根据引理 4.2. 甚至可知 $f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}$是双射。

由此可知，映射 $f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}$ 存在逆映射 $h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}$，满足

$$f_{G_{\gamma_0(\lambda)}} \circ h_{G_{\gamma_0(\lambda)}} = id_{\mathbb{R}^d} = h_{G_{\gamma_0(\lambda)}} \circ f_{G_{\gamma_0(\lambda)}} \tag{461}$$

具有。由于 $f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}$ 是线性的，因此逆映射 $h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}$也具有线性，因为设 $v, w, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}^d$和 $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ 满足 $f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(\tilde{v}) = v$ 且 $f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(\tilde{w}) = w$，则有

$$\begin{aligned} h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(\mu \cdot v + \nu \cdot w) &= h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(\mu \cdot f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(\tilde{v}) + \nu \cdot f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(\tilde{w})) \\ &= h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(\mu \cdot \tilde{v} + \nu \cdot \tilde{w})) \\ &= \mu \cdot \tilde{v} + \nu \cdot \tilde{w} \\ &= \mu \cdot h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(v) + \nu \cdot h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(w). \end{aligned} \tag{462}$$

现在任取 $v = (V^1, ..., V^d) \in \mathbb{R}^d$，并再次将 $e_i \in \mathbb{R}^d$ 定义为

$$e_i := (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, ..., 0). \tag{463}$$

那么，由于$h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}$的线性以及 $\{e_1, ..., e_d\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一组基，可得

$$\begin{aligned} h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(v) &= \sum_{i=1}^{d} V^i \cdot h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{d} V^i \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} g^{ij}(\gamma_0(\lambda)) \cdot e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} g^{ij}(\gamma_0(\lambda)) \cdot V^i \right) \cdot e_j \\ &= (V^1, ..., V^d) \circ G^{-1}_{\gamma_0(\lambda)} \end{aligned} \tag{464}$$

成立。这里，表达式$g^{ij}_{\gamma_0\,(\lambda)} \in \mathbb{R}$ 起初只是一个抽象记号，而矩阵$G^{-1}_{\gamma_0\,(\lambda)}$ 则定义为

$$(G^{-1}_{\gamma_0(\lambda)})_{ij} = g^{ij}_{\gamma_0(\lambda)} \qquad \forall i, j \in \{1, ..., d\}. \tag{465}$$

由此可得

$$\begin{aligned} f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(v)) &= f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}((V^1, ..., V^d) \circ G^{-1}_{\gamma_0(\lambda)}) \\ &= \left((V^1, ..., V^d) \circ G^{-1}_{\gamma_0(\lambda)}\right) \circ G_{\gamma_0(\lambda)} \\ &= (V^1, ..., V^d) \circ \left(G^{-1}_{\gamma_0(\lambda)} \circ G_{\gamma_0(\lambda)}\right) \\ &= (V^1, ..., V^d) \end{aligned} \tag{466}$$

und

$$\begin{aligned} h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(f_{G_{\gamma_0(\lambda)}}(v)) &= h_{G_{\gamma_0(\lambda)}}((V^1, ..., V^d) \circ G_{\gamma_0(\lambda)}) \\ &= \left((V^1, ..., V^d) \circ G_{\gamma_0(\lambda)}\right) \circ G^{-1}_{\gamma_0(\lambda)} \\ &= (V^1, ..., V^d) \circ \left(G_{\gamma_0(\lambda)} \circ G^{-1}_{\gamma_0(\lambda)}\right) \\ &= (V^1, ..., V^d), \end{aligned} \tag{467}$$

由此

$$G^{-1}_{\gamma_0(\lambda)} \circ G_{\gamma_0(\lambda)} = G_{\gamma_0(\lambda)} \circ G^{-1}_{\gamma_0(\lambda)} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} \tag{468}$$

可知，其中 $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}$ 作为一个 $d \times d$矩阵，通过克罗内克δ定义为

$$(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d})_{ij} = \delta^j_i \qquad \forall i, j \in \{1, ..., d\} \tag{469}$$

已定义。也就是说，矩阵$G^{-1}_{\gamma_0\,(\lambda)}$ 是双线性型$g_{\gamma_0\,(\lambda)}$ 相对于坐标图（$\mathcal{U}$， ϕ）的表示矩阵的逆矩阵。因此，用分量表示可得

$$(G^{-1}_{\gamma_0(\lambda)} \circ G_{\gamma_0(\lambda)})_{ki} = \sum_{n=1}^{d} g^{kn}(\gamma_0(\lambda)) \cdot g_{nj}(\gamma_0(\lambda)) = \delta^i_k \quad \forall k, i \in \{1, ..., d\}. \tag{470}$$

