arXiv:2601.05700v1 [math.AP] 9 Jan 2026

通过极小极大方法证明非平凡的 n-调和映射的存在性

DORIAN MARTINO、KATARZYNA MAZOWIECKA 和 ARMIN SCHIKORRA

Abstract. 对于任意 $n \geq 3$，以及满足 $\pi_{n+k}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$（其中某个$k \geq 0$）的任意闭流形 $\mathcal{N}$，我们证明了从 $\mathbb{S}^n$ 到 $\mathcal{N}$ 的非平凡 n-调和映射的存在性。当$k \geq 1$时，这些映射自然表现为 $p > n$ 的 p- 调和映射的泡沫极限；这些映射是通过在极限 $p \to n^+$ 下的极小极大构造得到的。

1. Introduction

本文研究从球面 $\mathbb{S}^n$ 到无边界光滑紧流形 $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$ 的非平凡 n-调和映射的存在性。这些映射是 n-能量的临界点

$$\mathcal{E}_n(u) := \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla u|^n, \quad u \colon \mathbb{S}^n \to \mathcal{N},$$

即，以下方程的分布解

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{n-2}\nabla u) = |\nabla u|^{n-2} A(u)[\nabla u, \nabla u]. \tag{1.1}$$

其中， A 表示第二基本形式。我们的主要结果如下。

定理 1.1。 设 $n \geq 3$。如果 $\pi_{n+k}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ 对于某个 $k \geq 0$成立，那么存在一个非平凡的、$C^{1,\alpha}$-正则的 n-调和映射，从 $\mathbb{S}^n$ 映入 $\mathcal{N}$，其中 α 是一个较小的正数。

在全文中，我们假设 $n \geq 3$。二维情形只需稍作修改即可采用相同的论证处理；由于调和映射的相应结果已经众所周知（见 [9] 及其中的参考文献），我们不在此处赘述。

本定理中的存在性结论符合调和映射理论中的一般预期。在 $k = 0$ 的情形下，也就是说，当 $\pi_n(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ 时，该结论可由经典的 Sacks–Uhlenbeck 理论 [18]，得出，因为 $\pi_n(\mathcal{N})$ 是由同伦类生成的，而对这些同伦类而言，n-能量存在极小化子。 n-调和映射的相应结果由 [17, 8] 证明。另见 [13]，其中给出了分数阶框架下相关的极小化结果。

2010 数学学科分类。58E20, 35B65, 35J60, 35S05。

当 $\pi_n(\mathcal{N}) = \{0\}$，但 $\pi_{n+k}(\mathcal{N}) \ni \alpha \neq 0$ 时，自然会通过如下形式的极小极大构造来寻求 n-能量的临界点：

$$\inf_{\Phi\in\alpha} \max_{t\in[-1,1]^k} \mathcal{E}_n\big(\Phi(\cdot,t)\big).$$

这是在与球面 $\mathbb{S}^2$微分同胚的流形上构造非平凡闭测地线的 Birkhoff 的极小极大构造的等价方法。然而，在临界指数 n 处直接实施这一策略，会因 $W^{1}\Subset^{n}$Palais–Smale 条件失效而受阻。

在近期的研究 [3], 中，研究者通过建立更精细的分析框架克服了这一困难，从而证明了定理 Theorem 1.1 在维数 $n = 3$下成立；对于球面或李群流形，该定理也适用于维数 $n \geq 4$。本文提出了一种替代方法，适用于所有维数 $n \geq 3$，以及任意光滑闭目标流形 $\mathcal{N}$。

出发点是经典的。对于 $p > n$，我们考虑扰动能量

$$\mathcal{E}_p(u) := \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla u|^p, \quad u\colon \mathbb{S}^n \to \mathcal{N}.$$

对于 $p > n$，该泛函满足 Palais–Smale 条件，因此可以构造相应欧拉–拉格朗日方程的非平凡临界点

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |\nabla u|^{p-2} A(u)[\nabla u, \nabla u]. \tag{1.2}$$

这些是通过极小极大方案获得的

$$\beta_p := \min_{\Phi\in\alpha} \max_{t\in[-1,1]^k} \mathcal{E}_p\big(\Phi(\cdot,t)\big).$$

若 $\liminf_{p\to n} \beta_p > 0$，定理 1.1 可由单泡紧性结果推出：对于任意序列 $p \to n^+$，$p > n$ 及其对应的任意一列 p-调和映射$u_p \in W^{1,\,p}(\mathbb{S}^n,\ \mathcal{N})$，取一个子列后，下列情形之一成立。要么 u_p在 $W^{1,\,n+\sigma}$ 中强收敛到某个 $\sigma > 0$，这意味着其极限是一个非平凡的 n-调和映射；要么至少存在一个非平凡气泡，经重缩放后，它是一个非平凡的n-调和映射。

提纲。由于情形 $k = 0$ 已知（例如参见 [20, 21] 或 [8, 定理 0]），我们将重点讨论情形 $k \geq 1$。也就是说，在本文余下部分中，我们假设 $\pi_{n+k}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$。在第 2 节中，我们证明 p-调和映射的极小极大构造及 $p > n$ 的有效性。第 3 节介绍本文的主要分析工具。我们将在均匀的 p-能量界下，证明 p-调和映射的 ε-正则性结果。我们不推导更高阶的二阶正则性，而是获得可微性方面的分数阶提升，证明解在局部属于 $W^{1+\delta,\,p}$，其中 $\delta > 0$。这种分数阶改进足以确保起泡分析所需的紧性。该论证依托于当代的 p-拉普拉斯算子正则性理论，并结合了 Iwaniec–Sbordone 风格的经典稳定性估计 [7], ，后者为某个 $\sigma > 0$ 提供了 $(n+\sigma)$-能量的一致控制。

最后，在第4 节中，我们结合前述结果证明主定理。利用分数阶正则性改进所提供的紧性以及单泡提取论证，我们证明存在一个非平凡的 n-调和映射。

致谢 。我们感谢 Simon Nowak 指出 [1]并与我们进行了有益的讨论 .
本项目由以下机构共同资助：(DM) 瑞士国家科学基金会，项目 SNF 200020 219429；(KM) 波兰国家学术交流局「波兰回归计划」资助，项目编号 BPN/PPO/2021/1/00019/U/00001；(KM) 波兰国家科学中心，项目编号 2023/51/D/ST1/02907；(AS) 美国国家科学基金会职业奖 DMS-2044898；(AS) 亚历山大·冯·洪堡研究员（2023–2025）。

