arXiv:2601.05715v1 [math.AG] 9 Jan 2026

代数模叠中的几何刚性

ATABEY KAYGUN

摘要。我们研究固定向量空间 X 上的代数律 W 的二次模空间概形，考虑 $\mathrm{GL}(W)$ 在 $\mathrm{Hom}(W^{\otimes 2}, W)$ 上的结构传递作用。我们构造了一个内禀的三项变形复形 X，其纤维编码横向一阶类和主要障碍；在代数运算子轨迹上，该复形的上同调与标准的低阶变形上同调（依 Gerstenhaber 和 Nijenhuis–Richardson）一致。随后，我们定义一个规范的二次映射 $\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}}\colon H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) \to H^3_{\mathrm{inc}}(\mu)$，它控制模去等变形性后的二阶提升。若 μ 是约化分支中的光滑点，且 $(\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}})^{-1}(0) = \{0\}$，则 G 的 μ 轨道在该分支中是扎里斯基开集。即使二阶变形上同调不消失，这也为 Richardson 型几何刚性提供了坐标无关的解释。

引言

在……的基础上 [Kay25]，我们给出代数律模叠中几何刚性的内在判据。基于代数律的一个 GL-不变二次表示，我们构造关联变形复形，并提取一个规范的二次障碍映射 $\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}}$，该映射控制横向一阶类的二阶提升。我们证明，在模空间概形的一个既约不可约分支的光滑点 μ 处，μ 的各向异性（即 $(\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}})^{-1}(0) = \{0\}$）迫使 GL-轨道为扎里斯基开。这解释了即便二阶变形上同调不消失，几何刚性为何仍能存在。

令 W 为一个有限维 $\Bbbk$–向量空间，设 $W^{2,1} := \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W^{\otimes 2}, W)$，并令 $G := \mathrm{GL}(W)$ 通过结构传递作用于 $W^{2,1}$。遵循 Gabriel [Gab72]，我们考虑一类代数律，它们由一个 G–稳定闭子概形 $X \subseteq A_W$ 切出，其中 A_W 是所选对称类型（对称、反对称或两者皆非）的双线性乘法仿射空间，而 $X = \mathrm{Var}(Q)$ 由一个有限维 G–稳定子空间 $Q \subseteq \mathrm{Sym}^2(A^\vee)$ 定义。我们将相应的 W 商叠记为 $[X/G]$。[1] 于是，$G(\Bbbk)$ 在 $X(\Bbbk)$ 中的轨道参数化了 $\Bbbk$ 上的代数律同构类。一个基本问题是判定 $\mu \in X(\Bbbk)$ 何时在其不可约分支中具有扎里斯基开轨道，也就是说，何时 μ 具有几何刚性。上同调刚性的标准充分条件，即二阶变形上同调消失，往往过强：Richardson 构造了具有 $H^2\mathrm{Lie}(\mu) \neq 0$ [Ric67] 的几何刚性 Lie 代数族。

极化给出一个 G–等变双线性求值映射 $\Theta\colon A_W \times A_W \to Q^\vee$，以及定义在 X 上的典范三项复形，即关联变形复形 (1.3)。其第 2 和第 3 次纤维上同调分别刻画模掉等变形性后的一阶变形，以及主障碍空间；后者与代数运算子轨迹 [Kay25] 上通常的低次变形空间一致。随后，我们提取这一复形固有的二阶障碍：命题 3.4 将其归纳为典范二次映射 $\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}}\colon H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) \to H^3\mathrm{inc}(\mu)$，其消失刻画模掉等变形性后的二阶可提升性。我们的主要结果表明，各向异性会导致几何刚性：在定理 3.6 中，我们证明，若 $\mu \in (Z_{\mathrm{red}})_{\mathrm{sm}}$ 在约化分支 Z_{red} 上是各向异性的，则轨道 $G \cdot \mu$ 在 Z_{red} 中是扎里斯基开集。

[1] 本文中的所有构造在 X 上都是 G-等变的，因此下降到 $[X/G]$。特别地，Z_{red} 中的一个开轨道 $G \cdot \mu \simeq G/H$ 对应于 $[X/G]$ 的诱导分支中的一个开子叠 $[G/H]$。1

我们通过构造一个具有非平凡第二上同调的各向异性点，来说明李代数情形下这一机制：命题 3.11给出一个李代数 L，其具有 $H^2_{\text{李}}(L) \cong \mathbb{C}$，且二次障碍非零。随后，Richardson 稳定性判据确认了几何刚性 [Ric67]。

最后，我们记录开轨道情形下两个可计算的不变量。首先， G–等变Gram态射 $\Gamma\colon A_W \to \mathrm{Sym}^2(W^\vee)$按秩诱导出一个行列式分层。在定理 4.6 中，我们证明，在包含一个开轨道的不可约分支上，Gram 秩等于该轨道上该分支的一般秩。接着，在定理 5.2中，我们通过将关联复形限制到开轨道 $A^*_{G_\mu}(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Q}/\, U_0 \simeq G$，得到等变交理论中一个典范的陈特征恒等式，它在 Chow 环中表达为 G_μ。

已知哪些结果？固定向量空间上代数律模空间的代数几何方法W 至少可以追溯到 Gabriel [Gab72]：研究者考察$G = \mathrm{GL}(W)$在结构常数仿射参数空间上的结构传递作用，并分析由定义恒等式切出的闭子概形中的轨道几何。在维数很小的情况下，这一研究计划往往可以处理，并已在若干运算子背景中给出了明确分类及退化图景，特别是结合律与 Lie 律 [Maz79, GO88, GK96], ，以及二维代数的完整列表 [KV19]。其他代数律二次簇也存在类似的低维分类。例如，维数至 4 [的幂零复 Leibniz 代数、06], 4维约当代数 [Mar13], 、低维 Novikov 代数 [BdG13], ，以及维数不超过 7 [的幂零 Lie 代数 98]Gon。从 [Kay25], 所发展的关联簇视角来看，这些低维列表可视为一系列具体的测试案例，在这些案例中，轨道闭包、缺陷分层以及切空间–障碍理论框架均可同时计算，并可直接比较。然而，超出这些范围后，完整分类就十分罕见：Drozd 的驯性质–野性质二分法表明，一般分类问题通常具有野表示型 [Dro80], ，因此不应期待能够对轨道作出合理的全局枚举。

在模空间概形 μ 的一点附近，几何由变形上同调控制。在结合情形中，Gerstenhaber 将一阶变形与霍赫希尔德2-余循环相对应，并将主要障碍与霍赫希尔德3-类相对应 [Ger64]。在李代数情形中，Nijenhuis 和 Richardson 通过 Chevalley–Eilenberg 复形及其分次李括号给出了相应描述，将变形和障碍纳入 Maurer–Cartan 框架 [NR67]。交换结构和莱布尼茨结构也有类似的变形理论，分别通过哈里森上同调[Har62] 和莱布尼茨上同调 [LP93]。

一个经久不衰的主题是， $H^2(\mu)$的消失虽然足以保证光滑性以及经典李代数情形下轨道为开集 [NR67], ，却不是必要条件：Richardson 的例子表明，即使 $H^2(\mu) \neq 0$ [Ric67],，仍可能出现几何刚性，因此，一阶类积分的障碍确实是非线性的。形式模方法通过在微分分次李代数（或一个 L_∞-模型）中编码变形，并将障碍识别为 Maurer–Cartan 方程的二次及更高次项，解释了这种非线性Sch68，GM88]。对于具体的族，有时可以显式计算这些障碍映射；Fialowski–Penkava 及其合作者的工作，在低维李代数情形下给出了详尽的极小通用描述和障碍演算 [FP08，FPP11，FP15]。

从结构常数概形的视角来看，相对而言不太标准的是：如何从障碍理论的 $G \cdot \mu$ 的二次部分出发，在不选择坐标或固定环境微分分次李代数模型的情况下，给出一个直接的内在判据来强制保证扎里斯基开性。本文旨在为不变二次呈示提供这样一个判据，并将其与显式的 Richardson 型现象 [Ric67]联系起来。

文章结构。 第 1 节针对任意 G–不变二次呈示构造基本的关联变形复形及其相应的关联概形，并记录控制切向数据的正合序列。

在第 2 节中，我们研究由 δ 和 Φ 在一个不可约分支$Z \subseteq X$上诱导的秩分层；在由此得到的稠密开轨迹上，$C_X^\bullet$ 的上同调层是向量丛。我们通过证明 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) = 0$蕴含 $G{\cdot}\mu$在 Z_{red}中是扎里斯基开，从而建立上同调刚性与几何刚性之间的联系，并记录了其在 Z_{red}的光滑点处的逆命题。

第3节定义了典范二次障碍 $\kappa_2^{\mathrm{inc}}{}_{,\mu}\colon H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) \to H^3{}_{\mathrm{inc}}(\mu)$，并引入各向异性（$\ker\kappa_2^{\mathrm{inc}}{}_{,\mu} = 0$）。我们证明，在 $\mu \in (Z_{\mathrm{red}})_{\mathrm{sm}}$ 处的各向异性迫使轨道 $G{\cdot}\mu$ 成为扎里斯基开轨道，并将 κ_2 推广到常秩轨迹上。
第 4 节引入 G–等变格拉姆态射 $\Gamma\colon A_W \to \mathrm{Sym}^2(W^\vee)$及其秩分层，并利用它来区分哪些不可约分支含有开轨道。
最后，第5 节将关联复形限制到一个齐性开轨道上 $U_0 \simeq G/H$ 并推导出一个等变陈类恒等式，对附属于开轨道的表示论数据施加约束。

记号与约定。全文中，$\Bbbk$是一个特征 0 的代数闭域，所有$\Bbbk$–向量空间均为有限维，且 $(\cdot)^\vee$ 表示 $\Bbbk$–线性对偶。固定一个维数为 m 的 $\Bbbk$–向量空间W，并令 $G := \mathrm{GL}(W)$, $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{End}(W)$。

令 $\tau\colon W^{\otimes 2} \to W^{\otimes 2}$为交换算子。由于 $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$, $W^{\otimes 2} \cong \mathrm{Sym}^2 W \oplus \Lambda^2 W$ 并且我们设

$$W^{2,1}_{+} := \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\text{对称}^2 W,\ W),\quad W^{2,}{}_{-}{}^{1} := \text{同态}_{\Bbbk}(\Lambda^2 W,\ W),\quad W^{2,1} := \text{同态}_{\Bbbk}(W^{\otimes 2},\ W) = W^{2,}{}_{+}{}^{1} \oplus W^{2,}{}_{-}{}^{1}.$$