现在，为了简化我们的方程（452），将其乘以 g^{kn}（γ_0（λ））$=g^{kn}$（ϕ^{-1}（ϕ（γ_0（λ））））$=:\ g_\phi^{kn}$（（$\gamma^1_{0,\ \phi}$（λ））.....，$\gamma^d_{0,\ \phi}$（λ））， 并对 $n \in \{1,...,d\}$求和。采用简写$\gamma_{0,\ \phi}$（λ）：$=$（$\gamma^1_{0,\ \phi}$（λ）.....，$\gamma^d_{0,\ \phi}$（λ）}后，可得

$$
\begin{aligned}
0 = &\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{n=1}^{d} g_\phi^{kn}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\cdot g_{nj,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\right)\cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime\prime}(\lambda)\\
&+\ \frac{1}{2}\sum_{i,j,n=1}^{d} g_\phi^{kn}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\cdot\Big(2\cdot\partial_j g_{ni,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\\
&-\ \partial_n g_{ij,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\Big)\cdot\gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda)\cdot\gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda)\\
=&\sum_{j=1}^{d}\delta_j^k\cdot\gamma_{0,\phi}^{j\,\prime\prime}(\lambda)+\frac{1}{2}\sum_{i,j,n=1}^{d} g_\phi^{kn}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\cdot\Big(2\cdot\partial_j g_{ni,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\\
&-\ \partial_n g_{ij,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\Big)\cdot\gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda)\cdot\gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda)\\
=&\,\gamma_{0,\phi}^{k\,\prime\prime}(\lambda)+\frac{1}{2}\sum_{i,j,n=1}^{d} g_\phi^{kn}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\cdot\Big(2\cdot\partial_j g_{ni,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\\
&-\ \partial_n g_{ij,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\Big)\cdot\gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda)\cdot\gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda)\qquad\forall k\in\{1,...,d\}.
\end{aligned}
\tag{471}
$$

令彩票网址

$$
\Gamma^k_{ij,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{d} g_\phi^{kn}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\cdot\Big(2\cdot\partial_j g_{ni,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))-\partial_n g_{ij,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\Big)
\tag{472}
$$

对于 $i,j,k\in\{1,...,d\}$，于是得到测地线方程

$$
0=\gamma_{0,\phi}^{k\,\prime\prime}(\lambda)+\sum_{i,j=1}^{d}\Gamma^k_{ij,\phi}(\gamma_{0,\phi}(\lambda))\cdot\gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda)\cdot\gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda)\qquad\forall k\in\{1,...,d\}.
\tag{473}
$$

这就证明了所要证明的结论。 □

此处请注意，若我们例如在黎曼流形 $(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A},g)$ 上寻找两点 $p=\gamma(a)$ 和 $q=\gamma(b)$ 之间的最短连接曲线$\gamma:\ [a,b]\longrightarrow\mathcal{M}$，通常我们根本不在乎这条连接曲线 γ 具体如何参数化，因为实际的几何曲线由 $\gamma([a,b])\subseteq\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{M}$ 上给出。因此，定理 7.2. 中的上述限制起初并没有几何意义。

注 7.5. 为指标 $i,j,k\in\{1,...,d\}$ 定义的函数

$$
\Gamma^k_{ij,\phi}:\phi(\mathcal{U})\longrightarrow\mathbb{R}
\tag{474}
$$

也称为定理 7.2 中的克里斯托费尔符号。这些符号是由坐标图诱导的所谓 *Levi-Civita*联络的坐标函数。该联络是所谓线性联络 ∇ *auf* $\mathcal{M}$ 的一个例子，我们需要它来沿着其他光滑向量场对光滑向量场求导 *[18]*。

本节末尾，我们还要考察一种特殊情形：在黎曼流形 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}, g)$ 上给定了一条测地线 $\gamma_0 : [a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$，并且存在一个坐标图 $(\mathcal{U}, \phi)$，满足 $\gamma_0([a,b]) \subseteq \mathcal{U}$。在这种情况下，也可以说这条测地线完全包含在坐标图 $(\mathcal{U}, \phi)$ 中。

定理 7.5. 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}, g)$ 为一个黎曼流形，$a, b \in \mathbb{R}$ 为两个实数，满足 $a < b$ 和 $\gamma_0 \in \mathcal{C}^{\infty}_{p,\,q}([a,b], \mathcal{M})$ 是一条以单位速度参数化的曲线，它始于点 $p \in \mathcal{M}$，终于点 $q \in \mathcal{M}$。此外，存在一个坐标图 $(\mathcal{U}, \phi) \in \mathcal{A}$，使得 $\gamma_0([a,b]) \subseteq \mathcal{U}$ 成立。那么以下陈述等价：

i) γ_0 是一条测地线。

ii) 关于坐标图 $(\mathcal{U}, \phi)$，γ_0 满足测地线方程。

证明。这直接由定理 7.2。以及曲线完全包含在一个坐标图区域内这一事实得出。 □

因此，上述定理提供了一种初步方法，可以实际计算黎曼流形上的测地线。

7.4 能量泛函

在上一节中，我们了解了黎曼流形上弱测地线的一个必要判据（$\mathcal{M}$，τ，$\mathcal{A}$，g）。在第 7 章的最后一节中，我们现在要简要讨论所谓的能量泛函。

之所以要讨论这个问题，是因为我们稍后将会看到，长度泛函与能量泛函在某种意义上具有相同的关于其驻定曲线的必要条件。能量泛函的结构比长度泛函更简单，因此人们更倾向于以它为出发点，来研究（弱）测地线概念的各种应用或推广。在第9章中，我们将进一步了解这具体意味着什么。

