arXiv:2601.05698v1 [math.DS] 9 Jan 2026

具有反射边界的一维随机游走的维数间隙与相变

迈克·格¨罗格 ，Johannes Jaerisch ，以及马克·凯瑟¨奥默

摘要。我们研究具有至多可数个满分支的区间映射的 $\mathbb{Z}$扩展和 $\mathbb{N}$扩展，这些扩展分别用于刻画无反射边界和具有反射边界的一维随机游走。我们分析相关的古列维奇压力，并探究支配这两种情形的关系。对于此类扩展，我们得到了仅依赖于基系统的古列维奇压力变分公式。由此，我们刻画了具有维数间隙的系统；并且在存在反射边界的情况下，基于渐近协方差为二阶相变提供了一般条件。作为副产品，我们推导出无限 Hessenberg 矩阵谱半径的变分公式。

1. 引言

区间映射，包括逻辑斯谛映射等单峰映射，是研究混沌行为和分岔理论的基础。从本质上说，区间映射是动力系统领域的基石，为理解广泛的动力现象提供了统一框架。特别是，它们可用于建模这样的情形：后续状态——例如在整数集中的状态——取决于从单位区间上的区间基变换中随机选取的结果。这类模型可用于阐明随机性对长期行为和极限分布的影响。

本研究聚焦于区间映射的维数理论与热力学形式。这类映射既不在有限字母表混合马尔可夫移位的符号热力学形式所涵盖的范围内，也不在其推广形式——具有有限不可约关联矩阵的可数马尔可夫移位——或与之密切相关的大像与大原像概念所涵盖的范围内 [MU03; Sar99]。在 [GJK22] 中，作者研究了斜积动力系统的暂态与常返动力学。这类系统具有传递性但不具混合性，其底变换由具有有限多个扩张满支的区间映射给出，以此建模在 $\mathbb{R}$上的随机游走。本文旨在从两个方面推广这一设定：首先，对于底动力学，我们允许存在无限多个分支；其次，也是更重要的一点，我们对带边界的随机游走进行建模，即在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$。

除了对带边界随机游走这一基础问题的处理外，我们的方法还使我们能够将一些有趣的例子——例如 [BT12; SV97; MS14], 中讨论的耗散区间动力学，以及由单峰映射产生的诱导映射的（线性）模型——纳入这一更系统的框架。

雅盖隆大学数学与计算机科学学院，ul. Prof. S. Łojasiewicza 6, 30-348 克拉科夫，波兰；名古屋大学数学研究生院，Furocho, Chikusaku, Nagoya, 464-8602，日本；不来梅大学第 3 学部——数学与计算机科学学院，动力系统研究所，Bibliothekstr. 5, 28359 不来梅，德国电子邮箱：maik.groeger@im.uj.edu.pl, jaerisch@math.nagoya-u.ac.jp, mhk@uni-bremen.de。日期：2026年1月12日。2000 年数学主题分类。37E05, 37D35, 60J10, 28A80。关键词与短语。暂态动力学、斜积、热力学形式、Poincar´e 指数，相变、随机游走、反射边界、Hessenberg 矩阵。

本研究的主要目标是探讨维数间隙现象（定义见第 2.1 节）。为此，必须详细考察半群扩张，例如 $\mathbb{Z}$-扩张和 $\mathbb{N}$-扩张，参见定理 2.4、定理 2.5 和定理 2.6。固定单位区间上的一个不变概率测度，并考虑将实数轴上的动力学投影到整数部分后得到的随机过程，我们的 $\mathbb{N}$-扩张可视为在 $\mathbb{Z}$ 上、以零为反射边界的随机游走。由此又产生了相关的二阶相变现象，我们将在定理 2.7 中对此作全面刻画。

我们的研究动机部分源于 van Strien 提出、由 Stratmann 和 Vogt [SV97], 以及后来由 Bruin 和 Todd [BT12]研究的一类特定分段线性映射。这一类映射为单峰映射产生的诱导映射提供了分段线性模型，并捕捉了它们的暂态行为和回归行为（另见 [MS14]）。我们将在第3节重新探讨这一类映射，为这些映射已确立的性质提供替代性证明，并从新的视角审视分维间隙、奇异吸引子以及这类分段线性模型背景下的二阶相变。尽管第3节讨论的例子主要属于线性类型，我们的结果也适用于更一般的非线性诱导映射。

维数间隙还出现在其他几个重要研究领域中，包括 Avila 和 Lyubich [AL08]、Mayer 和 Urba´nski [MU24],以及 Ledrappier 和 Lessa [LL25]所研究的情形。在我们所研究的具有反射边界的随机游走模型中，我们能够完整描述维数间隙的产生过程及其与无反射情形之间的定量关系。此外，二阶相变的出现——这一现象最早由[BT12]在上述一类映射中观察到——及其作为边界效应的解释，以及通过渐近协方差判据对其进行刻画，都是本文的新贡献。

我们的工作提出了一种统一的视角，将所讨论的两类扩张中的古列维奇压力概念联系起来。我们说明了如何仅凭基系统的压力函数，通过变分方法有效计算这种压力（见 (2.1) 和 (2.2)）。作为推论，这也给出了无限 Hessenberg 矩阵谱半径的一个变分公式（见第3节末尾）。此外，我们的方法与随机环境中的随机游走研究（例如， [Sin82；AKS82；CLL24；DG18]）十分契合，也可能为在这一更广泛的背景下探究相关现象提供有用的框架。

2. 主要结果概述

我们首先介绍 $\mathbb{R}$ 上一类特定的扩张区间映射，并陈述 Bishop 和 Jones 关于克莱因群的一个著名结果的一个版本。

2.1. **扩张区间映射与回归集**。 若 $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为一个扩张 C^2-马尔可夫区间映射：

(1)（开定义域）存在 $I \subset \mathbb{N}$，满足 $\mathrm{card}(I) \geq 2$，以及一组非空且两两不相交的开区间 $(J_i)_{i\in I}$，使得 $\Delta = \biguplus_{i\in I} J_i$。(2)（网格结构）我们有 $\Delta \cap \mathbb{Z} = \varnothing$，且对每个 $i \in I$，都存在 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $f(J_i) = (k, k+1)$。(3)（C^2-延拓）对每个 $i \in I$，$f|_{J_i}$ 都可延拓为 J_i闭包某个邻域上的 C^2函数，其在 J_i 上的限制记为 f_i。(4)（一致扩张）有$\inf_{x\in\Delta} |f'(x)| > 1$。(5)（R´enyi 条件）有 $\sup_{x\in\Delta} |f''(x)|/(f'(x))^2 < \infty$。

我们指出，C^2-延拓和 R´enyi 条件假设可以放宽为 $C^{1+\varepsilon}$-延拓，并结合 f′ 上的有界畸变条件。

f 的排斥集 : $\Delta \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathfrak{R}(f) := \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(\Delta).$$

将此概念与 [MU03] 术语中相应图定向马尔可夫系统的极限集 进行比较（该系统可能有无穷多个顶点），

$$\mathfrak{R}'(f) := \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{(\omega_0,\ldots,\omega_n)\in I^{n+1}: f\left(J_{\omega_i}\right)\supset J_{\omega_{i+1}}} f_{\omega_0}^{-1}\circ\cdots\circ f_{\omega_n}^{-1}\left(f_{\omega_n}\left(\overline{J_{\omega_n}}\right)\right),$$

我们发现 R′(f) \R(f) 至多可数。由于

$$f(\mathfrak{R}(f)) = f\left(\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(\Delta)\right) \subset f(\Delta)\cap\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(\Delta) \subset \mathfrak{R}(f),$$

排斥集给出动力系统 f: R (f) $\to$R(f), 在全文中我们假设该系统是拓扑传递的:

(6)（拓扑传递性）对于 R (f) 中任意非空的（相对）开子集U和V，存在 $n \in \mathbb{N} := \{0,1,2,\ldots\}$使得 $f_n(U) \cap V \neq \varnothing$。

若 R(f) 无界，则自然会产生关于回归与暂态行为的问题。为此，我们定义回归集和 一致回归集

$$R(f) := \left\{x\in\mathfrak{R}(f) : \liminf_{n\to\infty}\left|f^n(x)\right| < \infty\right\},\ R_u(f) := \left\{x\in\mathfrak{R}(f) : \limsup_{n\to\infty}\left|f^n(x)\right| < \infty\right\}.$$

对于 $n \geq 1$, 令

$$\mathfrak{Per}_n(f) := \{x\in\mathfrak{R}(f) : f^n(x) = x\}$$

表示f的所有n周期点组成的集合: R(f) $\to$R (f)。对于固定的$i \in I$，我们定义回归动力学的临界（或庞加莱 ′）指数为

$$\delta(f) := \inf\left\{s\geq 0 : \sum_{n\geq 1}\sum_{x\in\mathfrak{Per}_n(f)\cap J_i}\left|(f^n)'(x)\right|^{-s} < \infty\right\}.$$

由 (2.5) 的一个变体结合命题 4.2 可知， $\delta(f)$ 可以用可数马尔可夫移位的古列维奇压力表示。因此，我们推得 $\delta(f)$ 的定义确实独立于$i \in I$的具体选择。

以下关于（一致）回归集的维数公式，是 Bishop 和 Jones 针对克莱因群提出的一个著名定理的类似结果 [BJ97], , 该定理使用了庞加莱指数。如今，在可数马尔可夫移位和保角迭代函数系的框架中，证明方法也已十分成熟 [Rus23; IJT17; MU03]。上界是基于临界指数定义的一个简单覆盖论证。下界则使用古列维奇压力的穷尽原理（引理 4.5），并结合保角迭代函数系的 Bowen 公式 [MU03, Theorem 4.2.13]。

命题 2.1。 对于一个扩张的 C^2-马尔可夫区间映射 f, 我们有

$$\dim_H(R_u(f)) = \dim_H(R(f)) = \delta(f),$$

其中，$\dim_H(A)$ 表示 $A \subset \mathbb{R}$的豪斯多夫维数。

如果一个扩张的C^2-马尔可夫区间映射 f 满足以下条件，则称其表现出维数间隙:

$$\dim_H(R(f)) < \dim_H(\mathfrak{R}(f)).$$

这一现象也可以用暂态集来表述

$$T(f) := \left\{x\in\mathfrak{R}(f) : \liminf_{n\to\infty}\left|f^n(x)\right| = +\infty\right\}.$$

显然，R（f）等于R（f）与$\uplus T$（f）的不交并，因此

$$\dim_H(\mathfrak{R}(f)) = \max\{\dim_H R(f), \dim_H T(f)\},$$

这意味着当且仅当.....时，才会出现维数间隙

$$\dim_H(R(f)) < \dim_H(T(f)).$$

最终，可以仿照双曲维数 [Shi98; MU24]的方式表述维数间隙的出现：f存在维数间隙，当且仅当.....

$$\sup\left\{\dim_H\left(\mathfrak{R}\left(f|_{\bigcup_{i\in K} J_i}\right)\right) : K \subset I, 2 \le \operatorname{card}(K) < \infty\right\} < \dim_H(\mathfrak{R}(f)).$$

众所周知，有限不可约性（针对马尔可夫映射f的符号编码作此定义）或大像与大原像性质，是维数间隙不存在的充分条件。但请注意，当且仅当 R(f) 有界时，这些条件才成立。本文仅关注 R(f) 无界的系统，因此有限不可约性或大像与大原像性质均不成立。

在动力系统的语境下，文献中多处提及维数间隙这一现象，有时也称为维数下降。我们想提及 [AL08], [MU24] 和 [KM23; LL25; DY23] 等近期相关研究。

2.2. **Ψ-扩张与斜周期区间映射**。从现在起，设$F_0 : \Delta_0 \to (0,1)$是单位区间上的扩张型C^2-马尔可夫区间映射，这意味着$\Delta_0 := \uplus_{i\in I} J_i \subset (0,1)$。对于 $\mathbb{H} \subset \mathbb{Z}$，我们定义带有相应指标集$I_{\mathbb{H}} := I \times \mathbb{H}$的闵可夫斯基和 $\Delta_{\mathbb{H}} := \Delta_0 + \mathbb{H}$，并称 $\Psi : \Delta_{\mathbb{H}} \to \mathbb{H}$为阶梯函数，如果对每个（$i$，$h$）$\in I_{\mathbb{H}}$，$h$均为常数。我们将$F_0$ 的 Ψ-扩张定义为

$$F_\Psi : \Delta_{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F_0(x - \lfloor x \rfloor) + \Psi(x),$$

其中 $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$。由此我们得到一个扩张型$C^2$-马尔可夫区间映射，且

$$\mathfrak{R}(F_\Psi) = \mathfrak{R}(F_0) + \mathbb{H} =: \mathfrak{R}_{\mathbb{H}}$$

并且与之前一样，我们假设F_Ψ : R(F_Ψ) →R(F_Ψ)是拓扑传递的。我们用0表示 $\mathbb{Z}$的单元素子群，并采用这一记号，可得$\mathrm{R}_0 = \mathrm{R}(F_0) = R(F_0)$。此外，令 $\kappa(x) := x - \lfloor x \rfloor$，其中$x \in \mathbb{R}$表示到 $[0,1)$的投影，则斜积结构可由以下交换图看出：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{R}_{\mathbb{H}} & \xrightarrow{F_\Psi} & \mathfrak{R}_{\mathbb{H}} \\ {\scriptstyle\kappa}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\kappa} \\ \mathfrak{R}_0 & \xrightarrow[F_0]{} & \mathfrak{R}_0 \end{array}$$

现在，我们将介绍关于 $\mathbb{H} = \mathbb{N}$ 或 $\mathbb{Z}$的两个主要特殊情形，并要求它们满足某种周期性条件。固定步长函数 步长函数 $\psi : \Delta_0 \to \mathbb{Z}_{\ge -1}$，假设它在每个$J_i$ 上都是常数，其中$i \in I$。

情形 H = Z：以下映射曾在 [GJK22]中研究：令

$$\Psi_{\mathbb{Z}} : \Delta_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \psi(x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor$$

并称$F_{\mathbb{Z}} := F^{\Psi_{\mathbb{Z}}}$为不带反射边界的斜周期区间映射。**情形 H = N：**另外，固定反射规则反射规则 $\psi_1 : \Delta_0 \to \mathbb{N}$，它在每个$J_i$上也为常数，其中$i \in I$，并且满足$M + \psi \ge \psi_1 \ge \psi$，其中某个$M > 0$。然后，我们定义

$$\Psi_{\mathbb{N}} : \Delta_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \psi_1(x)\,\mathbb{1}_{(0,1]}(x) + (\psi(x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor)\,\mathbb{1}_{(1,\infty)}$$

并称$F_{\mathbb{N}} := F^{\Psi_{\mathbb{N}}}$ a 为带（左）反射边界的斜周期区间映射。正如我们稍后将看到的，我们的分形几何结果与 ψ_1 的具体选择无关。

注 2.2. 左反射边界的概念很容易推广到右反射边界的情形。对于满足 $\psi \geq -m$（某个$m \in \mathbb{N}$）的步长函数，也可以进行推广。关于 $\mathbb{N}$ 上反射随机游走转移概率渐近性的相关结果，请参阅 [Lal95]。

对于一个扩张的C^2-马尔可夫区间映射f，我们定义右和左瞬态集

$$T^+(f) := \left\{ x \in \mathfrak{R}(f) : \liminf_{n\to\infty} f^n(x) = +\infty \right\}, \quad T^-(f) := \left\{ x \in \mathfrak{R}(f) : \limsup_{n\to\infty} f^n(x) = -\infty \right\}.$$

与T 的定义进行比较可得

$$T(F_{\mathbb{Z}}) = T^+(F_{\mathbb{Z}}) \uplus T^-(F_{\mathbb{Z}}) \qquad \text{and} \qquad T(F_{\mathbb{N}}) = T^+(F_{\mathbb{N}}).$$