在拟运算例中，我们取 $A_W := W^{2,}{}_{1}$用于结合律和莱布尼茨律，$A_W := W^{2,}{}_{+}{}^{1}$用于交换律，$A_W := W^{2,}{}_{-}{}^{1}$用于 Lie 律，参见 [Kay25]。
固定一个有限维的 G–稳定子空间 $Q \subseteq \mathrm{Sym}^2(A_W^\vee)$，并记 $X := \mathrm{Var}(Q) \subseteq A_W$。我们将 A_W视为一个底层向量空间为 A_W的仿射空间，因此对所有 $\mu \in A_W$ 都有 $T_\mu A_W \simeq A_W$。对于$q \in Q$，我们将 $f_q(v) := q(v,\ v)$ 记作相应的二次多项式，并使用其极化形式

$$q(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\big(f_q(v_1 + v_2) - f_q(v_1) - f_q(v_2)\big).$$

对于一个 G–概形 Z和一个 G–表示 V，记号 $Z \times V \to Z$指带有对角 G–线性化的平凡向量丛。

我们采用 Fulton [Ful98]中的乔氏群和运算乔氏环。对于有限型 $\Bbbk$–概形Y，我们用 $A_*(Y)$ 表示模有理等价的循环，用 $A^*(Y)$ 表示运算乔氏环；若 Y 光滑且纯维数为 d，则我们认定 $A^*(Y) \cong A_{d-*}(Y)$。在等变情形下，我们用 $A^*_G(Y)$ 表示 G–等变运算乔氏环 [EG98]。

对于一个在 $\Bbbk$ 上局部为有限型的概形 Y，$Y_{\mathrm{sm}} \subseteq Y$ 表示光滑轨迹 [Aut，标签 01V5、02G1]。对于 Y 上的相干层 $\mathcal{F}$ 以及 $y \in Y(\Bbbk)$，我们将纤维记作 $\mathcal{F}(y) := \mathcal{F}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,\,y}} \Bbbk$。

1. The Fundamental Deformation Complex

1.1. 该　关联概形。 极化导出 G–等变双线性求值映射

$$\Theta\colon A_W \times A_W \longrightarrow Q^\vee, \qquad \Theta(\mu, \nu)(q) := q(\mu, \nu). \tag{1.1}$$

这诱导出一个平凡向量丛的态射 $\Phi\colon \mathcal{O}_{A_W} \otimes A_W \to \mathcal{O}_{A_W} \otimes Q^\vee$，其在 μ 处的纤维是线性映射 $\Phi_\mu(\nu) = \Theta(\mu, \nu)$。我们还通过 $s_\Theta(\mu, \nu) := (\mu, \nu, \Theta(\mu, \nu))$ 定义平凡丛 $A_W \times A_W \times Q^\vee \to A_W \times A_W$ 的一个截面 s_Θ。

引理 1.1。关联轨迹$\mathsf{Inc}(Q) \subset A_W \times A_W$定义为截面 s_Θ [Aut, Tag 01M1]的$Z(s_\Theta)$概形论零点轨迹 $\Bbbk$-点恰好是满足以下条件的配对(μ, ν)：对所有$q(\mu, \nu) = 0$。 $q \in Q$。

证明。取 Q 的一组基 $(q_1, \ldots\ldots, q_r)$。截面 s_Θ 对应于正则函数组 $(q_1(\mu, \nu), \ldots\ldots, q_r(\mu, \nu))$。根据定义， $Z(s_\Theta)$ 是由这些函数生成的理想所定义的闭子概形。因此，点 (μ, ν) 属于 $\mathsf{Inc}(Q)$，当且仅当它是这些函数的公共零点。□

对角嵌入 $\Delta(\mu) := (\mu, \mu)$ 将 $\mathsf{Inc}(Q)$ 拉回为代数簇 .

命题 1.2。参数概形 $X = \mathsf{Var}(Q)$ 定义为$\mathsf{Inc}(Q)$ 在 Δ 下的概形论逆像。具体而言，它是 A_W 中由二次型 $\{f_q\}_{q \in Q}$ 定义的闭子概形。

1.2. **基本正合列**。将 Φ 限制到 X，得到相干层态射$\Phi_X : \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk A_W \to \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk Q^\vee$。定义 $\mathcal{S} := \ker(\Phi_X)$ 和 $\mathcal{N} := \operatorname{coker}(\Phi_X)$。

引理 1.3。设 $\mu \in X(\Bbbk)$。在 $T_\mu A_W \simeq A_W$下，扎里斯基切空间 $T_\mu X$可识别为核$(\Phi_\mu) \subseteq A_W$

证明。 μ处的一个切向量是一个 $\Bbbk[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$–点 $\mu + \varepsilon\nu$，满足对所有 $q \in Q$，都有 $f_q(\mu + \varepsilon\nu) = 0$。展开二次型可得

$$f_q(\mu + \varepsilon\nu) = f_q(\mu) + 2\varepsilon q(\mu, \nu) + \varepsilon^2 q(\nu, \nu).$$

由于 $\mu \in X, f_q(\mu) = 0$。模去 ε^2 后，该条件化简为 $2\varepsilon q(\mu, \nu) = 0$。因此 $\Phi_\mu(\nu) = 0$。 □

命题 1.4。存在 X 上相干层的典范同构，$\mathcal{T}_X \cong \mathcal{S} = 核(\Phi_X)$，并且它们满足正合列：

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk A_W \xrightarrow{\Phi_X} \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk Q^\vee \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0. \tag{1.2}$$

证明。设 $i\colon X \hookrightarrow A_W$ 是一个闭浸入，其理想层为 I，由二次式$f_q(\mu) = q(\mu, \mu)$（$q \in Q$）生成。i的标准关联余核正合列给出 X 上相干层的正合列

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A_W}\big|_X \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow 0,$$

因此，对偶化后，

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{T}_{A_W}\big|_X \longrightarrow \mathcal{H}om(I/I^2, \mathcal{O}_X).$$

利用 $\mathcal{T}_{A_W}\big|_X \simeq \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk A_W$ 只需将最右侧的箭头识别为 Φ_X，相差一个无关紧要的标量 2（在 $\Bbbk$ 中可逆）。

生成元 f_q 诱导出一个满射 $\mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk Q \twoheadrightarrow I/I^2$，进而得到一个单射 $\mathcal{H}om(I/I^2, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk Q^\vee$。在此单射下，复合映射 $\mathcal{T}_{A_W}\big|_X \to \mathcal{H}om(I/I^2, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk Q^\vee$ 就是雅可比映射 $\nu \mapsto (q \mapsto df_q(\nu))$。由于 $df_q(\mu)(\nu) = 2q(\mu, \nu)$，此复合映射恰为 $2\Phi_X$。因此

$$\mathcal{T}_X = \ker\left(\mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk A_W \xrightarrow{2\Phi_X} \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk Q^\vee\right) \cong \ker(\Phi_X) = \mathcal{S}.$$

最后，(1.2) 是 Φ_X 的核–余核正合序列，其中 $\mathcal{N} := 余核(\Phi_X)$。 □

1.3. **关联变形复形。** 对于 $\mu \in X(\Bbbk)$ 和 $\xi \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，定义 $\delta_\mu(\xi) := \xi \cdot \mu \in T_\mu A_W \simeq A_W$。这将全局化为一个 $\mathcal{O}_X$–线性态射 $\delta\colon \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk \mathfrak{g} \to \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk A_W$。

引理 1 .5. </style}有 $\circ\ \delta = 0$。特别地，δ 可典范地经由 $\mathcal{S} := \ker(\Phi_X)$.

证明。由于 Q 是 G-稳定的，概形 X 是 G-稳定的。令 $\mu \in X$。则对所有 $g \in G$，$f_q(g \cdot \mu) = 0$。在单位元处对映射 $g \mapsto f_q(g \cdot \mu)$ 求微分，得到 $df_q(\mu)(\xi \cdot \mu) = 0$。由于 $df_q(\mu)(v) = 2q(\mu, v)$，这意味着 $\Phi_\mu(\delta_\mu(\xi)) = 0$。□

定义 1.6。 X 上的基本关联变形复形是一个由相干 $\mathcal{O}_X$–模组成的三项复形

$$C_X^\bullet\colon C_X^1 := \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk \mathfrak{g} \xrightarrow{\delta} C_X^2 := \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk A_W \xrightarrow{\Phi_X} C_X^3 := \mathcal{O}_X \otimes_\Bbbk Q^\vee, \tag{1.3}$$

集中于上同调次数 1，2，3。其上同调层为

$$\mathcal{H}_X^1 := \ker(\delta), \qquad \mathcal{H}_X^2 := \ker(\Phi_X)/\mathrm{im}(\delta) = \mathcal{S}/\mathrm{im}(\delta), \qquad \mathcal{H}_X^3 := \mathrm{coker}(\Phi_X) = \mathcal{N}.$$

定义 1.7。 固定 $\mu \in X(\Bbbk)$。取（1.3）在 μ 处的纤维，得到一个有限维 $\Bbbk$–向量空间复形

$$C_X^\bullet(\mu)\colon \mathfrak{g} \xrightarrow{\delta_\mu} A_W \xrightarrow{\Phi_\mu} Q^\vee, \quad \Phi_\mu \circ \delta_\mu = 0, \tag{1.4}$$

并且我们令 $H^i{}_{\mathrm{inc}}(\mu) := H^i\big(C_X^\bullet(\mu)\big)$ 对 $i = 1、2、3$。尽管 $H^i{}_{\mathrm{inc}}(\mu)$ 是从环境空间 X 中定义的，几何刚性是一个逐分支条件，取决于 $T_\mu Z_{\mathrm{red}}$ 与 $T_\mu X$ 之间的比较。

注意，$H^1_{\mathrm{inc}}(\mu) = \ker(\delta_\mu) = \mathrm{Lie}(G_\mu) \cong \mathrm{Der}(W, \mu)$。存在典范比较映射 $\mathrm{H}^i_X(\mu) \longrightarrow H^i{}_{\mathrm{inc}}(\mu)$；当边界映射的秩在 μ 附近局部恒定时，这些映射是同构。