现在，让我们先来定义所谓的能量泛函：

定义 7.11. 设 $(\mathcal{M}, \tau, \mathcal{A}, g)$ 是一个黎曼流形，$a, b \in \mathbb{R}$ 是两个满足 $a < b$ 的实数。我们定义所谓的能量泛函 $\mathcal{E}_{[a,b]}$ 如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{[a,b]} : \mathcal{C}^{\infty}([a,b], \mathcal{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\longmapsto \mathcal{E}_{[a,b]}(\gamma) := \frac{1}{2} \int_a^b g_{\gamma(\lambda)}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)}, X_{\gamma,\gamma(\lambda)})\, d\lambda. \end{aligned} \tag{475}$$

注 7.6. 关于定义 7.11，我们作如下观察：

i) 考虑表达式 (475) 时，同样可以看出，鉴于非单射曲线 γ，$X_{\gamma,\,\gamma(\lambda)}$ 若改为写成 $X_{\gamma,\,\lambda,\,\gamma(\lambda)}$ 在形式上会更加严谨。不过，为了便于阅读，我们采用上面这种简写形式，这种写法在现代微分几何中是标准写法。

ii) 类似于备注 7.1，能量泛函也可以对集合 $\mathcal{PC}^\infty([a,b],\mathcal{M})$ 中的曲线定义。例如，设 $\gamma\in\mathcal{PC}^\infty([a,b],\mathcal{M})$，则存在一个集合 $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,\lambda_{n+1}\}\subseteq(a,b)$，满足 $n\in\mathbb{N}$、$\lambda_1=a$ 和 $\lambda_{n+1}=b$，使得对于所有 $i\in\{1,...,n\}$，都有 $\gamma|_{(\lambda_i,\lambda_{i+1})}\in\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathcal{M})$。那么，这条曲线的能量泛函定义为

$$\mathcal{E}_{[a,b]}(\gamma):=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}g_{\gamma(\lambda)}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)},X_{\gamma,\gamma(\lambda)})\,d\lambda. \tag{476}$$

由于积分的线性性，这个表达式是良定义的。

我们简要探讨一下泛函 $\mathcal{E}_{[a,b]}$ 名称的由来。为此，我们考察一个由经典力学描述的物理系统。

在这个物理系统中，一个粒子沿曲线$\gamma:(-\infty,\ \infty)\longrightarrow\mathbb{R}^3$以 $\gamma\in\mathcal{C}^\infty((-\infty,\infty)\ \mathbb{R}^3)$ 运动，使得 $\gamma(\lambda)\in\mathbb{R}^3$ 描述粒子在物理空间中的位置随时间 $\lambda\in(-\infty,\infty)$ 的变化。粒子在时刻 λ 的速度向量为 $X_{\gamma,\ \gamma(\lambda)}$。按照注释 6.1. 的做法，将 $\mathbb{R}^3$ 视为光滑流形，并赋予它由 (335) 中的 (0，2) 张量场 g，那么粒子在时刻 λ 的速度为

$$v(\lambda)=\sqrt{g_{\gamma(\lambda)}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)},X_{\gamma,\gamma(\lambda)})}. \tag{477}$$

若粒子的质量为 m，则根据经典力学，粒子在时刻 λ 的动能为

$$\begin{aligned}E_{kin}(\lambda)&=\frac{1}{2}m\cdot v(\lambda)^2\\&=\frac{1}{2}m\cdot g_{\gamma(\lambda)}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)},X_{\gamma,\gamma(\lambda)})\end{aligned} \tag{478}$$

此外，假设粒子的质量已归一化，即满足 $m=1$，则粒子在时刻 λ 的动能为

$$E_{kin}(\lambda)=\frac{1}{2}\cdot g_{\gamma(\lambda)}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)},X_{\gamma,\gamma(\lambda)}), \tag{479}$$

这恰好对应于 (475) 右侧的被积函数。也就是说，表达式 $\mathcal{E}_{[a,b]}(\gamma|_{[a,b]})$ 对应于在时间区间 $[a,b]$ 上，对质量归一化的粒子的动能进行积分；该粒子的运动由曲线 γ 描述。由于这一关系与（动）能有关，泛函 $\mathcal{E}_{[a,b]}$ 也称为能量泛函。

与第 7.3 节类似，现在我们可以考察能量泛函的驻定曲线，并像定理 7.2.中那样推导出一个必要判据。

定理 *7.3.* 设 $(\mathcal{M},\tau,\mathcal{A},g)$ 是一个黎曼流形，$a,b\in\mathbb{R}$ 是两个满足 $a<b$ 的实数，并且 $\gamma_0\in\mathcal{PC}^\infty_{p,q}([a,b],\mathcal{M})$ 是能量泛函 $\mathcal{E}_{[a,b]}|_{\mathcal{PC}^\infty_{p,q}([a,b],\mathcal{M})}$ 的一条驻定曲线，它连接点 p 和 q。进一步设 $(\mathcal{U},\phi)$ 是 $\in\mathcal{A}$ 上的一个坐标图，其中 $\phi=(x^1,...,x^d)$，且 $\mathcal{U}\cap\gamma_0([a,b])\neq\emptyset$。