记号。全文中， $B(x,\ r)$ 表示以 x 为中心、半径为 $r>0$ 的（开）球。当环境空间为 $\mathbb{R}^n$ 时，它表示欧几里得球；当环境空间为$\mathbb{S}^n$ 时，它表示测地球。其含义总是可由上下文明确。

2. Preliminaries: Existence of p-harmonic maps

设 $\alpha\in\pi_{n+k}(\mathcal{N})$ 非平凡。我们按照 $\partial[-1,1]^k$ 上通常的同一化将 $\mathbb{S}^{n+k}\simeq\mathbb{S}^n\times[-1,1]^k$ 视为，并考虑 $p>n$

$$\inf_{\Phi\in\alpha}\max_{t\in[-1,1]^k}\mathcal{E}_p(\Phi(\cdot,t))=\inf_{\Phi\in\alpha}\max_{t\in[-1,1]^k}\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla\Phi(x,t)|^p\,\mathrm{d}x=:\beta_p. \tag{2.1}$$

我们需要以下结果。

引理 2.1。 设 β_p 为 (2.1)中定义的值。则有

$$\liminf_{p\to n^+}\beta_p>0.$$

证明。 根据 Hölder 不等式，只需证明

$$|\mathbb{S}^n|^{1-\frac{p}{n}}(\beta_p)^{\frac{n}{p}}\geq\inf_{\Phi\in\alpha}\max_{t\in[-1,1]^k}\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla\Phi(x,t)|^n\,\mathrm{d}x>0.$$

反设，对于一个适当小的数 $\varepsilon>0$ （将在下文选取），存在一个光滑的 Φ: $\mathbb{S}^n\times[-1,1]^k\to\mathcal{N}$，使得我们有

$$\max_{t\in[-1,1]^k}\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla\Phi(x,t)|^n\,\mathrm{d}x<\varepsilon. \tag{2.2}$$

对于每个 $t\in[-1,1]^k$，令 $\Phi^h(\cdot,\ t)$ 表示 $\Phi(\cdot,\ t)$ 的调和延拓： $\mathbb{S}^n\to\mathcal{N}$ 到映射 $\Phi^h(\cdot,\ t)$: $B^{n+1}\to\mathbb{R}^N$。若 $P(x,\ \xi)=\frac{1-|x|^2}{\omega_n|x-\xi|^{n+1}}$是球 B^{n+1} 上的泊松核，则有

$$\Phi^h(x,t)=\int_{\mathbb{S}^n}P(x,\xi)\Phi(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi.$$

由于我们有 $\int_{\mathbb{S}^n} P(x,\ \xi)\,\mathrm{d}\xi = 1$，因此对任意 $\zeta \in \mathbb{S}^n$，以下结论成立

$$\operatorname{dist}\left(\Phi^h(x,t),\mathcal{N}\right) \le \left|\Phi^h(x,t) - \Phi(\zeta,t)\right| \le \int_{\mathbb{S}^n} P(x,\xi)\left|\Phi(\xi,t) - \Phi(\zeta,t)\right|\,\mathrm{d}\xi.$$

将两边乘以 $P(x,\zeta)$，并对 $\mathbb{S}^n$ 关于 ζ 积分，得到

$$\operatorname{dist}\left(\Phi^h(x,t),\mathcal{N}\right) \le \int_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} P(x,\xi)P(x,\zeta)\left|\Phi(\xi,t) - \Phi(\zeta,t)\right|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta. \tag{2.3}$$

若 $|x| \le \frac{1}{2}$，则对任意 $\xi \in \mathbb{S}^n$，有 $|x-\xi| \ge \frac{1}{2}$，因此成立

$$\int_{\mathbb{S}^n} |P(x,\xi)|^{n'}\,\mathrm{d}\xi \precsim \int_{\mathbb{S}^n}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n+1}}\right)^{n'}\,\mathrm{d}\xi \precsim 1.$$

因此，对于 $|x| \le \frac{1}{2}$，利用 H¨older 不等式和 Poincar´e 不等式可得

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}\left(\Phi^h(x,t),\mathcal{N}\right) &\le \|P(x,\cdot)\|^2_{L^{n'}(\mathbb{S}^n)}\left(\int_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n}\left|\Phi(\xi,t) - \Phi(\zeta,t)\right|^n\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\precsim \left(\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla\Phi(x,t)|^n\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{n}} \precsim \varepsilon^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

若 $|x| \ge \frac{1}{2}$，则令 $r = 1-|x|$ 和 $X = \frac{x}{|x|}$，并记

$$A(X,r,0) := B(X,r), \quad A(X,r,k) := B(X,2^k r)\setminus B(X,2^{k-1}r) \text{ for } k \ge 1.$$

记 $\theta = \operatorname{dist}_{\mathbb{S}^n}(\frac{x}{|x|},\xi)$。于是有

$$|x-\xi|^2 = |x|^2 + 1 - 2|x|\frac{x}{|x|}\cdot\xi = |x|^2 + 1 - 2|x|\cos\theta = (1-|x|)^2 + 2|x|(1-\cos\theta).$$

对于每个 $\theta \in [0,1]$，我们都有基本不等式 $\frac{2}{\pi^2}\theta^2 \le 1 - \cos\theta$，因此

$$|x-\xi|^2 \gtrsim (1-|x|)^2 + |x|\theta^2 \gtrsim (1-|x|)^2 + \theta^2.$$

因此，对于 $\xi \in A(X,\ r,\ k)$，我们有 $\theta \approx 2^k r$ 且 $|x-\xi| \gtrsim 2^k r$。因此，由（2.3）可得$|x| \ge \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}\left(\Phi^h(x,t),\mathcal{N}\right) &\precsim \sum_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\sum_{\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\int_{A(X,k,r)}\int_{A(X,\ell,r)}\left|\Phi(\xi,t)-\Phi(\zeta,t)\right|\frac{r}{(2^k r)^{n+1}}\frac{r}{(2^\ell r)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta\\ &\precsim \sum_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\sum_{\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\}} 2^{-k}2^{-\ell}\fint_{A(X,k,r)}\fint_{A(X,\ell,r)}\left|\Phi(\xi,t)-\Phi(\zeta,t)\right|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta\\ &\precsim \sum_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\sum_{\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\}} 2^{-k}2^{-\ell}\left(\fint_{A(X,k,r)}\fint_{A(X,\ell,r)}\left|\Phi(\xi,t)-\Phi(\zeta,t)\right|^n\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\precsim \sum_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\sum_{\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\}} 2^{-k}2^{-\ell}\|\nabla\Phi(\cdot,t)\|_{L^n(\mathbb{S}^n)} \precsim \varepsilon^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

