arXiv:2601.05704v1 [physics.plasm-ph] 9 Jan 2026

漂移约化流体等离子体模型的守恒形式

B. De Lucca[1]†, P. Ricci[1], M. Bassanini[1,2], S. García Herreros[1], Z. Tecchiolli[1]

[1]瑞士洛桑联邦理工学院（EPFL）瑞士等离子体中心（SPC），瑞士洛桑 CH-1015[2]瑞士洛桑联邦理工学院（EPFL）数学研究所，瑞士洛桑 CH-1015

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

通过对定义极化速度与电场时间导数之间关系的隐式方程进行解析求逆，构建了漂移约化流体等离子体模型的守恒形式。所得模型在任意磁几何中均满足能量、质量、电荷和动量的精确守恒定律，即使包含电磁涨落时亦如此。

1. 引言

在高碰撞区，磁化等离子体湍流通常采用漂移约化流体模型进行研究（例如，Drake & Antonsen（1984）；Zeiler等（1997）；Scott（2003）；Simakov & Catto（2003））。这些模型常用于研究聚变装置的边界区域（Dudson 等2009；Zhu 等2018；Stegmeir 等2019；Giacomin 等2022b；Düll 等2024），也应用于基础等离子体物理实验（Riva 等2016）。

流体等离子体的漂移约化表述通过对流体矩方程按漂移展开参数 $\epsilon \sim d_t/\Omega_c \ll 1$ 的幂次进行微扰展开而得出；该参数表示动力学时间尺度（由物质导数 d_t 表征）与回旋频率 $\Omega_c = qB/m$ 之比，后者以电荷 q、质量 m 和磁场强度 $B = |\boldsymbol{B}|$ 表示。在 $\epsilon \ll 1$ 极限下，流体速度在垂直于磁场的平面上的投影 $\boldsymbol{v}_\perp$ 可分解为一系列漂移贡献。其中，极化漂移 $\boldsymbol{v}_p \sim (B\Omega_c)^{-1} d_t \boldsymbol{E}$ 与电场 $\boldsymbol{E}$ 的时间和空间演化有关。这使得可以通过涡量方程确定电场的演化。事实上，通过引入 $\boldsymbol{v}_p$，准中性约束 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ 得到一个关于静电势的方程。然而，目前文献中所表述且在用于托卡马克和仿星器湍流模拟的高保真流体代码中实现的漂移约化模型（Dudson 等2009；Stegmeir 等2019；Giacomin 等2022b；Coelho 等2024；Düll 等2024）已知不具备严格的守恒性质，并且在 $O(\epsilon)$ 阶出现伪源项（Reiser（2012）；Halpern等2023）。

为了推导出守恒的漂移约化流体模型，有必要求解一个隐式方程，将极化速度与电场的时间导数联系起来；其中需要保留形式上很小的项，以确保守恒（Zeiler等。 1997；Reiser（2012）；Poulsen 等。2020；Halpern 等。 2023）。Reiser（2012）在线性装置的冷离子等离子体静电极限下，通过利用背景磁场的柱对称性，推导出了涡量的显式时间演化方程，

† 通讯邮箱：brenno.delucca@洛桑联邦理工学院.ch

在本工作中，我们通过推导任意磁几何下、无需施加静电极限的极化速度 $\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}_p(\partial_t \boldsymbol{E})$ 的闭式、非摄动表达式，并利用该表达式构建了一个严格守恒能量和动量的漂移约化流体模型。该构造适用于任意数量的物种，且不依赖于流体闭合的选择。

随着漂移约化流体代码逐渐成为构建聚变装置运行与设计预测能力的重要工具（Giacomin 等 2022年a；Oliveira 等2022年；Bufferand 等 2024年；Zholobenko 等 2024年），以守恒形式表述漂移约化模型有几个方面的重要意义。首先，在设计数值格式以提升代码性能时，精确不变量的存在至关重要（LeVeque，1992）。其次，这证明通常可以构造出一种漂移约化模型，使其遵循与非漂移约化系统相同的守恒性质，这意味着这种针对磁化等离子体流体的近似格式是适定的。

本文结构如下。引言之后，第 2 节将表述多物种准中性磁化等离子体的流体方程，并明确相应的能量和动量守恒定律。第 3 节将说明漂移近似的阶次假设，并解释为何将极化速度对主导阶量作微扰展开会破坏模型的守恒性质。第 4 节将对极化漂移的隐式、非微扰表达式进行解析求逆，从而得到一个严格守恒的模型。第 5 节给出 $O(\epsilon)$ 漂移约化模型，并说明它在第 6 节中能够精确守恒能量和动量的主阶分量（即对 ϵ 的所有阶均成立）。最后，第 7 节给出结论。

2. 多组分等离子体的流体方程

我们考虑一种磁化等离子体，其中包含任意数量的不同物种，物种索引标记为 s。质量为 m_s 、电荷为 q_s 的物种 s 的流体方程，可通过对玻尔兹曼方程取速度矩得到（Braginskii，1965）。前三个矩方程描述密度 n_s、流体动量密度 $\boldsymbol{\mathcal{M}}_s = m_s n_s \boldsymbol{V}_s$（其中 $\boldsymbol{V}_s$ 是物种 s 的平均速度），以及标量压强 $p_s = n_s T_s$（其中 T_s 是物种 s 的温度），其形式如下：

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \boldsymbol{V}_s) = \mathcal{S}_s, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{M}}_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{V}_s \boldsymbol{\mathcal{M}}_s) + \nabla \cdot \boldsymbol{P}_s - q_s n_s \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}_s \times \boldsymbol{B}\right) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_s, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2} p_s\right) + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} p_s \boldsymbol{V}_s + \boldsymbol{q}_s\right) + \boldsymbol{P}_s : \nabla \boldsymbol{V}_s = \mathcal{Q}_s + r_s \mathcal{K}_s, \tag{2.3}$$

其中，$\boldsymbol{P}_s = p_s \mathbb{I} + \boldsymbol{\pi}_s$ 是该物种的压力张量，$\boldsymbol{\pi}_s$ 是应力张量，$\mathbb{I}$ 是单位矩阵，$\boldsymbol{q}_s$ 是热流密度，$\mathcal{S}_s$，$\boldsymbol{\mathcal{R}}_s$，$\mathcal{Q}_s$ 是源项，源自外部驱动以及物种之间的相互作用，例如库仑碰撞。此外，我们将 $r_s \equiv \mathcal{S}_s / n_s$ 定义为物种 s 的粒子进入或离开系统的速率，并将 $\mathcal{K}_s \equiv m_s n_s V_s^2 / 2$ 定义为物种 s的流体动能密度。在方程2.2和2.3中，引入记号 $\boldsymbol{P} : \nabla \boldsymbol{V} \equiv P^{ij} \nabla_j V_i$ 表示两个张量的弗罗贝尼乌斯内积，而张量 $\nabla \cdot \boldsymbol{P}_s \equiv \nabla_i P^{ij}$ 的散度定义为对相邻指标进行缩并。我们用类似的记号表示张量

对向量的作用，并写作 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{V}\equiv P_{ij}V^j$，所得量的张量性质可根据上下文辨别。为保持一般性，本文不专门讨论矩层次结构的闭合。我们假设，适当的闭合已编码在热流密度和应力张量中，同时也编码在源项中由粒子间相互作用产生的贡献中。我们注意到，粒子源项 $\mathcal{S}_s$ 不能全部独立选取，因为电荷中性对其施加了约束 $\sum_s q_s\mathcal{S}_s=0$。

由于我们希望建模的湍流现象往往在远大于德拜长度的尺度上 λ_D演化，并且其时间尺度远慢于等离子体频率对应的时间尺度 ω_p，因此我们假设

$$\lambda_D\nabla\sim\frac{1}{\omega_p}\frac{\partial}{\partial t}\equiv\epsilon_D\to 0. \tag{2.4}$$

在此极限下，等离子体瞬时处于局部准中性状态，且电场 $\boldsymbol{E}$并非由高斯定律确定，而是由准中性条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$确定。因此，麦克斯韦方程组在极限 $\epsilon_D\to 0$ 下化为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}=\mu_0\sum_s q_s n_s\boldsymbol{V}_s, \tag{2.5}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2.6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{2.7}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0. \tag{2.8}$$

麦克斯韦方程组与流体方程（方程 2.1–2.3）耦合后，得到一个能够守恒能量、动量、质量和电荷的封闭模型。

能量密度 $\mathcal{H}$ 可表示为

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_B+\sum_s\mathcal{H}_s=\frac{B^2}{2\mu_0}+\sum_s\left(\mathcal{K}_s+\frac{3}{2}p_s\right), \tag{2.9}$$

其中，$\mathcal{H}_s=\mathcal{K}_s+\mathcal{U}_s$ 是每个物种的能量，由动能 $\mathcal{K}_s$和内能 $\mathcal{U}_s\equiv 3p_s/2$组成；$\mathcal{H}_B\equiv B^2/2\mu_0$ 是场能，在准中性极限下仅包含磁能密度项。为证明 $\mathcal{H}$的守恒性，我们将动量方程（方程 2.2）与 $\boldsymbol{V}_s$ 作标量积，并使用连续性方程（方程 2.1）。这将得到流体动能密度 $\mathcal{K}_s$的输运方程

$$\frac{\partial\mathcal{K}_s}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathcal{K}_s\boldsymbol{V}_s)=-\boldsymbol{V}_s\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_s+q_s n_s\boldsymbol{V}_s\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}_s\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}}_s-\mathcal{K}_s\frac{\mathcal{S}_s}{n_s}. \tag{2.10}$$

此外，我们注意到，电磁场能量遵循坡印廷定理演化；在准中性磁化等离子体中，当 $\omega/\omega_p\to 0$ 时，电场能量对应的项 $\partial_t(\epsilon_0E^2/2)$ 可以忽略。实际上，位移电流的量级为 $\partial_t\boldsymbol{E}/c^2\sim(\omega\Omega_{ce}/\omega_{pe}^2)\mu_0\boldsymbol{J}$，其中电子时间尺度占主导，因此在中性极限 $\omega/\omega_{pe}\to 0$ 下，只要 Ω_{ce}/ω_{pe} 不发散（这在磁化等离子体中几乎总是成立），就有 $\partial_t\boldsymbol{E}/c^2\to 0$。在此极限下，坡印廷定理为

$$\frac{\partial\mathcal{H}_B}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}=0, \tag{2.11}$$