进一步设 $[c,d] \subseteq [a,b]$ 是 $[a,b]$ 的任意一个子区间，满足 $\gamma_0([c,d]) \subseteq \mathcal{U}$，且 $\gamma|_{[c,d]} \in \mathcal{C}^\infty([c,d], \mathcal{M})$。那么限制 $\gamma_0|_{[c,d]}$ 满足所谓的测地线方程；根据定理 7.3，它本身又是一条弱测地线。

$$0 = \gamma_{0,\phi}^{k\,\prime\prime}(\lambda) + \sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_{ij,\phi}^{k}(\gamma_{0,\phi}(\lambda)) \cdot \gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda) \qquad \forall k \in \{1,...,d\} \tag{480}$$

与 $\lambda \in [c,d]$。其中，(480) 中出现的量与定理 7.2 中的说明相同。

证明。 证明可直接由定理 7.2. 的证明得出，只需注意到，对于该定理，我们要应用欧拉–拉格朗日方程的函数 $\mathcal{L}_\phi$，恰好就是 (434) 中说明的函数 $\mathcal{R}_\phi$。对于 $m \in \{1,...,d\}$ 和 $\lambda \in [c,d]$，有

$$\begin{aligned} &\partial_n \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \\ &\qquad = \sum_{i,j=1}^{d} \gamma_{0,\phi}^{i\,\prime}(\lambda) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda) \cdot \partial_n g_{ij,\phi}((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda))) \end{aligned} \tag{481}$$

und

$$\begin{aligned} &\partial_{n+d} \mathcal{L}_\phi(((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda)),(\gamma_{0,\phi}^{1\,\prime}(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^{d\,\prime}(\lambda)))) \\ &\qquad = 2 \cdot \sum_{j=1}^{d} g_{nj,\phi}((\gamma_{0,\phi}^1(\lambda),...,\gamma_{0,\phi}^d(\lambda))) \cdot \gamma_{0,\phi}^{j\,\prime}(\lambda). \end{aligned} \tag{482}$$

如定理 7.3. 的证明所示，由此可得 $\gamma_0|_{[c,d]}$ 的测地线方程成立。

□

8 总结

Fas现在让我们总结一下本文主体部分讨论的所有内容 n.

从曲线的概念出发，为了对它进行数学上的精确定义，我们在主体部分的前两章，即第2章和第3章，探讨了如何在抽象集合 X 上建立邻近概念。

我们由此看到，只要为抽象集合 X 配备一种称为拓扑的抽象结构，就可以在其上引入邻近概念。粗略地说，拓扑是幂集的一个特殊子集。

在第2章中，我们确认，借助抽象的拓扑概念，确实可以在集合 X 上建立邻近概念。例如，借助拓扑 $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$，我们得以在 X 上为序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 引入收敛概念，其中直观地编码了一种邻近概念。

随后，在第3章中，我们讨论了诸如为何要对拓扑作出精确定义等问题。为此，我们研究了度量空间（X，d），在这些空间中，由于度量 d 的存在，我们可以直观地定义邻近概念。通过阐明度量空间与拓扑空间之间的关系，我们得以说明拓扑的定义为何如此构造，以及为何这种定义在某种意义上是自然的。

在第4章和第5章中，我们分别探讨了（线性）代数以及（多元）数学分析和泛函分析领域中的重要概念。

第4章中最重要的成果之一是预希尔伯特空间的定义（V，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$），以及它们与几何之间的联系。例如，我们看到，在预希尔伯特空间中，不仅存在有意义的长度概念，还存在有意义的、尽管是抽象的角度概念。

例如，我们借助预希尔伯特空间，得以为经典欧几里得几何提供一个模型，这再次证明，预希尔伯特空间中通常以抽象方式定义的长度和角度概念确实具有几何意义。

在第6章中，我们探讨了有限维流形（$\mathcal{M}$，τ）的概念。我们对这类流形尤其感兴趣，因为它们是我们希望在其上定义（弱）测地线概念的数学对象。

借助第4章中建立的概念，我们可以将 d维流形引入为一种特殊的拓扑空间，它在局部看起来 像赋有标准几何的欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$。

此外，基于这种局部相似性，我们能够将第5章中建立的赋范空间之间函数的可微性概念推广到有限维流形上，从而引入切向量和切空间的几何概念。

借助这些概念，我们又能够引入切丛和光滑向量场的概念 $\mathcal{M}$ 。基于

光滑向量场的概念，我们进而可以阐释光滑张量场的定义。

在第7章中，我们最终探讨了所谓的黎曼流形。这类流形是配备了特殊光滑(0,2)-张量场 g 的光滑有限维流形，我们称之为黎曼度量。

黎曼度量 g 的定义方式是：它使流形的每个切空间都成为一个预希尔伯特空间。借助第4章中关于预希尔伯特空间概念的几何解释，我们得以理解黎曼度量 g 如何在流形上诱导出一种几何结构。

此外，借助黎曼度量 g，我们现在能够为（分段）光滑曲线 $\gamma\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathcal{M}$，其中$a, b \in \mathbb{R}$ 和 $a < b$，通过长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 说明一个有意义的长度概念。