因此，$\left\|\operatorname{dist}\left(\Phi^h,\ \mathcal{N}\right)\right\|_{L^\infty\ (B^{n+1}\times[-1,1]^k)} \precsim \varepsilon^{1/n}$。

令 $\pi_{\mathcal{N}}\colon B_\delta(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}$ 表示最近点投影。接下来定义

$$\Psi := \pi_{\mathcal{N}} \circ \Phi^h \colon B^{n+1} \times [-1,1]^k \to \mathcal{N}.$$

根据构造，Ψ 是连续的，并满足 $\Psi|_{\mathbb{S}^n\times[-1,1]^k} = \Phi$. 因此，我们有 $\left[\Psi|_{\mathbb{S}^n\times[-1,1]^k}\right] = [\Phi]$ 属于 $\pi_{k+n}(\mathcal{N})$。另一方面，映射 $\Psi|_{\mathbb{S}^n\times[-1,1]^k}$ 是可缩的，因此 $\left[\Psi|_{\mathbb{S}^n\times[-1,1]^k}\right] = [\Phi] = 0$。这与 $\alpha = [\Phi]$ 是非平凡映射的假设相矛盾。□

由于 $p > n$ 泛函 $\mathcal{E}_p$ 满足 Palais–Smale 条件。根据引理 2.1，我们可以应用山路引理（例如参见 [19, 定理 6.1]），从而得到一个实现极小极大值 β_p 的非平凡临界点。由于 $p > n$，所得的 p-调和映射 u_p 通过 Morrey–Sobolev 嵌入是 $H^{\ddot{}}older$ 连续的。此外，按照 [5, 第 3] 节中的论证（另见 [11, 定理 1.3]），可得 $u \in C^{1,\alpha}$ 其中某个 $\alpha > 0$ 成立。由此我们建立了以下结果。

定理 2.2。若 $\pi_{n+k}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ 对于某个 $k \geq 1$，则对于任意 $p > n$，都存在一个 p-调和映射 $u_p \in W^{1,p} \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^n, \mathcal{N})$，即方程 (1.2) 的一个解，并且有

$$\int_{\mathbb{S}^n} |\nabla u_p|^p = \beta_p = \min_{\Phi\in\alpha} \max_{t\in[-1,1]^k} \mathcal{E}_p\big(\Phi(\cdot,t)\big).$$

作为推论，利用标准的覆盖论证（例如参见 [18, 命题 4.3 和定理4。4], ），我们得到 u_p 当 $p \to n^+$ 时其极限行为的以下几种情形。

推论 2.3。固定 $\varepsilon > 0$。若 $\pi_{n+k}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ 对于某个 $k \geq 1$，则存在一个序列 $p_j \xrightarrow{j\to\infty} n^+$ 以及一个由 p_j-调和映射 $u \in W^{1,p_j} \cap C^{1,\alpha_j}(\mathbb{S}^n, \mathcal{N})$ 构成的序列，即方程 (1.2) 的解，满足

$$\liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla u_{p_j}|^{p_j} > 0,$$

使得以下条件之一成立。

- （无泡）对于所有 $x \in \mathbb{S}^n$，都存在 $\rho_x > 0$ 使得

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{B(x,\rho_x)} |\nabla u_{p_j}|^n < \varepsilon^n.$$

- （至少有一个孤立泡）存在至少一个 $\bar{x} \in \mathbb{S}^n$ 和一个半径 $R > 0$，满足以下性质

$$\forall \rho > 0, \qquad \liminf_{j\to\infty} \int_{B(\bar{x},\rho)} |\nabla u_{p_j}|^n \geq \varepsilon^n,$$

并且对于任意 $x \in \mathbb{S}^n$, $0 <$ 距离$_{\mathbb{S}^n}(x,\bar{x}) < R$，存在某个 $\rho_x > 0$，使得

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{B(x,\rho_x)} |\nabla u_{p_j}|^n \leq \varepsilon^n.$$

3. An ε-regularity Theorem

本文的主要技术要点是一个 ε-正则性定理：它指出，存在一个阈值 $\varepsilon > 0$，使得对于任意一个（测地）球 $B(x, \rho)$，只要 n-能量低于ε，我们就有强收敛（除去一个子列）。

定理 3.1. 存在一个 $\varepsilon > 0$，使得对于每个 $p_0 > n$，都存在 $p_1 > n$ 和 $t_0 > 0$，满足对所有 $p \in [n, p_1]$ 以及任意 $\Lambda > 0$，下述结论成立。

假设 $u \in W^{1,p_0}(B(x_0, r), \mathcal{N})$ 是一个 p-调和映射，并且满足

$$\|\nabla u\|_{L^n(B(x_0,r))} < \varepsilon \quad \text{and} \quad \|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,r))} \le \Lambda.$$

那么有

$$[\nabla u]_{W^{t_0,p}(B(x_0,r/2))} \le C(n, \Lambda, r).$$

我们先给出 Iwaniec–Sbordone 稳定性结果的如下标准推论 [7,定理 4] 对于 p-拉普拉斯方程。

引理 3.2 (Iwaniec–Sbordone 先验估计)。设 $n \ge 3$，固定一个紧流形$\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^N$，并令 A 为其第二基本形式。存在 $\varepsilon > 0$，使得对任意$p_0 > n$，都存在 $p_1 \in (n, p_0)$ 以及 $\sigma > 0$，使得当 $p \in [n, p_1]$时，下述结论成立。

假设 $u \in W^{1,p_0}(B(x_0, 10r), \mathcal{N})$ 满足

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |\nabla u|^{p-2} A(u)[\nabla u, \nabla u] \quad \text{in } B(x_0, 10r), \tag{3.1}$$

and

$$\|\nabla u\|_{L^n(B(x_0,10r))} < \varepsilon. \tag{3.2}$$

则有

$$\|\nabla u\|_{L^{n+\sigma}(B(x_0,r))} \le C(\mathcal{N}, n) \left(1 + \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(B(x_0,10r))}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