其中 $\boldsymbol{S}\equiv\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/\mu_0$ 为坡印廷矢量，这一点可通过将法拉第定律与 $\boldsymbol{B}$ 作标量积，并利用以下事实 $\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$ 得出，

从而得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)+\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=0, \tag{2.12}$$

然后施加 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$。因此，将内能的输运方程（式 2.3）、流体动能（式 2.10）以及磁场能量（式 2.11）的输运方程相加，可得总能量密度方程

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}+\nabla\cdot\left[\boldsymbol{S}+\sum_s(\mathcal{H}_s\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{P}_s\cdot\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{q}_s)\right]=\sum_s\left(\mathcal{Q}_s+\boldsymbol{V}_s\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}}_s\right), \tag{2.13}$$

其中，对所有物种 s 进一步求和，并利用压力张量 $\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{P}_s^T$的对称性，在式 2.13 中将 $\boldsymbol{P}_s\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_s+\boldsymbol{P}_s:\nabla\boldsymbol{V}_s=\nabla\cdot(\boldsymbol{P}_s\cdot\boldsymbol{V}_s)$ 写为。系统的能量含量会因热源 $\mathcal{Q}_s$ 和力 $\boldsymbol{V}_s\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}}_s$ 而发生变化。定义总功率源 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}=\sum_s(\mathcal{Q}_s+\boldsymbol{V}_s\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}}_s)$ 和能量通量 $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{H}}\equiv\boldsymbol{S}+\sum_s($ $\mathcal{H}_s\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{P}_s\cdot\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{q}_s)$ 后，式 2.13 可写成关于 $\mathcal{H}$ 的守恒定律，

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{H}}=\mathcal{S}_{\mathcal{H}}. \tag{2.14}$$

如果系统没有受到外部驱动，且粒子间相互作用是弹性的，那么源项 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 将消失；库仑相互作用（Braginskii，1965）便是如此。类似地，也可以推导出动量密度的输运方程 $\boldsymbol{\mathcal{M}}\equiv\sum_s\boldsymbol{\mathcal{M}}_s$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{M}}}{\partial t}+\nabla\cdot\sum_s(\boldsymbol{V}_s\boldsymbol{\mathcal{M}}_s+\boldsymbol{P}_s)=\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}+\sum_s\boldsymbol{\mathcal{R}}_s, \tag{2.15}$$

其中，在相互作用为弹性且不存在外部动量输入的情况下，项 $\sum_s\boldsymbol{\mathcal{R}}_s$ 将消失。根据连续性方程，总质量守恒；最后，要求 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$，即可保证电荷守恒。

3. 漂移近似

我们关注低频动力学，因此假设所研究的物理过程演化的尺度约为漂移尺度 $\partial_t\sim\boldsymbol{V}_s\cdot\nabla\sim\omega_{*s}\equiv\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{v}_{*s}$，其中 $\boldsymbol{v}_{*s}=\boldsymbol{B}\times\nabla p_s/(q_sn_sB^2)$ 是物种 s 的抗磁漂移速度，而 $\boldsymbol{k}_\perp$ 是垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的平面内的波数（Zeiler *et al.* 1997）。假设漂移尺度远慢于回旋频率 $\omega_{*s}\ll\Omega_{cs}$，因此 $\partial_t/\Omega_{cs}\sim\boldsymbol{V}_s\cdot\nabla/\Omega_{cs}\equiv\epsilon$，其中 $\epsilon\ll1$ 是一个小参数。这意味着流体速度和长度尺度的排序为 $V_{\perp s}k_\perp\sim V_{\parallel s}k_\parallel\sim\epsilon\Omega_{cs}$，其中 $k_\perp=|\boldsymbol{k}_\perp|$ 和 $k_\parallel=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b}$ 分别表示垂直和平行波数，而 $V_{\perp s}$ 和 $V_{\parallel s}$ 表示流体速度相应的垂直和平行分量。我们的排序选择与长波长/大流动漂移约化假设 $k_\perp\rho_{Ls}\sim\sqrt{\epsilon}$，$V_{\perp s}\sim\sqrt{\epsilon}v_{Ts}$以及短波长/小流动回旋动理学 $k_\perp\rho_{Ls}\sim1$，$V_{\perp s}\sim\epsilon v_{Ts}$均相符；其中 $v_{Ts}=\sqrt{T_s/m_s}$是物种 s的热速度，$\rho_{Ls}=v_{Ts}/\Omega_{cs}$ 是其拉莫尔半径（Brizard 与 Hahm 2007）。实际上，我们采用的排序比漂移约化模型中通常假设的更为一般；后者只保留大尺度动力学 $k_\perp\rho_{Ls}\sim\sqrt{\epsilon}$（Drake & Antonsen（1984）；Zeiler*et al.* 1997；Simakov & Catto 2003），因为推导本文结果并不需要大尺度假设。

在 $\epsilon=0$ 极限下，导致静电 $E\times B$ 湍流的关键物理过程并不存在（Zeiler 等 1997）。为了在模型中保留这些过程，我们将流体方程（方程 2.1–2.3）按 ϵ 的幂次展开（Drake & Antonsen（1984））。将流体

速度 $\boldsymbol{V}_s$ 按相对于磁场 $\boldsymbol{B}$ 的平行分量和垂直分量分解物种 s 的速度

$$\boldsymbol{V}_s = \boldsymbol{v}_{\parallel s} + \boldsymbol{v}_{\perp s}, \tag{3.1}$$

并将动量方程（方程 2.2）与 $\boldsymbol{B}$ 作叉积，可得 $\boldsymbol{v}_{\perp s}$ 分解为各漂移贡献之和（Drake & Antonsen（1984））

$$\boldsymbol{v}_{\perp s} = \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{v}_{*s} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\pi} s} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\mathcal{R}} s} + \boldsymbol{v}_{ps}, \tag{3.2}$$

即一个 $E \times B$ 漂移项 $\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/B^2$、一个与各向同性压力相关的抗磁漂移 $\boldsymbol{v}_{*s}$、一个由压力各向异性引起的抗磁漂移 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\pi} s} = \boldsymbol{B} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_s / (q_s n_s B^2)$、一个由动量源汇引起的漂移 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\mathcal{R}} s} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_s \times \boldsymbol{B}/(q_s n_s B^2)$，以及一个与整体流变化率相关的漂移，即极化速度 $\boldsymbol{v}_{ps}$，其定义如下：

$$\boldsymbol{v}_{ps} \equiv \frac{\boldsymbol{b}}{n_s \Omega_{cs}} \times \left[\frac{\partial (n_s \boldsymbol{V}_s)}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \boldsymbol{V}_s \boldsymbol{V}_s) \right], \tag{3.3}$$

其中，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}/B$ 是沿 $\boldsymbol{B}$ 方向的单位向量。利用连续性方程（方程 2.1），极化速度也可表示为

$$\boldsymbol{v}_{ps} = \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\frac{d_s \boldsymbol{V}_s}{dt} + r_s \boldsymbol{V}_s \right), \tag{3.4}$$

其中，$d_s/dt \equiv \partial_t + \boldsymbol{V}_s \cdot \nabla$ 是物种 s 的物质导数。极化漂移源于粒子的有限惯性，在施加的漂移排序下属于次阶项；若粒子注入率与漂移频率 $r_s/\Omega_{cs} \sim \epsilon$ 同阶（我们假设这一条件成立），则有 $\boldsymbol{v}_{ps} \sim (d_t/\Omega_{cs}) \boldsymbol{V}_s = O(\epsilon \boldsymbol{V}_s)$。因此，我们可以将总流体速度写为

$$\boldsymbol{V}_s = \bar{\boldsymbol{v}}_s + \boldsymbol{v}_{ps} = (\boldsymbol{v}_{\parallel s} + \bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}) + \boldsymbol{v}_{ps}, \tag{3.5}$$

作为主导阶流 $\bar{\boldsymbol{v}}_s$ 与次主导修正 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 之和，其中 $\boldsymbol{v}_{\parallel s}$，$\bar{\boldsymbol{v}}_s$ 和 $\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}$ 按 $O(\boldsymbol{V}_s)$ 的尺度变化。具体而言，主导阶垂直流为

$$\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s} = \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{v}_{*s} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\pi} s} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\mathcal{R}} s} \equiv \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{w}_{\perp s}, \tag{3.6}$$

其中，$\boldsymbol{w}_{\perp s}$ 是物种 s 在共动 $E \times B$ 参考系中的主导阶漂移速度。将式 3.4 中出现的流体速度 $\boldsymbol{V}_s$ 分解为主导阶分量和次主导分量，可得

$$\boldsymbol{v}_{ps} = \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + r_s \bar{\boldsymbol{v}}_s + \boldsymbol{v}_{ps} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + \frac{\partial \boldsymbol{v}_{ps}}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{ps} + r_s \boldsymbol{v}_{ps} + \boldsymbol{v}_{ps} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{ps} \right). \tag{3.7}$$

式 3.7 给出了关于 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 的隐式方程，即

$$\boldsymbol{v}_{ps} = F(\bar{\boldsymbol{v}}_s) + G(\bar{\boldsymbol{v}}_s, \boldsymbol{v}_{ps}) + K(\boldsymbol{v}_{ps}), \tag{3.8}$$

其中

$$F(\bar{\boldsymbol{v}}_s) = \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + r_s \bar{\boldsymbol{v}}_s \right) = O(\epsilon \bar{\boldsymbol{v}}_s), \tag{3.9}$$

$$G(\bar{\boldsymbol{v}}_s, \boldsymbol{v}_{ps}) = \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\boldsymbol{v}_{ps} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + \frac{\partial \boldsymbol{v}_{ps}}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{ps} + r_s \boldsymbol{v}_{ps} \right) = O(\epsilon \boldsymbol{v}_{ps} \bar{\boldsymbol{v}}_s), \tag{3.10}$$

$$K(\boldsymbol{v}_{ps}) = \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\boldsymbol{v}_{ps} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{ps}) = O(\epsilon \boldsymbol{v}_{ps} \boldsymbol{v}_{ps}). \tag{3.11}$$