注 1.8。 在代数运算子轨迹 $X_{\mathsf{Type}} = \mathrm{Var}(Q_{\mathsf{Type}})$ 对于 类型 $\in \{\mathsf{Assoc}、\mathsf{Comm}、\mathsf{Leib}、\mathsf{Lie}\}$ 中，中间上同调 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu)$ 恢复了通常的一阶变形空间（霍赫希尔德、哈里森、莱布尼茨、切瓦利 – 艾伦伯格），如 [Kay 25], 所述，这与安德烈–奎伦上同调 [Qui70、And74] 以及代数运算子切复形 [HNP19] 的思想一致。

2. 上同调刚性与几何刚性

2.1. **秩轨迹。** 我们从一般的行列式图景开始：有限局部自由模之间的映射的秩条件定义了 Zariski 闭（或开）轨迹。一种便捷的形式化方法是使用 Fitting 理想。

引理 2.1。 设 Y 为一个概形，并设 $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 为有限局部自由 $\mathcal{O}_Y$–模之间的一个态射，其秩分别为 e 和 f。对于每个整数 $r \geq 0$，轨迹

$$Y_{\leq r}(\varphi) := \{y \in Y \mid \mathrm{rank}(\varphi \otimes \kappa(y)) \leq r\}$$

是 Y 的闭子集（事实上，它是在任意局部平凡化中由 $(r+1) \times (r+1)$ 子式切出的闭子概形）。因此，秩（$\varphi \otimes \kappa$（y））是 y 的下半连续函数。

证明。在 Y 上，该命题是扎里斯基局部的。在一个仿射开集 $V = \mathrm{Spec}\ R$ 上，若 $\mathrm{E}|_V \simeq \mathcal{O}_V^{\oplus e}$ 且 $\mathrm{F}|_V \simeq \mathcal{O}_V^{\oplus f}$，则映射 $\varphi|_V$ 由一个 $f \times e$ 矩阵 A 给出，其元素属于 R。对于一个素理想 $\mathfrak{p} \subset R$，$A \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ 的秩至多为 r，当且仅当所有 $(r+1) \times (r+1)$ 子式在 $\kappa(\mathfrak{p})$ 中都为零；也就是说，当且仅当 $\mathfrak{p}$ 包含由这些子式生成的理想。这个理想可以表示为 $\mathrm{coker}(\varphi|_V)$ 的某个适当的 Fitting理想；参见 Stacks Project 中关于 Fitting理想的第15.8节 [Aut，标记 07Z6]。因此，$Y_{\leq r}(\varphi)$ 在 V 上是闭的，并且这些闭条件可以粘合。□

推论 2.2。 设 Y 不可约，且设 $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 如引理 2.1所述。则存在一个稠密开子集 $U \subseteq Y$，在其上 $(\varphi \otimes \kappa(y))$ 为常数，且等于其在 Y 上的最大值。

证明。 令 $r_{\max}$ 为秩$(\varphi \otimes \kappa(y))$在 Y上的最大值。那么 $Y_{\leq r_{\max}-1}(\varphi)$ 由引理 2.1可知是闭集，并且是一个真子集，因为某处会出现 $r_{\max}$。其补集 $U := Y \setminus Y_{\leq r_{\max}-1}(\varphi)$ 是一个稠密开集，在其上秩为 $\geq r_{\max}$，因此等于 $r_{\max}$。 □

我们将此方法应用两次，分别应用于 Φ_X 和 δ 在固定分支的约化光滑轨迹上的限制。

2.2. **两种秩分层**。 取一个不可约分支 $Z \subseteq X$，记其约化子概形为 Z_{red}，并令 $U := (Z_{\mathrm{red}})_{\mathrm{sm}}$。将基本变形复形限制到 U 上时，我们得到一个向量丛复形：

$$C_U^\bullet\colon \mathcal{O}_U \otimes_{\Bbbk} \mathfrak{g} \xrightarrow{\delta_U} \mathcal{O}_U \otimes_{\Bbbk} A_W \xrightarrow{\Phi_U} \mathcal{O}_U \otimes_{\Bbbk} Q^\vee.$$

对于整数 r，$d \geq 0$，定义秩分层

$$U_{\Phi,=r} := \{\mu \in U \mid \operatorname{rank}(\Phi_\mu) = r\}, \qquad U_{\delta,=d} := \{\mu \in U \mid \operatorname{rank}(\delta_\mu) = d\}.$$

由引理 2.1可知，轨迹 $\{$秩$(\Phi_\mu) \leq r\}$ 和 $\{$秩$(\delta_\mu) \leq d\}$ 是闭的，因此每个等秩分层都是局部闭的。

定义 2.3。 令 r_Z 为 Φ 在 U 上的一般秩，并令 d_Z 为 δ 在 U上的一般秩，即推论 2.2所给出的稠密开集上的常值。定义 主常秩轨迹

$$U^\circ := U_{\Phi,=r_Z} \cap U_{\delta,=d_Z} \subseteq U.$$

根据构造，U° 在 U中是稠密开集。

这些秩函数的两个数值推论将在下文反复用到。首先，由于 $H^1_{\mathrm{inc}}(\mu) = \ker(\delta_\mu)$，根据秩-零化度定理可得

$$\dim_{\Bbbk} H^1_{\mathrm{inc}}(\mu) = \dim_{\Bbbk}(\mathfrak{g}) - \operatorname{rank}(\delta_\mu). \tag{2.1}$$

其次，由于 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) = \ker(\Phi_\mu)/\operatorname{im}(\delta_\mu)$，可得

$$\dim_{\Bbbk} H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) = \dim_{\Bbbk} \ker(\Phi_\mu) - \operatorname{rank}(\delta_\mu). \tag{2.2}$$

特别地，在 U° 上，$H^1_{\mathrm{inc}}(\mu)$和 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu)$的维数局部恒定。于是，关联复形（1.3）的纤维的欧拉示性数给出数值恒等式

$$\dim_{\Bbbk} H^1_{\mathrm{inc}}(\mu) - \dim_{\Bbbk} H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) + \dim_{\Bbbk} H^3_{\mathrm{inc}}(\mu) = \dim_{\Bbbk}(\mathfrak{g}) - \dim_{\Bbbk}(A_W) + \dim_{\Bbbk}(Q^\vee). \tag{2.3}$$

注意，左侧是纤维复形的逐点不变量，而右侧是仅由环境表示空间决定的统一常数。

2.3. **常秩轨迹**。 在 U° 上，态射 Φ_U 和 δ_U 具有常秩。这使得基本复形中出现的所有代数对象都成为向量丛，并且逐纤维上同调可由上同调层的纤维计算。

引理 2.4。 设 Y 为一个概形，并设 $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 是有限局部自由 $\mathcal{O}_Y$–模之间的一个态射。若秩$(\varphi \otimes \kappa(y))$在开子集 $V \subseteq Y$上为常数，则核$(\varphi)|_V$和余核$(\varphi)|_V$在 V上都是有限局部自由的。

证明。 该断言在 V 上是局部的。选取一个仿射开集 Spec $R \subseteq V$，使 E、F 平凡化，从而 φ 可由矩阵 $A \in M_{f\times e}(R)$ 表示。若在 Spec R 上秩恒为 r，则对每个素理想$\mathfrak{p} \subset R$，A 的某个 $r \times r$ 阶子式在 $\kappa(\mathfrak{p})$ 中不为零。因此，Spec R 被标准开集 $D(\Delta)$ 覆盖，在这些开集上，某个固定的 $r \times r$ 阶子式 Δ 可逆。在 R_Δ 上，初等行列变换可将 A 化为含有 $r \times r$ 阶单位元块的分块形式。在这种形式下，$\ker(\varphi)$ 和 $\operatorname{coker}(\varphi)$

显然分别是秩为 $e-r$ 和 $f-r$ 的自由模。这些局部平凡化能够粘合，因为它们定义在由标准开集构成的覆盖上。Stacks Project 第 10 节中证明了关于有限射影模的一个密切相关的结论。79 [Aut，引理 10.79.4，标签 05GD]。□

命题 2.5. 在 U° 上，层 $\mathcal{S} := \text{核}(\Phi_X)$ 和 $\mathcal{N} := \text{余核}(\Phi_X)$ 限制后为向量丛，且这些映射

$$\delta|_{U^\circ} : \mathcal{O}_{U^\circ} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{S}|_{U^\circ}, \qquad \Phi|_{U^\circ} : \mathcal{O}_{U^\circ} \otimes_{\mathbb{k}} A_W \longrightarrow \mathcal{O}_{U^\circ} \otimes_{\mathbb{k}} Q^\vee$$

具有常秩。特别地，上同调层 $\mathcal{H}^1_X = \text{核}(\delta)$ 和 $\mathcal{H}^2_X = \text{核}(\Phi_X)/\text{像}(\delta)$ 限制到 U° 上后为向量丛。

证明。将引理 2.4 应用于 Φ_U 在 U_Φ 上的情形，再结合 $=_{rZ}$，可知 $\mathrm{S}|_{U_\Phi}$、$=_{rZ}$ 和 $\mathrm{N}|_{U_\Phi}$、$=_{rZ}$ 是向量丛。进一步限制到 U° 上仍保持局部自由性。在 U° 上，映射 δ 根据引理 1.5 落在 S 中，并且根据定义具有常秩。再次将引理 2.4 应用于 $\delta|_{U^\circ}$（视为向量丛之间的态射），可得 $\ker(\delta)|_{U^\circ}$ 和 $\operatorname{coker}(\delta|_{U^\circ})$ 是向量丛；因此，商 $\mathrm{H}^2_X|_{U^\circ} = \mathrm{S}|_{U^\circ}/\operatorname{im}(\delta|_{U^\circ})$ 也是局部自由的。□

2.4. **刚性蕴含关系**。现在我们以一种明确体现两种秩分层作用的形式，陈述上同调刚性与几何刚性之间的比较。

定义 2.6。设 $\mu \in U(\mathbb{k})$。若点 μ 满足 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) = 0$，则称其为上同调刚性的；若 $G\cdot\mu$ 在 Z_{red} 中是扎里斯基开集，则称其在中几何刚性的（等价地，若 $\dim(G\cdot\mu) = \dim(Z_{\mathrm{red}})$ 且 μ 是 Z_{red} 的光滑点）。

我们使用以下关于局部闭子集的标准事实。

引理 2.7。设 Y 是定义在 $\mathbb{k}$ 上的不可约簇，且设 $W \subseteq Y$ 是一个局部闭子集。若维数 W = 维数 Y，则 W 在 Y 中是扎里斯基开集。