证明。为便于表述，我们假设 $B(x_0, 10r)$ 是一个欧几里得球$B(0, 10)$[1]。

首先进行局部化。取 $\tilde{\eta} \in C_c^\infty(B(0, 2))$，使得 $\eta \equiv 1$ 属于 $B(0, 1)$，并令

$$\tilde{u} := \eta(u - (u)_{B(0,1)}).$$

我们将（3.1）与 η^{p-1} 相乘，得到一个在 $\mathbb{R}^n$ 上成立的方程组

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\eta^{p-1} = |\nabla u|^{p-2} A(u)[\nabla u, \nabla u]\eta^{p-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

[1]对于 $\mathbb{S}^n$中的测地球，可使用正规坐标；此时 n-拉普拉斯算子具有光滑系数，所有论证和估计均可原样沿用。

因此，有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\eta^{p-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= |\nabla u|^{p-2}A(u)[\nabla u,\nabla u]\eta^{p-1} + (p-1)\eta^{p-2}\nabla\eta|\nabla u|^{p-2}\nabla u \\ &= |\nabla\tilde{u}|^{p-2}A(u)[\nabla\tilde{u},\nabla u] + g,\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中映射 g 满足以下估计

$$\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \precsim \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(B(0,2))}, \tag{3.4}$$

其中常数取决于 $\|u\|_{L^\infty}$，也就是说，取决于 $\mathcal{N}$。

我们定义以下量

$$F := |\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u} - \eta^{p-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u.$$

由于 $p>2$，映射 F 满足以下估计

$$\|F\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^n)} \precsim \|\nabla u\|^{p-2}_{L^p(B(0,2))}, \tag{3.5}$$

其中常数取决于 $\|u\|_{L^\infty}$，也就是说，取决于 $\mathcal{N}$。

将 F 代入（3.3），得到

$$\operatorname{div}(|\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u}) = |\nabla\tilde{u}|^{p-2}A(u)[\nabla\tilde{u},\nabla u] + g + \operatorname{div}F. \tag{3.6}$$

由假设 $\tilde{u}\in W^{1,p_0}(B(\mathbf{0},\mathbf{3}))$，则存在某个 $0<\sigma\le p_0-p$ 满足 $\sigma<1$，我们可以通过霍奇分解找到（参见 [6, 定理 8.1]和 [7, 定理 4]） $\varphi\in W^{1,\frac{p+\sigma}{1+\sigma}}_0(B(\mathbf{0},\mathbf{3}))$ 和 $B\in\overline{L}^{\frac{p+\sigma}{1+\sigma}}(B(\mathbf{0},\mathbf{3}))$，使得

$$|\nabla\tilde{u}|^{\sigma}\nabla\tilde{u} = \nabla\varphi + B \quad \text{in } B(0,3),$$

满足以下估计

$$\|\nabla\varphi\|_{L^{\frac{p+\sigma}{1+\sigma}}(B(0,3))} \precsim \|\nabla\tilde{u}\|^{1+\sigma}_{L^{p+\sigma}(B(0,3))} \tag{3.7}$$

and

$$\|B\|_{L^{\frac{p+\sigma}{1+\sigma}}(B(0,3))} \precsim \sigma\|\nabla\tilde{u}\|^{1+\sigma}_{L^{p+\sigma}(B(0,3))}. \tag{3.8}$$

不等式（3.7）和（3.8）中的常数与 p 和 σ无关，前提是 $p\in[n,n+1]$ 且 $\sigma\in[0,1]$。

由于 supp $\tilde{u}\subset B(0,3)$，我们有

$$\begin{aligned}&\|\nabla\tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{B(0,3)}|\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla\varphi + \int_{B(0,3)}|\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u}\cdot B \\ &\le \left|\int_{B(0,3)}|\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla\varphi\right| + \|\nabla\tilde{u}\|^{p-1}_{L^{p+\sigma}(B(0,3))}\|B\|_{L^{\frac{p+\sigma}{1+\sigma}}(B(0,3))} \\ &\le C\left|\int_{B(0,3)}|\nabla\tilde{u}|^{p-2}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla\varphi\right| + C\sigma\|\nabla\tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

常数 C 与 σ无关。因此，对于 $\sigma = (2C)^{-1}$，我们可以将右侧的第二项吸收到左侧，从而得到

$$\|\nabla \tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left| \int_{B(0,3)} |\nabla \tilde{u}|^{p-2} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi \right|, \tag{3.9}$$

常数取决于 n，但对 $p \in [n, n+1]$ 一致。对于固定且不再改变的 $\sigma = (2C)^{-1}$，令 $p_1 \in (n, n+1)$ 满足

$$\frac{p_1 + \sigma}{1+\sigma} < n.$$

这是可行的，因为 $n \geq 2$。于是我们得到

$$\sup_{p \in [n, p_1]} \frac{p+\sigma}{1+\sigma} < n. \tag{3.10}$$

继续使用（3.9）（其中常数与 $p \in [n, p_1]$ 无关），利用（3.6），我们得到

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \left| \int_{B(0,3)} |\nabla \tilde{u}|^{p-2} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi \right| \\ &\lesssim \int_{B(0,3)} |\nabla u| |\nabla \tilde{u}|^{p-1} |\varphi| + \int_{B(0,3)} |g| |\varphi| + \int_{B(0,3)} |F| |\nabla \varphi| . \end{aligned} \tag{3.11}$$

对第一项应用 H¨older 不等式，指数取为

$$\frac{1}{n} + \frac{p-1}{p+\sigma} + \frac{1}{q} = 1,$$

其中

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{p-1}{p+\sigma} - \frac{1}{n} = \frac{1+\sigma}{p+\sigma} - \frac{1}{n} \leq 1.$$

因此，我们得到 $q = \left(\frac{p+\sigma}{1+\sigma}\right)^*$。由 Sobolev–Poincar´e 不等式（由于（ p 3.10）成立，我们可以使用与 无关的常数）以及（3.7），可得

$$\begin{aligned} \int_{B(0,3)} |\nabla u| |\nabla \tilde{u}|^{p-1} |\varphi| &\leq \|\nabla u\|_{L^n(B(0,3))} \|\nabla \tilde{u}\|^{p-1}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^{\left(\frac{p+\sigma}{1+\sigma}\right)^*}(B(0,3))} \\ &\lesssim \|\nabla u\|_{L^n(B(0,3))} \|\nabla \tilde{u}\|^{p-1}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)} \|\nabla \varphi\|_{L^{\frac{p+\sigma}{1+\sigma}}(B(0,3))} \\ &\lesssim \|\nabla u\|_{L^n(B(0,3))} \|\nabla \tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