基于这个长度泛函，我们终于可以引入（弱）测地线的概念，即长度泛函的驻定曲线；从几何角度看，它们可以是连接两个给定点的最短曲线。

最后，我们还探讨了如何实际计算黎曼流形的（弱）测地线。在此过程中，我们遇到了所谓的测地线方程，它是一个常微分方程组。

9 展望：无限维流形上的测地线与像匹配问题

现在，我们已经能够在本文的主体部分定义并直观地理解有限维流形上的（弱）测地线，接下来可以提出这样一个问题：从概念上看，我们是否也能在更一般的数学实体上解释（弱）测地线。

我们具体指的是什么？在正文部分正式定义了（弱）测地线的概念之后，我们接着尝试对这一概念形成几何且直观的认识。我们还看到，在有限维黎曼流形 $(\mathcal{M},\ \tau,\ \mathcal{A},\ g)$ 上，（弱）测地线例如可以是点 p 和 q 之间的最短连接曲线，其中 $\mathcal{M}$。因此，从概念上说，（弱）测地线在某种意义上就是最短连接曲线。

现在可以提出这样一个问题：例如，我们能否从最短连接曲线的概念出发，为更一般的数学对象定义一种类似的测地线概念？这些更一般的数学对象应当是什么样的？首先，这些对象也应当是拓扑空间 $(\mathcal{H},\ \rho)$，毕竟我们需要曲线概念，而正如第2章所讨论的，曲线概念以连续性概念为前提。

此外，对于这些更一般的数学实体，我们还需要某种长度泛函 $\mathbb{J}_{[a,b]}$，其中有 $a,\ b \in \mathbb{R}$ 以及 $a < b$；因为如果我们想讨论最短连接曲线，那么当然首先需要为形如 $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathcal{H}$ 的一般曲线定义一个长度概念，这样我们之后才知道例如要最小化什么。

在最理想的情况下，这种长度概念不应由一个完全抽象的长度泛函导出，而应在结构上以有限维黎曼流形的长度泛函为参照。这样一方面我们才能说明为什么将表达式 $\mathbb{J}_{[a,b]}(\gamma)$ 称为曲线 γ 的长度，另一方面也能自动保证泛函 $\mathbb{J}_{[a,b]}$ 具有足够的结构，从而可以证明关于 $\mathbb{J}_{[a,b]}$ 的有用命题。

然而，如果长度泛函 $\mathbb{J}_{[a,b]}$ 要以有限维黎曼流形上的长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 为参照，那么在选择更一般的数学实体（我们希望在其上建立测地线概念）时，我们应要求多元分析或泛函分析中的概念也能迁移到这种实体上。毕竟，即使对于长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$，我们能够在流形 $(\mathcal{M},\ \tau,\ \mathcal{A},\ g)$ 上解释切向量的概念，也曾极为重要；而我们正是借助数学分析的方法，以直观的方式定义了这一概念。

因此，原则上，我们希望我们所讨论的更一般的数学实体在

总体上保留流形的结构。这自然会直接引出一个问题：如何合理地推广流形这一概念？鉴于我们此前谈论的始终是有限维流形，自然可以进一步追问：能否将有限维流形的概念合理地推广到无限维情形？如果可行，我们至少已经找到了一种数学实体：它一方面比有限维流形的概念更一般，另一方面至少原则上能够提供一种更一般的测地线概念。

事实上，将有限维流形的概念推广到无限维情形，并没有唯一的方法。有限维流形概念的无限维推广中，著名的例子包括所谓的弗雷歇流形 [20], 、所谓的巴拿赫流形 [27] 以及所谓的希尔伯特流形 [16]。

不过，这三种不同方法的基本思想或多或少是相同的。通俗地说，三种情况下的一般要求都是：所考察的拓扑空间 $(\mathcal{H},\ \sigma)$ 在局部看来像一个无限维向量空间 E。更形式化地说，这意味着对于每个点 $p \in \mathcal{H}$，都存在一个开集 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$，满足 $p \in \mathcal{U}$，使得 $\mathcal{U}$ 与无限维向量空间 E 的某个开集同胚。

$(\mathcal{H},\ \sigma)$ 与 E 之间的局部同胚意味着，无限维向量空间 E 不能只是一个裸的向量空间，而必须是一个配备了拓扑 ρ 的向量空间，因为只有在这种情况下，直观意义上的同胚概念才有意义。

对于有限维流形，与流形局部同胚的向量空间 $\mathbb{R}^d$上的拓扑，总是由标准内积 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle_{\mathbb{R}^d}$ 所诱导的拓扑；正如我们在定理4.9. 中看到的，这使它自然地成为一个拓扑向量空间。

如果希望将有限维微分几何中的尽可能多的结构推广到无限维情形，那么自然有必要要求，赋予 E 的拓扑 ρ 不是任意的拓扑，而应经过适当选择，使得根据定义 4.15. ，$(E,\ \rho)$ 是一个拓扑向量空间。