证明。设 $\overline{W}$ 是 W 在 Y 中的扎里斯基闭包。由于 W 在 $\overline{W}$ 中稠密，且 $\dim W = \dim Y$，我们有 $\dim \overline{W} = \dim Y$。由于 Y 不可约，这就推出 $W = Y$。因为 W 是局部闭的，所以它在 $\overline{W} = Y$ 中是开集，进而在 Y 中也是开集。□

定理 2.8。设 $\mu \in U^\circ(\mathbb{k})$。若 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) = 0$，则 $G\cdot\mu$ 在 Z_{red} 中是扎里斯基开集。

证明。由于 $Z_{\mathrm{red}} \subseteq X$ 且 $\mu \in Z_{\mathrm{red}}$，我们有以下扎里斯基切空间的包含关系

$$T_\mu(G\cdot\mu) \subseteq T_\mu Z_{\mathrm{red}} \subseteq T_\mu X.$$

在 $T_\mu A_W \simeq A_W$ 下，引理 1.3 将 $T_\mu X$ 识别为 $\ker(\Phi_\mu)$。另一方面，根据 δ_μ 作为轨道映射微分的定义，有 $T_\mu(G\cdot\mu) = \operatorname{im}(\delta_\mu)$；这就是将轨道的切空间识别为无穷小作用映射的像的通常方式（例如，对于作用在簇上的光滑代数群）。最后，在 U° 上，条件 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) = 0$ 等价于 $\ker(\Phi_\mu) = \operatorname{im}(\delta_\mu)$，因为根据定义，$H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) = \ker(\Phi_\mu)/\operatorname{im}(\delta_\mu)$。

将这些结果结合起来可得

$$\operatorname{im}(\delta_\mu) = T_\mu(G\cdot\mu) \subseteq T_\mu Z_{\mathrm{red}} \subseteq \ker(\Phi_\mu) = \operatorname{im}(\delta_\mu),$$

因此 $T_\mu Z_{\mathrm{red}} = T_\mu(G\cdot\mu)$，从而 $\dim(Z_{\mathrm{red}}) = \dim T_\mu Z_{\mathrm{red}} = \dim T_\mu(G\cdot\mu) = \dim(G\cdot\mu)$，因为 $\mu \in U = (Z_{\mathrm{red}})_{\mathrm{sm}}$。由于 $G\cdot\mu$ 在代数群作用下是局部闭的，引理 2.7 表明 $G\cdot\mu$ 在 Z_{red} 中是扎里斯基开。□

反向结论更为微妙，因为一般而言，我们只能得到 $T_\mu Z_{\mathrm{red}} \subseteq T_\mu X = \ker(\Phi_\mu)$ 的包含关系；当定义 X 的二次方程在 μ 处的一阶项无法生成 Z_{red} 的根理想时，等式可能不成立。

3. 二次阻碍与各向异性

3.1. 二次障碍。

命题 3.1。 固定 $\mu \in X(\Bbbk)$ 以及 $\alpha, \beta \in A_W$。令 $\mu_t := \mu + t\alpha + t^2\beta$。那么 $\mu_t \in X\big(\Bbbk[t]/(t^3)\big)$ 当且仅当 $\Phi_\mu(\alpha) = 0$ 且 $2\Phi_\mu(\beta) + \Theta(\alpha, \alpha) = 0$ 属于 $Q^\vee$。

证明。 对于每个 $q \in Q$，我们在 $\Bbbk[t]/(t^3)$中计算：

$$f_q(\mu_t) = q(\mu_t, \mu_t) = q(\mu, \mu) + 2tq(\mu, \alpha) + t^2\big(2q(\mu, \beta) + q(\alpha, \alpha)\big).$$

由于 $\mu \in X$, $q(\mu, \mu) = 0$。因此，对于所有 q， $f_q(\mu_t) = 0$属于 $\Bbbk[t]/(t^3)$ 当且仅当 $q(\mu, \alpha) = 0$且$2q(\mu, \beta) + q(\alpha, \alpha) = 0$，也就是说， $\Phi_\mu(\alpha) = 0$且 $2\Phi_\mu(\beta) + \Theta(\alpha, \alpha) = 0$。□

记 $S_\mu := \ker(\Phi_\mu)$ 以及 $N_\mu := \operatorname{coker}(\Phi_\mu)$ 分别表示 μ处按第 1.2 节意义下的“切向”和“关联余核”空间。命题 3.1 表明，对于切向方向 $\alpha \in S_\mu$，寻找二阶项的障碍 β 属于 $\Theta(\alpha, \alpha)$ 在 N_μ中的类。

3.2. 双线性阻碍配对。

定义 3.2. 对于 $\mu \in X(\Bbbk)$，定义一个对称的 $\Bbbk$–双线性配对

$$B_\mu : S_\mu \times S_\mu \longrightarrow N_\mu, \qquad B_\mu(\alpha, \beta) := \big[\Theta(\alpha, \beta)\big] \in \operatorname{coker}(\Phi_\mu).$$

其对角线定义了一个齐次二次映射

$$\widetilde{\kappa}_{2,\mu} : S_\mu \longrightarrow N_\mu, \qquad \widetilde{\kappa}_{2,\mu}(\alpha) := B_\mu(\alpha, \alpha) = \big[\Theta(\alpha, \alpha)\big].$$

引理 3.3. 对于 $\mu \in X(\Bbbk)$、 $\alpha \in S_\mu$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}$，有 $\Theta\big(\alpha, \delta_\mu(\xi)\big) \in \operatorname{im}(\Phi_\mu) \subseteq Q^\vee$。

证明。 由 G–等变性可知 Θ (第 1.1 节)，在单位元处求导可得，对任意 $\nu, \alpha \in A_W$和 $\xi \in \mathfrak{g}$,

$$\xi \cdot \Theta(\nu, \alpha) = \Theta(\xi \cdot \nu, \alpha) + \Theta(\nu, \xi \cdot \alpha).$$

令 $\nu = \mu$ 并假设 $\alpha \in S_\mu$，即 $\Theta(\mu, \alpha) = 0$。那么

$$0 = \xi \cdot \Theta(\mu, \alpha) = \Theta(\xi \cdot \mu, \alpha) + \Theta(\mu, \xi \cdot \alpha) = \Theta\big(\delta_\mu(\xi), \alpha\big) + \Phi_\mu(\xi \cdot \alpha).$$

因此 $\Theta(\delta_\mu(\xi), \alpha) \in \operatorname{im}(\Phi_\mu)$。 Θ 的对称性给出了所需结论。 □

命题 3.4. 固定 $\mu \in X(\Bbbk)$。对角障碍 $\widetilde{\kappa}_{2,\mu}$ 下降为一个良定义映射

$$\kappa^{\mathrm{inc}}_{2,\mu} : H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) \longrightarrow H^3_{\mathrm{inc}}(\mu), \qquad \kappa^{\mathrm{inc}}_{2,\mu}([\alpha]) = \big[\Theta(\alpha, \alpha)\big].$$

此外，$\kappa^{\mathrm{inc}}_{2,\mu}([\alpha]) = 0$当且仅当类 $[\alpha] \in H^2_{\mathrm{inc}}(\mu)$按照命题*3.1.*的意义可进行二阶提升。

证明。 我们证明在更换代表元 $\alpha \mapsto \alpha + \delta_\mu(\xi)$ 时的不变性。对于 $\alpha \in S_\mu$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}$，利用双线性展开：

$$\Theta(\alpha + \delta_\mu(\xi), \alpha + \delta_\mu(\xi)) = \Theta(\alpha, \alpha) + 2\Theta\big(\alpha, \delta_\mu(\xi)\big) + \Theta\big(\delta_\mu(\xi), \delta_\mu(\xi)\big).$$

由引理 3.3，交叉项属于 $\operatorname{im}(\Phi_\mu)$。对于平方项，注意到引理 1.5 给出 $\delta_\mu(\xi) \in S_\mu$，因此将引理 3.3 应用于 $\alpha = \delta_\mu(\xi)$ 可得 $\Theta(\delta_\mu(\xi), \delta_\mu(\xi)) \in \operatorname{im}(\Phi_\mu)$。因此$\Theta(\alpha + \delta_\mu(\xi), \alpha + \delta_\mu(\xi)) \equiv \Theta(\alpha, \alpha)$（模 $\operatorname{im}(\Phi_\mu)$），这证明了该映射在 $S_\mu/\operatorname{im}(\delta_\mu) = H^2_{\mathrm{inc}}(\mu)$ 上的良定义性。

对于提升判据，命题 3.1 表明， $\alpha \in S_\mu$存在满足 $\mu + t\alpha + t^2\beta \in X(\Bbbk[t]/(t^3))$ 的 β，当且仅当 $\Theta(\alpha, \alpha) \in -2\operatorname{im}(\Phi_\mu)$；等价地， $[\Theta(\alpha, \alpha)] = 0$属于余核$(\Phi_\mu) = H^3{}_{\mathrm{inc}}(\mu)$。□

3.3. **各向异性与开轨道。**

定义 3.5。 点 $\mu \in X(\Bbbk)$ 称为各向异性 的，若 $\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}}([\alpha]) = 0$ 蕴含 $[\alpha] = 0$ 属于 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu)$。

定理 3.6. 设 $Z \subseteq X$ 为包含 μ 的不可约分支，并假设 $\mu \in (Z_{\mathrm{red}})_{\mathrm{sm}}(\Bbbk)$。若 μ 具有各向异性，则 $G \cdot \mu$ 在 Z_{red} 中是扎里斯基开集。

证明。 令 $U := Z_{\mathrm{red}}$。由于 $G \cdot \mu \subseteq U$，我们有

$$T_\mu(G \cdot \mu) = \mathrm{im}(\delta_\mu) \subseteq T_\mu U \subseteq T_\mu X = \ker(\Phi_\mu)$$

其中最后一个包含关系由引理 1.3 得出。假设 $G \cdot \mu$ 在 U 中不是扎里斯基开集。由于 μ 是 U 的光滑点，这意味着 $\dim T_\mu(G \cdot \mu) < \dim T_\mu U$，因此 $\mathrm{im}(\delta_\mu) \subsetneq T_\mu U$。取 $\alpha \in T_\mu U \setminus \mathrm{im}(\delta_\mu)$，使得 $[\alpha] \neq 0$ in $\ker(\Phi_\mu)/\mathrm{im}(\delta_\mu) = H^2_{\mathrm{inc}}(\mu)$。