我们还有 $\left(\frac{p+\sigma}{1+\sigma}\right)^* \geq p$。事实上，该不等式等价于 $\frac{p+\sigma}{1+\sigma} > \frac{np}{n+p}$，而后者又等价于

$$p^2 + \sigma(n - (n-1)p) > 0.$$

由于 $p \geq n \geq 2$，我们有 $n - (n-1)p \leq 0$，并利用 $0 < \sigma < 1$，可得 n

$$p^2 + \sigma(n - (n-1)p) \geq p^2 + (n - (n-1)p) = p(p-n) + n + p > 0.$$

这就证明了所断言的不等式 $\left(\frac{p+\sigma}{1+\sigma}\right)^* \geq p$。

因此，我们利用（3.7）再结合（3.4）可得

$$\begin{aligned}\int_{B(0,3)} |g|\,|\varphi| &\le \|g\|_{L^{p'}(B(0,3))}\,\|\varphi\|_{L^{p}(B(0,3))}\\ &\precsim \|g\|_{L^{p'}(B(0,3))}\,\|\nabla\varphi\|_{L^{\frac{p+\sigma}{1+\sigma}}(B(0,3))}\\ &\precsim \|\nabla u\|^{p-1}_{L^{p}(B(0,2))}\|\nabla\tilde{u}\|^{1+\sigma}_{L^{p+\sigma}(B(0,3))}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

为了估计（3.11）中的最后一项，注意到由于 $\sigma<1$，我们有 $\frac{p}{2}\le\frac{p+\sigma}{1+\sigma}$。因此，根据杨氏不等式 H¨older inequality,（3.7）和（3.5，可得

$$\int_{B(0,3)} |F|\,|\nabla\varphi| \le \|F\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(B(0,3))}\|\nabla\varphi\|_{L^{\frac{p}{2}}(B(0,3))} \precsim \|\nabla u\|^{p-2}_{L^{p}(B(0,2))}\|\nabla\tilde{u}\|^{1+\sigma}_{L^{p+\sigma}(B(0,3))}. \tag{3.14}$$

将（3.11）与（3.12）、（3.13）和（3.14）结合，可得

$$\|\nabla\tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)} \precsim \|\nabla u\|_{L^{n}(B(0,3))}\|\nabla\tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)} + \left(\|\nabla u\|^{p-1}_{L^{p}(B(0,3))}+\|\nabla u\|^{p-2}_{L^{p}(B(0,3))}\right)\|\nabla\tilde{u}\|^{1+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)}.$$

在小量假设（3.2）以及指数 $\frac{1+\sigma}{p+\sigma}+\frac{p-1}{p+\sigma}=1$满足 $\delta>0$的杨氏不等式下，对所有 $p\in[n,p_1]$

$$\begin{aligned}\|\nabla\tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)} &\le C(n,\mathcal{N})\left(\varepsilon\|\nabla\tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)}+\delta\|\nabla\tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)}\right)\\ &\quad + C(\delta,n,\mathcal{N})\left(\|\nabla u\|^{p-1}_{L^{p}(B(0,3))}+\|\nabla u\|^{p-2}_{L^{p}(B(0,3))}\right)^{\frac{p+\sigma}{p-1}}.\end{aligned}$$

现在，由于$\frac{p+\sigma}{p-1}\le\frac{n+1}{n-1}$对于 $p\in[n,p_1]$，只要 δ 和 ε 足够小，我们就得到

$$\|\nabla\tilde{u}\|^{p+\sigma}_{L^{p+\sigma}(\mathbb{R}^n)} \precsim_{\delta,n} \left(1+\|\nabla u\|^{p-1}_{L^{p}(B(0,3))}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

特别地，由于 $\eta\equiv1$ 在 $B(0,1)$ 中，

$$\|\nabla u\|^{n+\sigma}_{L^{n+\sigma}(B(0,1))} \precsim_{\delta,n} \left(1+\|\nabla u\|^{p-1}_{L^{p}(B(0,3))}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

□

我们将引理3.2 与以下在 [1, 定理 4.1]中得到的结果结合起来。关于任意维数和系统，见 [1, 注 4.2] 。

定理 3.3。 设 $n\ge2$。存在 $s_0=s_0(n)>0$ 使得以下结论成立。设$p\in[n,n+1]$, $f\in L^1_{loc}(B(0,2))$和 $u\in W^{1,p}(B(0,2);\mathbb{R}^N)$是以下方程的一个解

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=f \quad in\ B(0,2)\subset\mathbb{R}^n.$$

那么，对于任意 $s\in(0,s_0]$ 和满足 $n+\frac{np'}{1-s}(p'-1)\ge c_0$的 $c_0>1$，存在一个常数 $C=C(n,s,c_0)>0$，使得下述结论成立

$$\left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right]_{W^{s,p'}(B(0,1))} \le C\,\|f\|_{L^{\frac{np'}{n+(1-s)p'}}(B(0,2))} + C\,\|\nabla u\|^{p-1}_{L^{p}(B(0,2))}. \tag{3.15}$$

在上述结果中，常数 s_0 和 C 对 $p \in [n, n+1]$ 的依赖性可以选为连续的，这可通过参照 [1, 定理 41], 的证明，并考虑[1, 注 42]得到。此外，不等式（3.15）在应用 Sobolev 嵌入后对应于不等式 [1, (4.2)] 。现在，定理 3.1 可由定理 3.3 结合引理 3.2得出。

定理 *3.1* 的证明。 同样，为了简化表述，我们可以假设 $B(x_0, r)$ 是一个欧几里得球 $B(0,100)$.

同样，与第 2 节一样，由于定理陈述中的指数 p_0 满足$p_0 > n$，Morrey 嵌入结合 [5, 节 3]（或 [11, 定理 1.3]）可得$u \in C^1$，$^{\alpha}$ 对某个 $\alpha > 0$成立，特别地 $\nabla u \in L^\infty$。因此，引理 3.2 中出现的参数 p_0可以任意选取为大于 n；例如，在引理 3.2 中取 $p_0 = n+1$，即可得到 $\sigma \in (0, 1)$ 和 $p_1 \in (n, n+1)$ 的存在，使得若$p \in [n, p_1]$，则有

$$\|\nabla u\|_{L^{n+\sigma}(B(0,20))} \precsim_\Lambda 1.$$

适当缩小 p_1 后，我们还可进一步假设，对于所有 ~~$p \in [n, p_1]$~~，都有 $\frac{n+\sigma}{p} > \frac{2n+\sigma}{2n} > 1$ 。在此选择下， u 满足

$$\operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) = f,$$

其中

$$\|f\|_{L^{\frac{n+\sigma}{p}}(B(0,20))} \precsim \|\nabla u\|^p_{L^{n+\sigma}(B(0,20))} \precsim_\Lambda 1. \tag{3.16}$$