为简化记号，对于 $\mathbb{H} \in \{0, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$，记作

$$\delta_{\mathbb{H}} := \delta(F_{\mathbb{H}}).$$

下文始终假设F_0 是强正则的（见第 4.2 节）。这一技术性假设将用于主要结果的证明，并特别意味着：在 R_0上具有几何势φ：$x \mapsto -\log|F_0'(x)|$的唯一平衡态 $\mu_{\delta_0\varphi}$（对应于 $\delta_0\varphi$）的豪斯多夫维数等于 δ_0。注意，根据命题 2.1，δ_0等于 R_0的豪斯多夫维数。我们始终假设

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi} < +\infty.$$

为排除平凡情形，我们还假设 $-1 = \psi := \inf \psi \leq 0 < \psi := \sup \psi$，并定义

$$\alpha_{\max} := \int \psi \, \mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

注 2.3. 我们简要讨论排斥子的闭包。记 $\mathrm{R}(F0,\infty)$ 为序列 (x_n) 的聚点集，其中这些序列满足 $[0,1]$ such that $x_n \in J_{i_n}$ for pairwise distinct$i_n \in I$。此外，记 $\mathrm{R}'_{\mathbb{H}} := \overline{\mathrm{R}'}(F_{\mathbb{H}})$。由 [MU03, 引理 1.0.1] 可得

$$\overline{\mathfrak{R}_0} = \overline{\mathfrak{R}'_0} = \mathfrak{R}'_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_0^{-n}(\mathfrak{R}(F_0,\infty)).$$

此外，对于 $\mathbb{H} \in \{0, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$，我们有

$$\overline{\mathfrak{R}_{\mathbb{H}}} = \overline{\mathfrak{R}'_{\mathbb{H}}} = \overline{\mathfrak{R}'_0} + \mathbb{H}.$$

若 I 是有限集，则 R'_0 和 $\mathrm{R}'_{\mathbb{H}}$ 均为闭集。举例来说，若 F_0 由无限分支的高斯映射或 L¨uroth 映射给出，则 $\mathrm{R}(F0,\infty)$ 是单点集，因此 $\mathrm{R}'_0 \setminus \mathrm{R}'_0$ 是可数集。在这种情况下，可得

$$\overline{\mathfrak{R}'_{\mathbb{H}}} \setminus \mathfrak{R}'_{\mathbb{H}} = \left(\overline{\mathfrak{R}'_0} \setminus \mathfrak{R}'_0\right) + \mathbb{H}$$

也可数。特别是，在所有这些情况下，

$$\dim_H(\overline{\mathfrak{R}_{\mathbb{H}}}) = \dim_H(\mathfrak{R}_{\mathbb{H}}) = \dim_H(\mathfrak{R}_0).$$

2.3. **维数间隙与暂态集**。对于 $\mathbb{H} \in \{0, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$，由命题 2.1 可知$\delta_{\mathbb{H}} = \dim_H(R(F_{\mathbb{H}}))$。因此，$F_{\mathbb{H}}$ 存在维数间隙，当且仅当 $\delta_{\mathbb{H}} < \delta_0$。

由 [AL08, 定理 C 和 D] 可知，对于复 Feigenbaum 映射，Julia 集的双曲维数与其豪斯多夫维数之间存在维数间隙，当且仅当 Julia 集具有正面积。我们将看到，考虑到适当的诱导方案后，这一观察体现在定理 2.6 的三分法陈述中。接下来将给出斜周期区间映射在反射情形和非反射情形下出现此类维数间隙的判据。我们的第一个主要结果如下。

定理 2.4. 斜周期区间映射 $F_{\mathbb{Z}}$ 出现维数间隙，当且仅当满足以下条件之一： $\alpha_{\max} > 0$，或者

$$\alpha_{\max} < 0 \quad \& \quad \exists q > 0 : \sum_{x \in \mathfrak{Per}_1(F_0)} \exp(\delta_0 \varphi(x) + q\psi(x)) < \infty.$$

在第 3.3 节中，我们将给出一个系统的例子，说明即使存在负漂移，也不会出现维数间隙。定理 2.4 中的不对称性源于我们的假设：步长函数虽有下界，但不一定有上界。

定理 2.5. 对于斜周期区间映射 $F_{\mathbb{Z}}$ 和 $F_{\mathbb{N}}$ 的暂态集，我们有

$$\dim_H(T^+(F_{\mathbb{N}})) = \dim_H(T^+(F_{\mathbb{Z}})) \ \textit{and} \ \dim_H(T^-(F_{\mathbb{N}})) = 0.$$

此外，

$$\dim_H(T^{\pm}(F_{\mathbb{Z}})) = \begin{cases} \delta_0, & \pm\alpha_{\max} \geq 0, \\ \delta_{\mathbb{Z}}, & \pm\alpha_{\max} < 0. \end{cases}$$

接下来的主要结果将斜周期区间映射的反射情形与非反射情形联系起来。这里涉及的平衡测度被视为定义在 $\mathbb{R}$ 上且支撑包含于单位区间内的博雷尔测度。

定理 2.6. 对于斜周期区间映射 $F_{\mathbb{N}}$ 的临界指数，我们有

$$\delta_{\mathbb{N}} = \begin{cases} \delta_{\mathbb{Z}}, & \alpha_{\max} \geq 0, \\ \delta_0, & \alpha_{\max} < 0 \end{cases}$$

并且成立以下三分法：

偏斜情形： $\dim_H(\text{实数集}(F_{\mathbb{N}})) > \dim_H(T^+(F_{\mathbb{N}}))$
$\iff \alpha_{\max} < 0 \ \ \& \ \exists q > 0 : \sum_{x \in \mathfrak{Per}_1(F_0)} e^{\delta_0 \varphi(x) + q\psi(x)} < \infty$
$\implies \mu_{\delta_0 \varphi}(R(F_{\mathbb{N}})) = 1.$

平衡情形： $\dim_H(\text{实数集}(F_{\mathbb{N}})) = \dim_H(T^+(F_{\mathbb{N}}))$
$\iff \alpha_{\max} = 0, \ \textit{or} \ \alpha_{\max} < 0 \ \& \ \forall q > 0 : \sum_{x \in \mathfrak{Per}_1(F_0)} e^{\delta_0 \varphi(x) + q\psi(x)} = \infty$
$\implies \mu_{\delta_0 \varphi}(R(F_{\mathbb{N}})) = 1.$

黑洞情形： $\dim_H(\text{实数集}(F_{\mathbb{N}})) < \dim_H(T^+(F_{\mathbb{N}}))$
$\iff \dim_H(R(F_{\mathbb{N}})) < \dim_H(\mathfrak{R}(F_{\mathbb{N}}))$
$\iff \alpha_{\max} > 0$
$\iff \mu_{\delta_0 \varphi}(T^+(F_{\mathbb{N}})) = 1.$

特别地，当且仅当 $\alpha_{\max} > 0$ 时，$F_{\mathbb{N}}$ 呈现维数间隙；等价地，当 $\mu_{\delta_0 \varphi}(T^+(F_{\mathbb{N}})) = 1$。

我们沿用 Avila 和 Lyubich [AL08], 对三种情形的命名，他们研究了具有周期组合结构的复 Feigenbaum 映射的动力学。注意，对于瘦情形和平衡情形，必有 $\dim_H(\text{实数集}(F_{\mathbb{N}})) = \delta_0$；而在黑洞情形下， $\delta_0 = \dim_H(T^+(F_{\mathbb{N}}))$。

根据 [AL08, Theorem E], 中的研究成果，我们可以依据共形测度区分两种情形。如果 δ_0 共形测度（在此语境下即吉布斯测度 $\mu_{\delta_0 \varphi}$）是保守的——也就是说，$\mu_{\delta_0 \varphi}(\text{实数集}(F_{\mathbb{N}})) = 1$——那么“Julia 集”的双曲维数与豪斯多夫维数相等；也就是说，在我们的情形中，不存在维数间隙，$\dim_H(\text{实数集}(F_{\mathbb{N}})) = \dim_H(R(F_{\mathbb{N}}))$。反之，如果 $\mu_{\delta_0 \varphi}$ 是耗散的——也就是说，$\mu_{\delta_0 \varphi}(T^+(F_{\mathbb{N}})) = 1$——那么该系统会出现维数间隙；在我们的情形中，$\dim_H(R(F_{\mathbb{N}})) > \dim_H(\text{实数集}(F_{\mathbb{N}}))$。

我们的三分法也与 [MS14, Theorem 7] 中的三分法密切相关。请注意，在我们的设定中，平衡情形下漂移可能为负。这种可能性在

[MS14, Theorem 7] 中由“良好漂移性质”排除了，即 $\{\psi \geq k\}$ 的概率呈指数衰减；而在我们于第 3.3 节给出的例子中，$\{\psi \geq k\}$ 的概率仅呈多项式衰减。因此，在良好漂移性质下，三分法可由 $\alpha_{\max} < 0$、$\alpha_{\max} = 0$ 和 $\alpha_{\max} > 0$ 表述。

最后，我们的研究结果与单峰映射相应的实费根鲍姆动力学相吻合。正如本文开篇所述，我们将在下文第3节中详细比较我们的结果与 [SV97; BT12; IJT17]：对于 $F_{\mathbb{N}} = L_{\lambda,\ \mathbb{N}}$ 其中 $\lambda \in (0,1)$，我们证明定理 2.6 中的三种情形可分别由 $\lambda < 1/2$、$\lambda = 1/2$ 和 $\lambda > 1/2$ 区分。特别地，$\lambda \in (1/2,1)$ 对应黑洞情形，这与 $\{+\infty\}$ 处存在野吸引子 有关。这是由传递性得出的：典型点具有稠密轨道，而对于勒贝格几乎处处的 $x \in \mathrm{R}(L_{\lambda,\ \mathbb{N}})$，$\omega$-极限集满足$\omega(x) = \{+\infty\}$。关于这一观察如何与单峰映射中的野吸引子相关联，更多讨论请参见 Bruin 和 Todd [BT15] 以及 [MS14]。

2.4. 古列维奇压力与相变。 如果对于每个$i \in I$，$g : \mathrm{R}(f) \to \mathbb{R}$ 在欧几里得度量下以某个指数 $\theta \in (0,1)$ 满足 H¨older 连续，且 Hölder 常数与i无关，则称$g|_{\mathfrak{R}(f)\cap J_i}$是 H¨older 连续的。特别地，$g|_{\mathfrak{R}(f)\cap J_i}$一致连续，并且存在唯一的连续~~延拓至 R(~~$f$~~)~~ $\cap$ J_i，记作g_i。

注。 若$g : \mathrm{R}(f) \to \mathbb{R}$是 H¨older 连续的，则$g$ 在以下意义下是一致连续的：对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对每个$i \in I$以及$x,y \in J_i \cap \mathrm{R}(f)$，

$$|x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \epsilon.$$

事实上，对于大多数论证而言，一致连续性已足够。H¨older 连续性对于吉布斯测度的存在至关重要。为便于阐述，以下我们将范围限定在 H¨older 连续的势函数上。

H¨older 连续函数 g 相对于扩张的 C^2-马尔可夫区间映射 f 的 古列维奇压力 $\mathrm{R}(f) \to \mathbb{R}$ 定义为：对于 $i \in I$，

$$\mathcal{P}(g,f) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \mathfrak{Per}_n(f)\cap J_i} \exp(S_n g(x)),$$

其中 $S_n g := \sum_{k=0}^{n-1} g \circ f^k$。该定义与 $i \in I$无关（证明及更多细节见命题 4.2）。

针对我们的斜周期设定，我们现在引入相对于 $\mathbb{H} \in \{0, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ 的 古列维奇压力 概念：对于 g： $\mathrm{R}_0 \to \mathbb{R}$ H¨older 连续函数，我们将其 $\mathbb{H}$-周期延拓 记为

$$g_{\mathbb{H}} : \mathfrak{R}_0 + \mathbb{H} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x - \lfloor x \rfloor)$$

并记为

$$\mathcal{P}(g,\mathbb{H}) := \mathcal{P}(g_{\mathbb{H}}, F_{\mathbb{H}}) \text{ and especially, } \mathcal{P}(g) := \mathcal{P}(g,0).$$

关于这些压力函数的主要见解已在定理 4.6 和定理 4.13 中确立，具体体现在以下两个变分公式。这些公式不仅对我们的证明至关重要，其本身也具有重大的理论意义：

$$\mathcal{P}(g,\mathbb{Z}) = \inf_{q\in\mathbb{R}} \mathcal{P}(g + q\psi), \tag{2.1}$$

$$\mathcal{P}(g,\mathbb{N}) = \inf_{q\leq 0} \mathcal{P}(g + q\psi). \tag{2.2}$$

作为部分推论，我们得到以下关系式；这些关系式对于维数结果同样至关重要：

$$\mathcal{P}(g,\mathbb{Z}) \le \mathcal{P}(g,\mathbb{N}) \le \mathcal{P}(g), \tag{2.3}$$

$$\mathcal{P}(g,\mathbb{N}) = \begin{cases} \mathcal{P}(g,\mathbb{Z}), & \text{if } \inf_{q\le 0}\mathcal{P}(g+q\psi) = \inf_{q\in\mathbb{R}}\mathcal{P}(g+q\psi), \\ \mathcal{P}(g), & \text{if } \inf_{q>0}\mathcal{P}(g+q\psi) = \inf_{q\in\mathbb{R}}\mathcal{P}(g+q\psi). \end{cases} \tag{2.4}$$

我们将$s \mapsto \mathcal{P}(s\varphi,\mathbb{H})$称为斜周期映射$F_{\mathbb{H}}$的几何压力函数 。通常可以验证（例如参见 [MU03，定理 2.1.3]）

$$\delta_{\mathbb{H}} = \inf\{s \ge 0 : \mathcal{P}(s\varphi,\mathbb{H}) \le 0\}. \tag{2.5}$$

这一观察与上述压力公式共同构成了证明第 2.3 节结果的关键，更多细节请参见第 4 节。

最后，我们陈述最后一个主要结果，它涉及二阶相变的出现及其通过渐近协方差判据的刻画。为此，令μ_g 为第 2.2 节中定义的唯一F_0-不变吉布斯测度，并回顾一般 φ, $\psi \in L^2(\mu_g)$的渐近协方差 概念，其定义如下

$$\operatorname{cov}_g(\varphi,\psi) := \sum_{i=0}^{\infty}\left(\int \varphi\cdot\psi\circ F_0^i \,\mathrm{d}\mu_g - \int\varphi\,\mathrm{d}\mu_g\int\psi\,\mathrm{d}\mu_g\right).$$

定理 2.7 （二阶相变）。 对于斜周期区间映射 $F_{\mathbb{N}}$，假设存在 $s_0 > s_1 > 0$和 $q_0 > 0$，使得 $\mathcal{P}$（$s_1\varphi + q_0\psi$）$< \infty$且 $\int\psi\,\mathrm{d}\mu_{s_0\varphi} = 0$。那么，几何压力函数 $s \mapsto \mathcal{P}$（$s\varphi$，$\mathbb{N}$）在 s_0 处出现二阶相变，当且仅当协方差$s_0\varphi$（φ，ψ）$\neq 0$。

证明将推迟到第 4.5 节。

3. 应用与示例

3.1. 反射简单随机游走。 为展示二阶相变现象，我们回顾一个最简单的示例：该示例仅包含两个满分支，用于模拟 [GJK22] 中介绍的简单随机游走。我们通过固定 $c_1,c_2 \in (0,1)$，利用斜周期区间映射建立一个经典的一步随机游走 $\mathbb{Z}$，其中 $c_1+c_2 \le 1$，并考虑映射

$$F_0 : x \mapsto \begin{cases} x/c_1, & \text{for } x \in (0,c_1) =: J_1, \\ (x-1+c_2)/c_2, & \text{for } x \in (1-c_2,1) =: J_2. \end{cases}$$