传统上，方程 3.8 使用常规微扰理论 $\boldsymbol{v}_{ps} = \boldsymbol{v}_{ps}^{(1)} + \boldsymbol{v}_{ps}^{(2)} + \dots$ 处理，其中 $\boldsymbol{v}_{ps}^{(N)} \equiv O(\epsilon^N \bar{\boldsymbol{v}}_s)$。例如，逐阶求解方程 3.8，直到 $O(\epsilon^3 \bar{\boldsymbol{v}}_s)$，可得

$$\boldsymbol{v}_{ps}^{(1)} = F(\bar{\boldsymbol{v}}_s) = \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + r_s \bar{\boldsymbol{v}}_s \right), \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{v}_{ps}^{(2)} = G(\bar{\boldsymbol{v}}_s, \boldsymbol{v}_{ps}^{(1)}) = \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\boldsymbol{v}_{ps}^{(1)} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + \frac{\partial \boldsymbol{v}_{ps}^{(1)}}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{ps}^{(1)} + r_s \boldsymbol{v}_{ps}^{(1)} \right), \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{v}_{ps}^{(3)} = G(\bar{\boldsymbol{v}}_s, \boldsymbol{v}_{ps}^{(2)}) + K(\boldsymbol{v}_{ps}^{(1)}) = G(\bar{\boldsymbol{v}}_s, \boldsymbol{v}_{ps}^{(2)}) + \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\boldsymbol{v}_{ps}^{(1)} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{ps}^{(1)}). \tag{3.14}$$

所得的漂移约化模型详见 Gath & Wiesenberger（2019）。将式 3.12 中的展开截断至 $O(\epsilon \bar{\boldsymbol{v}}_s)$，便得到目前在漂移约化流体代码中实现的模型（Giacomin 等人 2022b; Stegmeir 等人 2019；Düll 等人2024；Dudson 等人 2015）。

已知，基于式 3.12 微扰展开的模型并不同时满足能量和动量守恒，其时间演化中会出现阶为 $O(\epsilon)$ 的伪源项（Reiser（2012）；Halpern等人 2023）。原因在于，式 3.12 中 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 的表达式描述了垂向动量主阶分量的输运，却没有包含极化漂移引起的平流（这是一个次阶项，见式 3.13）。另一方面，模型的其他部分保留了极化平流项，例如连续性方程展开至 $O(\epsilon)$。由此，动量与密度输运之间的不一致破坏了模型的能量和动量守恒性质（Reiser（2012））。还需指出，鉴于微扰展开方法具有递归性质，将模型展开至 ϵ 的更高阶并不能恢复精确守恒。事实上，对于展开至 $O(\epsilon^N)$ 且满足 $N \geqslant 1$ 的漂移约化模型，能量和动量守恒仍会被同阶项破坏，即 $O(\epsilon^N)$。

漂移近似中守恒问题的解决方案，自模型最初推导以来便已为人所知（Drake & Antonsen（1984）；Zeiler等 1997；Scott（2003）），其方法是在垂直动量输运方程（式 3.12）中保留极化平流项 $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{v}_{ps}^{(1)} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)/\Omega_{cs}$。更准确地说，极化漂移 $\boldsymbol{v}_{ps}^{(1)}$应隐式定义为

$$\boldsymbol{v}_{ps}^{(1)} = \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + \boldsymbol{v}_{ps}^{(1)} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + r_s \bar{\boldsymbol{v}}_s \right) \equiv \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\frac{d_s^{(1)} \bar{\boldsymbol{v}}_s}{dt} + r_s \bar{\boldsymbol{v}}_s \right), \tag{3.15}$$

而不是方程 3.12 中的微扰定义。方程 3.15 中 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 的表达式给出了能量和动量主导阶贡献的守恒定律，该守恒定律对 ϵ的所有阶均成立。在下一节中，我们首先将方程 3.15 反演，仅用主导阶流 $\bar{\boldsymbol{v}}_s$ （第 4 节）表示 $\boldsymbol{v}_{ps}^{(1)}$。这是获得显式且严格守恒的漂移约化模型所必须克服的主要障碍。随后，我们在第 5 节推导出一个守恒漂移约化模型。最后，参照此前关于该主题的研究（Drake & Antonsen（1984）；Zeiler *et al.* 1997; Reiser（2012））， 我们在第 6 节展示所得漂移约化系统的守恒性质。由于我们仅将模型展开到 ϵ的一阶，所以下文将省略 $\boldsymbol{v}_{ps}^{(1)}$中的上标，以简化本文其余部分的记号。

4. $\boldsymbol{v}_{ps}$ 的隐式方程求解

据我们所知，由方程 3.15 的解给出的 $\boldsymbol{v}_{ps}$表达式从未被用于模拟代码中，除了线性几何下静电冷离子等离子体的情形（Reiser（2012））。在该情形中，人们利用磁场的对称性质获得了涡量方程，并使系统方程闭合。然而，一般而言，由于缺少将极化速度表示为电势变化率函数的显式形式，方程 3.15 无法直接使用。事实上，在不存在显式关系 $\boldsymbol{v}_{ps} = \boldsymbol{v}_{ps}(\partial_t \phi)$ 的情况下，通过 $\nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0$施加准中性并不能得到关于 ϕ的标量方程。因此，使漂移约化流体系统闭合需要对极化漂移进行显式的时间演化（在回旋时间尺度上），从而违背了漂移约化近似的初衷（Halpern$et\ al.$2023）。在 Scott（2003）中，通过假设极化漂移可以表示为某个标量的梯度，避免了闭合问题，但这一关系一般并不成立。

本节旨在将方程 3.15 给出的 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 表达式反解为主阶速度 $\bar{\boldsymbol{v}}_s$ 的函数。重新排列方程 3.15 中的各项后，我们注意到 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 满足

$$\boldsymbol{v}_{ps} - \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\boldsymbol{v}_{ps}\cdot\nabla)\bar{\boldsymbol{v}}_s = \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + r_s \bar{\boldsymbol{v}}_s \right). \tag{4.1}$$

现在我们证明，方程 4.1 的解为

$$\boldsymbol{v}_{ps} = \frac{1 + (\boldsymbol{b}\times\nabla\bar{\boldsymbol{v}}_s)/\Omega_{cs}}{1 + \boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\bar{\boldsymbol{v}}_s)/\Omega_{cs} + \det(\nabla\bar{\boldsymbol{v}}_s)_\perp/\Omega_{cs}^2} \cdot \left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + r_s \bar{\boldsymbol{v}}_s \right) \right]. \tag{4.2}$$

为方便起见，我们将惯性漂移速度项 $\boldsymbol{U}_s$ 定义为方程 4.1 的右端，即

$$\boldsymbol{U}_s \equiv \frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s + r_s \bar{\boldsymbol{v}}_s \right), \tag{4.3}$$

其中仅包含与速度 $\bar{\boldsymbol{v}}_s$ 相关的主导阶量。我们注意到$\boldsymbol{U}_s\cdot\boldsymbol{b} = 0$。方程 4.1 可写成分量形式:

$$\left(\delta^i_l - \frac{1}{\Omega_{cs}} \epsilon^{ij}{}_k b_j \nabla_l \bar{v}^k_s \right) v^l_{ps} \equiv (Q_s^{-1})^i{}_l v^l_{ps} = U^i_s, \tag{4.4}$$

其中， v^l_{ps} 是 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 在任意坐标系中的逆变分量，$\boldsymbol{Q}_s^{-1} \equiv (Q_s^{-1})^i{}_l$ 是我们要对其求逆的线性算子， ϵ^{ijk} 是$\mathbb{R}^3$ 中的列维-奇维塔张量， $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta^i_j$ 是克罗内克δ，用于在 $\mathbb{R}^3$中升降指标。全文始终采用对重复指标求和的爱因斯坦求和约定。为简化计算，我们考虑由$\hat{}\boldsymbol{w}$构成的基底，其中$\hat{}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{b} = 0$是任意单位向量，使得$\hat{}\boldsymbol{w}$，以及 $\boldsymbol{b}$。为简化记号，我们定义 $\boldsymbol{b}\times\hat{}\boldsymbol{w} \equiv \hat{}\boldsymbol{w}^*$，并注意到$\hat{}\boldsymbol{w}\cdot\hat{}\boldsymbol{w}^* = 0$、$\hat{}w^{*2} = \hat{}w^2 = 1$以及$(\hat{}\boldsymbol{w}^*)^* = \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}\times\hat{}\boldsymbol{w}) = -\hat{}\boldsymbol{w}$。由于极化速度位于与 $\boldsymbol{b}$ 正交的平面内，因此有

$$\boldsymbol{v}_{ps} = \alpha_s \hat{\boldsymbol{w}} + \beta_s \hat{\boldsymbol{w}}^*, \tag{4.5}$$

其中， α_s 和 β_s 是待确定的关于 $\boldsymbol{U}_s$ 的两个标量函数。将此表达式代入 Eq 4.1 中的 $\boldsymbol{v}_p$ ，可得

$$\alpha_s\hat{\boldsymbol{w}} + \beta_s\hat{\boldsymbol{w}}^* - \alpha_s\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}}\times(\hat{\boldsymbol{w}}\cdot\nabla\bar{\boldsymbol{v}}_s) - \beta_s\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}}\times(\hat{\boldsymbol{w}}^*\cdot\nabla\bar{\boldsymbol{v}}_s) = \boldsymbol{U}_s. \tag{4.6}$$

将 Eq 4.6 分别投影到基底元素 $\hat{}\boldsymbol{w}$ 和 $\hat{}\boldsymbol{w}^*$上，可得

$$\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{U}_s = \alpha_s \left(1 - \hat{\boldsymbol{w}} \cdot \left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}})\right]\right) - \beta_s \hat{\boldsymbol{w}} \cdot \left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)\right], \tag{4.7}$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{U}_s = \beta_s \left(1 - \hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)\right]\right) - \alpha_s \hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)\right]. \tag{4.8}$$