切向量 α 对应于一个 $\Bbbk[t]/(t^2)$–点，它通过 μ 取自 U。由于 μ 在 U 上光滑（因此 $U \to \mathrm{Spec}(\Bbbk)$ 在 μ 处光滑），U 在 μ 处形式光滑，所以这个 $\Bbbk[t]/(t^2)$– 点可通过 μ [Aut, Section 37.11] 提升为 $\Bbbk[t]/(t^3)$–点 U。等价地，存在 $\beta \in A_W$ 使得 $\mu_t = \mu + t\alpha + t^2\beta \in U(\Bbbk[t]/(t^3)) \subseteq X(\Bbbk[t]/(t^3))$。由命题 3.1 得到 $\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}}([\alpha]) = 0$，这与各向异性矛盾。因此 $\mathrm{im}(\delta_\mu) = T_\mu U$，从而 $\dim(G \cdot \mu) = \dim U$；又由于 $G \cdot \mu$ 在 U 中局部闭，它是扎里斯基开。□

注 3.7。 各向异性在 G–轨道上保持不变：对于 $g \in G$，结构传递将复形 $\mathrm{C}_X^\bullet(\mu)$ 与 $\mathrm{C}_X^\bullet(g \cdot \mu)$ 等同起来，并使 $\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}}$ 和 $\kappa_{2,g\cdot\mu}^{\mathrm{inc}}$ 相互交织。特别地，若 μ 具有各向异性，则 $G \cdot \mu$ 中的每个点都具有各向异性。

3.4. **各向异性轨迹。** 各向异性按点定义为满足以下条件 $\ker(\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}}) = 0$，因此只要 $\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}}$ 有定义（特别是在 Z_{sm} 对于约化分支 $Z \subseteq X_{\mathrm{red}}$ 上），这一概念便有意义。由于定理 3.6 指出各向异性是几何刚性的充分判据，因此可形式地由不可约性推出各向异性轨迹是开的。

命题 3.8. 设 $Z \subseteq X_{\mathrm{red}}$ 是一个不可约分支。各向异性轨迹

$$U_{\mathrm{aniso}} := \{\mu \in Z_{\mathrm{sm}} \mid \ker(\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}}) = 0\}$$

在扎里斯基拓扑下开 于 Z 中（因而也开于 Z_{sm} 中）。因此，X_{red} 中的各向异性轨迹是扎里斯基开。

证明。 由 G-等变性可知 $\kappa_{2,\mu}^{\mathrm{inc}}$ 的各向异性沿 G-轨道保持不变，因此 U_{aniso} 是若干 G-轨道的并。若 $\mu \in U_{\mathrm{aniso}}$，则定理 3.6 蕴含 $G \cdot \mu$ 在 Z 中是扎里斯基开。由于 Z 是不可约的，它至多包含一个扎里斯基开 G-轨道，因此 U_{aniso} 要么为空，要么等于该开轨道；无论哪种情况，它都是扎里斯基开。最后一个结论由对 X_{red} 的不可约分支取并得到。□

3.5. **一个上同调非刚性的各向异性点。** 我们记录一个经典例子：在该例中，几何刚性（李代数簇中存在一个开 $\mathrm{GL}(L)$–轨道）已可由二次障碍检出，尽管第二上同调并不消失。这一现象可追溯至 Richardson [Ric67]。

令 $M := \mathrm{Sym}^{14}(\mathbb{C}^2)$，维数为 $M = 15$，并设 $L := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \ltimes M$，其中 M 是一个阿贝尔理想。令 $\mu \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 L, L)$ 表示相应的李括号，则 $\mu \in X_{\mathrm{Lie}}(\mathbb{C})$。在李代数运算子轨迹上，关联复形与带伴随系数的切瓦利–艾伦伯格形变微分分次李代数相对应（比较见 [Kay25]）；记 $H^i{}_{\mathrm{Lie}}(L) := H^i_{\mathrm{CE}}(L, L)$，并隐式使用这些对应关系

$$H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) \cong H^2_{\mathrm{Lie}}(L), \qquad H^3_{\mathrm{inc}}(\mu) \cong H^3_{\mathrm{Lie}}(L), \qquad \kappa^{\mathrm{inc}}_{2,\mu}([\alpha]) = \left[\frac{1}{2}[\alpha, \alpha]_{\mathrm{NR}}\right],$$

其中 $[\,,\,]_{\mathrm{NR}}$ 表示 $C^\bullet_{\mathrm{CE}}(L, L)$ 上的 Nijenhuis–Richardson括号。

命题 3.9。 李代数 $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \ltimes \mathrm{Sym}^{14}(\mathbb{C}^2)$ 是几何刚性的（其 $\mathrm{GL}(L)$ 轨道在李代数簇中是开集），但 $H^2_{\mathsf{Lie}}(L) \neq 0$。

证明。在 [Ric67 的 §5], 中，Richardson 固定一个 3 维单李代数 $S \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$，令 ρ 为 $W \simeq \mathbb{C}^{2n+1}$ 上最高权为 $2n$ 的不可约表示，并定义 $L_n := S \ltimes_\rho W$ 根据 [Ric67 的 §5、命题 5.1、第 344], 页，对每个奇整数 $n > 5$，李代数 L_n 都是刚性的，且 $H^2(L_n, L_n) \neq 0$。对于 $n = 7$，有 $W \simeq \mathrm{Sym}^{2n}(\mathbb{C}^2) = \mathrm{Sym}^{14}(\mathbb{C}^2)$，故 $L = L_7$，结论得证。□

现在我们明确给出 $H^2_{\mathsf{Lie}}(L)$ 的一个具体生成元，并通过显式计算 Jacobi 子括号验证各向异性。

设 $\Phi \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 M,\ M)^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}$ 为一个非零的交替 $\mathfrak{sl}_2$–等变映射，并令 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 L,\ L)$ 为其零延拓，即 $\varphi|_{\Lambda^2 M} = \Phi$，且当其中一个自变量属于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 时，$\varphi(x,\ -) = 0$。

命题 3.10. </style}有 Lie $(L) \cong \mathbb{C}$。更确切地说，$[\varphi]$ 张成 $H^2_{\mathsf{Lie}}(L)$</style}，且 可取为 7 次转置算子 $(\cdot,\cdot)_7$。

证明。 计算已在 [Ric67, §5]中明确给出（参见第 343–344 页通向命题 5.1 的论证），我们这里只记录后续所需的结构性输入。

首先，$0 \to M \to L \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的 Hochschild–Serre 谱序列 $\to 0$（取伴随系数）将 $H^2\mathrm{Lie}\ (L)$ 归约为 $H^2(\ M, L)$ 中的 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$–不变量，因为对于所有有限维 V，$H^1(\mathfrak{sl}_2, V) = H^2(\mathfrak{sl}_2, V) = 0$（Whitehead），并且 $H^3(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}),\ M) = 0$（因为 $M^{\mathfrak{sl}_2}(\mathbb{C}) = 0$，而最高次数对偶性将 $H^3(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}),\ V)$ 与 $\mathfrak{sl}_2$–余不变量的对偶空间对应起来，因此当$V^{\mathfrak{sl}_2} = 0$时它消失；例如参见 [Fuk86, §1.5]）。因此

$$H^2_{\mathsf{Lie}}(L) \ \cong\ H^2(M, L)^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}.$$

接下来，由于 M 是阿贝尔的，并通过 $\mathrm{ad}\ |_M$ 作用于 L，可得 $B^2(M, L) \subseteq \mathrm{Hom}(\Lambda^2 M, M)$；取不变量后，$B^2(M, L)^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})} = 0$，因为 $\mathrm{Hom}(\ M, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})} = 0$(Clebsch–Gordan；参见[FH91, §11.2])。由于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 在特征 0 下是半单的，不变元函子在有限维模上是正合的，因此 $H^2(M, L)^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})} \cong Z^2(\ M, L)^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}$。

最后，经典不变量理论给出

$$\dim \mathrm{Hom}(\Lambda^2 M, M)^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})} = 1, \qquad \dim \mathrm{Hom}(\Lambda^2 M, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})} = 1,$$

分别由第7阶转化子 $(\cdot,\cdot)_7$ 和第13阶转化子 ψ [Chi06, §2–3]生成。Richardson 证明 ψ 不是余循环（等价地，$d\psi \neq 0$），因此双次数为 $(0,2)$ 的 $\mathfrak{sl}_2$ 不变余循环恰好是取值于 M 的余循环，因此 $H^2_{\mathsf{Lie}}(L) \cong \mathbb{C}$由类 $\Phi := (\cdot,\cdot)_7$（及其零延拓 φ）生成。

此外，φ是一个 2-余循环：由于 $[M, M] = 0$，有 $(d\varphi)|_{\Lambda^3 M} = 0$，而对于 $x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 和$u,\ v \in M$，

$$(d\varphi)(x, u, v) = x \cdot \Phi(u, v) - \Phi(x \cdot u, v) - \Phi(u, x \cdot v) = 0$$

由 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$–等变性可知。 □

命题 3.11。 **</style}有，** $\mu([\varphi]) \neq 0 \in H^3_{\mathsf{Lie}}(L)$。因此 $\ker(\kappa_2^{\mathrm{inc}},\ \mu) = 0$，所以 μ是各向异性的，而 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) \neq 0$。

证明。 在李轨迹识别下，$[\varphi]$ 的障碍由 $\frac{1}{2}[\varphi, \varphi]_{\mathrm{NR}}$ 表示。由于φ支撑在 $\Lambda^2 M$ 上，且取值于 M，因此 $\frac{1}{2}[\varphi, \varphi]_{\mathrm{NR}}$ 在 $\Lambda^3 M$ 上的限制是 Φ 的 Jacobi 子括号，

$$J_\Phi(u, v, w) := \Phi(\Phi(u, v), w) + \Phi(\Phi(v, w), u) + \Phi(\Phi(w, u), v) \in \mathrm{Hom}(\Lambda^3 M, M)^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}.$$

如上所述，$\mathrm{Hom}(\Lambda^2 M,\ \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})} = \mathbb{C}\cdot\psi$ 是一维的，且 $d\psi \neq 0$ (Richardson，前引文)，因此 $\mathrm{Hom}(\Lambda^3 M,\ M)^{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}$ 中 $\mathfrak{sl}_2$–不变的余边界子空间恰为 $\mathbb{C}\cdot d\psi$。