我们通过步长函数 $\psi := -\mathbb{1}_{J_1} + \mathbb{1}_{J_2}$ 定义阶梯函数 $\Psi_{\mathbb{Z}}$，相应地，$\Psi_{\mathbb{N}}$，并采用反射规则 $\psi_1 := \psi + 1$。注意，R（F_0）是一个豪斯多夫维数为 $\delta_0 < 1$ 的康托集，当且仅当 $c_1+c_2 < 1$；其中， δ_0 是满足$c_1^s + c_2^s = 1$的唯一数 $s > 0$。否则，R（F_0）是单位区间。

情形 $\mathbf{c_1 > c_2}$：此时我们有 $\alpha_{\max} < 0$，并展示偏斜情形，即 $\dim_H(\mathrm{R}(\mathrm{F}_{\mathbb{N}})) > \dim_H(\mathrm{T}^+(\mathrm{F}_{\mathbb{N}}))$且 $\mu_{\delta_0\varphi}(\mathrm{R}(\mathrm{F}_{\mathbb{N}})) = 1$。情形 $\mathbf{c_1 = c_2}$：此时我们有 $\alpha_{\max} = 0$，并展示平衡情形，即 $\dim_H(\mathrm{R}(\mathrm{F}_{\mathbb{N}})) = \dim_H(\mathrm{T}^+(\mathrm{F}_{\mathbb{N}}))$且 $\mu_{\delta_0\varphi}(\mathrm{R}(\mathrm{F}_{\mathbb{N}})) = 1$。情形 $\mathbf{c_1 < c_2}$：此时我们有 $\alpha_{\max} > 0$，并展示黑洞情形，即出现维数下降 $\dim_H(\mathrm{R}(\mathrm{F}_{\mathbb{N}})) < \dim_H(\mathrm{T}^+(\mathrm{F}_{\mathbb{N}}))$且 $\mu_{\delta_0\varphi}(\mathrm{T}^+(\mathrm{F}_{\mathbb{N}})) = 1$。

这族示例还会产生存在和不存在二阶相变的系统，对$F_{\mathbb{N}}$而言，正如我们接下来所展示的：条件 $0 = \int\psi\,\mathrm{d}\mu_{s\varphi+q(s)\psi} = -\mu_{s\varphi+q(s)\psi}(J_1) + \mu_{s\varphi+q(s)\psi}(J_2)$等价于

$$c_2^s \mathrm{e}^{q(s)} = c_1^s \mathrm{e}^{-q(s)} \iff s(\log c_1 - \log c_2)/2 = q(s),$$

从而对所有$s \in \mathbb{R}$，我们都有一个关于$0 = \int \psi \, d\mu_{s\varphi+q(s)\psi}$的解$q(s)$。此外，对于任意的$s_0 = 0$和$c_1, c_2 \in (0, 1)$，或者任意的$c_1 = c_2$和$s_0$，有$q(s_0) = 0$。

情况 *1*：对于 $c_1 = c_2$，我们有 $q(s_0) = 0$，对所有 $s_0 \in \mathbb{R}$均成立。此外，φ 为常数，使得对所有$s_0 \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{cov}_{s_0\varphi}(\varphi, \psi) = 0.$$

因此，根据定理 2.7，这种情况下不存在相变——事实上，$s \mapsto \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})$ 定义了一条直线。

情况 *2*：对于 $c_1 \neq c_2$，我们有 $q(s_0) = 0$，仅当 $s_0 = 0$时成立。因此，在这种情况下，$\mu_{0\varphi}$ 是 (1/2,1/2)-伯努利测度，并且

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}_{0\varphi}(\varphi, \psi) &= \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2}(\log c_1 - \log c_2)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(-\log c_1 + \log c_2)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\log c_2 - \log c_1) \neq 0\end{aligned}$$

根据定理 2.7，在$s_0 = 0$处必然存在二阶相变。事实上，$\mathcal{P}(s\varphi + q\psi) = \log\left(c_1^s e^{-q} + c_2^s e^{q}\right)$，$\mathcal{P}(s\varphi) = \log\left(c_1^s + c_2^s\right)$，且 $\inf_q \mathcal{P}(s\varphi + q\psi) = \log\left(2(c_1 c_2)^{s/2}\right)$。将变分公式 (2.1) 和 (2.2) 与 (2.4) 结合，可得

$$\mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N}) = \begin{cases} \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{Z}), & \text{if } c_1^s \leq c_2^s, \\ \mathcal{P}(s\varphi), & \text{if } c_1^s > c_2^s, \end{cases}$$

并且，在不失一般性的假设下，我们特别发现

$$\mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N}) = \begin{cases} \log 2 + s/2 \cdot \log(c_1 c_2), & \text{if } s \geq 0, \\ \log\left(c_1^s + c_2^s\right), & \text{if } s < 0. \end{cases}$$

这证实，在这种情况下，$_0 = 0$s 处发生二阶相变。

3.2. a-Luroth 映射。以下示例旨在涵盖由 van Strien 开创、主要由 Strat mann 和 Vogt [SV97] 以及 Bruin 和 Todd [BT12; BT15]完成的早期工作。

在本小节及下一小节中，我们来考察 [KMS12] 中介绍的两个 a-L¨uroth 映射示例。

首先，我们考虑一族 a(λ)-Luroth 映射 L_λ, $\lambda \in (0, 1)$，它们由可数分割 $a(\lambda) = \{J_k := (\lambda^k, \lambda^{k-1}) : k \geq 1\}$ 给出，如下所示，其中 $x \in J_n$,

$$L_\lambda(x) = (x - t_n)/|J_n|,$$

其中 $t_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} |J_k|$ 和 $|J_k|$ 表示区间 J_k的长度。于是，非反射 a (λ)-L¨uroth 系统 $L_{\lambda,\mathbb{Z}}$的阶梯函数由步长函数 $\psi(x) := k - 2$给出，其中 $x \in J_k$，$k \geq 1$。对于反射 a (λ)-L¨uroth 系统 $L_{\lambda,\mathbb{N}}$，我们同样选取 $\psi_1 := \psi + 1$。斜周期区间映射 $L_{\lambda,\mathbb{Z}}$ 和 $L_{\lambda,\mathbb{N}}$ 的图像见图 3.1。对于 $\mathbb{H} \in \{0, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$，我们将使用简写记号 $\delta_{\mathbb{H}}(\lambda) := \delta(L_{\lambda,\mathbb{H}})$。

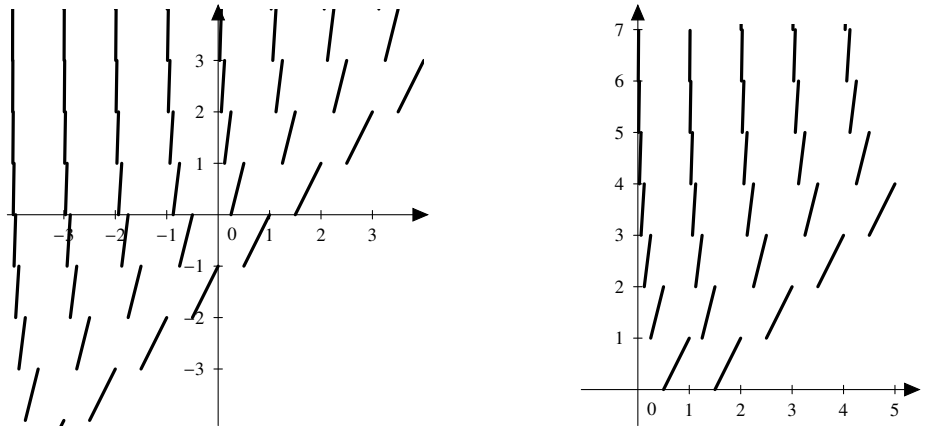

图 3.1。左侧为$L_\lambda,\ \mathbb{Z}$ 的图，描述非反射的 a(λ)- L¨uroth 系统；右侧为$L_\lambda,\ \mathbb{N}$ 的图，描述反射的 a(λ)-L¨uroth 系统。

反射 a (λ)-L¨uroth 映射 $L_{\lambda,\mathbb{N}}$ 通过共轭自然地对应于 (0,1) 上的动力系统 $V = V_\lambda$，其共轭为

$$p : (0,1) \to \mathfrak{R}(L_{\lambda,\mathbb{N}}),\ x \mapsto \frac{\lambda^{-k+1}}{1-\lambda}(x-\lambda^k)+k-1,\ \text{for } x \in J_k,\ k \geq 1.$$

这族系统（V_λ： $\lambda \in (0,1)$）由下式给出

$$V_\lambda = V : (0,1) \to (0,1),\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x-\lambda}{1-\lambda}, & x \in (\lambda,1), \\ \frac{x-\lambda^{k+1}}{\lambda(1-\lambda)}, & x \in (\lambda^{k+1},\lambda^k),\ k \geq 1, \end{cases}$$

已在 [SV97; BT12; IJT17] 中得到研究，其中暂态部分和常返部分的豪斯多夫维数已被明确确定。事实上，通过共轭，$L_\lambda,\ \mathbb{N}$ 的回归集与V_λ的回归集 之间存在一一对应关系，由下式给出

$$\mathbf{R}_\lambda := \left\{ x \in (0,1) : \exists k > 1 \text{ with } V_\lambda^n(x) \geq 1/k \text{ for infinitely many } n \in \mathbb{N} \right\}$$

同样，对于下式给出的暂态集，也有类似结论

$$\mathbf{T}_\lambda := \left\{ x \in (0,1) :\ V_\lambda^n(x) \to 0 \right\}.$$

因此，我们的形式体系也重新证明了这一事实:

$$\dim_H(\mathbf{R}_\lambda) = \dim_H(\mathbf{T}_{1-\lambda}) = \begin{cases} 1, & \lambda \leq 1/2, \\ \frac{-\log 4}{\log(\lambda(1-\lambda))}, & \lambda > 1/2, \end{cases} \tag{3.1}$$

这是在 [SV97；BT12]中得到的主要结果之一。该函数的图像见图 3.2，其共轭系统见图 3.4。要从我们的理论推导出（3.1），首先注意到 $\dim_H(\textbf{实数集}_\lambda) = \dim_H(\text{实数集}(L_{\lambda,\mathbb{N}}))$，且 $\dim_H(\mathbf{T}_\lambda) = \dim_H(T^+(L_{\lambda,\mathbb{N}}))$，因为$p|_{J_k} : J_k \to (k,k+1)$ 对每个$k \geq 1$ 都是双利普希茨的。对于L_λ，其几何势由下式给出：对$x \in J_k$,

$$\varphi(x) := \varphi_\lambda(x) := \log\left((1-\lambda)\lambda^{k-1}\right).$$

显然，对于所有 $\lambda \in (0,1)$，我们有 $\delta_0 := \delta_0(\lambda) = 1$。对于 s、$q \in \mathbb{R}$，我们有

$$z_\lambda(s,q) := \exp(\mathcal{P}(s\varphi_\lambda + q\psi)) = (1-\lambda)^s\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(k-1)s}\mathrm{e}^{q(k-2)}\right) = \begin{cases} \frac{(1-\lambda)^s\mathrm{e}^{-q}}{1-\lambda^s\mathrm{e}^q}, & \mathrm{e}^q < \lambda^{-s}, \\ +\infty, & \mathrm{e}^q \geq \lambda^{-s}. \end{cases} \tag{3.2}$$

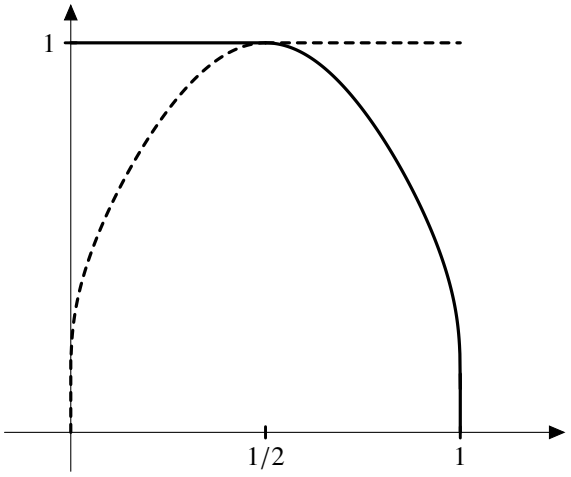

图 3.2。暂态部分 $\lambda \mapsto \dim_H(T^+(L_{\lambda,\mathbb{N}}))=\dim_H(\mathbf{T}_\lambda)$（虚线）和常返部分 $\lambda \mapsto \dim_H(R(L_{\lambda,\mathbb{N}}))=\dim_H(\mathbf{R}_\lambda)$（实线）的维数，随第 3.2 节所讨论的 L¨uroth 系统中的参数 λ 变化。

现在，假设 $e^q < \lambda^{-s}$。那么我们有

$$\int \psi \, d\mu_{s\varphi_\lambda+q\psi} = \frac{\partial z_\lambda}{\partial q}(s,q) = -\frac{(1-\lambda)^s(e^{-q}-2\lambda^s)}{(1-\lambda^s e^q)^2}. \tag{3.3}$$

特别地，对于 $s=1$ 和 $q=0$，有

$$\alpha_{\max}(\lambda) = \int \psi \, d\mu_{\delta_0(\lambda)\varphi_\lambda} = \frac{2\lambda-1}{1-\lambda}$$

由命题 2.1 和定理 2.6，我们可以推导出以下三分法。

情形 $\lambda < 1/2$：此时有 $\alpha_{\max}(\lambda)<0$，我们展示偏斜情形，即 $1=\dim_H(R(L_{\lambda,\mathbb{N}})) > \dim_H(T^+(L_{\lambda,\mathbb{N}})) = \delta_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ 和 $\mu_{\delta_0\varphi}(R(L_{\lambda,\mathbb{N}}))=1$。情形 $\lambda = 1/2$：此时有 $\alpha_{\max}(\lambda)=0$，我们展示平衡情形，即 $1=\dim_H(R(L_{\lambda,\mathbb{N}}))=\dim_H(T^+(L_{\lambda,\mathbb{N}}))$ 和 $\mu_{\delta_0\varphi}(R(L_{\lambda,\mathbb{N}}))=1$。情形 $\lambda > 1/2$：此时有 $\alpha_{\max}(\lambda)>0$，我们展示黑洞情形，即 $\delta_{\mathbb{Z}}(\lambda)=\delta_{\mathbb{N}}(\lambda)=\dim_H(R(L_{\lambda,\mathbb{N}})) < \dim_H(T^+(L_{\lambda,\mathbb{N}}))=1$，维数会下降，并且 $\mu_{\delta_0\varphi}(T^+(L_{\lambda,\mathbb{N}}))=1$。

注意到，当且仅当 $\lambda > 1/2$ 时，才会出现维数间隙（参见定理 2.6）。最后，我们验证

$$\delta_{\mathbb{Z}}(\lambda) = \frac{-\log 4}{\log(\lambda(1-\lambda))}. \tag{3.4}$$

根据定理 4.6（1），s_0, q_0 是 $z_\lambda(s,q)=1$ and $\int \psi \, d\mu_{s\varphi_\lambda+q\psi}=0$ 的唯一解，其形式为 $s_0=\delta_{\mathbb{Z}}(\lambda)$。由（3.3）可得 $e^{q_0}=\lambda^{-s_0}/2$。将其代入 $z_\lambda(s,q)=1$，并利用（3.2），得到 $(1-\lambda)^{s_0}2\lambda^{s_0}=1/2$。由于 $\delta_{\mathbb{Z}}(\lambda)=\delta_{\mathbb{Z}}(1-\lambda)$，（3.1）的证明至此完成。