方程 4.7 和 4.8 构成关于未知量 α_s 和 β_s的线性方程组。解出 α_s和 β_s 可得

$$\alpha_s = \frac{(1 - \tilde{\delta}_s)\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{U}_s + \gamma_s \hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{U}_s}{\Delta_s}, \tag{4.9}$$

$$\beta_s = \frac{\tilde{\gamma}_s \hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{U}_s + (1 - \delta_s)\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{U}_s}{\Delta_s}, \tag{4.10}$$

其中

$$\delta_s = \hat{\boldsymbol{w}} \cdot \left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)\right], \tag{4.11}$$

$$\tilde{\delta}_s = \hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)\right], \tag{4.12}$$

$$\gamma_s = \hat{\boldsymbol{w}} \cdot \left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)\right], \tag{4.13}$$

$$\tilde{\gamma}_s = \hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)\right], \tag{4.14}$$

且行列式 Δ_s 为

$$\Delta_s = 1 - (\delta_s + \tilde{\delta}_s) + (\delta_s \tilde{\delta}_s - \gamma_s \tilde{\gamma}_s). \tag{4.15}$$

利用三重积 $\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{a}_2 \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1)$ 和 $(\hat{}\boldsymbol{w}^*)^* = -\hat{}\boldsymbol{w}$ 的循环性质，方程 4.11–4.14 中的系数可写成更直观的形式：

$$\delta_s = -\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \left(\frac{\boldsymbol{b} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\Omega_{cs}}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{w}}^*, \tag{4.16}$$

$$\tilde{\delta}_s = -\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{b} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\Omega_{cs}}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{w}}, \tag{4.17}$$

$$\gamma_s = \hat{\boldsymbol{w}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{b} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\Omega_{cs}}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{w}}^*, \tag{4.18}$$

$$\tilde{\gamma}_s = \hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \left(\frac{\boldsymbol{b} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s}{\Omega_{cs}}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{w}}. \tag{4.19}$$

˜将上述系数表达式 δ_s， δ_s， γ_s和 $\tilde{\gamma}_s$代入方程 4.9、4.10 和 4.15，得到

$$\alpha_s = \frac{1}{\Delta_s}\left(\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{U}_s + (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \hat{\boldsymbol{w}})\, \hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{U}_s + (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \hat{\boldsymbol{w}}^*)\, \hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{U}_s\right), \tag{4.20}$$

$$\beta_s = \frac{1}{\Delta_s}\left(\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{U}_s + (\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \hat{\boldsymbol{w}}^*)\, \hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{U}_s + (\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \hat{\boldsymbol{w}})\, \hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{U}_s\right), \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\Delta_s = {} & 1 + (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \hat{\boldsymbol{w}} + \hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \hat{\boldsymbol{w}}^*) \\ & + [(\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \hat{\boldsymbol{w}})(\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \hat{\boldsymbol{w}}^*) - (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \hat{\boldsymbol{w}}^*)(\hat{\boldsymbol{w}}^* \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \hat{\boldsymbol{w}})],\end{aligned} \tag{4.22}$$

其中 $\boldsymbol{T}_s \equiv (\boldsymbol{b}/\Omega_{cs} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)_\perp$： $W_\perp \to W_\perp$ 线性算子 $\boldsymbol{b}/\Omega_{cs} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s$ 被限制为仅作用于位置 $\boldsymbol{x}$ 、时刻 t处垂直于 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\ t)$ 的子空间，其定义为$W_\perp \equiv \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 | \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\ t) \cdot \boldsymbol{y} = 0\}$。将方程 4.20 和 4.21 代入方程 4.5，并回想 $\boldsymbol{U}_s = \hat{}\boldsymbol{w}(\hat{}\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{U}_s) + \boldsymbol{w}^*(\hat{}\boldsymbol{w}^* \cdot \boldsymbol{U}_s)$，可得 $\boldsymbol{v}_{ps}$的表达式

$$\boldsymbol{v}_{ps} = \frac{1}{\Delta_s}(\boldsymbol{U}_s + [\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{T}_s \cdot \boldsymbol{e}^j)\boldsymbol{e}_j] \cdot \boldsymbol{U}_s), \tag{4.23}$$

其中 $\boldsymbol{e}^i = \{\hat{}\boldsymbol{w}, \hat{}\boldsymbol{w}^*\}$ 是 $W_\perp$的标准正交基元素。由于 $\hat{}\boldsymbol{w}$ 在垂直于 $\boldsymbol{b}$的平面内方向任意，因此我们可以将结果表示为与基无关的形式：

$$\boldsymbol{v}_{ps} = \frac{1 + \boldsymbol{T}_s}{\Delta_s} \cdot \boldsymbol{U}_s = \frac{1 + (\boldsymbol{b} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)_\perp/\Omega_{cs}}{\Delta_s} \cdot \boldsymbol{U}_s. \tag{4.24}$$

我们注意到，方程 4.3 中的 $\boldsymbol{U}_s$ 属于正交子空间 $W_\perp$ ，因此 $(\boldsymbol{b} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)_\perp \cdot \boldsymbol{U}_s = (\boldsymbol{b} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s) \cdot \boldsymbol{U}_s$。与基无关形式下的行列式 Δ_s 由方程 4.22 构造而成，可写为

$$\Delta_s = 1 + \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}_s) + \det(\boldsymbol{T}_s), \tag{4.25}$$

或者，显式地利用 $\boldsymbol{T}_s$的定义，可写为

$$\Delta_s = 1 + \mathrm{tr}\left(\left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s\right]_\perp\right) + \det\left(\left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s\right]_\perp\right). \tag{4.26}$$

迹项为

$$\mathrm{tr}\left(\left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s\right]_\perp\right) = \frac{1}{\Omega_{cs}} \epsilon_i{}^{jk} b_k \nabla_j \bar{v}_s^i = \frac{1}{\Omega_{cs}} \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \bar{\boldsymbol{v}}_s). \tag{4.27}$$

同时，对于任意线性映射 A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，其在 $W_\perp$ 子空间上的限制的行列式可表示为 $\det(A_\perp) = \epsilon_\perp^{kl} \epsilon_{\perp\ ij} A^i{}_k A^j{}_l/2$，其中 $\epsilon_\perp^{ij} \equiv \epsilon^{ijk} b_k$表示 $W_\perp$上诱导的列维-奇维塔符号。方程 4.26 中的行列式项变为

$$\begin{aligned}\det\left(\left[\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s\right]_\perp\right) &= \frac{1}{2} \epsilon_\perp^{kl} \epsilon_{\perp ij} \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s\right)^i{}_k \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\Omega_{cs}} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s\right)^j{}_l \\ &= \frac{1}{2\Omega_{cs}^2} \epsilon_\perp^{kl} \epsilon_{\perp\ ij} (\nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)^i{}_k (\nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)^j{}_l = \frac{1}{\Omega_{cs}^2} \det(\nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)_\perp,\end{aligned} \tag{4.28}$$

其中我们利用了 $(\boldsymbol{b} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)^i{}_k = \epsilon_\perp^{ij} \nabla_j \bar{v}_k$ 以及 $\epsilon_\perp^{ki} \epsilon_{\perp\ kj} = (\Pi_\perp)^i{}_j$这一事实。最后，方程 4.25 中的行列式 Δ_s 变为

$$\Delta_s = 1 + \frac{\boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \bar{\boldsymbol{v}}_s)}{\Omega_{cs}} + \frac{\det(\nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)_\perp}{\Omega_{cs}^2}, \tag{4.29}$$

其中包含由涡量的平行分量 $\boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \bar{\boldsymbol{v}}_s)/\Omega_{cs} \sim O(\epsilon)$引起的修正，以及与流剪切 $\det(\nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)_\perp/\Omega_{cs}^2 \sim O(\epsilon^2)$相关的非线性修正。对于线性几何，在冷离子近似下，并且当主导阶离子垂直流纯粹为 $E \times B$ 漂移 $\bar{\boldsymbol{v}}_\perp = \boldsymbol{v}_E$时，方程 4.29 化为 Reiser（2012）中的方程 (A6)。因此，极化速度的最终解由方程 3.15 给出，或者用更简洁的形式表示为

$$\boldsymbol{v}_{ps} = \boldsymbol{Q}_s(\bar{\boldsymbol{v}}_s) \cdot \boldsymbol{U}_s, \tag{4.30}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_s(\bar{\boldsymbol{v}}_s) = \frac{1 + (\boldsymbol{b} \times \nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)/\Omega_{cs}}{1 + \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \bar{\boldsymbol{v}}_s)/\Omega_{cs} + \det(\nabla \bar{\boldsymbol{v}}_s)_\perp/\Omega_{cs}^2}. \tag{4.31}$$

在漂移排序 $\bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \nabla/\Omega_{cs} \sim \epsilon$ 下，映射 $\boldsymbol{Q}_s^{-1}$可逆，因为行列式 $\Delta_s = 1 + O(\epsilon)$ 不为零。在附录 A 中，我们验证了方程 4.30 中给出的$\boldsymbol{v}_{ps}$ 表达式满足方程 4.1。

我们注意到，方程 4.30 是一个非微扰结果，其中包含 ϵ 的所有阶次项；将方程 4.31 的分母作泰勒展开即可看出这一点。 $\boldsymbol{Q}_s$ 中包含的所有次阶项，都是精确守恒定律得以成立所必需的。

5. 守恒漂移约化模型

基于方程 3.15，我们现在构建漂移约化模型，其精度适用于 $O(\epsilon)$，并满足能量和动量守恒定律，且这些定律严格成立，即对 ϵ 的所有阶次均成立。该模型演化每种物种的密度、平行速度和压强，并由涡量方程、与之关联的泊松方程（用于求解 ϕ），以及矢势 $\boldsymbol{A}$ 的安培方程闭合。

Exp在方程 2.1 和 2.3 中将总流体速度表示为 $\boldsymbol{V}_s = \bar{\boldsymbol{v}}_s + \boldsymbol{v}_{ps}$，我们得到 in