设 $s_0 > 0$ 由定理3.3给出。若有必要，缩小 s_0 后，我们可以假设

$$0 < s \le s_0 \quad \Longrightarrow \quad s < \frac{n\sigma}{2n+\sigma}.$$

固定这样一个 $s_\circ$ 那么，对于所有 $p \in [n, p_1]$,

$$\frac{n}{n-s} \le \frac{2n+\sigma}{2n}, \qquad \text{and} \qquad \frac{np'}{n+(1-s)p'} \le \frac{2n+\sigma}{2n} < \frac{n+\sigma}{p}.$$

More此外，进一步适当缩小 p_1 ，使得 $p_1 < \frac{n}{1-s}$，即可确保—

$$\frac{np'}{n+(1-s)p'} > 1 \qquad \text{for all } p \in [n, p_1].$$

因此，我们先应用（3.15），再应用 H¨older 不等式，最后应用（3.16），从而得到

$$\big[\,|\nabla u|^{p-2}\nabla u\,\big]_{W^{s,p'}(B(0,15))} \precsim_\Lambda \|f\|_{L^{\frac{n+\sigma}{p}}(B(0,30))} + 1 \precsim_\Lambda 1.$$

此外，t 以下不等式对 $p \ge 2$ 成立（例如参见 [10, 引理 2.3。7]）

$$\big||\nabla u|^{p-2}(x)\nabla u(x) - |\nabla u|^{p-2}(y)\nabla u(y)\big| \succsim_p |\nabla u(x) - \nabla u(y)|^{p-1}.$$

我们发现

$$\int_{B(0,15)}\int_{B(0,15)} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|^p}{|x-y|^{n+\frac{s}{2(p-1)}p}}\,dx\,dy \precsim_\Lambda 1.$$

令 $t_0 = {}_2{}^s{}_{(p_1-1)} \leq {}_2{}^s{}_{(p-1)}$，我们得出结论。 □

4. Conclusion: Proof of Theorem 1.1

定理 *1.1* 的证明。设 $p_0 = n+1$，并取定理 3.1中的 ε。回顾一下，我们假设 $k \geq 1$（因为 $k = 0$ 已经是已知的）。也就是说，我们可以应用推论 2.3，得到一个序列 $p_j \xrightarrow{j\to\infty} n^+$ 以及一个非平凡 p_j-调和映射序列 $u_{p_j} \in C^{1,\alpha_j}(\mathbb{S}^n, \mathcal{N})$。有两种可能的情况。

Case 1: 没有泡，即对于所有 $x \in \mathbb{S}^n$，都存在 $\rho_x > 0$，使得

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{B(x,\rho_x)} |\nabla u_{p_j}|^n < \varepsilon^n.$$

在这种情况下，我们用有限个球 $B(x, \rho_x/2)$ 覆盖紧集 $\mathbb{S}^n$，在每个 $B(x, \rho_x/2)$ 上应用定理 3.1，并由嵌入 $W^{t_0,p_j}_{loc} \hookrightarrow W^{\frac{t_0}{2},n}_{loc}$ 得到[2]

$$\sup_j [\nabla u_{p_j}]_{W^{\frac{t_0}{2},n}(\mathbb{S}^n)} < \infty.$$

因此，取子列后，

$$u_{p_j} \to u \quad \text{strongly in } W^{1,n+\sigma} \text{ for some } \sigma > 0.$$

由维塔利收敛定理，我们得到

$$\int_{\mathbb{S}^n} |\nabla u|^n = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla u_{p_j}|^{p_j} > 0.$$

由强收敛性，我们还可以将极限传递到方程（1.2）中，并得出 u 是一个 n-调和映射。映射 u 不能是平凡映射，因为 $\|\nabla u\|_{L^n} > 0$。由于 $u \in W^{1,n+\gamma}$ 我们知道 u 是 Hölder 连续的。因此，如 [5, 第 3] 节 $u \in C^{1,\alpha}$ 是一个非平凡的 n-调和映射。

Case 2: 存在一个孤立泡，即存在 $\bar{x} \in \mathbb{S}^n$ 使得

$$\forall \varrho > 0, \qquad \liminf_{j\to\infty} \int_{B(\bar{x},\varrho)} |\nabla u_{p_j}|^n \geq \varepsilon^n \tag{4.1}$$

and

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla u_{p_j}|^n \leq M < \infty, \tag{4.2}$$

并且对于某个 $R > 0$ 以及任意 $x \in \overline{B(\bar{x}, R)} \setminus \{\bar{x}\}$ 存在 $\rho_x > 0$ 使得

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{B(x,\rho_x)} |\nabla u_{p_j}|^n \leq \varepsilon^n. \tag{4.3}$$

[2]一般而言，对于 $s \in (0, 1)$，不存在嵌入 $W^{s,p}_{局部} \hookrightarrow W^{s,q}_{局部}$，当 $p > q$ 时；参见 [14]。

取子列后，我们即可由定理3.1得出结论

$$u_{p_j} \xrightarrow{j\to\infty} u \quad \text{weakly in } W^{1,n}(\mathbb{S}^n), \tag{4.4}$$

and

$$u_{p_j} \xrightarrow{j\to\infty} u \quad \text{strongly in } W^{1,n}_{loc}\left(B(\bar{x},R)\setminus\{\bar{x}\}\right). \tag{4.5}$$

我们的论证与 [2, 引理 1] 的证明及 [12, 第 5 节2] 相同（另见 [15]）。通过与一个光滑微分同胚复合——例如先取以 $\bar{x}$ 为中心的指数映射，再进行膨胀——我们可以假设u_{p_j} 和 u 定义在欧氏单位球$B(0,1)$上，且 $\bar{x}=0$ 和 $R=1$。在这些坐标下，这些映射相对于由 $\mathbb{S}^n$诱导的拉回度量 g 是 p_j-调和的。由于我们正在分析$\bar{x}=0$处的集中，g 的系数在 C^∞_{loc} 中于 0 附近收敛到欧氏度量 δ_{ij}。在本节余下部分中，我们将度量 g 隐含处理，不在 L^p 范数中明确写出。