接下来，我们应用定理 2.7 推导出$s \mapsto \mathcal{P}(s\varphi,\mathbb{N})$在$s_0=-\log 2/\log\lambda$处发生二阶相变，从而重新证明了 [BT12]的另一项主要结果。对于每个 $\lambda\in(0,1)$，都有$s_0=-\log 2/\log\lambda$满足$q(s_0)=0$。对于$n\geq 1$，我们有

$$\mu_{s_0\varphi}(J_n) = \frac{(1-\lambda)^{s_0}\lambda^{(n-1)s_0}}{\sum_{k\geq 1}(1-\lambda)^{s_0}\lambda^{(k-1)s_0}} = \frac{\lambda^{(n-1)s_0}}{\sum_{k\geq 1}\lambda^{(k-1)s_0}} = \frac{2^{-(n-1)}}{\sum_{k\geq 1}2^{-(k-1)}} = 2^{-n}$$

因此，

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu_{s_0\varphi} = \sum_{n\geq 1} \log((1-\lambda)\lambda^{n-1})2^{-n} = \log((1-\lambda)\lambda),$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}_{s_0\varphi}(\varphi,\psi) &= \int (\varphi - \mu_{s_0\varphi}(\varphi)) \cdot (\psi - \mu_{s_0\varphi}(\psi)) \, \mathrm{d}\mu_{s_0\varphi} \\ &= \sum_{n\geq 1} \Big(\log\big((1-\lambda)\,\lambda^{n-1}\big) - \log((1-\lambda)\lambda)\Big)(n-2)2^{-n} \\ &= \sum_{n\geq 1} ((n-2)\log\lambda)(n-2)2^{-n} = 2\log\lambda \neq 0.\end{aligned}$$

由于根据 (3.2)， $\mathcal{P}(s\varphi + q\psi)$ 在 $(s_0, 0)$ 的某个邻域内是有限的，定理 2.7 蕴含了 $s \mapsto \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})$ 在 s_0 处存在二阶相变。

3.3. **非反射系统中没有维数间隙的漂移**。 该例表明，定理 2.4 中的第二个条件对于维数间隙的不存在具有实际意义。为此，我们再次考虑一个 a-L¨uroth 映射，这次其划分 $\mathsf{a} = (J_k : k \in \mathbb{N})$ 由 $J_0 := (a, 1)$、$J_k := (a/(k+1), a/k)$、$k \geq 1$ 给出，其中 $a \in (0, 1)$ 为某个固定值，步长函数为 $\psi(x) := \lfloor \sqrt{k} \rfloor - 1$，对于 $x \in J_k$。那么 $\delta_0 = 1$，且 $\mu_{\delta_0\varphi}$ 等于限制在单位区间上的勒贝格测度。直接计算表明，如果将 a 选取得充分接近 0，则有 $-1 < \alpha_{\max} < 0$，并且同时对所有 $q > 0$，

$$\sum_{F_0(x)=x} \exp(\delta_0\varphi(x) + q\psi(x)) = +\infty.$$

因此，根据定理 2.4，尽管存在负漂移，我们仍然没有维数间隙。

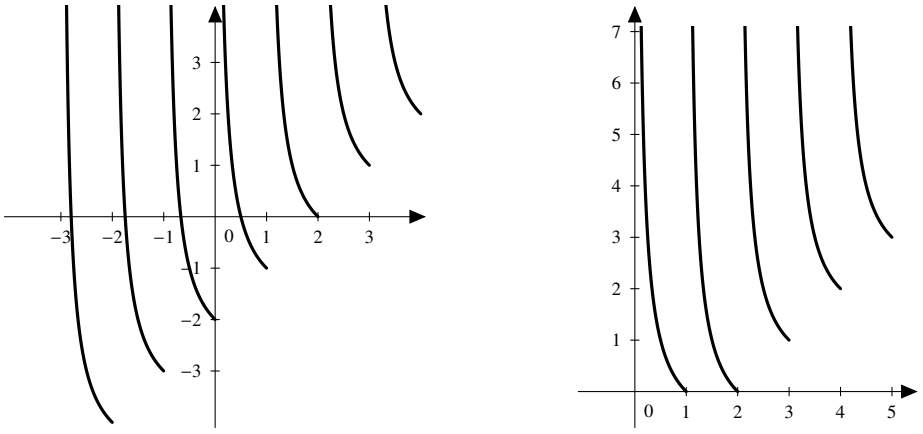

图 3.3。左侧为 $G_{\mathbb{Z}}$ 的图，表示非反射高斯系统；右侧为 $G_{\mathbb{N}}$ 的图，表示反射高斯系统。

3.4. **一个非线性系统——高斯系统**。作为具有无限多个分支的非线性例子，我们考虑高斯映射 $G : (0, 1) \to (0, 1), x \mapsto 1/x - \lfloor 1/x \rfloor$ 并令 $J^k := \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right), k \geq 1$。步长函数选为 $\overline{\psi(x)} := k - 2$，其中 $x \in J_k, k \geq 1$。对于反射高斯系统 $G_{\mathbb{N}}$，我们取 $\psi_1 := \psi + 1$。斜周期区间映射 $G_{\mathbb{Z}}$ 和 $G_{\mathbb{N}}$ 的图像见图 3.3。

我们有 $\delta_0 = 1$，并且由于 $\mu_{\delta_0\varphi}$ 是高斯测度，因此得到

$$\alpha_{\max} = \int \psi \, \mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi} = \frac{\log 3}{\log 2} - 2 + \frac{1}{\log 2} \sum_{k=3}^{\infty} (k-2) \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = +\infty.$$

由定理 2.6，我们得到 $\delta(G_{\mathbb{N}}) = \delta(G_{\mathbb{Z}})$。由定理 2.4，我们有 $\delta(G_{\mathbb{Z}}) < 1$。因此，由命题 2.1，我们得到

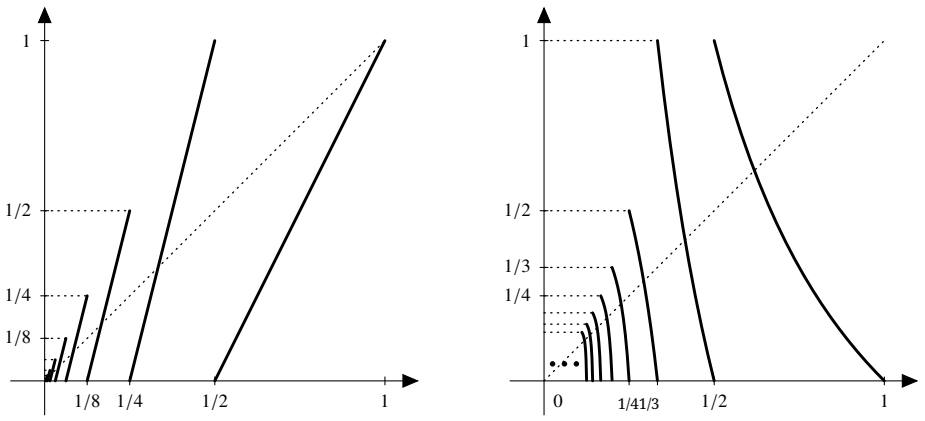

图 3.4。左图展示了共轭系统 V_λ 的前八个分支，右图展示了反射型 a(λ)-L¨uroth 映射 $L_{\lambda,\mathbb{N}}$，其中 $\lambda = 1/2$。右侧为与高斯系统 $G_{\mathbb{N}}$ 共轭的系统所对应的图，其共轭映射为 $p\colon (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto 1/x - 1$。

$$\dim_H(R_u(G_{\mathbb{N}})) = \dim_H(R(G_{\mathbb{N}})) = \dim_H(R_u(G_{\mathbb{Z}})) = \dim_H(R(G_{\mathbb{Z}})) = \delta(G_{\mathbb{N}}) = \delta(G_{\mathbb{Z}}) < 1,$$

并且两者 $G_{\mathbb{Z}}$ 和$G_{\mathbb{N}}$都出现维数间隙。对于暂态集，定理 2.5 与函数 $(s,t) \mapsto \mathcal{P}(s\varphi + t\psi)$ 的解析性共同推出

$$\dim_H(T^+(G_{\mathbb{N}})) = \dim_H(T^+(G_{\mathbb{Z}})) = 1 > \dim_H(T^-(G_{\mathbb{Z}})) > \dim_H(T^-(G_{\mathbb{N}})) = 0.$$

此外，$\mu_{\delta_0\varphi}(T^+(G_{\mathbb{N}})) = 1$，我们还展示了**黑洞** 情形。类似于L¨uroth系统，我们在图 3.4 中说明了一个作用于单位区间上的共轭系统。

关于发生相变的可能性，请注意，定理 2.7 不适用，因为所要求的压力条件并未满足。事实上，对于所有$q > 0$，压力都等于 $+\infty$。然而，我们预计协方差判据在此例中同样成立；不过，还需要在Perron-Frobenius算子的全纯域边界处应用扰动理论。另一方面，通过初等计算，我们可以证明：如果考虑高斯映射的线性化版本，就能在一种与高斯映射非常相似的情形下证明相变的存在性。下面的例子对此进行了说明。

3.5. **线性化高斯系统**。本例提供了一种定理 2.7 不适用但我们的判据仍然成立的情形。作为线性化高斯系统，我们考虑 α_G-L¨uroth映射L_{α_G}，其中，对于$k \geq 1$，区间J_k 的长度为

$$\frac{1}{k^2\zeta(2)}.$$

如前所述，$\delta_0 = 1$ 且 $\mu_{\delta_0\varphi}$ 为勒贝格测度。若我们为步长函数 $\psi(x) := k - 2$（其中 $x \in J_k$）作如下选择，则得到

$$\alpha_{\max} = \int \psi \, \mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi} = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-2}{k^2} = +\infty.$$

对于反射型 α_G-L¨uroth 系统 $L_{\alpha_G,\mathbb{N}}$，我们选择 $\psi_1 := \psi + 1$。由定理 2.6 可得 $\delta\left(L_{\alpha_G,\mathbb{N}}\right) = \delta\left(L_{\alpha_G,\mathbb{Z}}\right)$。由定理 2.4 可得 $\delta\left(L_{\alpha_G,\mathbb{Z}}\right) < 1$。因此，根据命题 2.1，我们有

$$\begin{aligned}\dim_H\left(R_u\left(L_{\alpha_G,\mathbb{N}}\right)\right) = \dim_H\left(R\left(L_{\alpha_G,\mathbb{N}}\right)\right) = \dim_H\left(R_u\left(L_{\alpha_G,\mathbb{Z}}\right)\right) = \dim_H\left(R\left(L_{\alpha_G,\mathbb{Z}}\right)\right)\\ = \delta\left(L_{\alpha_G,\mathbb{N}}\right) = \delta\left(L_{\alpha_G,\mathbb{Z}}\right) < 1,\end{aligned}$$

两者都出现维数间隙，$L_{\alpha_G,\ \mathbb{Z}}$ 和$L_{\alpha_G,\ \mathbb{N}}$。对于暂态集，定理 2.5 表明

$$\dim_H\left(T^+\left(L_{\alpha_G,\mathbb{N}}\right)\right) = \dim_H\left(T^+\left(L_{\alpha_G,\mathbb{Z}}\right)\right) = 1 > \dim_H\left(T^-\left(L_{\alpha_G,\mathbb{Z}}\right)\right) > \dim_H\left(T^-\left(L_{\alpha_G,\mathbb{N}}\right)\right) = 0.$$

同样，$\mu_{\delta_0\varphi}\left(T^+\left(L_{\alpha_G,\ \mathbb{N}}\right)\right) = 1$ 我们展示**黑洞**情形。

此外，对于$s > 1$，吉布斯测度 $\mu_{s\varphi}$ 在符号层面由具有如下概率向量的伯努利测度给出

$$p_k := \frac{1}{k^{2s}\zeta(2s)}.$$

因此，

$$\int \psi \, \mathrm{d}\mu_{s\varphi} = \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} - 2.$$

由于

$$\mathrm{cov}_{\mu_{s\varphi}}(\varphi,\psi) = \frac{\partial}{\partial s}\int \psi \, \mathrm{d}\mu_{s\varphi} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} = 2\frac{\zeta'(2s-1)\zeta(2s) - \zeta(2s-1)\zeta'(2s)}{\zeta(2s)^2} < 0, \tag{2.6}$$

函数 $s \mapsto \int \psi \, \mathrm{d}\mu_{s\varphi}$ 在 $s > 1$ 上严格递减，并且在 $s = 2$处为负，因此在 $s_0 > 1$ 中有唯一零点（实际上，$s_0 \in (1.23, 1.24)$）。

根据控制收敛定理，我们有

$$(-\infty,\infty)\times(-\infty,0) \ni (s,q) \mapsto \frac{\partial}{\partial q}\mathcal{P}(s\varphi + q\psi) = \int \psi \, \mathrm{d}\mu_{s\varphi+q\psi} = \mathrm{e}^{-\mathcal{P}(s\varphi+q\psi)}\sum_{k=1}^{\infty}(k-2)k^{-2s}\mathrm{e}^{q(k-2)}$$

它是连续的。由于对任意 $s < s_0$，$q \mapsto \sum_{k=1}^{\infty}(k-2)k^{-2s}\mathrm{e}^{q(k-2)}$ 都严格单调递增；当 $q < 0$ 接近 0 时，$\sum_{k=1}^{\infty}(k-2)k^{-2s}\mathrm{e}^{q(k-2)} > 0$，而当 $q \to -\infty$ 时，$\sum_{k=1}^{\infty}(k-2)k^{-2s}\mathrm{e}^{q(k-2)} \to -\infty$，因此存在唯一的数 $q(s) < 0$，使得 $\int \psi \, \mathrm{d}_{\mu_{s\varphi+q(s)\psi}} = 0$。因此，对 $s < s_0$，我们有 $\inf_{q\le 0}\mathcal{P}(s\varphi + q\psi) = \mathcal{P}(s\varphi + q(s)\psi)$。

对于$s > s_0$，我们有

$$\int \psi \, \mathrm{d}\mu_{s\varphi} < 0,$$

根据变分原理

$$\inf_{q\le 0}\mathcal{P}(s\varphi + q\psi) = \mathcal{P}(s\varphi).$$

结合我们的变分公式 (2.2)，由此可得

$$\mathcal{P}(s\varphi,\mathbb{N}) = \inf_{q\le 0}\mathcal{P}(s\varphi + q\psi) = \begin{cases}\mathcal{P}(s\varphi), & s \ge s_0,\\ \mathcal{P}(s\varphi + q(s)\psi), & s < s_0.\end{cases}$$

根据隐函数定理，该函数在 $s \ne s_0$ 上解析。对于一阶导数，我们有

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{P}(s\varphi,\mathbb{N}) = \begin{cases}\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{P}(s\varphi) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} -2\log(k)k^{-2s}}{\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2s}}, & s > s_0,\\ \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{P}(s\varphi + q(s)\psi) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} -2\log(k)k^{-2s}\mathrm{e}^{q(s)(k-2)}}{\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2s}\mathrm{e}^{q(s)(k-2)}}, & s < s_0.\end{cases}$$

接下来我们证明，对于 $s \nearrow s_0$，$q(s) \to 0$。首先注意到，$q = 0$ 是 $q \mapsto \sum_{k=1}^{\infty}(k-2)k^{-2s_0}\mathrm{e}^{q(k-2)}$ 的唯一零点。由于当 $q \geq 1.1$ 时，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-2)k^{-2s}\mathrm{e}^{q(k-2)} \leq -\mathrm{e}^{-q} + \sum_{k=1}^{\infty}k(k+2)^{-2.2},$$

由此可知，$s \mapsto q(s)$ 在 $[1.1, s_0)$ 上有界。由于

$$(1,\infty)\times(-\infty,0] \ni (s,q) \mapsto \int \psi \,\mathrm{d}\mu_{s\varphi+q\psi} = \mathrm{e}^{-\mathcal{P}(s\varphi+q\psi)}\sum_{k=1}^{\infty}(k-2)k^{-2s}\mathrm{e}^{q(k-2)}$$