对向量空间拓扑的这一直观要求 E 分别融入了弗雷歇流形、巴拿赫流形和希尔伯特流形的定义之中，而这些定义都代表着将流形概念推广到无限维情形的可能方式。

例如，对于希尔伯特流形，可以不严谨地说，向量空间（$E,\ \rho$）应当是一个完备的预希尔伯特空间，即所谓的希尔伯特空间 [6], ，因此，其拓扑 ρ 由定义在 E 上的内积 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ 诱导而来。相较之下，对于巴拿赫流形，大致可以说，向量空间（$E,\ \rho$）由一个完备的赋范空间，即所谓的巴拿赫空间 [6], 给出，因此，其拓扑由定义在 E 上的范数 $\| \cdot \|_E$ 诱导而来。在这两种情况下，（$E,\ \rho$）自然地都是一个拓扑向量空间。

然而，如果将弗雷歇流形定义为无限维流形，那么在这种情况下，向量空间 E 上的拓扑ρ 不一定由内积或范数诱导而来。相反，在这种情况下，要求向量空间（E，ρ）应当是所谓的弗雷歇空间 [6]，而弗雷歇空间再次成为拓扑向量空间的一个例子。简而言之，弗雷歇空间是一个拓扑向量空间，其拓扑必须是豪斯多夫的，并且由一个可数的、由所谓半范数组成的族（$\|\cdot\|_k$）$_{k\in\mathbb{N}}$ 诱导而来。

豪斯多夫性质的要求在这里很重要，它能确保弗雷歇空间中存在一种合理且与定义 5.1. 几乎完全类似的可微性概念。毕竟，我们在定理 2.1.中看到，豪斯多夫空间的一个良好性质是，其收敛序列具有唯一的极限。

弗雷歇空间上的拓扑 ρ 由一个可数的半范数族诱导，这意味着子集 $\mathcal{D} \subseteq E$ 当且仅当对所有 $v \in \mathcal{D}$，都存在一个 $K > 0$ 和一个 $\delta > 0$，使得其属于 ρ

$$\{w \in E \mid \|w - v\|_k < \delta,\ \forall k \leq K\} \subseteq \mathcal{D} \tag{483}$$

成立。在 E 上定义的半范数 $\|\cdot\|$ 本质上是一种范数，只是对正定性的要求被

$$\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in E \tag{484}$$

弱化了。

尤其是考虑到引言中提到的图像匹配问题，弗雷歇空间和弗雷歇流形如今格外重要，因为我们可以像引言中已提到的那样，将集合 $Diff(\Omega)$（其中 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$）视为弗雷歇流形 [12]。这使我们能够讨论形如

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow Diff(\Omega) \tag{485}$$

的光滑或分段光滑曲线。借助光滑曲线这一概念，我们也能够定义切向量的概念 $X_{\gamma,\ \gamma(\lambda)}$，其中 $\lambda \in (a,\ b)$。与有限维情形一样，我们现在自然也能够定义所有 $p \in Diff(\Omega)$ 的切空间 $T_pDiff(\Omega)$。如果再为每个切空间 $T_pDiff(\Omega)$ 配备一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$，使得直观上函数

$$Diff(\Omega) \ni p \longmapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_p \tag{486}$$

连续地依赖于点 $p \in Diff(\Omega)$，这样一来，原则上我们已经具备了在 $Diff(\Omega)$ 上定义一个有意义的长度泛函所需的全部要素，进而能够讨论流形 $Diff(\Omega)$ 上的（弱）测地线。

那么，我们如何将这一点应用于引言中提到的像匹配问题呢?

如引言中所述，图像匹配问题的目标是寻找一个函数 $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega$，使图像 P_1 和 P_2能够建立合理的对应关系。

更确切地说，如果我们再次将集合 Ω理解为两幅图像的图像像素集合，那么函数 ϕ 应告诉我们，图像 P_1 中的哪个像素恰好对应图像 P_2 中的哪个像素。与引言中一样，我们将函数 $\mathcal{I}_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$与图像 P_1 关联，将函数 $\mathcal{I}_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 与图像 P_2 关联，那么我们对匹配 ϕ提出的要求意味着：

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \circ \phi \tag{487}$$

应当成立。匹配函数 ϕ还应满足哪些性质?

为了使 ϕ 能够成为 P_1 与 P_2之间匹配的合理候选，我们自然必须要求 ϕ 是双射，即既是单射又是满射。显然，这一要求是合理的，因为毕竟 P_1 中的每个图像像素都应恰好对应 P_2 中的一个图像像素，反之亦然。此外，我们还可以赋予集合 Ω 子空间拓扑$\tau_{\mathbb{R}^d,\ \Omega}$，该拓扑来自 $\mathbb{R}^d$ 上的标准拓扑。

现在，我们可以将 $(\Omega\tau_{\mathbb{R}^d,\ \Omega})$ 理解为一个拓扑空间，因此能够提出另一项直观且合理的要求，即 ϕ和 ϕ^{-1}的连续性。对函数 ϕ提出同胚要求是合理的，因为直观而言， P_1 中彼此相近的图像像素经过 ϕ 映射后，在 P_2 中也应彼此相近，反之亦然。

此外，我们还可以作出一个简化但并非完全不切实际的模型假设，即匹配函数 ϕ不仅是一个同胚，甚至还是一个光滑微分同胚。

因此，我们可以很自然地将所求的匹配函数理解为无限维弗雷歇流形 $Diff(\Omega)$ 中的一个点。

正如引言中所提到的，在所谓的 $Geodesic\ shooting$-算法 [21],中——该算法基于此处讨论的图像匹配问题的几何建模——（弱）测地线发挥着决定性作用。

