Draft version January 12, 2026年 使用 LaTeX 双栏 样式，采用 AASTeX631

arXiv:2601.05720v1 [astro-ph.SR] 9 Jan 2026

球壳中相对磁螺度给出的能量界

Anthony R. Yeates [1] and Gunnar Hornig [2]

[1] Department of Mathematical Sciences, Durham University, Durham, DH1 3LE, UK
[2] Division of Mathematics, University of Dundee, Dundee, DD1 4HN, UK

（接受日期：2025年12月23日）

投稿至《天体物理学杂志》

摘要

相对磁螺度在太阳物理学中被广泛用于避免磁开放区域中标准磁螺度众所周知的规范不确定性。但由于需要引入参考场，其物理解释较为困难。对于球壳区域这一特定情形（采用势参考场），相对螺度可以直接用磁场本身表示，无需计算参考场或其矢势。我们利用这一内禀表达式证明，非零相对螺度意味着磁能和自由磁能都有下界，从而推广了针对闭场磁螺度的重要 Arnol'd 不等式。此外，我们通过对区域进行磁分区并在空间上分解相对螺度，推导出一个更强的能量界，并由此得到一种新的理想不变量，我们称之为无符号螺度。我们以解析线性无力场（在给定边界条件下使相对螺度最大）以及太阳日冕的一个非势数据驱动模型为例，展示这些能量界。这些能量界证实，相对螺度和无符号螺度都能影响太阳日冕中的动力学。

关键词：太阳磁场 (1503)

1. 引言

在太阳物理学中，通常通过避免规范歧义来处理经典磁螺度，

$$H = \int_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\,dV, \tag{1}$$

而是测量Berger & Field(1984年提出的相对（磁）螺度，我们将其记为 $H_{\rm R}$。通常使用Finn与Antonsen(1985年)的公式计算该量，

$$H_{\rm R} = \int_V (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_{\rm p})\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_{\rm p})\,dV, \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ 是所关注的磁场，而 $\boldsymbol{B}_{\rm p}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}_{\rm p}$ 是一个在边界 ∂V 上与$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_{\rm p}|_{\partial V}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}|_{\partial V}$ 匹配的参考场。利用式（2）很容易证明，相对螺度在对 $\boldsymbol{A}$或 $\boldsymbol{A}_{\rm p}$进行规范变换时保持不变。在理想磁流体力学中，对于 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ 在 ∂V上的线锚定情形，相对螺度是守恒的；而且——至关重要的是——即使发生磁重联，它仍近似守恒（Berger 1984年；Blackman 2015年）。我们使用记号 $\boldsymbol{B}_{\rm p}$ ，因为参考场几乎普遍被取为满足 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}_{\rm p}=\boldsymbol{0}$在 V中的条件、且无电流的唯一势场，同时也满足边界匹配条件。在所有满足这些边界条件的磁场中，众所周知，$\boldsymbol{B}_{\rm p}$ 具有最小能量，换言之，使 L^2-范数 $\|\boldsymbol{B}\|^2\equiv\int_V|\boldsymbol{B}|^2\,dV$最小。根据定义，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{\rm p}$，则 $H_{\rm R}$ 为零。相对螺度 $H_{\rm R}$ 已广泛用于太阳物理学中分析磁活动（例如，D´emoulin 与 Pariat 2009年；Toriumi 与 Wang 2019年；Thalmann 等，2021年）。

奇怪的是，文献中很少有人关注 $H_{\rm R}$ 究竟测量的是什么，以及为什么有理由认为它能够为我们提供有关动力学的有用信息。尤其是，

通讯作者：Anthony R. Yeatesanthony.yeates@durham.ac.uk

H_{R} 在磁力线锚定的演化过程中是守恒的（或近似守恒的），这本身并不是研究它的特别有说服力的理由，因为只要$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}|_{\partial V}$ 在整个过程中保持不变，经典磁螺度 H 的任意选取同样会在这种演化中守恒。事实上，只要$\boldsymbol{B}$ 至少包含一条开放磁力线（与 ∂V相交），就可以选择 $\boldsymbol{A}$ 的规范，使 H取得任意数值，且正负均可。只要磁力线锚定成立并且 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}|_{\partial V}$ 的规范保持不变，该数值在演化过程中就会保持不变。因此，尽管这个 H 是守恒的，但它的数值并不能告诉我们有关磁场的任何信息，因为它是任意的。