是连续的，因此我们得出结论：当 $s \nearrow s_0$，时，$q(s)$ 的唯一聚点是 0。由此我们证明了，当 $s \nearrow s_0$ 时，$q(s) \to 0$。由于当 $s \nearrow s_0$，时，$q(s) \to 0$，根据中值定理，我们发现 $s \mapsto \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})$ 在 $s = s_0$ 处也可微，且其导数连续。$s \mapsto \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})$ 的二阶导数在 $\mathbb{R}\setminus\{s_0\}$ 上存在。事实上，对于 $s > s_0$，

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{P}(s\varphi,\mathbb{N}) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{P}(s\varphi) = \mathrm{cov}_{s\varphi}(\varphi,\varphi) = \frac{1}{\zeta(2s)}\sum_{k=1}^{\infty}(k-2)^2k^{-2s} = \mathrm{cov}_{s\varphi}(\varphi,\varphi),$$

以及当 $s < s_0$，时

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{P}(s\varphi,\mathbb{N}) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{P}(s\varphi+q(s)\psi) = \mathrm{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\varphi) - \frac{\left(\mathrm{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\psi)\right)^2}{\mathrm{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\psi,\psi)}.$$

由于 $s \mapsto \mathcal{P}(s\varphi)$ 在 s_0，的某个邻域内是解析的

$$\lim_{t\searrow s_0}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{P}(s\varphi,\mathbb{N})_{s=t} = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{P}(s\varphi)_{s=s_0} = \mathrm{cov}_{s_0\varphi}(\varphi,\varphi).$$

根据中值定理，我们有

$$\lim_{t\nearrow s_0}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{P}(s\varphi,\mathbb{N})_{s=t} = \lim_{s\nearrow s_0}\mathrm{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\varphi) - \frac{\left(\mathrm{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\psi)\right)^2}{\mathrm{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\psi,\psi)}.$$

根据勒贝格控制收敛定理，我们得到当 $s \nearrow s_0$，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\varphi)\\
&= \int\varphi^2\,\mathrm{d}\mu_{s\varphi+q(s)\psi} - \left(\int\varphi\,\mathrm{d}\mu_{s\varphi+q(s)\psi}\right)^2\\
&= \mathrm{e}^{-\mathcal{P}(s\varphi+q(s)\psi)}\sum_{k=1}^{\infty}(-2\log k)^2k^{-2s}\mathrm{e}^{q(s)(k-2)} - \left(\mathrm{e}^{-\mathcal{P}(s\varphi+q(s)\psi)}\sum_{k=1}^{\infty}(-2\log k)k^{-2s}\mathrm{e}^{q(s)(k-2)}\right)^2\\
&\to \frac{1}{\zeta(2s_0)}\sum_{k=1}^{\infty}(-2\log k)^2k^{-2s_0} - \left(\frac{1}{\zeta(2s_0)}\sum_{k=1}^{\infty}(-2\log k)k^{-2s_0}\right)^2 = \mathrm{cov}_{s_0\varphi}(\varphi,\varphi).
\end{aligned}$$

同理，当$s \nearrow s_0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\psi) &= \int\varphi\psi\,\mathrm{d}\mu_{s\varphi+q(s)\psi} = \mathrm{e}^{-\mathcal{P}(s\varphi+q(s)\psi)}\sum_{k=1}^{\infty}(-2\log k)(k-2)k^{-2s}e^{q(s)(k-2)}\\
&\to \frac{1}{\zeta(2s_0)}\sum_{k=1}^{\infty}(-2\log k)(k-2)k^{-2s_0} = \mathrm{cov}_{s_0\varphi}(\varphi,\psi)
\end{aligned}$$

and

$$\operatorname{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\psi,\psi)=\int\psi^2\,\mathrm{d}\mu_{s\varphi+q(s)\psi}=\mathrm{e}^{-\mathcal{P}(s\varphi+q(s)\psi)}\sum_{k=1}^{\infty}(k-2)^2k^{-2s}e^{q(s)(k-2)}$$

$$\to\frac{1}{\zeta(2s_0)}\sum_{k=1}^{\infty}(k-2)^2k^{-2s_0}=\operatorname{cov}_{s_0\varphi}(\varphi,\varphi).$$

因此，根据 (3.5)，在s_0 处的二阶导数发生了相变。

3.6. **海森堡矩阵的谱半径**。公式 (2.2) 可用于计算给定正序列的无限维海森堡矩阵的谱半径 $(a_i)_{i\geq0}\in l^1$, $M\geq0$ 以及 $a_j=0$ 对于 $j<0$,

$$\mathfrak{H}:=\begin{pmatrix}a_{0-M}&a_{1-M}&a_{2-M}&a_{3-M}&a_{4-M}&\cdots\\a_0&a_1&a_2&a_3&a_4&\cdots\\0&a_0&a_1&a_2&a_3&\cdots\\\vdots&0&a_0&a_1&a_2&\cdots\\\vdots&\vdots&0&a_0&a_1&\ddots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots\end{pmatrix}.$$

对于每个$i\in\mathbb{N}$，$H\,Woe$的谱半径均为，并且根据不可约性，与i无关，由下式给出

$$\varrho_{\mathfrak{H}}=\limsup_{n\to\infty}\left((\mathfrak{H}^n)_{i,i}\right)^{1/n}.$$

将a_i视为区间映射的完整线性分支斜率的倒数，$\varphi(x):=\log(a_i)$，$\psi(x):=i-1$ 视为$x\in J_i$的步长函数，并将 $\psi_1:=\psi+M+1$ 视为反射规则，我们得到

$$\mathcal{P}(\varphi+q\psi)=\log\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k\mathrm{e}^{q(k-1)}\right)\ \text{ and }\ \log\varrho_{\mathfrak{H}}=\mathcal{P}(\varphi,\mathbb{N}).$$

注意，$q\mapsto\mathcal{P}(\varphi+q\psi)$ 是定义在 $(-\infty,0)$ 上的凸解析函数，并且 $\mathcal{P}(\varphi)<\infty$。因此，直接应用 (2.2)，可得

$$\log\varrho_{\mathfrak{H}}=\inf_{q\leq0}\mathcal{P}(\varphi+q\psi)=\begin{cases}\log\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k\right), & \forall q\leq0:\sum_{k\in\mathbb{N}}(k-1)\,a_k\mathrm{e}^{qk}<0,\\ \log\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k\mathrm{e}^{q_0(k-1)}\right), & \exists!q_0<0:\sum_{k\in\mathbb{N}}(k-1)\,a_k\mathrm{e}^{q_0k}=0.\end{cases}$$

若处于特殊情形 $a_k:=\lambda^k$, $k\in\mathbb{N}$ with $\lambda\in(0,1)$，我们将相应的 Hessenberg 矩阵记为 H_λ，此时计算可简化为

$$\mathcal{P}(\varphi+q\psi)=\log\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\lambda^k\mathrm{e}^{q(k-1)}\right).$$

当 $\lambda\geq1/2$ 时，$q\mapsto\mathcal{P}(\varphi+q\psi)$ 在 $\mathbb{R}_{\leq0}$ 上单调递减；而当 $\lambda\leq1/2$ 时，其在 $q_0=-\log(2\lambda)$ 处有唯一的最小值。因此，根据 (2.2)，对于 $\varrho_\lambda:=\varrho_{\mathfrak{H}_\lambda}$，我们立即得到

$$\log\varrho_\lambda=\begin{cases}-\log(1-\lambda), & \lambda\geq1/2,\\ \log(4\lambda), & \lambda\leq1/2.\end{cases}$$

谱半径 ϱ_λ 也已通过两种不同方法在 [BT12 的定理 1 和 2] 中求得：第一种方法是求解 H_λ 的特征向量递推公式，从而得到共形测度；第二种方法是计算 $k\times k$ 的最大特征值

H_λ 的子矩阵，并令 k 趋于无穷。与此不同，我们的方法基于对 $\mathbb{Z}$-扩展的漂移论证，并仔细分析反射边界的影响（见定理 4.13）。

4. Ψ-扩张的热力学形式

4.1. 扩张马尔可夫映射的符号动力系统。 我们回到第 2.1 节介绍的一般设定。设 $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ 是一个扩张的 C^2- 马尔可夫区间映射，且 $\Delta = \bigcup_{i\in I} J_i$。

对每个 $i \in I$，都存在 $k(i) \in \mathbb{Z}$ 和 $l(i) \in \mathbb{Z}$，使得 $f_i(J_i) = [k(i), k(i)+1]$ 且 $J_i \subset \overline{]l(i), l(i)+1[}$。逆分支 $f_i^{-1}\colon [k(i), k(i)+1] \to J_i$，$i \in I$，按照 [MU03 第 4 节的定义，生成一个图定向马尔可夫系统 $(f_i^{-1})_{i\in I}$，其顶点数可能是无限的。请注意，在 [MU03] 中要求顶点数有限。2]

定义马尔可夫移位

$$\Sigma := \left\{\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in I^{\mathbb{N}} : J_{\omega_{k+1}} \subset f\left(J_{\omega_k}\right), k \geq 0\right\} \subset I^{\mathbb{N}}.$$

对于 $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in I^{\mathbb{N}}$，且 $n \in \mathbb{N}$，我们定义 $\omega|_n := (\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$。定义可容许 n-字集合 $\Sigma^n := \{\omega|_n : \omega \in \Sigma\}$。对于 $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in \Sigma^n$，且 $n \in \mathbb{N}$，取 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $f\left(J_{\omega_{n-1}}\right) = (k, k+1)$。那么，$J_\omega := f_{\omega_0}^{-1} \circ \cdots \circ f_{\omega}^{-1}{}_{n-1}(k, k+1)$ 定义了 J_{ω_0} 的一个非空子区间。f 的编码映射 $\pi = \pi_f\colon \Sigma \to R'(f)$ 定义如下：

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{J}_{\omega|_n} = \{\pi(\omega)\}.$$

我们有 $\pi(\Sigma) = R'(f)$，并且对于 $x \in R(f) \subset R'(f)$，$\pi^{-1}(x)$ 是单点集。由于 $R'(f) \setminus R(f)$ 是可数的，因此 π 除去一个可数集后定义了 $f\colon R(f) \to R(f)$ 与 $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ 之间的拓扑共轭。由于 f 是拓扑传递的，σ 是拓扑传递的马尔可夫移位。

令 $g\colon R(f) \to \mathbb{R}$ 为 Hölder 连续函数。于是可知，$g \circ \pi\colon \pi^{-1}(R(f)) \to \mathbb{R}$ 关于移位度量是 Hölder 连续的，也就是说，存在两个常数 $L \geq 1$ 和 $\alpha > 0$，使得对所有 $\omega, \tau \in \pi^{-1}(R(f))$，

$$|g(\pi\omega) - g(\pi\tau)| \leq L e^{-\alpha|\omega\wedge\tau|}$$

其中 $|\omega \wedge \tau|$ 表示 ω 和 τ [之间最长公共初始块的长度。MU03，第 4 节.2]。众所周知，$g \circ \pi$ 存在唯一的 Hölder 连续延拓至 Σ，且具有相同的 α 和 L；我们仍将其记为 $g \circ \pi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$。注意，该延拓定义在 $\omega \in \Sigma$ 上，其中 $\omega_0 = i$ 由 $g \circ \pi(\omega) = g_i(\pi(\omega))$ 给出。对于 $\omega \in \Sigma^n$，我们定义柱集 $[\omega] := \{x \in \Sigma : x|_n = \omega\}$。

以下有界畸变性质成立：

$$\begin{aligned} D_g &:= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\omega\in\Sigma^n} \sup_{x,y\in J_\omega} S_n g(x) - S_n g(y) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\omega\in\Sigma^n} \sup_{x,y\in[\omega]} S_n^\sigma (g\circ\pi)(x) - S_n^\sigma (g\circ\pi)(y) < +\infty. \end{aligned}$$

几何势定义为 $\varphi := -\log |f'|\colon \Delta \to \mathbb{R}_{<0}$。根据我们的假设，这些函数是 Lipschitz 的，并且根据 R´enyi 条件，Lipschitz 常数可以在 $i \in I$ 中统一选取。

令 $\mathrm{Per}_n(\sigma) := \{x \in \Sigma : \sigma^n x = x\}$ 表示 σ 的 n 周期点集合。对于 $g \circ \pi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ H¨older 连续，且对每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\nu \in \Sigma^k$，符号系统框架中的古列维奇压力定义如下（参见 [Sar99]）

$$\mathcal{P}(g\circ\pi, \sigma) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega\in \mathfrak{Per}_n(\sigma)\cap[\nu]} \exp S_n^\sigma (g\circ\pi)(\omega). \tag{4.1}$$

由于 Σ 是不可约的，这一定义与$i \in I$无关。
以下引理保证我们可以在压力定义中的符号设定与几何设定之间切换。

引理 4.1. 对于 $\nu \in \Sigma^k$、$k \geq 1$和 $L = J_\nu$，一个 k 阶基本区间，假设 $L \cap \mathbb{Z} = \varnothing$。那么 π: $\mathfrak{Per}_n(f) \cap [\nu] \to \mathfrak{Per}_n(f) \cap L$ 对所有 $n \geq 1$ 都是一个双射。

证明。设 $\omega \in \mathrm{Per}_n(\sigma) \cap [\nu]$，即 $\sigma^n \omega = \omega$且 $\omega|_k = \nu$。因此，$\mathrm{x} = \pi(\omega) \in \mathrm{R}(\mathrm{f}) \cap \mathrm{L}$ 且 $\mathrm{f}_{\omega_{n-1}} \circ \cdots \circ \mathrm{f}_{\omega_0}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$。取 $\mathrm{l} \in \mathbb{N}$使得 $\mathrm{L} \subset (\mathrm{l}, \mathrm{l}+1)$。由于 $\mathrm{f}_{\omega_{n-1}} \circ \cdots \circ \mathrm{f}_{\omega_0} \colon \mathrm{J}_{\omega|_n} \to [\mathrm{l}, \mathrm{l}+1]$ 是一个同胚，且 $\mathrm{x} \in \mathrm{L} \subset (\mathrm{l}, \mathrm{l}+1)$，我们有 $\mathrm{x} \in \mathrm{J}_{\omega|_n} \cap \mathrm{L}$。因此，$\mathrm{x} \in \mathrm{Per}_n(\mathrm{f}) \cap \mathrm{L}$。由于对于 $\omega \in \mathrm{Per}_n(\sigma) \cap [\nu]$，$\mathrm{J}_{\omega|_n}$两两不相交，映射 π 在 $\mathrm{Per}_n(\sigma) \cap [\nu]$ 上是单射。反过来，设 $\mathrm{x} \in \mathrm{Per}_n(\mathrm{f}) \cap \mathrm{L}$。那么对于 $\omega := \pi^{-1}(\mathrm{x}) \in \Sigma$，我们有$\omega|_k = \nu$ 且 $\sigma^n \omega = \omega$。□

命题 4.2. 设 g: 实数集$(f) \to \mathbb{R}$ 是 *Hölder* 连续的。那么，对任意可容许词$\nu \in \Sigma^n$,

$$\mathcal{P}(g \circ \pi, f) = \limsup_n \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \mathfrak{Per}_n(f) \cap J_\nu} \exp S_n g(x).$$

证明。由于f与$\sigma|_{\pi^{-1}\text{实数集}(f)}$共轭，我们可得上界

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \mathfrak{Per}_n(f) \cap J_\nu} \exp S_n^f g(x) \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in \mathfrak{Per}_n(\sigma) \cap [\nu]} \exp S_n^\sigma (g \circ \pi)(\omega)$$

并且若$J_\nu \cap \mathbb{Z} = \varnothing$，则由引理 4.1 可知等号成立。若$J_\nu \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$，则我们考虑一个适当的子词 ν'，使得$J_{\nu'} \cap \mathbb{Z} = \varnothing$，并导出一个下界；该下界与 $\mathcal{P}(g \circ \pi, \sigma)$一致，因为其定义与所选的起始柱无关。□