对于 $\bar{R}:=\frac{1}{4}>0$，我们定义

$$Q_j(\rho):=\sup_{x\in B(0,\bar{R})}\int_{B(x,\rho)}|\nabla u_{p_j}|^n.$$

注意到 Q_j 是连续的，$Q_j(0)=0$关于 ρ是非递减的，并且根据（4.1），对于充分大的 j

$$Q_j(2\bar{R})=\sup_{x\in B(0,\bar{R})}\int_{B(x,2\bar{R})}|\nabla u_{p_j}|^n\geq\int_{B(0,\bar{R})}|\nabla u_{p_j}|^n\geq\varepsilon^n.$$

因此，存在 $\rho_j>0$ 和 $x_j\in\overline{B(0,\ R)}$ 使得

$$Q_j(\rho_j)=\int_{B(x_j,\rho_j)}|\nabla u_{p_j}|^n=\frac{\varepsilon^n}{2}.$$

断言：$x_j\to 0$ 和 $\rho_j\to 0$。

事实上，经过取子列，不妨设 $x_j\to\bar{y}\in\overline{B(\bar{x},\ R)}$ 且 $\rho_j\to\bar{\rho}\geq 0$。如果$\bar{\rho}\neq 0$，那么对于充分大的 j，有

$$\frac{\varepsilon^n}{2}=Q_j(\rho_j)\geq\int_{B(0,\rho_j)}|\nabla u_{p_j}|^n\geq\int_{B(0,\frac{\bar{\rho}}{2})}|\nabla u_{p_j}|^n\geq\varepsilon^n.$$

这就产生了矛盾。因此，我们有 $\rho_j\to 0$。现在，如果 $\bar{y}\neq\bar{x}$，那么令 $u\in W^{1,\ n}$ 为 (4.4) 中的极限映射。我们选取 $\rho\in(0,\ \rho_y)$（其中 ρ_y 在 (4.3) 中定义）足够小，使得

$$\int_{B(\bar{y},\rho)}|\nabla u|^n<\frac{\varepsilon^n}{4}\quad\text{and}\quad\bar{x}\notin B(\bar{y},2\rho).$$

我们选取 j 足够大，使得 $2(|\bar{y}-x_j|+\rho_j) \le \rho$。于是，有

$$\frac{\varepsilon^n}{2} = \int_{B(x_j,\rho_j)} |\nabla u_{p_j}|^n \le \int_{B\left(\bar{y},2(|\bar{y}-x_j|+\rho_j)\right)} |\nabla u_{p_j}|^n \le \int_{B(\bar{y},\rho)} |\nabla u_{p_j}|^n.$$

由（4.5），我们得知在奇异集之外强收敛，特别是在 $B_{2\rho}(\bar{y})$ 中。因此，有

$$\frac{\varepsilon^n}{2} \le \lim_{j\to+\infty} \int_{B(\bar{y},\rho)} |\nabla u_{p_j}|^n = \int_{B(\bar{y},\rho)} |\nabla u|^n < \frac{\varepsilon^n}{4}.$$

这就产生了矛盾，因此 $x_j \to \bar{x}$，断言得以证明。

现在定义

$$\Omega_j := \frac{B(0,\bar{R})-x_j}{\rho_j} \subset \mathbb{R}^n, \qquad v_j(x) = u_{p_j}\left(x_j+\rho_j\, x\right) \text{ for } x \in \Omega_j.$$

那么，我们有 $\Omega_j \to \mathbb{R}^n$，其含义是：对于任意 $R>0$，都存在 j 足够大，使得$B(0,R) \subset \Omega j$。此外，v_j: $(\Omega j, g(x_j+\rho_j \cdot)) \to \mathcal{N}$是一个 p_j-调和映射（因为它满足方程（1.2），该方程具有尺度不变性）。

对于足够大的 j，$B(0,1) \subset \Omega j$，并且我们有

$$\int_{B(0,1)} |\nabla v_j|^n = \int_{B(x_j,\rho_j)} |\nabla u_{p_j}|^n = Q_j(\rho_j) = \frac{\varepsilon^n}{2}. \tag{4.6}$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，当 j 足够大时，我们有 $B(x,\ 1) \subset \Omega j$；由于 $\rho_j \to 0$ 且 $x_j \to 0$，因此存在 $y \in B(0,\ R)$，使得当 j 足够大时，有 $B(x_j+\rho_j x,\ \rho_j) \subset B(y,\ \rho_j)$。因此，有

$$\int_{B(x,1)} |\nabla v_j|^n = \int_{B(x_j+\rho_j x,\rho_j)} |\nabla u_{p_j}|^n \le \sup_{y\in B(0,\bar{R})} \int_{B(0,\bar{\rho}_j)} |\nabla u_{p_j}|^n = Q_j(\rho_j) = \frac{\varepsilon^n}{2}.$$

因此，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，当 j 足够大时，我们有

$$\int_{B(x,1)} |\nabla v_j|^n \le \frac{\varepsilon^n}{2}.$$

由于这对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立，不妨取一个未重新标记的子列，设

$$v_j \xrightarrow{j\to\infty} \omega \quad \text{weakly in } W^{1,n}_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

此外，由定理 3.1，结合 Sobolev 嵌入，我们得到，对于每个$x \in \mathbb{R}^n$

$$v_j \to \omega \text{ strongly in } W^{1,n+\sigma}\left(B(x,1/2)\right).$$

由于 v_j 是 p_j 调和映射，利用强 $W^{1,\ n+\sigma}-$ 收敛，我们可以在 v_j的方程中取极限，从而得到极限映射 $\omega \in W^{1,\ n}_{loc}(\mathbb{R}^n,\ \mathcal{N})$ 也满足 $\mathbb{R}^n$中的 n-调和映射方程。

此外， ω 是非平凡的。事实上，通过变量替换（以及 n-能量的尺度不变性）

$$\int_{B(0,1)} |\nabla \omega|^n = \lim_{j\to\infty} \int_{B(0,1)} |\nabla v_j|^n = \lim_{j\to\infty} \int_{B(x_j,\rho_j)} |\nabla u_{p_j}|^n = \lim_{j\to\infty} Q_j(\rho_j) = \frac{\varepsilon^n}{2} \neq 0.$$

In 此外，我们发现 ω 具有有限能量。事实上，对于任意 $R>0$ ，都有

$$\int_{B(0,R)} |\nabla \omega|^n = \lim_{j\to\infty} \int_{B(0,R)} |\nabla v_j|^n = \lim_{j\to\infty} \int_{B(x_j,\rho_j R)} |\nabla u_{p_j}|^n \leq C(n,M),$$