为了证明 $J_\Phi \notin \mathbb{C}\cdot d\psi$，我们在两个权齐次测试三元组上进行计算。令 $v_i = x^{14-i}y^i$为 $M = \mathrm{Sym}^{14}(\mathbb{C}^2)$的标准单项式基，并取 $\Phi = (\cdot,\cdot)_7$和 $\psi = (\cdot,\cdot)_{13}$，采用 [Chi06]的未归一化转矢算子约定。直接计算转矢算子可得

$$\frac{J_\Phi(v_0, v_1, v_{13})}{d\psi(v_0, v_1, v_{13})} = \frac{24024}{5} \qquad \neq \qquad \frac{J_\Phi(v_1, v_2, v_{14})}{d\psi(v_1, v_2, v_{14})} = -7392.$$

根据权的考虑，上述每个分子和分母都是单个基向量（分别为 v_0 和 v_3）的非零标量倍数，因此这些比值定义良好。由于这些比值不相等，J_Φ不是 $d\psi$的标量倍数，因此 $[J_\Phi] \neq 0$属于 $H^3_{\mathsf{Lie}}(L)$，且 $\kappa_2^{\mathrm{inc}},\ \mu([\varphi]) = [J_\Phi] \neq 0$。

由于 $H^2{}_{\mathsf{Lie}}(L) \cong \mathbb{C}$根据命题 3.10，$\kappa_2^{\mathrm{inc}},\ \mu$的核是平凡的。 □

注记 3.12。 命题 3.9 恰好体现了“刚性但 $H^2 \neq 0$”这一现象： $\mathrm{GL}(L)$– 轨道 μ是开集（几何刚性），但 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) \cong H^2{}_{\mathsf{Lie}}(L) \neq 0$（上同调非刚性）。命题 3.11 表明，在这个例子中，开性已可由二次障碍的各向异性检测出来。

4. Gram 分层

本节旨在引入一个 G–等变数值不变量，它在 G–轨道上为常数，因此可用于区分第 2 节中得到的开轨道。该不变量是一个迹型对称双线性形式的秩。

4.1. 格拉姆态射。

定义 4.1。 对于 $\mu \in A_W$和 $v \in W$，定义右乘算子 $R_v^\mu \in \mathrm{End}(W)$ 为$R_v^\mu(w) := \mu(w,\ v)$。与 μ 相关联的格拉姆形式 是由 $\gamma_\mu \in \mathrm{Sym}^2(W^\vee)$ 定义的对称双线性形式

$$\gamma_\mu(v, w) := \mathrm{Tr}\big(R_v^\mu R_w^\mu\big).$$

这个格拉姆态射 $\Gamma(\mu) := \gamma_\mu$是一个形如 $\Gamma\colon\ A_W \longrightarrow \mathrm{Sym}^2(W^\vee)$ 的仿射概形态射。

由迹的循环性可立即得出对称性：$\gamma_\mu(v,\ w) = \mathrm{Tr}(R_v^\mu R_w^\mu) = \mathrm{Tr}(R_w^\mu R_v^\mu) = \gamma_\mu(w,\ v)$。$\Gamma$ 是一个态射这一点也显而易见：选取 W的一个基后，R_v^μ 的矩阵元素关于 μ 的结构常数呈 $\Bbbk$–线性依赖，因此 $R_v^\mu R_w^\mu$ 的元素是这些常数的多项式（实际上是二次的），而迹是矩阵元素的多项式。

该形式 γ_μ 确定了一个线性映射

$$\gamma_\mu^\sharp\colon W \longrightarrow W^\vee, \qquad v \longmapsto \gamma_\mu(v, -),$$

其秩等于通常意义下的 $\mathrm{rank}(\gamma_\mu)$。将其整体化后，$\Gamma$ 在 A_W上诱导出一个平凡向量丛态射，

$$\Gamma^\sharp\colon O_{A_W} \otimes_{\Bbbk} W \longrightarrow O_{A_W} \otimes_{\Bbbk} W^\vee, \tag{4.1}$$

其在 μ 处的纤维恰好是 $\gamma_\mu^\sharp$。

引理 4.2。 格拉姆态射 Γ 是 G–等变的。等价地，对所有 $g \in G$ 和 $\mu \in A_W$，有

$$\gamma_{g\cdot\mu}(gv, gw) = \gamma_\mu(v, w) \qquad (v, w \in W),$$

并且特别地 秩$(\gamma_{g\cdot\mu})$ = 秩(γ_μ)。

证明。 写作 $(g\cdot\mu)(x,\ y)=g\mu(g^{-1}x,\ g^{-1}y)$，可直接验证

$$R^{g\cdot\mu}_{gv}=gR^{\mu}_{v}g^{-1}.$$

因此

$$\gamma_{g\cdot\mu}(gv,gw)=\mathrm{Tr}\big(R^{g\cdot\mu}_{gv}R^{g\cdot\mu}_{gw}\big)=\mathrm{Tr}\big(gR^{\mu}_{v}R^{\mu}_{w}g^{-1}\big)=\mathrm{Tr}\big(R^{\mu}_{v}R^{\mu}_{w}\big)=\gamma_{\mu}(v,w),$$

且秩在基变换下保持不变。 □

4.2. **秩分层与一般 Gram 秩。** 将 $\Gamma^{\sharp}$ 限制到 $X=\mathsf{Var}(Q)\subseteq A_W$，从而得到 X 上的向量丛态射，

$$\Gamma^{\sharp}_{X}\colon \mathcal{O}_X\otimes_{\Bbbk}W\longrightarrow\mathcal{O}_X\otimes_{\Bbbk}W^{\vee},$$

其在 $\mu\in X(\Bbbk)$ 处的纤维秩为 $\mathrm{rank}(\gamma_\mu)$。

定义 4.3。 对于 $r\geq 0$，在 X 上定义*Gram* 秩轨迹 如下

$$X^{\Gamma}_{\leq r}:=\{\mu\in X\mid \mathrm{rank}(\gamma_\mu)\leq r\},\qquad X^{\Gamma}_{=r}:=X^{\Gamma}_{\leq r}\setminus X^{\Gamma}_{\leq r-1}.$$

引理 4.4。 对每个 $r\geq 0$，子集 $X^{\Gamma}_{\leq r}$ 在 X 中是 *Zariski* 闭的，且在 G作用下稳定。因此，$X^{\Gamma}_{=r}$ 是局部闭的，且在 G作用下稳定。

证明。 闭性由行列式条件给出： $X^{\Gamma}_{\leq r}$ 是 $\Gamma^{\sharp}_{X}$ 的纤维秩至多为 r的轨迹，因此由局部平凡化（$(r+1)\times(r+1)$的所有子式的消失定义。此即向量丛态射的一般行列式秩构造（参见引理 4.1）。 G在 4.2引理蕴含的作用下稳定。 □

命题 4.5。 设 $Z\subseteq X$ 是一个不可约分支， Z_{red} 是其约化子概形。存在唯一的整数 $\rho(Z)$，称为一般 Gram 秩，使得该轨迹

$$U_\Gamma(Z):=Z_{\mathrm{red}}\cap X^{\Gamma}_{=\rho(Z)}$$

在 Z_{red}中是 *Zariski* 稠密且开的。

证明。 根据引理 4.4，秩函数 $\mu\mapsto\mathrm{rank}(\gamma_\mu)=\mathrm{rank}\big((\Gamma^{\sharp}_{X})_\mu\big)$在$Z_{\mathrm{red}}$上是下半连续的。因此，它在 Z_{red}上取得最大值，并且在不可约簇 Z_{red} 中取得该最大值的轨迹是稠密开集（参见推论 2.2）。将此最大值记为 $\rho(Z)$；于是$U_\Gamma(Z)=Z_{\mathrm{red}}\cap X^{\Gamma}_{=\rho(Z)}$ </style}恰好是该稠密开集，而 $\rho(Z)$ 的唯一性是显然的。 □

4.3. **稠密轨道位于一般 Gram 秩分层中。** Gram 秩在 G–轨道上是常数，因此，任何在不可约分支中稠密的轨道都必须位于该不可约分支的一般 Gram 秩分层中。

定理 4.6。 设 $Z\subseteq X$ 是一个不可约分支，并设 $\rho(Z)$ 是其由命题 *4.5*给出的一般 *Gram* 秩。设 $\mu\in Z_{\mathrm{red}}(\Bbbk)$，并假设 $G\cdot\mu=Z_{\mathrm{red}}$ （特别地，当 $\overline{G\cdot\mu}$ 在 Z_{red}中是扎里斯基开时，该条件成立）。那么 秩$(\gamma_\mu)=\rho(Z)$。

证明。设 r:=$\mathrm{rank}(\gamma_\mu)$。由引理 4.2，$\mathrm{rank}(\gamma)$ 在 $G\cdot\mu$ 上为常数，因此 $G\cdot\mu\subseteq X^{\Gamma}_{\leq r}$。根据引理 4.4，后者是闭集，因此它包含 $G\cdot\mu$ 在 X 中的闭包。根据假设 $G\cdot\mu=Z_{\mathrm{red}}$，因此$\overline{Z_{\mathrm{red}}}\subseteq X^{\Gamma}_{\leq r}$。所以 Z_{red} 的每个点的 Gram 秩至多为 r，故 Z_{red} 上的最大（等价地，一般） Gram 秩满足 $\rho(Z)\leq r$。

另一方面， $\mu\in Z_{\mathrm{red}}$ 的 Gram 秩为 r，因此 $\rho(Z)$ 作为 Z_{red} 上 Gram 秩的最大值，满足 $r\leq\rho(Z)$。故 $r=\rho(Z)$。 □

注 4.7。定理4.6 表明，只要不可约分支 Z 有一个稠密（特别是开） G轨道，该轨道上任意一点的 Gram 秩都必定等于分支不变量 $\rho(Z)$。因此，要区分位于不同不可约分支上的开轨道，只需计算秩(γ_μ) 在每个开轨道上的一个代表元 μ 处的值，并比较所得的$\rho(Z)$。

5. 开轨道上的等变陈特征

固定一个 不可约分支 $Z \subseteq X$，并假设 Z_{red} 包含一个扎里斯基开 G–轨道 it

$$U_0 := G \cdot \mu \subseteq Z_{\mathrm{red}}, \qquad U_0 \simeq G/H, \qquad H := G_\mu, \qquad \mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H).$$

注意，如果 H 是约化的，那么 $U_0 \simeq G/H$ 根据 Matsushima 判据是仿射的 [Mat60，Arz08]；特别地， U_0 是仿射概形 Z_{red}的一个仿射开子概形。