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot [n_s(\bar{\boldsymbol{v}}_s + \boldsymbol{v}_{ps})] = \mathcal{S}_s, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}p_s\right) + \nabla \cdot \left[\frac{3}{2}p_s(\bar{\boldsymbol{v}}_s + \boldsymbol{v}_{ps}) + \boldsymbol{q}_s\right] + \boldsymbol{P}_s : \nabla(\bar{\boldsymbol{v}}_s + \boldsymbol{v}_{ps}) = \mathcal{Q}_s + r_s\overline{\mathcal{K}}_s, \tag{5.2}$$

其中， $\boldsymbol{v}_{ps}$ 可由方程 3.15 隐式给出，也可通过方程 4.2 显式给出；我们将 $\overline{\mathcal{K}}_s \equiv m_s n_s \bar{v}_s^2/2$ 定义为流体动能的主阶分量。通过对 $O(\epsilon)$ 展开后的动量方程 2.2 作投影，可得到物种 s 沿磁场 $v_{\parallel s} = \boldsymbol{V}_s \cdot \boldsymbol{b}$ 平行方向的速度分量方程

$$\frac{\partial(m_s n_s \bar{\boldsymbol{v}}_s)}{\partial t} + \nabla \cdot (m_s n_s \boldsymbol{V}_s \bar{\boldsymbol{v}}_s) + \nabla \cdot \boldsymbol{P}_s - q_s n_s(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}_s \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_s, \tag{5.3}$$

投影到 $\boldsymbol{b}$上，得到

$$\frac{\partial(m_s n_s v_{\parallel s})}{\partial t} + \nabla \cdot (m_s n_s v_{\parallel s}\boldsymbol{V}_s) - m_s n_s \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \frac{d_s \boldsymbol{b}}{dt} + (\nabla \cdot \boldsymbol{P}_s)_\parallel = \mathcal{R}_{\parallel s} + q_s n_s E_\parallel, \tag{5.4}$$

其中 $(\nabla \cdot \boldsymbol{P}_s)_\parallel \equiv \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{P}_s)$，其他量也同理。

为推导涡量方程，我们施加准中性约束 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$。首先考虑总动量密度主阶分量的力平衡方程，$\boldsymbol{\mathcal{M}} = \sum_s m_s n_s \bar{\boldsymbol{v}}_s$。如第 6 节所示，该方程为

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}}{\partial t} + \nabla \cdot \sum_s (\boldsymbol{V}_s \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s + \boldsymbol{P}_s) = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} + \sum_s \boldsymbol{\mathcal{R}}_s, \tag{5.5}$$

其中，总电流 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_\parallel + \boldsymbol{J}_\perp + \boldsymbol{J}_p$ $\boldsymbol{J}_\parallel +$ 是主阶分量 $\bar{\boldsymbol{J}}_\perp = \sum_s q_s n_s \boldsymbol{v}_{\parallel s} + \sum_s q_s n_s \bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}$与次阶极化项 $\boldsymbol{J}_p = \sum_s q_s n_s \boldsymbol{v}_{ps}$之和。我们注意到，方程 5.5 与方程 2.15 中未作漂移约化的形式相似。将方程 5.5 与 $\boldsymbol{B}$ 作叉积可得

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_\parallel + \frac{\boldsymbol{b}}{B} \times \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{b}}{B} \times \left(\sum_s [\nabla \cdot (\boldsymbol{V}_s \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s + \boldsymbol{P}_s) - \boldsymbol{\mathcal{R}}_s]\right), \tag{5.6}$$

可改写为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_\parallel + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{b} \times \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}}{B}\right) + \frac{\boldsymbol{b}}{B} \times \left(\sum_s [\nabla \cdot (\boldsymbol{V}_s \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s + \boldsymbol{P}_s) - \boldsymbol{\mathcal{R}}_s]\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{b}}{B}\right) \times \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}. \tag{5.7}$$

施加准中性约束 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$，可得$\varpi\equiv-\nabla\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\mathcal{M}}/B)$ 的涡量方程，即

$$\frac{\partial\varpi}{\partial t}=\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_{\parallel}+\bar{\boldsymbol{J}}_{\perp})+\nabla\cdot\left[\sum_s\frac{\boldsymbol{b}}{B}\times\nabla\cdot(\boldsymbol{V}_s\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s)\right]+\nabla\cdot\left[\left(\frac{(\boldsymbol{\Pi}_{\perp}-\boldsymbol{bb})\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}}{B^2}\right)\times\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}\right],\tag{5.8}$$

其中我们使用法拉第定律，并且由于 $\boldsymbol{b}\cdot\partial_t\boldsymbol{b}=0$, $\partial_t(\boldsymbol{b}/B)=2\boldsymbol{bb}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})/B^2-\nabla\times\boldsymbol{E}/B^2=(\boldsymbol{bb}-\boldsymbol{\Pi}_{\perp})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})/B^2$，其中 $\boldsymbol{\Pi}_{\perp}=\mathbb{I}-\boldsymbol{bb}$ 为垂直投影算子。在方程 5.8 中，我们还将压力驱动项和动量驱动项表示为 $\sum_s\boldsymbol{b}\times\overline{(\nabla\cdot\boldsymbol{P}_s-\boldsymbol{\mathcal{R}}_s)}/B=\sum_s q_sn_s\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}=\boldsymbol{J}_{\perp}$。在方程 5.8 中使用 $\boldsymbol{V}_s=\bar{\boldsymbol{v}}_s+\boldsymbol{v}_{ps}$ 后，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varpi}{\partial t}=&\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_{\parallel}+\bar{\boldsymbol{J}}_{\perp})+\nabla\cdot\left[\sum_s\frac{\boldsymbol{b}}{B}\times\nabla\cdot(\bar{\boldsymbol{v}}_s\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s)\right]+\nabla\cdot\left[\left(\frac{(\boldsymbol{\Pi}_{\perp}-\boldsymbol{bb})\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}}{B^2}\right)\times\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}\right]\\&+\nabla\cdot\left[\sum_s\frac{\boldsymbol{b}}{B}\times\nabla\cdot(\boldsymbol{Q}_s(\bar{\boldsymbol{v}}_s)\cdot\boldsymbol{U}_s\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s)\right],\end{aligned}\tag{5.9}$$

其中 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 通过方程 4.30 用主导阶量表示，$\boldsymbol{U}_s$ 由方程 4.3 给出。方程 5.9 中的最后一项是对文献中常见涡量方程的守恒修正，用于考虑主导阶动量 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 的极化平流。对标量涡量进行时间演化后，通过 $\varpi=-\nabla\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\mathcal{M}}/B)$ 定义的泊松方程恢复其通常形式（参见例如 Giacomin 等 （2022*b*））,

$$\nabla\cdot\left(\frac{\rho}{B^2}\nabla_{\perp}\phi\right)=\varpi-\nabla\cdot\left(\sum_s\frac{(\nabla\cdot\boldsymbol{P}_s)_{\perp}-\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\perp s}}{B\Omega_{cs}}\right)-\nabla\cdot\left(\frac{\rho}{B^2}\left.\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\perp}\right),\tag{5.10}$$

其中，因垂直摩擦项大小及电磁效应强度的额外排序假设，通常会忽略由 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\perp s}$ 和 $\partial_t\boldsymbol{A}|_{\perp}$ 引起的项（Zeiler 等，1997）。在方程 5.10 中，$\rho\equiv\sum_s m_sn_s$ 是等离子体的总质量密度，给定向量 $\boldsymbol{W}$ 的垂直分量则使用投影算子 $\boldsymbol{W}_{\perp}\equiv\boldsymbol{\Pi}_{\perp}\cdot\boldsymbol{W}$ 定义。

总而言之，我们提出的漂移约化流体模型满足主阶能量 $\mathcal{H}$、主阶动量 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$、质量和电荷的精确守恒定律（如第 6 节所示），由以下方程给出：矩方程 5.1、5.2 和 5.4；关于 ϖ 的涡量方程 5.9；关于 ϕ 的泊松方程 5.10；方程 4.2 中的极化漂移表达式（对应 $\boldsymbol{v}_{ps}$）；以及关于 $\boldsymbol{A}$ 的安培方程。在库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 下，该方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0(\boldsymbol{J}_{\parallel}+\bar{\boldsymbol{J}}_{\perp}+\boldsymbol{J}_p).\tag{5.11}$$

计算极化速度需要求出方程 4.2 中的 $\partial_t\bar{\boldsymbol{v}}_s$，而它本身是 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 的函数。这个耦合系统可以通过迭代过程隐式求解，也可以显式求解：先使用上一个时间步的 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 演化动力学场，再计算 $\partial_t\bar{\boldsymbol{v}}_s$ 以更新 $\boldsymbol{v}_{ps}$。然而，如何设计能够保持系统守恒性质的数值实现，仍有待未来研究。常用的非守恒漂移约化涡量方程是通过仅保留方程 5.9 的主导阶项得到的。这相当于忽略方程 5.9 中的最后一项，从而得到

$$\frac{\partial\varpi}{\partial t}\simeq\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_{\parallel}+\bar{\boldsymbol{J}}_{\perp})+\nabla\cdot\left[\sum_s\frac{\boldsymbol{b}}{B}\times\nabla\cdot(\bar{\boldsymbol{v}}_s\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s)\right]+\nabla\cdot\left[\left(\frac{(\boldsymbol{\Pi}_{\perp}-\boldsymbol{bb})\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}}{B^2}\right)\times\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}\right],\tag{5.12}$$

这就是文献中常见并已应用于漂移约化湍流代码的形式（Giacomin 等 2022*b*; Düll 等 2024; Gath 与 Wiesenberger（2019）;Stegmeir等2019）。对于 Reiser（2012）所研究的情形，采用守恒形式对整体湍流动力学的影响较小。事实上，为确保能量-动量一致性所需的修正，在漂移阶次展开中属于次主导项。然而，在流剪切变得很大的情形下，若方程 4.31 中的张量 $\boldsymbol{Q}_s$ 显著偏离 1，为了准确描述非线性动力学，可能有必要对涡量方程进行自洽处理，如方程 5.9 所示。