接下来，我们考虑 MarkovF_0 的特殊情形：$\Delta_0 \to (0,1)$，且没有任何扩张，即$H = 0$，并证明古列维奇压力与相对于无限字母表的经典拓扑压力一致，后者例如在 [MU03] 中有所定义。

推论 4.3. 设 $F_0 \colon \Delta_0 \to (0,1)$ 是一个扩张的 C^2-马尔可夫区间映射。那么

$$\mathcal{P}(g) = \lim_n \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in \Sigma^n} \mathrm{e}^{S_\omega g}$$

其中 $S_\omega g := \sup_{x \in [\omega]} S_n g \circ \pi(x)$。

证明。由于相应的移位 Σ 是满移位，众所周知，古列维奇压力与势函数$g \circ \pi$ 关于该移位动力系统的经典拓扑压力相等。由命题 4.2 可得此等式。□

注 4.4。最后，我们指出，对于任意 Ψ-扩张$F_{\mathbb{H}} \colon \Delta_{\mathbb{H}} \to (0,1)$，若其具有 $0 \ni \mathbb{H} \subset \mathbb{Z}$ 霍尔德连续势函数$g \colon \Delta_0 \to \mathbb{R}$，且$g_{\mathbb{H}}$ 是其周期连续扩张，则有

$$\sum_{k=0}^{n-1} g \circ F_0^k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g_{\mathbb{H}} \circ F_{\mathbb{H}}^k(x). \tag{4.2}$$

对于$K \subset I$，我们将f_K 记作f 在$\Delta_K := \biguplus_{i \in K} J_i$上的限制；也就是说$f_K \colon \Delta_K \to \mathbb{R}$ 定义一个扩张的$C^{1+\epsilon}$-马尔可夫区间映射，而限制势函数由$g_K := g|_{\mathfrak{R}(f_K)}$给出。

引理 4.5。以下穷尽原理成立

$$\mathcal{P}(g, f) = \sup_{K \subset I, \#K < \infty} \mathcal{P}(g_K, f_K).$$

证明。结合命题 4.2 与 Sarig 的紧致逼近性质。□

4.2. **吉布斯测度**。 设 $F_0\colon \Delta_0 \to (0,1)$ 是一个扩张的C^2-马尔可夫区间映射，且g : 实数集$_0 \to \mathbb{R}$ 是 H¨older 连续的。于是由推论 4.3 可知，我们的古列维奇压力与关于至多可数的字母表的经典拓扑压力一致。由于$g \circ \pi\colon I^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ 也满足 H¨older 连续性，并且若 $\mathcal{P}(g) < \infty$，则由 [MU03]，存在唯一的 σ-不变 Borel 概率测度 μ_g，定义在 $I^{\mathbb{N}}$ 上——称为吉布斯测度 （对应g）——使得对某个$C \geq 1$，对所有 $\omega \in I^*$

$$C^{-1} \leq \frac{\mu_g([\omega])}{\exp(S_\omega g - |\omega|\mathcal{P}(g))} \leq C. \tag{4.3}$$

注意，μ_g 是相对于g 而言的唯一平衡态，其对应于F_0。由于μ_g 没有原子，因此我们也可以将μ_g 视为实数集R_0上的概率测度。

我们称F_0 是强正则 [MU03]，当且仅当存在$s > 0$ 使得 $0 < \mathcal{P}(s\varphi) < \infty$。若$F_0$ 是强正则的，则 $\mathcal{P}(\delta_0\varphi) = 0$，其中 $\delta_0 = \dim_H(\mathrm{R}_0)$，并且在$\mathrm{R}_0$, 上（分别在$I^{\mathbb{N}}$上）存在唯一的吉布斯测度$\mu_{\delta_0\varphi}$。

4.3. **非反射情形**。 本节中，设$F_0\colon \Delta_0 \to (0,1)$是一个扩张的$C^2$-马尔可夫区间映射，$g : \mathrm{R}_0 \to \mathbb{R}$ 是H¨older连续的，且 $\psi : \mathrm{R}_0 \to \mathbb{Z}$ 在第一级基本区间上为常数；也就是说，我们考虑特定的选择$H = \mathbb{Z}$ 和 $\Psi_{\mathbb{Z}}\colon \Delta_0 + \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \psi(x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor$。我们始终假设 $\Psi_{\mathbb{Z}}$是满射的，这等价于$F_{\mathbb{Z}}$的传递性。

下述定理和引理可结合命题 4.2 及引理 4.5 中给出的穷尽论证，采用 [GJK22] 中相同的论证加以证明。

定理 4.6 （ $\mathbb{Z}$-扩展的变分公式）。 设 g : 实数集$(F_0) \to \mathbb{R}_{<0}$ *H¨older* 连续。那么我们有

(1) If $0 \in \left(\underline{\psi}, \overline{\psi}\right)$, *then there exists a unique* $t \in \mathbb{R}$ *such that*

$$\mathcal{P}(g,\mathbb{Z}) = \mathcal{P}(t\psi + g) = \min_{q\in\mathbb{R}} \mathcal{P}(q\psi + g).$$

(2) 一般而言，我们有

$$\mathcal{P}(g,\mathbb{Z}) = \inf_{q\in\mathbb{R}} \mathcal{P}(q\psi + g)$$

and $\mathcal{P}(g,\mathbb{Z}) = -\infty$ *if* $0 \notin \left[\underline{\psi}, \overline{\psi}\right]$. *If* $0 \in \left\{\underline{\psi}, \overline{\psi}\right\}$ *then* $\mathcal{P}(g,\mathbb{Z}) = \mathcal{P}\left(g_{I_0}\right)$ *where* $I_0 = \{i \in I : \psi(i) = 0\}$.

引理 4.7。

$$\inf\left\{s \geq 0 : \inf_q \mathcal{P}(q\psi + s\varphi) \leq 0\right\} = \inf_q \inf\{s \geq 0 : \mathcal{P}(s\varphi + q\psi) \leq 0\}$$

and

$$\inf\left\{s \geq 0 : \inf_{q\leq 0} \mathcal{P}(q\psi + s\varphi) \leq 0\right\} = \inf_{q\leq 0} \inf\{s \geq 0 : \mathcal{P}(s\varphi + q\psi) \leq 0\}.$$

引理 4.8。 对于 $s(q) := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{P}(s\varphi + q\psi) \leq 0\}$，对 $q \in \mathbb{R}$，我们有

$$\inf_{q\leq 0} s(q) = \begin{cases} \delta_{\mathbb{Z}}, & \text{if } \alpha_{\max} \geq 0, \\ \delta_0, & \text{if } \alpha_{\max} \leq 0. \end{cases}$$

证明。 首先假设 $\alpha_{\max} = \infty$。如果 $\mathcal{P}(\delta_0\varphi + q\psi) < \infty$ 对某个$q > 0$成立，那么根据[MU03，命题 2.6.13]，有 $\alpha_{\max} < \infty$。因此，在这种情况下，对每个$q > 0$，都有 $\mathcal{P}(\delta_0\varphi + q\psi) = \infty$，从而 $\inf_{q} s(q) = \inf_{q\leq 0} s(q)$。结合引理 4.7 可得 $\inf_{q\leq 0} s(q) = \delta_{\mathbb{Z}}$。

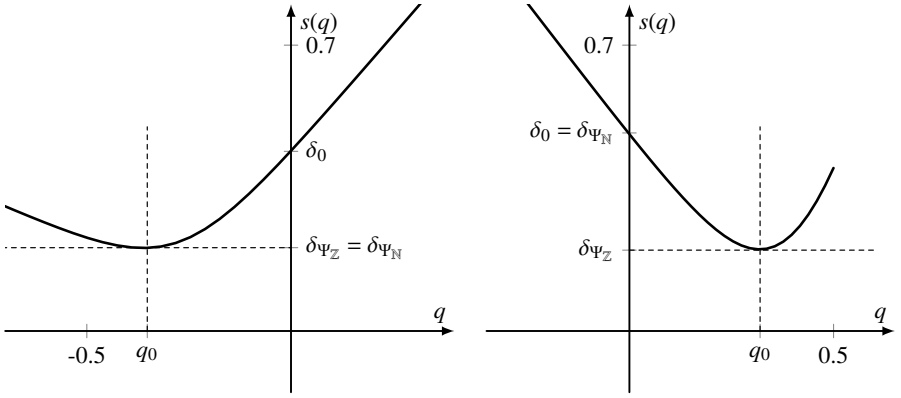

图 4.1。取值为 δ_0、 $\delta_{\mathbb{Z}}$ 和 $\delta_{\mathbb{N}}$ 时，$\alpha_{\max} > 0$ （左）和 $\alpha_{\max} < 0$ （右）的 $q \mapsto s(q)$ 图像。

设 $\alpha_{\max} < \infty$，并假设对$q \in \mathbb{R}$，有 $s(q) < \infty$。也就是说，存在$s > 0$，使得 $\mathcal{P}(s\varphi + q\psi) \le 0$。然后应用变分原理（参见 [MU01],，其中使用了 $\int s\varphi + q\psi \, \mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi} > -\infty$和 $\delta_0 = h\left(\mu_{\delta_0\varphi}\right) / \int -\varphi \, \mathrm{d}\mu^{\delta_0\varphi}$），可得

$$s \ge q \frac{\alpha_{\max}}{-\int \varphi \, \mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi}} + \delta_0.$$

对 $\{s > 0$ 取下确界： $\mathcal{P}(s\varphi + q\psi) \le 0\}$，得到 $s(q) \ge q\alpha_{\max} / -\int \varphi \, \mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi} + \delta_0$，且 $s(0) = \delta_0$。若$s(q) = \infty$，则该不等式显然成立。因此

$$s(q) \ge q \frac{\alpha_{\max}}{-\int \varphi \, \mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi}} + \delta_0 \quad \text{for all } q \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

由此可知，当 $\alpha_{\max} \ge 0$ 时，$q \mapsto s(q)$ 在非正数范围内取最小值。因此，$\inf_{q \le 0} s(q) = \inf_q s(q) = \delta_{\mathbb{Z}}$，最后一个等式由定理 4.6 和引理 4.7 得出。
设 $\alpha_{\max} \le 0$。于是，对q 为负数的情形应用 (4.4)，可得 $\inf_{q \le 0} s(q) = s(0) = \delta_0$。图 4.1 展示了 $q \mapsto s(q)$ 的两种典型图像。□

引理 4.9。 对于满足 $\in \mathbb{R}$ 且 $\mathcal{P}$（$s\varphi$）$< \infty$ 的 s，我们有

$$\liminf_{q \nearrow 0} \int \psi \, \mathrm{d}\mu_{s\varphi + q\psi} \ge \int \psi \, \mathrm{d}\mu_{s\varphi}.$$

证明。 由于 $\psi \ge -1$，我们对于 $\eta < 0$有一致地成立，其中 $q \in [\eta, 0]$,

$$\int -\varphi \, \mathrm{d}\mu_{s\varphi + q\psi} \asymp \sum_i \sup\left(-\varphi|_{J_i}\right)\left(\exp\sup\varphi|_{J_i}\right)^s \left(\exp\sup\psi|_{J_i}\right)^q \exp\mathcal{P}(s\varphi + q\psi) \ll 1.$$

因此，根据 [KU07，引理 3.2]，我们有：$\left(\mu_{s\varphi + q\psi} : q \in [\eta, 0]\right)$ 是一个紧的概率测度族。Gibbs 性质（4.3）以及压力的连续性表明，当$q \nearrow 0$时，$\mu_{s\varphi + q\psi}$ 弱-* 收敛于 $\mu_{s\varphi}$。$\mu \mapsto \int \psi \, \mathrm{d}\mu$ 的下半连续性随后证明了该引理。□

定理 *2.4* 的证明。我们将利用这样一个事实： $\mathcal{P}(\delta_0\varphi + q\psi) < \infty$ 当且仅当 $\sum_{x \in \Sigma : \sigma x = x} \exp((\delta_0\varphi(x) + q\psi(x))) < \infty$（见 [MU03]）。由定理 4.6 (2)，存在维数间隙当且仅当

$$\inf\left\{s > 0 : \inf_q \mathcal{P}(s\varphi + q\psi) \le 0\right\} < \delta_0.$$

假设 $\mathcal{P}(s\varphi+q'\psi)<\infty$ 对某个 $q'\in\mathbb{R}$成立，那么利用 $-1\le\psi$，对于 $q\le q'$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log\sum_{x=F_0^n x}\mathrm{e}^{S_n s\varphi(x)+q\psi(x)} &\le \frac{1}{n}\log\sum_{\omega\in\Sigma^n}\mathrm{e}^{S_\omega s\varphi+q'\psi+(q-q')\psi}\\ &\le \frac{1}{n}\log\sum_{\omega\in\Sigma^n}\mathrm{e}^{S_\omega(s\varphi+q'\psi-(q-q'))}\\ &\le q'-q+\frac{1}{n}\log\sum_{\omega\in\Sigma^n}\mathrm{e}^{S_\omega s\varphi+q'\psi}\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{P}(\mathrm{s}\varphi+\mathrm{q}\psi)<\infty$ 对所有 $\mathrm{q}\le\mathrm{q}'$均成立。利用正则性假设可知，$\mathrm{p}:(\mathrm{s},\mathrm{q})\mapsto\mathcal{P}(\mathrm{s}\varphi+\mathrm{q}\psi)$ 在 $(\delta_0-\epsilon,\infty)\times(-\infty,0]$上是有限的，并且关于第一个坐标严格递减，其中 $\epsilon>0$。假设 $\alpha_{\max}>0$。我们证明，在 $(\delta_0-\epsilon,\infty)\times(-\epsilon,0]$上，当 $\epsilon>0$足够小时，函数 p 关于第二个坐标也严格递增。事实上，引理 4.9 蕴含 $\liminf_{q\nearrow 0}\int\psi\,\mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi}\ge\int\psi\,\mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi}=\alpha_{\max}>0$ forcing $\int\psi\,\mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi}=\partial/\partial\mathrm{q}\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi)>0$ 其中 $-\epsilon<0$。由 $\mathrm{q}\mapsto\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi_\alpha)$ 的凸性可得结论。因此，存在 $\mathrm{s}<\delta_0$和 $\mathrm{q}<0$使得 $\mathcal{P}(\mathrm{s}\varphi+\mathrm{q}\psi)\le 0$。反之，若存在 $\mathrm{s}<\delta_0$和 $\mathrm{q}<0$使得 $\mathcal{P}(\mathrm{s}\varphi+\mathrm{q}\psi)\le 0$，则 $\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi)<0$，并且由凸性，$\mathrm{q}\mapsto\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi)$ 在 0 处的左导数必为正。由于利用变分原理，$\alpha_{\max}=\int\psi\,\mathrm{d}\mu_{\delta_0\varphi}$属于 $\mathrm{q}\mapsto\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi)$ 在 $\mathrm{q}=0$处的次微分，因此我们有$\alpha_{\max}>0$。这就证明了第一部分。