其中，最后一个不等式是对 n-能量的u_{p_j} 一致有界性（见4.2）。因此，有 $\nabla\omega \in L^n(\mathbb{R}^n)$。我们还注意到，当 W^{1}时, $^{n+\sigma}$-极限 ω 是 H¨older 连续的；由于它满足 n-调和映射方程，因此实际上是 $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathcal{N})$，其中 $\alpha>0$。

为了找到一个非平凡的调和映射 $\tilde{\omega}\colon \mathbb{S}^n \to \mathcal{N}$，我们论证如下。令 $\tau_N\colon \mathbb{S}^n \setminus\{N\} \to \mathbb{R}^n$ 为从北极出发的立体投影。由于定义域中的 n-调和映射方程具有共形不变性，映射 $\tilde{\omega} := \omega \circ \tau_N\colon \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathcal{N}$ 在 $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$上是$n$-调和的，并满足 $\tilde{\omega} \in W^{1,n}(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \mathcal{N}) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \mathcal{N})$。

为去除 N 处的奇点，考虑从南极出发的立体投影 $\tau_S\colon \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$，并定义 $\omega_2 := \tilde{\omega} \circ \tau_S^{-1}\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathcal{N}$。于是， ω_2 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上是 n-调和的，并且 $\omega_2 = \omega \circ (\tau_N \circ \tau_S^{-1}) = \omega \circ \kappa$，其中 $\kappa(x) = \frac{x}{|x|^2}$。由于 κ 是共形的，且 n 是临界指数， n-能量在 κ 下保持不变，因此有 $\|\nabla\omega_2\|_{L^n(B(0,1))} = \|\nabla\omega\|_{L^n(\mathbb{R}^n\setminus B(0,1))}$。

$$\int_{B(0,1)} |\nabla \omega_2|^n = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,1)} |\nabla\omega|^n < \infty,$$

因此 ω_2 在 0 处孤立奇点的邻域内具有有限的 n-能量。根据可去奇点定理 [16, 定理 5.1] （另见 [4]）， ω_2 可延拓为一个取值于 $\mathcal{N}$ 的映射（因而也属于 $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n,\mathcal{N})$）。反转立体投影后，我们得出 $\tilde{\omega}$ 可延拓为一个 n-调和映射 $\tilde{\omega} \in W^{1,n}(\mathbb{S}^n,\mathcal{N}) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^n,\mathcal{N})$。此外， $\tilde{\omega}$ 不是常数，因为 ω 不是常数。□

References

[1] A. K.Balci、L. Diening 和 M. Weimar。 p-拉普拉斯方程的高阶 Calder´on-Zygmund 估计。J. Differential Equations，268(2):590–635，2020。3，9，10[2] H. Brezis 和 J.-M. Coron。 H-系统解的收敛性，或如何产生泡。《理性力学与分析档案》，89(1):21–56，1985。12[3] G. Di Matteo 和 T. Lamm。高维 Sacks-Uhlenbeck 型泛函及其应用。arXiv 预印本 arXiv:2506.17166，2025。2[4] F. Duzaar 和 M. Fuchs。关于 p-调和映射的可去奇点。Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire，7(5):385–405，1990。14[5] R. Hardt 和 F.-H. Lin。关于使梯度的 L^p 范数极小的映射。Comm. Pure Appl. Math.，40(5):555–588，1987。5，10，11[6] T. Iwaniec。 p-调和张量与拟正则映射。Ann. of Math. (2)，136(3):589–624，1992。7

[7] T. Iwaniec 和 C. Sbordone。变分积分的弱极小值。J. Reine Angew. Math.，454:143–161，1994。2，6，7[8] S. Kawai、N. Nakauchi 和 H. Takeuchi。关于 n-调和球面的存在性。Compositio Math.，117(1):33–43，1999。1，2[9] T. Lamm。曲面上调和映射的四阶逼近。Calc. Var. Partial Differential Equations，27(2):125–157，2006。1[10] D. Martino。 n-调和映射与 Willmore曲面的分析。博士论文。巴黎西岱大学，2024。10[11] D. Martino。弯曲区域上无约束 p-调和映射的正则性及其在临界 p-拉普拉斯系统中的应用。Potential Anal.，63(3):1471–1498，2025。5，10[12] D. Martino、K. Mazowiecka 和 R. Rodiac。带有球面自由边界的（$n+\alpha$）-调和映射的弱能量恒等式。arXiv 预印本 arXiv:2503.21523，2025。12[13] K. Mazowiecka 和 A. Schikorra。同伦类中的极小 W^s、$\frac{n}{s}$-调和映射。J. Lond. Math. Soc. (2)，108(2):742–836，2023。1[14] P. Mironescu 和 W. Sickel。Sobolev非嵌入。Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.，_26(3):291–298，2015。11[15] L. Mou 和 C. Wang。 m-调和型系统 Palais-Smale型序列的泡化现象。Calc. Var. Partial Differential Equations，4(4):341–367，1996。12[16] L. Mou 和 P. Yang。 n-调和映射的正则性。J. Geom. Anal.，6(1):91–112，1996。14[17] N. Nakauchi 和 S. Takakuwa。关于 p-调和映射的注记。Nonlinear Anal.，25(2):169–185，1995。1[18] J. Sacks 和 K. Uhlenbeck。2-球面的极小浸入的存在性。Ann. of Math. (2)，113(1):1–24，1981。1，5[19] M. Struwe。变分方法，数学及其边界领域成果第34卷。第3辑。现代数学综述系列 /数学成果及相关领域。第3辑。现代数学综述系列/。施普林格出版社，柏林，第四版，2008年。非线性偏微分方程与哈密顿系统的应用。5[20]B. White。同伦类中能量泛函的下确界。J. Differential Geom.，23(2):127–142，1986。2[21] B. White。Sobolev空间中的同伦类与能量极小映射的存在性。Acta Math.，160:1–17，1988。2

（Dorian Martino） Department of Mathematics、 ETH Zurich、 Rämistrasse 101、 8092 Zurich、Switzerland电子邮箱地址：dorian.martino@math.ethz.ch（Katarzyna Mazowiecka） Institute of Mathematics、University of Warsaw、 Banacha 2、 02-097 Warszawa、 Poland电子邮箱地址：k.mazowiecka@mimuw.edu.pl（Armin Schikorra） Department of Mathematics、 University of Pittsburgh、 301 ThackerayHall、 Pittsburgh、 PA 15260、 USA电子邮箱地址：armin@pitt.edu