6. 守恒性质

为证明方程组方程 5.1、5.2、5.4、5.9 和 5.10 同时守恒能量和动量，我们遵循 Halpern等人 （2023）中的步骤。为获得物种 s 的平行方向动能密度 $\mathcal{K}_{\parallel s} \equiv m_s n_s v_{\parallel s}^2/2$ 的输运方程，我们将方程 5.4 乘以 $v_{\parallel s}$。经过直接的代数运算，可得

$$\frac{\partial \mathcal{K}_{\parallel s}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathcal{K}_{\parallel s} \boldsymbol{V}_s\right) - m_s n_s v_{\parallel s} \bar{\boldsymbol{v}}_s \cdot \frac{d_s \boldsymbol{b}}{dt} + \boldsymbol{v}_{\parallel s} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{P}_s) = \boldsymbol{v}_{\parallel s} \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}_s + q_s n_s \boldsymbol{v}_{\parallel s} \cdot \boldsymbol{E} - r_s \mathcal{K}_{\parallel s}. \tag{6.1}$$

我们注意到 $\boldsymbol{b} \cdot d_s \boldsymbol{b}/dt = d_s(b^2/2)/dt = 0$，因此，$\bar{\boldsymbol{v}} \cdot d_s \boldsymbol{b}/dt = \bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s} \cdot d_s \boldsymbol{b}/dt$。将 5.2 中的内能 $\mathcal{U}_s = 3p_s/2$ 贡献加到方程 6.1 上，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\mathcal{K}_{\parallel s} + \mathcal{U}_s)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\mathcal{K}_{\parallel s} + \mathcal{U}_s)\boldsymbol{V}_s + \boldsymbol{q}_s\right] - m_s n_s v_{\parallel s} \bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s} \cdot \frac{d_s \boldsymbol{b}}{dt} + \boldsymbol{P}_s : \nabla \boldsymbol{V}_s + \boldsymbol{v}_{\parallel s} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{P}_s) \\ = \mathcal{Q}_s + \boldsymbol{v}_{\parallel s} \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}_s + q_s n_s \boldsymbol{v}_{\parallel s} \cdot \boldsymbol{E} + r_s(\overline{\mathcal{K}}_s - \mathcal{K}_{\parallel s}).\end{aligned} \tag{6.2}$$

为求得主阶垂直动能 $\mathcal{K}_{\perp s} \equiv m_s n_s \bar{v}_{\perp s}^2/2 = \mathcal{K}_s - \mathcal{K}_{\parallel s}$ 和磁场能 $\mathcal{H}_B$ 的输运方程，我们将准中性方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ 乘以 ϕ，并将其表示为

$$0 = \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{J}) - (\boldsymbol{J}_\parallel + \bar{\boldsymbol{J}}_\perp + \boldsymbol{J}_p) \cdot \nabla \phi, \tag{6.3}$$

这里回顾一下 $\boldsymbol{J} \equiv \sum_s q_s n_s \boldsymbol{V}_s = \boldsymbol{J}_\parallel + \bar{\boldsymbol{J}}_\perp + \boldsymbol{J}_p$。总极化电流可表示为 $\boldsymbol{J}_p \equiv \sum_s \boldsymbol{J}_{ps} = \sum_s q_s n_s \boldsymbol{v}_{ps}$，其中 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 由方程 3.15 给出。因此，物种 s 的极化电流密度 $\boldsymbol{J}_{ps}$ 为

$$\boldsymbol{J}_{ps} = \frac{m_s n_s}{B} \boldsymbol{b} \times \left(\frac{d_s \bar{\boldsymbol{v}}_s}{dt} + r_s \bar{\boldsymbol{v}}_s\right). \tag{6.4}$$

首先，我们注意到，由于极化电流与 $\boldsymbol{b}$正交，因此可以表示为

$$\boldsymbol{J}_p \cdot \nabla \phi = \boldsymbol{J}_p \cdot \nabla_\perp \phi = -\boldsymbol{J}_p \cdot [\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{b} \times \nabla \phi)], \tag{6.5}$$

并且，鉴于 $\nabla \phi = -\boldsymbol{E} - \partial_t \boldsymbol{A}$，可将方程 6.5 改写为

$$\boldsymbol{J}_p \cdot \nabla \phi = -\boldsymbol{J}_p \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}_E) - \boldsymbol{J}_p \cdot \partial_t \boldsymbol{A}. \tag{6.6}$$

此外，由于 $\boldsymbol{v}_E$ 与物种无关，我们得到

$$\boldsymbol{J}_p \cdot \nabla \phi = -\sum_s \boldsymbol{J}_{ps} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}_E) - \boldsymbol{J}_p \cdot \partial_t \boldsymbol{A}. \tag{6.7}$$

将方程 6.7 中的 $E\times B$ 漂移表示为 $\boldsymbol{v}_E=\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}-\boldsymbol{w}_{\perp s}$，其中 $\boldsymbol{w}_{\perp s}$ 是物种 s 在以 $E\times B$ 速度运动的参考系中的漂移速度（参见方程 3.6），我们有

$$\sum_s \boldsymbol{J}_{ps}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}_E)=\sum_s\left[m_sn_s\left(\frac{d_s\bar{\boldsymbol{v}}_s}{dt}+r_s\bar{\boldsymbol{v}}_s\right)\cdot\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}\right]-\sum_s\boldsymbol{J}_{ps}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s}). \tag{6.8}$$

将 $\bar{\boldsymbol{v}}_s=v_{\parallel s}\boldsymbol{b}+\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}$ 分解为平行分量和垂直分量后，式 6.8 右端的第一项变为

$$\begin{aligned}\sum_s\left[m_sn_s\left(\frac{d_s\bar{\boldsymbol{v}}_s}{dt}+r_s\bar{\boldsymbol{v}}_s\right)\cdot\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}\right]=&\sum_s m_sn_s\left(\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}\cdot\frac{d_s\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}}{dt}+r_s\bar{v}_{\perp s}^2\right)\\&+\sum_s m_sn_sv_{\parallel s}\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}\cdot\frac{d_s\boldsymbol{b}}{dt}.\end{aligned} \tag{6.9}$$

式 6.9 右端的第一项导出物种 s, $\mathcal{K}_{\perp s}$ 的首阶垂直动能输运定律。事实上，我们有

$$m_sn_s\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}\cdot\left(\frac{d_s\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}}{dt}+r_s\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}\right)=\frac{\partial\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}}{\partial t}+\nabla\cdot(\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}\boldsymbol{V}_s)+r_s\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}, \tag{6.10}$$

其中用到了连续性方程 $d_sn_s/dt=r_sn_s-n_s\nabla\cdot\boldsymbol{V}_s$。利用式 6.7、6.8、6.9 和 6.10，我们得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_p\cdot\nabla\phi=&-\sum_s\left[\frac{\partial\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}}{\partial t}+\nabla\cdot(\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}\boldsymbol{V}_s)+r_s\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}\right]\\&-\sum_s m_sn_sv_{\parallel s}\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}\cdot\frac{d_s\boldsymbol{b}}{dt}+\sum_s\boldsymbol{J}_{ps}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s})-\boldsymbol{J}_p\cdot\partial_t\boldsymbol{A}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

根据式 6.11，我们可以将式 6.3 改写为

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{J})-(\boldsymbol{J}_\parallel+\bar{\boldsymbol{J}}_\perp)\cdot\nabla\phi-\sum_s\boldsymbol{J}_{ps}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s})+\boldsymbol{J}_p\cdot\partial_t\boldsymbol{A}\\&+\sum_s\left[\frac{\partial\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}}{\partial t}+\nabla\cdot(\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}\boldsymbol{V}_s)+r_s\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}\right]+\sum_s m_sn_sv_{\parallel s}\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}\cdot\frac{d_s\boldsymbol{b}}{dt}=0.\end{aligned} \tag{6.12}$$

项 $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{J})$ 可以用坡印廷通量表示为

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{J})=\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\nabla\cdot\left(\frac{\partial_t\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{\mu_0}\right), \tag{6.13}$$

其中使用了 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$。将项 $\nabla\cdot(\partial_t\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}/\mu_0)$ 写作

$$\nabla\cdot\left(\frac{\partial_t\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{\mu_0}\right)=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\partial_t\nabla\times\boldsymbol{A}-\frac{\nabla\times\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\partial_t\boldsymbol{A}=\frac{\partial\mathcal{H}_B}{\partial t}-\boldsymbol{J}\cdot\partial_t\boldsymbol{A}, \tag{6.14}$$

wh这里回顾一下， $\mathcal{H}_B=B^2/(2\mu_0)$ 是磁能密度，因此我们得到

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{J})=\frac{\partial\mathcal{H}_B}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{J}\cdot\partial_t\boldsymbol{A}. \tag{6.15}$$

将公式 6.15 代入公式 6.12，可得到场能、 $\mathcal{H}_B$和总主阶垂直动能之和的输运方程，

表示为

$$\frac{\partial(\mathcal{H}_B+\overline{\mathcal{K}}_\perp)}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{S}+\sum_s\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}\boldsymbol{V}_s)+(\boldsymbol{J}_\parallel+\bar{\boldsymbol{J}}_\perp)\cdot\boldsymbol{E}$$
$$+\sum_s r_s\overline{\mathcal{K}}_{\perp s}+\sum_s m_s n_s v_{\parallel s}\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}\cdot\frac{d_s\boldsymbol{b}}{dt}-\sum_s\boldsymbol{J}_{ps}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s})=0. \tag{6.16}$$

现在，我们将式 6.2 中平行能量密度和内能密度的贡献（对物种指标 s 求和后）加到式 6.16 中。因此，总领先阶能量密度 $\mathcal{H}\equiv\mathcal{H}_B\pm\sum_s(\mathcal{K}_s+\mathcal{U}_s)$ 的演化满足

$$\frac{\partial\overline{\mathcal{H}}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{S}+\sum_s[\overline{\mathcal{H}}_s\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{q}_s]\right)+\sum_s\boldsymbol{P}_s:\nabla\boldsymbol{V}_s+\sum_s\boldsymbol{v}_{\parallel s}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{P}_s)$$
$$+(\boldsymbol{J}_\parallel+\bar{\boldsymbol{J}}_\perp)\cdot\boldsymbol{E}-\sum_s q_s n_s\boldsymbol{v}_{\parallel s}\cdot\boldsymbol{E}-\sum_s\boldsymbol{J}_{ps}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s})$$
$$=\sum_s(\mathcal{Q}_s+\boldsymbol{v}_{\parallel s}\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}}_s), \tag{6.17}$$