若此时 $\alpha_{\max}\le 0$，则由引理 4.8 $\delta_0=\inf\{\mathrm{s}>0:\inf_{q\le 0}\mathcal{P}(\mathrm{s}\varphi+\mathrm{q}\psi)\le 0\}$，因此只有当 $\delta_0>\inf\{\mathrm{s}>0:\inf_{q>0}\mathcal{P}(\mathrm{s}\varphi+\mathrm{q}\psi)\le 0\}$ 时才可能出现维数间隙。若对所有 $\mathrm{q}>0$，$\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi)=\infty$，则这不可能发生。反之，若对某个 $\mathrm{q}'>0$，$\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}'\psi)<\infty$，那么根据正则性假设、$\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi)<\infty$ 对所有 $\mathrm{q}\le\mathrm{q}'$ 这一事实，以及 p 的凸性，我们发现 p 在集合 $\{(\mathrm{s},\mathrm{q}):\mathrm{q}\in[0,\mathrm{q}'],\mathrm{s}\in[\delta_0-(\mathrm{q}'-\mathrm{q})/(\mathrm{q}')\epsilon,\infty)\}$ 上有限，且关于第一坐标严格递减。由于 $\alpha_{\max}<0$ 意味着 $\mathrm{q}\mapsto\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi)$ 在 0 的某个邻域内严格递减，因此存在 $\mathrm{s}<\delta_0$ 和 $\mathrm{q}>0$，使得 $\mathcal{P}(\mathrm{s}\varphi+\mathrm{q}\psi)\le 0$。最后，若 $\alpha_{\max}=0$ 且对某个 $\mathrm{q}'>0$，$\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}'\psi)<\infty$，则 $\mathrm{q}\mapsto\mathcal{P}(\delta_0\varphi+\mathrm{q}\psi)$ 在 0 处取得最小值，且该最小值为 0。因此不存在维数间隙。□

注 4.10。最后需要指出，通过类似于定理 2.4 证明中关于压力的有限性和单调性的论证，$\inf_q\mathcal{P}(\delta_0\varphi+q\psi)<0$ 意味着存在$s<\delta_0$和$q\in\mathbb{R}$，使得 $\mathcal{P}(s\varphi+q\psi)\le 0$。因此，$\inf_q\mathcal{P}(\delta_0\varphi+q\psi)<0$同样等价于维数间隙的出现。

4.4. **反射情形**。在本节中，假设$g:\Sigma\to\mathbb{R}$是 Hölder 连续的，并且$\psi,\psi_1:\Sigma\to\mathbb{Z}$在 1-柱上为常数，其中 $\psi\ge -1$ 且$M+\psi\ge\psi_1\ge\psi$。

下面的引理揭示了带反射边界的扭积系统$\Psi_{\mathbb{N}}$与 $\Psi_{\mathbb{Z}}$ 相应的无反射边界系统之间的一个有用联系；具体而言，前者访问反射边界的次数对应于后者进入负半轴的最大深度。

显然，对于所有$x\in\in\mathrm{R}_{\mathbb{N}}$，$F_{\mathbb{N}}^n(x)-F_{\mathbb{Z}}^n(x)\ge 0$均成立。下文中，令 $\|f\|$表示实函数f的上确界范数。

引理 4.11. 对于所有 $x\in$实数集$_{\mathbb{N}}\cap(0,1)$，我们有

$$\max_{0\le k\le n}-\left\lfloor F_{\mathbb{Z}}^k(x)\right\rfloor\le F_{\mathbb{N}}^n(x)-F_{\mathbb{Z}}^n(x)\le\max_{0\le k\le n}-\left\lfloor F_{\mathbb{Z}}^k(x)\right\rfloor+\|\psi_1-\psi\|$$

and

$$\max_{0\le k\le n}-\left\lfloor F_{\mathbb{Z}}^k(x)\right\rfloor\le\|\psi_1-\psi\|\cdot\mathrm{card}\left\{1\le j\le n:F_{\mathbb{N}}^j(x)\in[0,1]\right\}.$$

证明。 首先，我们定义 $x \in R_{\mathbb{N}} \cap (0,1)$ 到 $(0,1)$ 的进入时刻序列。令 $n_0 := 0$ 和 $n_j := \inf\left\{n > n_{j-1} : F^n_{\mathbb{N}}(x) \in (0,1)\right\}$ for $j \geq 1$；令 $j_0 \in \mathbb{N}$ 为满足 $n_{j_0+1} = +\infty$ 和 $j_0 := +\infty$ 的最小指标，若不存在这样的指标则……。设 $a_n := F^n_{\mathbb{N}}(x) - F^n_{\mathbb{Z}}(x)$，我们注意到 (a_n) 随着 $a_0 = 0$ 递增，更确切地说，

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + (\psi_1 - \psi)\left(F^n_0(x - \lfloor x \rfloor)\right) & n = n_j \text{ for some } j \leq j_0, \\ a_n & \text{else.} \end{cases} \tag{4.5}$$

因此，$a_{n_{j+1}} - a_{n_j} \leq \|\psi_1 - \psi\|$。另一方面，令 $b_n := \max_{0 \leq k \leq n} -\left\lfloor F^k_{\mathbb{Z}}(x) \right\rfloor$, $n \geq 0$，我们观察到 (b_n) 单调递增且非负。对于所有 $j \in \mathbb{N}$，我们有 $b_{n_j} = -\left\lfloor F^{n_j}_{\mathbb{Z}}(x) \right\rfloor = a_{n_j}$。为此，注意到 $a_{n_0} = a_0 = 0 = b_0 = b_{n_0}$，并且根据构造，$-\left\lfloor F^{n_j}_{\mathbb{Z}}(x) \right\rfloor = a_{n_j}$；对于所有 $n_j < k \leq n_{j+1}$，有 $b_k \leq a_k$。特别地，这意味着对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$b_n \leq a_n$。此外，对于 $n_j < k \leq n_{j+1}$、$j \in \mathbb{N}_{<} j_0$，我们推出

$$-\|\psi_1 - \psi\| + a_k \leq -\left(a_{n_{j+1}} - a_{n_j}\right) + a_k \leq a_{n_j} = b_{n_j} \leq b_k \leq a_k,$$

这就完成了第一个断言的证明。利用 (4.5) 以及第一个断言中的下界，我们估计

$$\max_{0 \leq k \leq n} -F^k_{\mathbb{Z}}(x) = b_n \leq a_{n+1} = \sum_{j \in \mathbb{N} : n_j \leq n} (\psi_1 - \psi)\left(F^{n_j}_0(x - \lfloor x \rfloor)\right) \leq \operatorname{card}\left\{j \in \mathbb{N} : n_j \leq n\right\} \|\psi_1 - \psi\|,$$

由此得到第二个断言。 □

现在我们给出一个基本不等式，用来比较相对于 $\mathbb{H} = 0$、$\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{N}$ 的压力。

命题 4.12。 对于 g: 实数集$_0 \to \mathbb{R}_{<0}$ *Hölder* 连续，我们有

$$\mathcal{P}(g, \mathbb{Z}) \leq \mathcal{P}(g, \mathbb{N}) \leq \mathcal{P}(g).$$

证明。第二个不等式显然。为证明第一个不等式，我们使用基映射 F 的编码 $\pi = \pi_{F_0} : I^{\mathbb{N}} \to \Delta_0$。存在 $\nu \in I^2$，使得基本区间 $L = J_\nu$ 满足 $L \subset (0,1)$。注意，由 $F_{\mathbb{N}}$ 的传递性，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在有限集 $I_0 = I_0(k) \subset I$ 及 $R_k \geq 0$，使得对于每个 $0 \leq l \leq \|\psi - \psi_1\| k$，都存在 $s \leq R_k$ 和一个字 $\tau = \tau_1 \cdots \tau_s \in I^s_0$，满足 $F^s_{\mathbb{N}}(l + J_\tau) \subset L$。令 $x \in \mathrm{Per}_n(F_{\mathbb{Z}}) \cap L$，且 $\max_{0 \leq m \leq n} \left|F^m_{\mathbb{Z}} x\right| \leq k$。于是，由扭积性质，$x \in \mathrm{Per}_n(F_0)$，并且存在唯一的 $\omega = \omega_0 \cdots \omega_{n-1} \in I^{\mathbb{N}}$，使得 $x = \pi(\omega)$。由引理 4.11 可知 $F^n_{\mathbb{N}}(x) \leq \|\psi - \psi_1\| k$。因此，对于 $l = l_x := \left\lfloor F^n_{\mathbb{N}}(x) \right\rfloor$，存在 $s = s_x$ 和 $\tau \in I^s$，使得 $F^{n+s}_{\mathbb{N}}(J_{\omega_0 \cdots \omega_{n-1} \tau_0 \cdots \tau_{s-1}}) \subset (0,1)$。我们有 $\omega\tau \in \mathrm{Per}_{n+s}(\sigma)$，且由引理 4.1，存在 $x' \in \mathrm{Per}_{n+s}(F_0) \cap L$，并且映射 $x \mapsto x'$ 是一一映射。由于 $F^{n+s}_{\mathbb{N}}(J_{\omega_0 \ldots \omega_{n-1} \tau_0 \ldots \tau_{s-1}}) \subset (0,1)$，我们有 $x' \in \mathrm{Per}_{n+s}(F_{\mathbb{N}}) \cap L$。由于 $x, x' \in J_{\omega_0 \cdots \omega_{n-1}} \subset L$，由有界畸变性质可得

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in \mathfrak{Per}_n(F_{\mathbb{Z}}) \cap L \\ \max_{0 \leq \ell \leq n} \left|F^\ell_{\mathbb{Z}} x\right| \leq k}} e^{S_n g(x)} &\leq D_g \left(\sum_{i \in F_k} \max e^{-g_i} \right)^{R_k} \sum_{\ell=0}^{R_k} \sum_{x' \in \mathfrak{Per}_{n+\ell}(F_{\mathbb{Z}}) \cap L} e^{S_{n+\ell} g(x')} \\ &\leq D_g \left(\sum_{i \in F_k} \max e^{-g_i} \right)^{R_k} R_k \max_{0 \leq \ell \leq R_k} \sum_{x' \in \mathfrak{Per}_{n+\ell}(F_{\mathbb{Z}}) \cap L} e^{S_{n+\ell} g(x')}. \end{aligned}$$

由引理 4.5 可得 $\mathcal{P}(g, \mathbb{Z}) \leq \mathcal{P}(g, \mathbb{N})$。 □

定理 4.13 （$\mathbb{N}$-扩展的变分公式）。 对于 g: 实数集$_0 \to \mathbb{R}_{<0}$ *Hölder* 连续，我们有

$$\mathcal{P}(g, \mathbb{N}) = \inf_{q \leq 0} \mathcal{P}(g + q\psi).$$

注 4.14。 注意，$\inf_{q\in\mathbb{R}}\mathcal{P}(g+q\psi)=\mathcal{P}(g)$ 蕴含 $\mathcal{P}(g,\mathbb{Z})=\mathcal{P}(g)$。

证明。 对于 $x\in L\cap \mathrm{R}_{\mathbb{N}}$，$L$如上所述，且有 $F_{\mathbb{N}}^{n}x=x$，我们有 $S_n\psi(x)\le 0$，因为 $\psi\le\psi_1$。因此，对于 $q\le 0$，可得

$$\sum_{x\in\mathfrak{Per}_n(F_{\mathbb{N}})\cap L}\mathrm{e}^{S_n g(x)}\le\sum_{x\in\mathfrak{Per}_n(F_0)\cap L,S_n\psi(x)\le 0}\mathrm{e}^{S_n(g+q\psi)(x)}\le\sum_{x\in\mathfrak{Per}_n(F_0)\cap L}\mathrm{e}^{S_n(g+q\psi)(x)}$$

这表明 $\mathcal{P}(g,\mathbb{N})\le\inf_{q\le 0}\mathcal{P}(g+q\psi)$，并且若 $\inf_{q\le 0}\mathcal{P}(g+q\psi)=\inf_{q\in\mathbb{R}}\mathcal{P}(g+q\psi)$，则由命题 4.12 和定理 4.6 可得

$$\mathcal{P}(g,\mathbb{Z})=\mathcal{P}(g,\mathbb{N}).$$

现在，假设 $\inf_{q>0}\mathcal{P}(g+q\psi)=\inf_{q\in\mathbb{R}}\mathcal{P}(g+q\psi)$。那么 $\mathcal{P}(g)=\infty$ 意味着 $\mathcal{P}(g+q\psi)=\infty$对所有 $q\in\mathbb{R}$均成立，因为 $\psi\ge -1$。由此得到 $\mathcal{P}(g)=\mathcal{P}(g,\mathbb{Z})=\infty$，而等式由命题 4.12 得证。

因此，对于剩余情形，我们可以假设 $\mathcal{P}(\mathrm{g})<\infty$。不等式 $\mathcal{P}(\mathrm{g},\mathbb{N})\le\mathcal{P}(\mathrm{g})$ 已在命题 4.12 中得到证明。现在我们证明反向不等式。由于 $\inf_{q>0}\mathcal{P}(\mathrm{g}+\mathrm{q}\psi)=\inf_{q\in\mathbb{R}}\mathcal{P}(\mathrm{g}+\mathrm{q}\psi)$，可知 $\mathcal{P}(\mathrm{g}+\mathrm{q}\psi)<\infty$ 在某个开区间（$-\infty$，ϵ）上成立，其中 $\epsilon>0$。由 [MU03] 可得 $\int\psi\mathrm{d}\mu_g=\partial/\partial\mathrm{q}\left(\mathcal{P}(\mathrm{g}+\mathrm{q}\psi)\right)_{q=0}\le 0$。因此，利用重对数律处理 $\int\psi\,\mathrm{d}\mu_g=0$ 的情形，并利用大数定律处理 $\int\psi\,\mathrm{d}\mu_g<0$ 的情形，我们有 $\liminf_n \mathrm{S}\,\mathrm{n}\psi=-\infty\,\mu_g$-a. e.。根据引理 4.11 的第二个断言，对于 μ_g-a. e. 的 $\mathrm{x}\in\mathrm{L}$，有 $\mathrm{F}_{\mathbb{N}}^{n}(\mathrm{x})\in(0,1)$ 对无穷多个 $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ 成立。因此，由 Borel–Cantelli 引理可得

$$\sum_{n\ge 1}\mu_g\left\{x\in\mathfrak{R}_{\mathbb{N}}\cap L:F_{\mathbb{N}}^{n}(x)\in(0,1)\right\}=\infty.$$

回顾一下，对于每个 $x\in$实数集$_0$，我们定义 $\omega(x,n):=\pi_{F_0}^{-1}(x)|_n\in I^n$。那么，根据引理 4.1 中所述的周期点对应关系，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，

$$\bigcup_{x\in\mathfrak{Per}_n(F_{\mathbb{N}})\cap L}J_{\omega(x,n)}\supset\left\{x\in\mathfrak{R}_{\mathbb{N}}\cap L:F_{\mathbb{N}}^{n}(x)\in(0,1)\right\}.$$

利用 μ_g 的 Gibbs 性质和 (4.2)，我们得到

$$\infty=\sum_{n\ge 1}\mu_g\left\{x\in\mathfrak{R}_{\mathbb{N}}\cap L:F_{\mathbb{N}}^{n}(x)\in(0,1)\right\}\ll\sum_{n\ge 1}\sum_{x\in\mathfrak{Per}_n(F_{\mathbb{N}})\cap L}\mathrm{e}^{S_n g_{\mathbb{N}}(x)-n\mathcal{P}(g)}.$$

由此可知，$\mathcal{P}(g,\mathbb{N})-\mathcal{P}(g)\ge 0$。这就证明了剩余的情形。 □

推论 4.15。 对于 g:实数集$_0\to\mathbb{R}_{<0}$ $H^{\cdot\cdot}$*older* 连续函数，我们有

$$\mathcal{P}(g,\mathbb{N})=\begin{cases}\mathcal{P}(g,\mathbb{Z}), & \text{if } \inf_{q\le 0}\mathcal{P}(g+q\psi)=\inf_{q\in\mathbb{R}}\mathcal{P}(g+q\psi),\\ \mathcal{P}(g), & \text{if } \inf_{q>0}\mathcal{P}(g+q\psi)=\inf_{q\in\mathbb{R}}\mathcal{P}(g+q\psi).\end{cases}$$