因此，要理解甚至推导出像 $Geodesic\ shooting$-算法这样的算法，首先必须开始研究 $Diff(\Omega)$ 上的（弱）测地线，并了解它们具体具有哪些性质，因为这样我们之后便可以利用这些知识，开发出基于测地线概念的相应算法。

由于在对图像匹配问题进行具体几何建模时，从技术角度来说，我们只关心 $Diff(\Omega)$ 的（弱）测地线，因此实际上不需要在$Diff(\Omega)$ 上定义一般的长度概念，只需要一个（可能更简单的）概念，能够给出$Diff(\Omega)$ 的（弱）测地线即可。我们在第 7.4 节已经了解过这样一个概念。

因此，我们在第 7.4 节看到，对于有限维流形，在某些条件下，关于长度泛函 $\mathbb{L}_{[a,b]}$ 和能量泛函 $\mathcal{E}_{[a,b]}$ 的必要驻定性条件就是所谓的测地线方程。由于测地线方程是一个常微分方程组，

我们因此能够借助它实际计算$Diff(\Omega)$中的（弱）测地线。

由于能量泛函在结构上更为简单，因此在无限维情形下，我们从一开始就使用能量泛函，通过能量泛函的驻定曲线引入（弱）测地线的概念。

记 $\mathcal{G}_{[a,b]}$ 为无限维弗雷歇流形$Diff(\Omega)$上的能量泛函，其定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{[a,b]} : \mathcal{C}^\infty([a,b], Diff(\Omega)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\longmapsto \frac{1}{2}\cdot\int_a^b \langle X_{\gamma,\gamma(\lambda)}, X_{\gamma,\gamma(\lambda)}\rangle_{\gamma(\lambda)}\, d\lambda. \end{aligned} \tag{488}$$

为了从 $\mathcal{G}_{[a,b]}$ 的变分中推导出无限维情形下欧拉-拉格朗日方程的一种有用形式，现在我们将采用一个技巧，下面将对其进行概略说明；该技巧主要参照 [21] 。

首先注意到，如果我们赋予弗雷歇流形$Diff(\Omega)$以函数复合 $\circ$ ，那么它就成为一个无限维李群。通常，当我们处理的是一个同时也是光滑流形的拓扑群时，就称其为李群。

在第 6.4 节中，我们论证了，如果为 $\mathbb{R}^d$ 赋予备注 6.1. 中所述的光滑结构，就可以以几何上合理的方式将所有切空间彼此识别，并合理地视为 $\mathbb{R}^d$ 本身。

现在，在我们的无限维情形中，也可以进行类似的处理。因此，在我们这个具体情形中，同样可以将$Diff(\Omega)$的所有切空间以几何上合理的方式彼此识别，并视为一个无限维向量空间$\mathbf{g}$ 。向量空间$\mathbf{g}$ 由 Ω 上所有光滑向量场构成。

在李理论的语境中， [2], 该理论除其他内容外还研究李群（$\mathbf{G}$ $*$），切空间 $T_e\mathbf{G}$ 在单位元 e 处（$\mathbf{G}$ $*$）通常也称为李群（$\mathbf{G}$ $*$）的李代数。在我们这个具体情形中，（$\mathbf{G}$ $*$）由（$Diff(\Omega)$ $\circ$）给出；根据上述识别，我们将向量空间$\mathbf{g}$ 称为（$Diff(\Omega)$ $\circ$）的李代数。

因此，我们现在能够将$Diff(\Omega)$中的每个切向量 X 与$\mathbf{g}$ 中的唯一一个元素 $\mathcal{X}$ 在几何上合理地对应起来。这又使我们能够用$\mathbf{g}$ 中给定的单个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{g}}$，替代定义能量泛函时出现的表达式$\langle\cdot,\cdot\rangle_p$（该表达式对所有 $p \in Diff(\Omega)$均适用），从而将能量泛函简化为

$$\mathcal{G}_{[a,b]}(\gamma) = \frac{1}{2}\cdot\int_a^b \langle \mathcal{X}(\gamma(\lambda)), \mathcal{X}(\gamma(\lambda))\rangle_{\mathbf{g}}\, d\lambda. \tag{489}$$

记$\mathbf{g}^*$ 为$\mathbf{g}$的拓扑对偶空间，由$\mathbf{g}$上的所有线性连续泛函组成，那么我们可以定义一个映射 $L : g \longrightarrow g^*$ ，使得

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle_{\mathbf{g}} = L(\mathcal{X})(\mathcal{Y}) =: (L(\mathcal{X}), \mathcal{Y}) \qquad \forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbf{g} \tag{490}$$

成立。双线性括号 $(\cdot,\cdot)$ 通常也称为对偶配对。此外，还可以通过以下方式定义李理论中熟知的作用于$\mathbf{g}$ 或作用于$Diff(\Omega)$上的伴随作用

$$\begin{aligned} Ad : Diff(\Omega) \times \mathbf{g} &\longrightarrow \mathbf{g} \\ (\phi, \mathcal{X}) &\longmapsto Ad(\phi, \mathcal{X}) := Ad_\phi(\mathcal{X}) := (\phi'(\mathcal{X})) \circ \phi^{-1}, \end{aligned} \tag{491}$$