其中，我们引入物种比能量密度 $\mathcal{H}_s\equiv\mathcal{K}_s+\mathcal{U}_s$。最后，我们通过分解 $\boldsymbol{v}_{ps}=\boldsymbol{v}_{\perp s}-\bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}=\boldsymbol{v}_{\perp s}-\boldsymbol{v}_E-\boldsymbol{w}_{\perp s}$ 来改写项 $\sum_s\boldsymbol{J}_{ps}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s})$，即

$$\boldsymbol{J}_{ps}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s})=q_s n_s(\boldsymbol{v}_{\perp s}-\boldsymbol{v}_E-\boldsymbol{w}_{\perp s})\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s})=q_s n_s(\boldsymbol{v}_{\perp s}-\boldsymbol{v}_E)\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s}). \tag{6.18}$$

鉴于 $\boldsymbol{v}_E=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/B^2$，可推得项 $qn\boldsymbol{v}_E\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s})=-q_s n_s\boldsymbol{w}_{\perp s}\cdot\boldsymbol{E}$。此外，我们有

$$q_s n_s(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s})=\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{v}_{*s}+\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\pi}s}+\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\mathcal{R}}s})=-(\nabla\cdot\boldsymbol{P}_s)_\perp+\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\perp s}. \tag{6.19}$$

将式 6.19 代入式 6.18，得到

$$\boldsymbol{J}_{ps}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{w}_{\perp s})=-\boldsymbol{v}_{\perp s}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{P}_s)+\boldsymbol{v}_{\perp s}\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}}_s+q_s n_s\boldsymbol{w}_{\perp s}\cdot\boldsymbol{E}, \tag{6.20}$$

将其代入式 6.17，得到

$$\frac{\partial\overline{\mathcal{H}}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{S}+\sum_s[\overline{\mathcal{H}}_s\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{P}_s\cdot\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{q}_s]\right)$$
$$+(\boldsymbol{J}_\parallel+\bar{\boldsymbol{J}}_\perp)\cdot\boldsymbol{E}-\sum_s q_s n_s(\boldsymbol{v}_{\parallel s}+\boldsymbol{w}_{\perp s})\cdot\boldsymbol{E}=\sum_s(\mathcal{Q}_s+\boldsymbol{V}_s\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}}_s). \tag{6.21}$$

回顾

$$\boldsymbol{J}_\parallel+\bar{\boldsymbol{J}}_\perp=\sum_s q_s n_s(\boldsymbol{v}_{\parallel s}+\boldsymbol{w}_{\perp s}), \tag{6.22}$$

我们发现，式 6.21 中的欧姆加热项相互抵消，因此领先阶能量输运方程为

$$\frac{\partial\overline{\mathcal{H}}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{S}+\sum_s[\overline{\mathcal{H}}_s\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{P}_s\cdot\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{q}_s]\right)=\sum_s(\mathcal{Q}_s+\boldsymbol{V}_s\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}}_s). \tag{6.23}$$

将此结果与方程 2.13 给出的总能量密度 $\mathcal{H}$ 的时间演化进行比较，我们发现两者形式相同。由方程 5.1、5.2 和 5.4 给出的模型，其中 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 由方程 3.15 给出，并与准中性麦克斯韦方程耦合，

因此，方程 2.5-2.8 精确地守恒总能量 $\mathcal{H} = \mathcal{H}[1 + O(\epsilon)]$ 的主阶分量 $\mathcal{H}$，也就是说，在 ϵ 的所有阶上均成立。此结果可推广到具有有限德拜长度的等离子体，不过为简化起见，我们假设 $\partial_t/\omega_p = 0$。

总流体动量密度的主阶分量 $\boldsymbol{\mathcal{M}} \equiv \sum_s m_s n_s \bar{\boldsymbol{v}}_s = \boldsymbol{\mathcal{M}}_\parallel + \boldsymbol{\mathcal{M}}_\perp$ 也是一个守恒量。物种 s 的平行动量方程 $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\parallel s} \equiv m_s n_s \boldsymbol{v}_{\parallel s}$，可通过将方程 5.4 乘以 $\boldsymbol{b}$ 得到，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\parallel s}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{V}_s \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\parallel s}) - \mathcal{M}_{\parallel s} \frac{d_s \boldsymbol{b}}{dt} - \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_{\perp s} \cdot \frac{d_s \boldsymbol{b}}{dt} \boldsymbol{b} + (\nabla \cdot \boldsymbol{P}_s)_\parallel \boldsymbol{b} - q_s n_s \boldsymbol{E}_\parallel = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\parallel s}, \quad (6.24)$$

其中 $\overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\perp s}} \equiv m_s n_s \bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s}$ 有定义。垂向动量 $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\perp s}$ 的演化由力平衡方程得到

$$m_s n_s \left. \frac{d_s \bar{\boldsymbol{v}}_s}{dt} \right|_\perp + r_s m_s n_s \bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s} - q_s n_s \boldsymbol{B} \times \bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s} = q_s n_s \boldsymbol{V}_s \times \boldsymbol{B}, \quad (6.25)$$

这是对极化速度定义（方程 3.15）的改写。利用连续性方程方程 5.1，可将方程 6.25 改写为

$$\left. \frac{d_s \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s}{dt} \right|_\perp + \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_{\perp s} \nabla \cdot \boldsymbol{V}_s - q_s n_s \boldsymbol{B} \times \bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s} = q_s n_s \boldsymbol{V}_s \times \boldsymbol{B}. \quad (6.26)$$

利用以下事实

$$\left. \frac{d_s \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s}{dt} \right|_\perp = \frac{d_s \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_{\perp s}}{dt} + \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_{\perp s} \cdot \frac{d_s \boldsymbol{b}}{dt} \boldsymbol{b} + \mathcal{M}_{\parallel s} \frac{d_s \boldsymbol{b}}{dt}, \quad (6.27)$$

将方程 6.24 和方程 6.26 相加，可得

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{V}_s \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s) + (\nabla \cdot \boldsymbol{P}_s)_\parallel \boldsymbol{b} - q_s n_s \boldsymbol{B} \times \bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\parallel s} + q_s n_s (\boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{V}_s \times \boldsymbol{B}). \quad (6.28)$$

最后，鉴于 $q_s n_s \boldsymbol{B} \times \bar{\boldsymbol{v}}_{\perp s} = q_s n_s \boldsymbol{E}_\perp - (\nabla \cdot \boldsymbol{P}_s)_\perp + \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\perp s}$，我们有

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{V}_s \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s + \boldsymbol{P}_s) = q_s n_s (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}_s \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{\mathcal{R}}_s, \quad (6.29)$$

并对所有物种 s 求和后，我们得到与非漂移约化结果（方程 2.15）类似的结果，即

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}}{\partial t} + \nabla \cdot \sum_s (\boldsymbol{V}_s \overline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_s + \boldsymbol{P}_s) = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} + \sum_s \boldsymbol{\mathcal{R}}_s, \quad (6.30)$$

这表明 总流体动量的主导阶贡献是守恒的 d.

7. 结论

漂移约化流体模型是模拟碰撞区等离子体湍流的常用工具。本文推导出一个守恒漂移约化系统，该系统适用于任意磁几何，且无需施加静电极限；这一关键特性有助于理解长时间动力学，并构建稳健的数值求解器。推导的核心步骤是对定义极化速度与 $\partial_t \boldsymbol{E}$ 关系的方程进行非微扰解析求逆，从而得到一个一致的、针对垂向动量主导阶的输运方程，以及一组闭合的守恒流体方程。本文的推导独立于闭合，因此既适用于 Braginskii 双流体闭合，也适用于多组分闭合（Braginskii

，1965；Zhdanov，2002；Poulsen 等，2020；Raghunathan 等，2022）。不同于基于展开导引中心拉格朗日量的变分方法（Brizard，2005；Jorge 等，2017；Mencke 与 Ricci，2025），我们直接在流体层面进行漂移约化，从运动方程出发，并要求严格满足守恒定律。精确守恒性质对漂移约化流体等离子体中湍流的影响将在未来工作中评估。

致谢

作者感谢 D. Mancini、J. Mencke、L. Stenger 和 G. Van Parys 就漂移约化模型和导引中心拉格朗日量方法进行了宝贵的讨论，并感谢匿名审稿人帮助改进本文。本研究在 EUROfusion联盟框架内开展，依托欧拉原子能研究与培训计划（资助协议编号：101052200 — EUROfusion），并由瑞士教育、研究与创新国务秘书处（SERI）资助。本文所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟、欧盟委员会或 SERI 的观点。欧盟、欧盟委员会和 SERI 均不对这些观点和意见负责。本研究还获得了瑞士国家科学基金会的部分资助。inte

利益声明

作者声明不存在利益冲突。

附录A. $\boldsymbol{v}_{ps}$ 精确求逆的证明

我们证明，方程 4.30 中 $\boldsymbol{v}_{ps}$ 的表达式满足方程 4.1。由于对所有物种的计算都相同，为避免冗杂，我们省略物种下标 s。将方程 4.30 代入方程 4.1，得到

$$(\Delta-1)\boldsymbol{U}=\frac{1}{\Omega_c}(\boldsymbol{b}\times\nabla\bar{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{U}-\frac{1}{\Omega_c}\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\bar{\boldsymbol{v}}-\frac{1}{\Omega_c^2}\boldsymbol{b}\times[((\boldsymbol{b}\times\nabla\bar{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{U})\cdot\nabla\bar{\boldsymbol{v}}]. \tag{A 1}$$