证明。如果 $\inf_{q\le 0}\mathcal{P}(\mathrm{g}+\mathrm{q}\psi)=\inf_{q\in\mathbb{R}}\mathcal{P}(\mathrm{g}+\mathrm{q}\psi)$，那么该等式由定理 4.6 和定理 4.13 立即得到。由于 $\inf_{q>0}\mathcal{P}(\mathrm{g}+\mathrm{q}\psi)=\inf_{q\in\mathbb{R}}\mathcal{P}(\mathrm{g}+\mathrm{q}\psi)$ 蕴含 $\mathrm{q}\mapsto\mathcal{P}(\mathrm{g}+\mathrm{q}\psi)$ 在 $\mathbb{R}_{\le 0}$ 上由凸性递减，因此由定理 4.13 可得$\mathcal{P}(\mathrm{g},\mathbb{N})=\inf_{q\le 0}\mathcal{P}(\mathrm{g}+\mathrm{q}\psi)=\mathcal{P}(\mathrm{g}+0\psi)=\mathcal{P}(\mathrm{g})$。□

定理 *2.5* 的证明。 由于 $F_{\mathbb{N}}^{n}\ge F_{\mathbb{Z}}^{n}$，我们有 $T^{+}(F_{\mathbb{N}})\subset T^{+}(F_{\mathbb{Z}})$。由引理 4.11 可得 $T^{+}(F_{\mathbb{N}})+(-\mathbb{N})\supset T^{+}(F_{\mathbb{Z}})$，因此，豪斯多夫维数的可数稳定性证明了第一个等式。第二个等式显然成立。

若 $\alpha_{\max}>0$，则 $\mu_{\delta_0\varphi}$-几乎处处x有 $\lim_n S_n\psi(x)=\infty$。因此，$\delta_0\ge\dim_H T^{+}(F_{\mathbb{Z}})\ge\dim_H\left(\mu_{\delta_0\varphi}\right)=\delta_0$。

现在假设 $\alpha_{\max} \le 0$。由于 $0 \in (\psi, \psi)$，由定理 4.6 可知存在$q_0 \ge 0$ （参见 [GJK22，命题 4.3] 的证明），使得

$$\mathcal{P}(\delta_{\mathbb{Z}}\varphi + q_0\psi) = \min_q \mathcal{P}(\delta_{\mathbb{Z}}\varphi + q\psi) = \mathcal{P}(\delta_{\mathbb{Z}}\varphi, \mathbb{Z}) < \infty.$$

由于 $q_0 \ge 0$，按照 [GJK22, Theorem 1.3]，关于 $\epsilon > 0$、k、$N \in \mathbb{N}$ 的证明中的论证，并且由引理 4.1 可知，包含在 L 中的每个基本区间都含有一个 F 的周期点，因此我们可以证明 $\dim_H (T^+(F_{\mathbb{Z}}) \cap L) \le \delta_{\mathbb{Z}}$。回顾一下，对于 $x \in \mathrm{Per}_n(F_0) \cap L$，存在唯一的$\omega(x,n) \in I^n$，使得 $x = \pi(\omega(x,n))$。因此，

$$\sum_{n \ge N} \sum_{x \in \mathfrak{Per}_n(F_0) \cap L, S_n\psi(x) > k} \left| J_{\omega(x,n)} \right|^{\delta_{\mathbb{Z}}+\epsilon} \le \sum_{n \ge N} \sum_{x \in \mathfrak{Per}_n(F_0)} \exp(S_n((\delta_{\mathbb{Z}} + \epsilon)\varphi + q_0\psi)(x)) < \infty$$

这证明了 $\dim_H (T^+(F_{\mathbb{Z}}) \cap L) \le \delta_{\mathbb{Z}}$。最后，由于 $T^+(F_{\mathbb{Z}}) \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_{\mathbb{Z}}^m (T^+(F_{\mathbb{Z}}) \cap L)$，且 $F_{\mathbb{Z}}$ 的各分支均为 Lipschitz 映射，由豪斯多夫维数的可数稳定性可知，结论 $\dim_H T^+(F_{\mathbb{Z}}) \le \delta_{\mathbb{Z}}$ 成立。

对于每个$n \in \mathbb{N}$，我们定义 $\delta_{\mathbb{Z}}^n$ 限制映射 $(F_0)_{I \cap \{0,\dots,n\}}$ 在 $\Delta_{I \cap \{0,\dots,n\}}$上的限制。利用穷尽原理、引理 4.5、定理 4.13 和引理 4.7可知，当$n \to \infty$时，$\delta_{\mathbb{Z}}^n \to \delta_{\mathbb{Z}}$。

根据 [GJK22，定理 1.3]，对于每个$n \in \mathbb{N}$，我们有 $\dim_H T^+(F_{\mathbb{Z}}) \ge \delta_{\mathbb{Z}}^n$，从而完成证明。□

定理 *2.6* 的证明。利用定理 4.13，我们有 $\mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N}) = \inf_{q \le 0} \mathcal{P}(s\varphi + q\psi)$。因此，由引理 4.7可得

$$\delta_{\mathbb{N}} = \inf \left\{ s > 0 : \inf_{q \le 0} \mathcal{P}(s\varphi + q\psi) \le 0 \right\} = \inf_{q \le 0} \inf \{ s \ge 0 : \mathcal{P}(s\varphi + q\psi) \le 0 \}$$

由引理 4.8，联系临界指数的公式随即得到。

现在我们转而证明三分法。若 $\alpha_{\max} > 0$，则由定理 2.4可得 $\delta_{\mathbb{Z}} < \delta_0$。由遍历定理，我们有 $\mu_{\delta_0\varphi}(T^+(F_{\mathbb{N}})) = 1$。若 $\alpha_{\max} < 0$，由第一部分可得 $\delta_{\mathbb{N}} = \delta_0$。容易看出，在这种情况下，$\mu^{\delta_0\varphi}(R(F_{\mathbb{N}})) = 1$，且 $\mu_{\delta_0\varphi}(T^+(F_{\mathbb{N}})) = 0$。若 $\alpha_{\max} = 0$，则$\delta_{\mathbb{Z}} = \delta_0$由定理 2.4可得。显然，根据重对数律，我们有 $\mu^{\delta_0\varphi}(R(F_{\mathbb{N}})) = 1$，且 $\mu_{\delta_0\varphi}(T^+(F_{\mathbb{N}})) = 0$。□

4.5. **二阶相变**。我们以讨论反射系统中自然出现的相变现象来结束本节。

定理 2.7 的证明。首先注意，根据我们的假设，对所有 $s > s_1$ 和 $q < q_0$，都有 $p(s,q) := \mathcal{P}(s\varphi + q\psi) < \infty$。因此，利用 p 的凸性可知，p 在 $\mathbb{R}^2$ 中 $(s_0, 0)$ 的某个邻域内有限，进而在该邻域内，$(s,q) \mapsto \int \psi \, d\mu_{s\varphi+q\psi} = \frac{\partial}{\partial q} p(s,q)$ 也有限且实解析，并满足 $\frac{\partial}{\partial q} p(s,q)|_{(s_0,0)} = 0$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial q^2} p(s,q)|_{(s_0,0)} = \mathrm{cov}_{s_0\varphi}(\psi,\psi)$ [MU03，命题 2.6.13 和 2.6.14]。我们的基本假设 $\psi < 0 < \psi$ 蕴含 $\mathrm{cov}_{s_0\varphi}(\psi,\psi) > 0$。因此，由隐函数定理，存在 s_0 的一个邻域 U，以及 U 上的一个实解析函数 q，使得 $q(s_0) = 0$，

$$\frac{\partial}{\partial q} p(s,q)|_{(s,q(s))} = \int \psi \, d\mu_{s\varphi+q(s)\psi} = 0, \text{ and}$$

$$q'(s) = -\frac{\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial q} p(s,q)|_{(s,q(s))}}{\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial q} p(s,q)|_{(s,q(s))}} = -\frac{\mathrm{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\psi)}{\mathrm{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\psi,\psi)}.$$

由凸性以及 $\overset{\partial}{\partial} {}_q p(s,q)|_{(s,q(s))} = 0$这一事实可知， $\mathcal{P}(s\varphi + q(s)\psi) = \min_{q\in\mathbb{R}} \mathcal{P}(s\varphi + q\psi)$, 其中 $s \in U$。根据推论 4.15 和定理 4.6，对于所有 $s \in U$，因此有

$$\mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N}) = \inf_{q\le 0} \mathcal{P}(s\varphi + q\psi) = \begin{cases} \mathcal{P}(s\varphi + q(s)\psi), & q(s) \le 0, \\ \mathcal{P}(s\varphi), & q(s) > 0. \end{cases}$$

$s \mapsto$ 的一阶导数和二阶导数$p(s,q(s))$ 分别为

$$\frac{\partial}{\partial s} p(s, q(s)) = \frac{\partial}{\partial s} p(s,q)|_{(s,q(s))} + q'(s) \underbrace{\frac{\partial}{\partial q} p(s,q)|_{(s,q(s))}}_{=0} = \frac{\partial}{\partial s} p(s,q)|_{(s,q(s))} \qquad \text{and}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} p(s, q(s)) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s} p(s,q)|_{(s,q(s))} + q'(s)\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial q} p(s,q)|_{(s,q(s))} \\ &= \operatorname{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\varphi) - \frac{\left(\operatorname{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\psi)\right)^2}{\operatorname{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\psi,\psi)}. \end{aligned}$$

首先假设 $\operatorname{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\psi) > 0$。那么 $q'(s_0) < 0$，且$s \mapsto \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})$ 在s_0 处的左、右单侧一阶导数分别为

$$\lim_{t\nearrow s_0} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})|_{s=t} = \frac{\partial}{\partial s} p(s,0)|_{s=s_0} = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu_{s_0\varphi},$$

$$\lim_{t\searrow s_0} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})|_{s=t} = \frac{\partial}{\partial s} p(s,q(s))|_{s=s_0} = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu_{s_0\varphi},$$

且二者相等，而单侧二阶导数则为

$$\lim_{t\nearrow s_0} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})|_{s=t} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} p(s,0)|_{s=s_0} = \operatorname{cov}_{s_0\varphi}(\varphi,\varphi),$$

$$\lim_{t\searrow s_0} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})|_{s=t} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} p(s,q(s))|_{s=s_0} = \operatorname{cov}_{s_0\varphi}(\varphi,\varphi) - \frac{\left(\operatorname{cov}_{s_0\varphi}(\varphi,\psi)\right)^2}{\operatorname{cov}_{s_0\varphi}(\psi,\psi)}.$$

我们得出，$s \mapsto \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})$ 在s_0, 处连续可微，但在s_0处不二次可微。$\operatorname{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\psi) < 0$ 的情形类似。若 $\operatorname{cov}_{s\varphi+q(s)\psi}(\varphi,\psi) = 0$，则$s \mapsto \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})$ 在s_0 处二次可微，因为

$$\lim_{t\nearrow s_0} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})|_{s=t} = \operatorname{cov}_{s_0\varphi}(\varphi,\varphi) = \lim_{t\searrow s_0} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{P}(s\varphi, \mathbb{N})|_{s=t}. \qquad \square$$

参考文献

[AKS82] V. V. Anshelevich, K. M. Khanin, and Y. G. Sinaĭ. 随机环境中的对称随机游走。《数学物理通讯》85.3（1982），449–470。A. Avila and M. [AL08] Lyubich. 费根鲍姆朱利亚集的豪斯多夫维数与共形测度。《美国数学会杂志》21.2（2008），305–363。doi: 10. 1090/S0894-0347-07-00583-8.[BJ97] C. J. Bishop and P. W. Jones. 豪斯多夫维数与克莱因群。《数学学报》179.1（1997），1–39。doi: 10.1007/BF02392718.[BT12] H. Bruin and M. Todd. 无限分支区间映射的暂态性与热力学形式。《伦敦数学会杂志》（2）86.1（2012），171–194。doi: 10.1112/jlms/jdr081.[BT15] H. Bruin and M. Todd. 野吸引子与热力学形式。《数学月刊》178.1（2015），39–83。doi: 10.1007/s00605-015-0747-2.[CLL24] F. Comets, O. Loukianov, and D. Loukianova. Sinaĭ 随机游走中从环境视角观察到的环境之极限。《随机过程及其应用》168（2024），论文编号 104266，17 页。doi: 10.1016/j.spa.2023.104266.

[DG18] D. Dolgopyat and I. Goldsheid. 带有有界势的条带上常返随机游走的中心极限定理。《非线性》31.7（2018），3381–3412。doi: 10.1088/1361-6544/aab89b.[DY23] M. Dussaule and W. Yang. 相对双曲群调和测度的豪斯多夫维数。《美国数学会汇刊》B辑 10（2023），766–806。doi: 10.1090/btran/145.[GJK22] M. Gr¨oger, J. Jaerisch, and M. Kesseb¨ohmer. 实数轴上暂态动力学的热力学形式。《非线性》35.2（2022），1093–1118。doi: 10.1088/1361-6544/ac45ea.[IJT17] G. Iommi, T. Jordan, and M. Todd. 暂态性与多重分形分析。《庞加莱研究所年鉴：非线性分析》34.2（2017），407–421。doi: 10.1016/j. anihpc.2015.12.007.[KM23] D. Kleinbock and S. Mirzadeh. 关于格空间对角流的维数下降猜想。《数学进展》425（2023），论文编号 109058, 46 页。doi: 10.1016/j.aim.2023.109058.[KMS12] M. Kesseb¨ohmer, S. Munday, and B. O. Stratmann. α-Farey 与 α-L¨uroth 系统的强更新定理与李雅普诺夫谱。《遍历理论与动力系统》32.3（2012），989–1017。[KU07] M. Kesseb¨ohmer and M. Urba´nski. 共形无限图定向马尔可夫系统的高维多重分形值集。《非线性》20.8（2007），1969–1985。doi: 10.1088/0951-7715/20/8/009.[Lal95] S. P. Lalley. 半直线上随机游走的返回概率。《理论概率学杂志》8.3（1995），571–599。doi: 10.1007/BF02218045.[LL25] F. Ledrappier and P. Lessa. 阿诺索夫表示的维数间隙与变分原理。《巴黎综合理工学院数学杂志》12（2025），71–100。doi: 10.5802/jep. 285.[MS14] C. G. Moreira and D. Smania. 随机游走的度量稳定性（及其在重整化理论中的应用）。《复动力系统前沿》。第 51 卷。普林斯顿数学丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2014 年，第 261–322 页。[MU01] R. D. Mauldin and M. Urba´nski. 无限字母表上的符号空间中的吉布斯态。《以色列数学杂志》125（2001），93–130。doi: 10.1007/BF02773377.[MU03] R. D. Mauldin and M. Urba´nski. 图定向马尔可夫系统。第 148 卷。剑桥数学专著丛书。极限集的几何与动力学。剑桥：剑桥大学出版社，2003 年，第 xii+281.[MU24] V. Mayer and M. Urba´nski. 整函数的双曲维数间隙。《美国数学会会刊》152.04（2024），1599–1611。doi: 10 . 1090 /proc / 16613.[Rus23] T. Rush. 具有可数多个分支的马尔可夫区间映射的多重分形分析。《非线性》36.4（2023），2038–2073。[Sar99] O. M. Sarig. 可数马尔可夫移位的热力学形式。《遍历理论与动力系统》19.6（1999），1565–1593。doi: 10.1017/S014338579914

6820.

[Shi98] M. Shishikura。《曼德博集合边界与朱利亚集的豪斯多夫维数》。《数学年刊》（第2辑）147.2（1998），225–267。doi：10.2307/121009。[Sin82] Y. G. Sinaĭ。《随机环境中一维随机游走的极限行为》。《概率论与应用》27.2（1982），247–258。[SV97] B. Stratmann 和 R. Vogt。《耗散集的分形维数》。《非线性》10.2（1997），565–577。doi：10.1088/0951-7715/10/2/014。[Woe00] W. Woess。《无限图与群上的随机游走》。第138卷。《剑桥数学论丛》。剑桥大学出版社，剑桥，2000年，第xii+334页。doi：10.1017/CBO9780511470967。