其中 $Ad(\phi, \mathcal{X})(x) := \phi'(\phi^{-1}(x))(\mathcal{X}(\phi^{-1}(x)))$ 对所有 $x \in \Omega$ 都成立，并且

$$\begin{aligned} ad : \mathbf{g} \times \mathbf{g} &\longrightarrow \mathbf{g} \\ (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &\longmapsto ad(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := ad_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \mathcal{X}'(\mathcal{Y}) - \mathcal{Y}'(\mathcal{X}), \end{aligned} \tag{492}$$

其中 $(\mathcal{X}'(\mathcal{Y}))(x) := \mathcal{X}'(x)(\mathcal{Y}(x))$ 对所有 $x \in \Omega$ 都成立，解释了。借助这些映射，$\mathcal{G}_{[a,b]}$ 的欧拉-拉格朗日方程可写为

$$\frac{dL(\mathcal{X}(\gamma(\lambda)))}{d\lambda} + ad^*_{\mathcal{X}(\gamma(\lambda))}(L(\mathcal{X}(\gamma(\lambda)))) = 0, \tag{493}$$

其中 $X_{\gamma,\gamma(\lambda)}$ 再次与 $\mathcal{X}(\gamma(\lambda))$ 等同，而 $ad^*_{\mathcal{X}(\gamma(\lambda))}$ 定义为

$$(\mathcal{Y}, ad_{\mathcal{X}(\gamma(\lambda))}(\mathcal{Z})) = (ad^*_{\mathcal{X}(\gamma(\lambda))}(\mathcal{Y}), \mathcal{Z}) \qquad \forall \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathbf{g}. \tag{494}$$

由方程 (493) 出发，便可研究 $Diff(\Omega)$ 的（弱）测地线的各种守恒量，并以此为基础开发诸如测地线射击算法之类的算法。 [21] 中介绍了其中一些守恒量。

文学

[1]立体投影。https://www.ms.uky.edu/~guillou/f12/ 351WS5Soln.pdf，访问日期：$= 07$.11.2024，2019。[2] Hossein Abbaspour 和 Martin A Moskowitz。李理论基础。World Scientific，2007。[3] Henri Paul Cartan。微分学。*Hermann*出版社，*2007*，1967。[4] Donald L Cohn。测度论，第 5 卷。施普林格，2013。[5] Keith Conrad。积分号下求导。康涅狄格大学，2019。[6] Robert E Edwards。泛函分析：理论与应用。Courier Corporation，2012。[7] Gerd Fischer。线性代数：面向初学者的导论，第 14版，*Vieweg*出版社，2003。[8] Otto Forster。数学分析第 1 卷：一元函数的微分与积分。*Vieweg*学习丛书：数学基础课程。*Vieweg*出版社，布伦瑞克，第 6 版。[9] Otto Forster。数学分析*2*：微分学 $\mathbb{R}^n$，常微分方程。施普林格出版社，2017。[10] Samuel I Goldberg。曲率与同调：曲率与同调。Academic Press，2011。[11] Herbert Goldstein、Charles P Poole Jr 和 John L Safko Sr。经典力学。约翰·威利父子公司，2012。[12] Martin Golubitsky 和 Victor Guillemin。稳定映射及其奇点，第 14 卷。Springer Science & Business Media，2012。[13] Harro Heuser。数学分析教程，第 *2* 卷，附 *631* 道习题，部分附解答。Teubner，1992。[14] Harro Heuser。数学分析教程：第 *1* 部分。施普林格出版社，2013。[15] Kapil D Joshi。一般拓扑学导论。新时代国际出版社，1983。[16] Wilhelm Klingenberg。黎曼几何，第 1 卷。Walter de Gruyter出版社，1995。[17] Marcus Kriele。时空：广义相对论与微分几何基础，第 59 卷。Springer Science & Business Media，2003。[18] John M Lee。黎曼流形：曲率导论，第 176 卷。Springer Science & Business Media，2006。[19] John M Lee 和 John M Lee。光滑流形。施普林格，2012。

[20] Palanivel Manoharan。《弗雷歇流形研究》。俄亥俄州立大学，1990 年。[21] Michael I Miller、Alain Trouvé 和 Laurent Younes。计算解剖学的测地线射击。《数学成像与视觉杂志》，24：209–228，2006 年。[22] Mícheál O’Searcoid。《度量空间》。施普林格科学与商业媒体，2006 年。[23] Friedrich Sauvigny。《数学分析：基础、微分、积分理论、微分方程、变分方法》。施普林格出版社，2013 年。[24] Michael Spivak。《流形上的微积分：经典高等微积分定理的现代方法》。CRC 出版社，2018 年。[25] William F Trench。《实分析导论》。三一大学，2013 年。[26] Loring W Tu。《流形》。载于流形导论，第 47–83 页。施普林格，2011 年。[27] Harald Upmeier。《对称巴拿赫流形与 *Jordan C**- 代数》。爱思唯尔，2011 年。[28] Frank W Warner。《可微流形与李群基础》，第 94 卷。施普林格科学与商业媒体，1983 年。