数值欧拉恒等式（2.3）是等变交理论中一个典范恒等式的次数–0影子。关键在于，在 U_0 上，关联复形的三个项成为齐性空间 上的伴随丛 G/H，因此可以在 $A_H^*(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Q}$中计算它们的等变陈特征。这一描述与 Gram 分层自然地相互作用：在 U_0 上，Gram 形式 γ_μ 具有常秩，并给出一个稳定子不变子表示$\mathrm{rad}(\gamma_\mu) \subseteq W$ 可以将其与陈特征标恒等式所强加的表示论约束进行比较。

5.1. 关于 G/H的等变 Chow 环与伴随丛。 等变交理论将齐性空间的等变 Chow 环与其稳定子群的点的等变 Chow 环等同起来：

$$A_G^*(G/H) \cong A_H^*(\mathrm{pt}), \tag{5.1}$$

并且与等变陈类及沿 $G/H \to \mathrm{pt}$的拉回相容；参见 [EG98，第 2–3]节。此外， G上的每个 G/H 等变向量丛都是由有限维 $G \times^H V - H$模 V构成的伴随丛，并且这一对应将 $V \mapsto G \times^H V$ $K_0^G(G/H)$与 $K_0^H(\mathrm{pt})$等同起来。等变黎曼–罗赫定理给出一个陈特征

$$\mathrm{ch}_G \colon K_0^G(G/H) \longrightarrow A_G^*(G/H) \otimes \mathbb{Q},$$

在（5.1）下变为通常的等变陈特征 $\mathrm{ch}_H \colon K_0^H(\mathrm{pt}) \to A_H^*(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Q}$；参见[EG98，Tho92]。

5.2. 开轨道上的关联复形。 回忆一下，1.3中的 G-等变相干层在 X上的关联复形，其上同调层为 $\mathcal{H}_X^i$。由于这三项都是平凡的 G-丛，它们在 $U_0 \simeq G/H$ 上的限制由底层 H模 $\mathfrak{g}$、 A_W和 $Q^\vee$决定。

引理 5.1。 $C_X^\bullet$ 从 $U_0 \simeq G/H$ 的限制，与由 H–模复形 (1.4)诱导的伴随丛复形是典范同构的。因此，对于 $i = 1、2、3$，有 $\mathcal{H}_X^i|_{U_0} \cong G \times^H H^i{}_{\mathrm{inc}}(\mu)$。

证明。 微分 δ 和 Φ_X 是 G– G–丛在 X上的 G–等变态射，因此在U_0 上，它们由其在基点 μ处的纤维决定；这些纤维分别为 δ_μ 和 Φ_μ。第一个断言由从 G 到 H的下降得到，而上同调层的同一性则来自伴随丛函子 $G \times^H (-)$在有限维 H–模上的正合性。□

定理 5.2。 在识别 $A_G^*(G/H) \cong A_H^*(\text{点})$下，关联余核 $\mathcal{N}(\mu)$ =余核(Φ_μ) 在 $A_H^*(\text{点}) \otimes \mathbb{Q}$ 中满足恒等式

$$\mathrm{ch}_H\big(\mathcal{N}(\mu)\big) = \mathrm{ch}_H(Q^\vee) - \mathrm{ch}_H(A_W) + \mathrm{ch}_H(\mathfrak{g}) - \mathrm{ch}_H(\mathfrak{h}) + \mathrm{ch}_H\big(H^2_{\mathrm{inc}}(\mu)\big). \tag{5.2}$$

证明。在 $K_0^G(U_0)$ 对有界复形 G–向量丛，有标准的欧拉关系

$$[C_X^1|_{U_0}] - [C_X^2|_{U_0}] + [C_X^3|_{U_0}] = [\mathcal{H}_X^1|_{U_0}] - [\mathcal{H}_X^2|_{U_0}] + [\mathcal{H}_X^3|_{U_0}],$$

参见 [SGA6, §IV.2]或 [Wei13, 第 IV 章]，，以及等变情形下的 [Tho87]。沿着等价关系 $\mathrm{Vect}_G(G/H) \simeq \mathrm{Rep}(H)$ 传递此等式，并使用引理 5.1。这些项分别对应于 H–模 $\mathfrak{g}$、A_W、$Q^\vee$、$\mathfrak{h} = \ker(\delta_\mu)$、$H^2_{\mathrm{inc}}(\mu)$ 和 $\mathrm{N}(\mu) =$余核(Φ_μ)。应用 ch_H可得 (5.2)。□

注 5.3。取0 次5.2的分量2.3，即可得到数值欧拉恒等式 5.2。因此，应将其视为开轨道上2.3的内在精化。

5.3. **权重演算**。取一个极大环面 $T \subseteq H$，其魏尔群为 W_H。张量乘以$\mathbb{Q}$后，有

$$A_H^*(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Q} \cong \left(A_T^*(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Q}\right)^{W_H}, \tag{5.3}$$

参见 [EG98, §3], 和 $A_T^*(\mathrm{pt}) \cong \mathrm{Sym}(X^*(T))$。若一个 H–模 V分解为 T–权$\lambda_1, \dots, \lambda_r$（含重数），则

$$\mathrm{ch}_T(V) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} \in A_T^*(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Q}, \tag{5.4}$$

其中 e^λ 表示分次指数级数。因此，恒等式 (5.2) 可归结为确定 H–模结构

$$\mathfrak{h}, \qquad \mathcal{N}(\mu), \qquad H^2_{\mathrm{inc}}(\mu),$$

因为剩余项 A_W 和 $Q^\vee$ 是在代数运算子轨迹中对W 的函子性舒尔构造，且 $\mathfrak{g} \simeq W \otimes W^\vee$。

5.4. **开轨道上的 Gram 秩**。假设 $U_0 = G \cdot \mu$ 在 Z_{red}中是开集。根据 G–等变性以及格拉姆态射 Γ（第 4节），Gram 秩在 U_0 上为常数，且等于 Z的一般 Gram 秩；记为 $\rho_0(Z)$：

(5.5) $\rho_0(Z) =$秩(γ_μ)，$\mathrm{rad}(\gamma_\mu) \subseteq W$是一个维数为 $\dim W - \rho_0(Z)$ 的 H–子模。

因此，在一个开轨道上，表示论约束 (5.2) 在A_H^*(点) $\otimes \mathbb{Q}$与额外的稳定子不变量 $\mathrm{rad}(\gamma_\mu) \subseteq W$ 同时成立。实际上，$\rho_0(Z)$通常较为粗略，但很稳健：当两个开轨道的一般 Gram 秩不同时，它会立即排除二者属于同一不可约分支的可能性；而 (5.2) 则通过修正项 $H\mathrm{ch}_H(H^2_{\mathrm{inc}}(\mu))$，进一步约束 H–特征 $\mathcal{N}(\mu)$。

(5.2) 与 (5.5) 之间的相互作用，在标准代数运算子轨迹上尤为明显。在这些轨迹上，Gram 形式特化为熟悉的迹形式，其根基由标准结构理想控制。我们将在下一小节记录由此得到的统一模式。

5.5. **拟运算例**。

李代数轨迹。假设 $X = X_{\mathsf{Lie}} \subseteq A_W \cong W \otimes \Lambda^2 W^\vee$ 且 $(Q_{\mathsf{Lie}})^\vee \cong W \otimes \Lambda^3 W^\vee$ 编码了极化雅可比恒等式。如果 W的 T–权为 $\chi_1, \dots, \chi_m$，那么 A_W和 $(Q_{\mathsf{Lie}})^\vee$的 T–权为

$$\mathrm{wt}_T(A_W) = \{\chi_i - \chi_j - \chi_k \mid 1 \le i \le m, 1 \le j < k \le m\},$$

$$\mathrm{wt}_T\left((Q_{\mathsf{Lie}})^\vee\right) = \{\chi_i - \chi_j - \chi_k - \chi_\ell \mid 1 \le i \le m, 1 \le j < k < \ell \le m\},$$

而 $\mathfrak{g} \simeq W \otimes W^\vee$贡献权 $\chi_i - \chi_j$。因此，一旦 H–模 $\mathfrak{h}$、$\mathcal{N}(\mu)$以及 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu) \cong H^2_{\mathsf{Lie}}(W, \mu)$已知，单位元（5.2）就成为 $\mathrm{Sym}(X^*(T))^{W_H} \otimes \mathbb{Q}$中的一个显式等式。

另一方面，Gram 形式就是基灵型 $\gamma_\mu(v, w) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_w)$。因此，根据嘉当判别准则，对于其开轨道由半单李代数组成的任何不可约分支，$\rho_0(Z) = \dim W$

[Hum72, §III.5]。对于 M为阿贝尔的半直积 $L = \mathfrak{sl}_2 \ltimes M$，有 $\mathrm{ad}_m(L) \subseteq M$和 $\mathrm{ad}_m(M) = 0$，因此 $M \subseteq \mathrm{rad}(\gamma_\mu)$ 且 $\rho_0(Z) \leq \dim W - \dim M$。特别地，在第 3.5 节的例子 $L = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathrm{Sym}^{14}(\mathbb{C}^2)$ 中，开轨道（Richardson [Ric67]）位于一个一般 Gram 秩严格小于 $\dim W$的不可约分支中，而（ 5.2 ）记录了来自 $H^2\mathrm{Lie}\,(L)$ 的非平凡修正项。

交换结合轨迹。设 $X = X_{\mathsf{Comm}} \subseteq A_W \cong W \otimes \mathrm{Sym}^2 W^\vee$。则

$$\mathrm{wt}_T(A_W) = \{\chi_i - \chi_j - \chi_k \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k \leq m\}.$$

此外，$(Q_{\mathsf{Comm}})^\vee$ 是 G–表示 $W \otimes (W^\vee)^{\otimes 3}$ 中由极化交换结合子张成的子表示，因此其 T–权出现在 $\chi_i - \chi_j - \chi_k - \chi_\ell$（参见 [Qui70、And74]）。因此，（5.2）再次归结为描述 $\mathfrak{h}$、$\mathrm{N}(\mu)$ 以及 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu)$作为 H–模。

Gram 形式是正则迹形式 $\gamma_\mu(v,w) = \mathrm{Tr}(L_v L_w) = \mathrm{Tr}(L_{vw})$，并且在特征 0 中，其非退化性与可分性（有限 étale性） [DI71]相一致。在代数闭域上，有限 étale轨迹由分裂代数 $\mathbb{k}^{\dim W}$ 组成（参见 [Bou89，第 §II.2]），因此，任何开轨道与之相交的不可约分支都满足 $\rho_0(Z) = \dim W$ 在可分性之外，幂零根 $\mathfrak{n}$满足 $\mathfrak{n} \subseteq \mathrm{rad}(\gamma_\mu)$，因为 L_x对于 $x \in \mathfrak{n}$是幂零的，因此 $\rho_0(Z) \leq \dim W - \dim \mathfrak{n}$。