将上式写成分量形式

$$(\Delta-1)U^k=\frac{1}{\Omega_c}\epsilon^{kmn}b_m\nabla_n v_s U^s-\frac{1}{\Omega_c}\epsilon^{kmn}b_m\nabla_s v_n U^s-\frac{1}{\Omega_c^2}\epsilon^{kmn}b_m\epsilon^{pqr}b_q\nabla_p v_n\nabla_r v_s U^s. \tag{A 2}$$

通过将其中一个列维-奇维塔项因式分解，并再次引入张量 $\epsilon_\perp^{ij}$，可以继续推导。得到

$$(\Delta-1)U^k=-\frac{1}{\Omega_c}\epsilon_\perp^{kn}\left[\nabla_n v_s-\nabla_s v_n+\frac{1}{\Omega_c}\epsilon_\perp^{pr}\nabla_p v_n\nabla_r v_s\right]U^s\equiv-\frac{1}{\Omega_c}\epsilon_\perp^{kn}L_{ns}U^s. \tag{A 3}$$

注意，张量

$$L_{ns}=\nabla_n v_s-\nabla_s v_n+\frac{1}{\Omega_c}\epsilon_\perp^{pr}\nabla_p v_n\nabla_r v_s, \tag{A 4}$$

是反对称的，$L_{ns}=-L_{sn}$。事实上

$$L_{sn}=\nabla_n v_s-\nabla_s v_n+\frac{1}{\Omega_c}\epsilon_\perp^{pr}\nabla_p v_s\nabla_r v_n=\nabla_s v_n-\nabla_n v_s-\frac{1}{\Omega_c}\epsilon_\perp^{rp}\nabla_r v_n\nabla_p v_s=-L_{ns}. \tag{A 5}$$

在 $W_\perp$ 上，任意反对称张量都具有 $L_{ns} = \eta\epsilon_{\perp ns}$ 的形式，其中 η 为某个标量。为计算 η，我们将方程 A 4 与 $\epsilon_\perp^{ns}$ 缩并。回想起 $\epsilon_{\perp ns}\epsilon_\perp^{ns} = 2$，可得

$$\eta = \frac{1}{2}L_{ns}\epsilon_\perp^{ns} = \frac{1}{2}(\nabla_n v_s - \nabla_s v_n)\epsilon_\perp^{ns} + \frac{1}{\Omega_c}\epsilon_\perp^{pr}\epsilon_\perp^{ns}\nabla_p v_n \nabla_r v_s = \epsilon_\perp^{ns}\nabla_n v_s + \frac{1}{\Omega_c}\epsilon_\perp^{pr}\epsilon_\perp^{ns}\nabla_p v_n \nabla_r v_s. \tag{A 6}$$

将此结果用 $\boldsymbol{b} \times \nabla\bar{\boldsymbol{v}}$ 的迹和 $(\nabla\bar{\boldsymbol{v}})_\perp$ 的行列式表示，如方程 4.27 和 4.28 中所述，可得

$$\eta = (\boldsymbol{b} \times \nabla) \cdot \bar{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{\Omega_c}\det(\nabla\bar{\boldsymbol{v}})_\perp = \Omega_c(\Delta - 1). \tag{A 7}$$

代　入表达式 $L_{ns} = \eta\epsilon_{\perp ns}$，其中 $\eta = \Omega_c(\Delta - 1)$，代入方程 A 3，可得

$$U^k = -\epsilon_\perp^{kn}\epsilon_{\perp ns}U^s = (\Pi_\perp)^k{}_s U^s = U^k, \tag{A 8}$$

证明完毕。

参考文献

Braginskii, S. I. 1965 等离子体中的输运过程。等离子体物理评论 **1**，205。Brizard, A. J. 2005 守恒能量的有限贝塔电磁漂移流体方程。等离子体物理 **12** (9)，092302。Brizard, A. J. & Hahm, T. S. 2007 非线性回旋动力学理论基础。现代物理评论 **79**，421–468。Bufferand, H., Ciraolo, G., Düll, R., Falchetto, G., Fedorczak, N., Marandet, Y., Quadri, V., Raghunathan, M., Rivals, N., Schwander, F., Serre, E., Sureshkumar, S., Tamain, P. & Varadarajan, N. 2024 使用 SOLEDGE3X 对 TCV-X21 实验开展的全局三维全尺度湍流模拟。核材料与能源 **41**，101824。Coelho, A.J., Loizu, J., Ricci, P. & Tecchiolli, Z. 2024 使用 GBS 代码对仿星器中的等离子体湍流进行全局流体模拟。核聚变 **64** (7)，076057。Drake, J. F. & Antonsen, Thomas M., Jr. 1984 环形等离子体的非线性约化流体方程。流体物理学 **27** (4)，898–908。Dudson, B.D., Umansky, M.V., Xu, X.Q., Snyder, P.B. & Wilson, H.R. 2009 Bout++：并行等离子体流体模拟框架。计算物理通讯 **180** (9)，1467–1480。Dudson, B. D., Allen, A., Breyiannis, G., Brugger, E., Buchanan, J., Easy, L., Farley, S., Joseph, I., Kim, M., McGann, A. D. & 等 2015 Bout++：近期及当前进展。等离子体物理学杂志 **81** (1)，365810104。Düll, Raffael, Bufferand, Hugo, Serre, Eric, Ciraolo, Guido, Quadri, Virginia, Rivals, Nicolas & Tamain, Patrick 2024 在 SOLEDGE3X 中引入电磁效应。等离子体物理学进展 **64** (7-8)，e202300147。Gath, J. & Wiesenberger, M. 2019 漂移序流体方程的一致性。等离子体物理 **26** (3)，032304。Giacomin, M., Pau, A., Ricci, P., Sauter, O., Eich, T., ASDEX Upgrade 团队, Contributors, JET & TCV 团队 2022a 基于边缘湍流输运的托卡马克第一性原理密度极限标度及其对 ITER 的影响。物理评论快报 **128**，185003。Giacomin, M., Ricci, P., Coroado, A., Fourestey, G., Galassi, D., Lanti, E., Mancini, D., Richart, N., Stenger, L.N. & Varini, N. 2022b 用于自洽模拟托卡马克边界中的等离子体湍流和动理学中性粒子动力学的 GBS 代码。计算物理学杂志 **463**，111294。Halpern, Federico D., Waltz, Ronald E. & Bernard, Tess N. 2023 具有能量一致性的漂移序流体涡量方程。等离子体物理 **30** (3)，032302。Jorge, R., Ricci, P. & Loureiro, N. F. 2017 任意碰撞性下刮削层等离子体动力学的漂移动力学解析模型。等离子体物理学杂志 **83** (6)。

LeVeque, Randall J. 1992 守恒律数值方法，第2版。数学讲义。苏黎世联邦理工学院 。Birkhäuser Basel。Mencke, J. E. & Ricci, P. 2025 使用陀螺矩方法对线性等离子体装置进行扩展的漂移动力学全-f 湍流模拟。等离子体物理与受控聚变 **67** (3)。Oliveira, D.S., Body, T., Galassi, D., Theiler, C., Laribi, E., Tamain, P., Stegmeir, A., Giacomin, M., Zholobenko, W., Ricci, P., Bufferand, H., Boedo, J.A., Ciraolo, G., Colandrea, C., Coster, D., de Oliveira, H., Fourestey, G., Gorno, S., Imbeaux, F., Jenko, F., Naulin, V., Offeddu, N., Reimerdes, H., Serre, E., Tsui, C.K., Varini, N., Vianello, N., Wiesenberger, M., Wüthrich, C. & TCV 团队 2022 针对 TCV-X21 偏滤器位形 L 模参考算例对边缘湍流代码进行验证。核聚变 **62** (9)，096001。Poulsen, A., Rasmussen, J. Juul, Wiesenberger, M. & Naulin, V. 2020 碰撞多组分漂移流体模型。等离子体物理 **27** (3)，032305。Raghunathan, M, Marandet, Y, Bufferand, H, Ciraolo, G, Ghendrih, Ph, Tamain, P & Serre, E 2022 用于刮削层/边缘应用的多温广义 Zhdanov 闭合。等离子体物理与受控聚变 **64** (4)，045005。Reiser, Dirk 2012 重新审视线性装置的全局漂移流体模型。等离子体物理 **19** (7)，072317。Riva, F, Colin, C, Denis, J, Easy, L, Furno, I, Madsen, J, Militello, F, Naulin, V, Nielsen, A H, Olsen, J M B, Omotani, J T, Rasmussen, J J, Ricci, P, Serre, E, Tamain, P & Theiler, C 2016 TORPEX 实验中的团块动力学：多代码验证。等离子体物理与受控聚变 **58** (4)，044005。Scott, B. 2003 E×B 漂移湍流所致输运的特性。等离子体物理 **10** (4)，963–976。Simakov, Andrei N. & Catto, Peter J. 2003 具有平衡压强台基的低 β 碰撞等离子体中沿磁力线模的漂移序流体方程。等离子体物理 **10** (12)，4744–4757。Stegmeir, A., Ross, A., Body, T., Francisquez, M., Zholobenko, W., Coster, D., Maj, O., Manz, P., Jenko, F., Rogers, B. N. & Kang, K. S. 2019 使用 GRILLIX 对托卡马克边缘区域进行全局湍流模拟。等离子体物理 **26** (5)，052517。Zeiler, A., Drake, J. F. & Rogers, B. 1997 环形等离子体中包含离子热动力学的非线性约化 Braginskii 方程。等离子体物理 **4** (6)，2134–2138。Zhdanov, V M 2002 多组分等离子体中的输运过程。等离子体物理与受控聚变 **44** (10)，2283。Zholobenko, Wladimir, Zhang, Kaiyu, Stegmeir, Andreas, Pfennig, Jan, Eder, Konrad, Pitzal, Christoph, Ulbl, Philipp, Griener, Michael, Radovanovic, Lidija, Plank, Ulrike & ASDEX Upgrade 团队 2024 使用全局电磁跨碰撞漂移流体模型模拟 H 模条件下的托卡马克边缘刮削层湍流。核聚变 **64** (10)，106066。Zhu, Ben, Francisquez, Manaure & Rogers, Barrett N. 2018 GDB：托卡马克边缘等离子体湍流和输运的全局三维双流体模型。计算物理通讯 **232**，46–58。