结合轨迹。假设 $X = X_{\mathsf{Assoc}} \subseteq A_W \cong W \otimes (W^\vee)^{\otimes 2}$。那么

$$\mathrm{wt}_T(A_W) = \{\chi_i - \chi_j - \chi_k \mid 1 \leq i, j, k \leq m\},$$

并且 $(Q_{\mathsf{Assoc}})^\vee$ 由 $W \otimes (W^\vee)^{\otimes 3}$中的极化结合子张成，因此其权出现在$\chi_i - \chi_j - \chi_k - \chi_\ell$之中。和之前一样，要明确写出 (5.2)，所需的新输入是$\mathfrak{h}$、$\mathcal{N}(\mu)$的稳定子数据，以及变形模 $H^2_{\mathrm{inc}}(\mu)$。

Gram 形式仍然是迹形式，此处由右乘构造。在可分轨迹上（在特征 0 下，这等价于半单性），有 $A \cong \prod_i M_{n_i}(\mathbb{k})$ [Pie82, §8]，，且迹形式非退化，因此对于任何其开轨道与可分轨迹相交的不可约分支，$\rho_0(Z) = \dim W$。若 J 是 Jacobson根，则 J 是幂零的；对于 $x \in J$，对所有 y，$R_x R_y = R_{yx}$均为幂零，因此 $\mathrm{Tr}(R_x R_y) = 0$且 $J \subseteq \mathrm{rad}(\gamma_\mu)$，从而 $\rho_0(Z) \leq \dim W - \dim J$。

Leibniz 轨迹。 假设 $X = X_{\mathsf{Leib}}$ 参数化右莱布尼茨代数律。Gram 形式利用右乘 $R_v(x) = \mu(x, v)$ 定义。令

$$\mathrm{Leib}(L) := \mathrm{Span}\{\mu(v,v) \mid v \in W\}$$

为莱布尼茨核。右莱布尼茨恒等式蕴含：对所有 x，v，均有 $\mu(x, \mu(v, v)) = 0$，即对于 $R_z = 0$，$z \in \mathrm{Leib}(L)$，因此 $\mathrm{Leib}(L) \subseteq \mathrm{rad}(\gamma_\mu)$，从而 $\rho_0(Z) \leq \dim W - \dim \mathrm{Leib}(L)$ [Lod93，§1]。特别地，$\rho_0(Z) = \dim W$迫使 $\mathrm{Leib}(L) = 0$；在 $\mathrm{char}(\mathbb{k}) = 0$下，这意味着反对称性，因此该代数律是 Lie 的；在该轨迹上，$R_v = -\mathrm{ad}_v$，而 γ_μ 是基灵型。

注 5.4。由于 γ_μ是 H–不变的，所以对于任意极大环面 $T \subseteq H$，它都是 T–等变的。若 $W = \bigoplus_\chi W_\chi$是权分解 T，则除非 $\chi' = -\chi$，否则 $\gamma_\mu(W_\chi, W_{\chi'}) = 0$。因此，参与式 (5.4) 的同一权的整理也约束了 $\mathrm{rad}(\gamma_\mu)$ 的 T–特征，从而通过式 (5.5) 约束 $\rho_0(Z)$ 的可能取值。在对式 (5.2) 进行完整求值之前，这通常是一个方便的初步一致性检查。

致谢。 作者声明，在以下任务中使用了大语言模型：编写`sagemath` 用于第3.5节数值计算的代码，以及对手稿进行文字编辑。

参考文献

[And74] Michel André，《交换代数的同调》，Springer-Verlag，柏林–海德堡–纽约，1974 年。[AOR06] S. Albeverio、B. A. Omirov 和 I. S. Rakhimov，《四维幂零复 Leibniz 代数的分类》，Extracta Math. 21（2006），第 3 期，197–210。[Arz08] Ivan V. Arzhantsev，《不变理想与 Matsushima 判据》，Communications in Algebra 36（2008），第 12 期，4368–4374。[Aut] Stacks Project 作者，《Stacks Project》，https://stacks.math.columbia.edu。[BdG13] Dietrich Burde 和 Willem de Graaf，《Novikov 代数的分类》，Appl. Algebra Eng. Commun. Comput. 24（2013），第 1 期，1–15（英文）。[Bou89] Nicolas Bourbaki，《数学要素。交换代数。第 1–7 章。法文译本》，第 2 次印刷版，柏林等地：Springer-Verlag，1989 年（英文）。[Chi06] Jaydeep V. Chipalkatti，《关于 Bézoutant 的不变理论》，Beitr. Algebra Geom. 47（2006），第 2 期，397–418（英文）。[DI71] Frank R. DeMeyer 和 Edward Ingraham，《交换环上的可分代数》，《数学讲义》，第 181 卷，Springer，柏林，1971 年。[Dro80] Ju. A. Drozd，《驯 tame 与 wild 矩阵问题》，《表示论 II》，第 2 届国际会议论文集，渥太华，1979 年，《数学讲义》，第 832 号，1980 年，第 242–258 页（英文）。[EG98] Dan Edidin 和 William Graham，《等变交理论》，Invent. Math. 131（1998），第 3 期，595–644。[FH91] William Fulton 和 Joe Harris，《表示论：第一课程》，《数学研究生教材》，第 129 卷，纽约等地：Springer-Verlag，1991 年（英文）。[FP08] Alice Fialowski 和 Michael Penkava，《形式变形、压缩与 Lie 代数模空间》，International Journal of Theoretical Physics 47（2008），第 2 期，561–582。[FP15] ，《四维非幂零复结合代数的模空间》，Forum Math. 27（2015），第 3 期，1401–1434（英文）。[FPP11] Alice Fial~~owski~~、Michael Penkava 和 Mitch Phillipson，《三维复结合代数的变形》，J. Gen. Lie Theory Appl. 5（2011），22，ID G110102。[Fuk86] D. B. Fuks，《无限维 Lie 代数的上同调》。由 A. B. Sosinskiĭ 从俄文翻译，《当代苏联数学》。纽约：Consultants Bureau。xii，339 页；（1986）。1986 年。[Ful98] William Fulton，《交理论》，第 2 版，《数学及其边缘领域成果》，第 3 辑，第 2 卷，Springer-Verlag，柏林，1998 年。[Gab72] Peter Gabriel，《不可分解表示 I》，Manuscripta Mathematica 6（1972），71–103。[Ger64] Murray Gerstenhaber，《环与代数的变形》，Annals of Mathematics 79（1964），第 1 期，59–103。[GK96] Michel Goze 和 Yury Khakimdjanov，《幂零 Lie 代数》，Mathematics and its Applications，第 361 卷，Kluwer Academic Publishers，Dordrecht，1996 年。[GM88] William M. Goldman 和 John J. Millson，《紧 Kähler 流形基本群表示的变形理论》，Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 67（1988），43–96。[GO88] Fritz J. Grunewald 和 John O'Halloran，《小于六维的幂零 Lie 代数簇》，Journal of Algebra 112（1988），第 2 期，315–325。[Gon98] M. P. Gong，《七维（及六维）幂零 Lie 代数的分类》，博士学位论文，北卡罗来纳州立大学，1998 年。[Har62] David K. Harrison，《交换代数与上同调》，《美国数学会会刊》104（1962），191–204。[HNP19] Yonatan Harpaz、Joost Nuiten 和 Matan Prasma，《拟运算子上代数的切范畴》，Israel Journal of Mathematics 234（2019），691–742，arXiv:1612.02607。[Hum72] James E. Humphreys，《李代数与表示论导论》，《数学研究生教材》，第 9 卷，Springer，1972 年。[Kay25] Atabey Kaygun，《通过关联簇研究变形的几何》，arXiv:2511.17169，2025 年。[KV19] Ivan Kaygorodov 和 Yury Volkov，《代数闭域上的二维代数簇》，Canadian Journal of Mathematics 71（2019），第 4 期，819–842。[Lod93] Jean-Louis Loday，《Lie 代数的一个非交换版本：Leibniz 代数》，L'Enseignement Mathématique 39（1993），第 3–4 期，269–293。[LP93] Jean-Louis Loday 和 Teimuraz Pirashvili，《Leibniz 代数的泛包络代数与（上）同调》，Mathematische Annalen 296（1993），139–158。[Mar13] María Eugenia Martin，《四维 Jordan 代数》，Int. J. Math. Game Theory Algebra 20（2013），第 4 期，303–321（英文）。[Mat60] Yozô Matsushima，《复 Lie 群的 Stein 齐性空间》，Nagoya Mathematical Journal 16（1960），205–218。

[Maz79] Guerino Mazzola，《五维结合代数的代数与几何分类》，《Manuscripta Mathematica》27（1979），81–101。[NR67] Albert Nijenhuis 和 Roger W. Richardson，《李代数结构的变形》，《数学与力学杂志》17（1967），89–105。[Pie82] Richard S. Pierce，《结合代数》，《数学研究生教材》第88卷，施普林格，1982。[Qui70] Daniel G. Quillen，《交换环的（上）同调》，《范畴代数的应用》（纯数学专题讨论会论文集，第XVII卷，纽约，1968），美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1970，第65–87页。[Ric67] R. W. jun. Richardson，《李代数半直积的刚性》，Pac. J. Math. 22（1967），339–344（英文）。[Sch68] Michael Schlessinger，《Artin 环的函子》，《美国数学会会刊》130（1968），208–222。[SGA6] Alexander Grothendieck 等，《交叉理论与黎曼–罗赫定理》，布瓦马里代数几何研讨班1966–67（SGA 6），《数学讲义》第225卷，施普林格，1971。[Tho87] R. W. Thomason，群概形作用的代数 K-理论，《代数拓扑与代数 K-理论》（新泽西州普林斯顿，1983），《数学年刊研究》第113卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1987，第539–563页。[Tho92] Robert W. Thomason，《等变代数 K-理论中的一个 Lefschetz 公式》，《杜克数学杂志》68（1992），第3期，447–462。[Wei13] Charles A. Weibel，《 K-书：代数 K-理论导论》，《数学研究生丛书》第145卷，美国数学会，2013。

电子邮箱地址：kaygun@itu.edu.tr

伊斯坦布尔技术大学，伊斯坦布尔，土耳其