相比之下，在磁封闭情形中， H 的符号和大小都具有明确意义：它是规范无关的，并衡量磁场中无穷小磁通管之间的平均两两链接程度（例如，Moffatt & Ricca1992；Berger 1999；Moffatt &Dormy2019）。此外，在这种情形下， H 众所周知满足如下形式的不等式：

$$|H|\le C\|\boldsymbol{B}\|^2, \tag{3}$$

这表明，非零螺度为磁能提供了一个下界（Arnol'd 1986；Cantarella 等，2001；Berger2003）。本文的主要目标是证明，对于 H_{R}，类似的不等式同样成立，至少当 V为球壳（两个同心球面之间的区域）且参考场为势场时是如此。

在真实的磁场中，由 $|H|/C$ 式（23）给出的 $\|\boldsymbol{B}\|^2$ 能量界可能会大幅低估。比如，即使磁场具有非平凡的拓扑结构（例如，Candelaresi &Brandenburg 2011；Pontin 等，2016）， $H=0$ 也完全有可能成立。关于交叉数的更强能量界已有推导，Berger （2003年）对此作了综述。这些能量界既适用于磁闭合的打结磁场（Freedman & He 1991），也适用于两个边界之间的“编织”磁场（Berger 1993；Aly2014；Yeates 等，2014）。然而，交叉数在理想演化过程中并不守恒。本文着重推导左侧同样是守恒量的能量不等式。这是因为我们的总体目标并非针对已知磁场求得尽可能紧的能量界（事实上，若已知 $\boldsymbol{B}$ ，就可以直接计算能量），而是：(i) 对能量可能如何演化给出可靠的界限；(ii) 展示H_{R} （以及相关守恒量）如何约束动力学。采用交叉数方法时，要确定所有理想可达构型中的最小可能能量是一项颇具挑战的问题（但可参见例如Ricca2013）。相反，我们将展示（第4节）如何在保持左侧具有理想不变性的同时强化该不等式不变性：将 V 划分为磁子域。

之所以将讨论范围限制在球壳，是因为我们可以利用 $\boldsymbol{B}$ 的极向—环向分解（Backus 1958；Berger1985）。如第2节所示，已知的极向势和环向势的格林函数表达式使我们能够仅用 $\boldsymbol{B}$ 显式表示 H_{R} ，而无需涉及 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}$ 或任何矢势 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{p}}$。对于平面板层（两个平行平面之间的区域），也有类似的表达式；但在其他区域中，则需要广义分解（Berger& Hornig2018；Yi &Choe 2022）。 H_{R} 仍有可能为 $\|\boldsymbol{B}\|^2$提供下界，但我们的证明不能直接应用于此。

在球壳中， H_{R} 的简化此前已被用于在无力场这一特定情形下建立能量与螺度之间的联系（相差一个边界项；Berger1988），用于将 H_{R} 解释为基本（两端开放）磁通管之间成对链接的总和（Demoulin 等 2006），并用于建立螺度与磁力线之间成对绕数的联系（Xiao 等 2023）。后两项研究对H_{R} 作出了物理解释，无需借助参考场 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}$或 V 外部的场（不同于Berger& Field 1984；Schuck&Linton2024）。本文将进一步提供“内禀”证据，说明 H_{R}在球壳中的动力学意义。

本文结构安排如下。第2 节回顾球壳上 H_{R} 的基本表达式，本文其余部分均以此为基础。给出 $|H_{\mathrm{R}}|\le C\|\boldsymbol{B}\|^2$ 的主要不等式见第3节；该节还将推导一个类似的界，其中以自由磁能$\|\boldsymbol{B}\|^2$ 替代 $\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2$。第4节随后推导基于分割的$\|\boldsymbol{B}\|^2$ 改进界，其中 H_{R} 由所谓的“无符号螺度”替代。第5节通过太阳日冕的数值模型展示这一改进界的实用性，结论见第6节。

2. 球壳

在本文中， V 表示一个半径为$r\in[r_0,r_1]$的球壳。半径为 r 的球面标记为 S_r，其中 $S_0\equiv S_{r_0}$ 表示内边界，$S_1\equiv S_{r_1}$ 表示外边界。我们假设对于任意 $r\in[r_0,r_1]$，均无磁通量或电流穿过 S_r ，即

$$\oint_{S_r}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{B}\,dS=\oint_{S_r}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\,dS=0. \tag{4}$$

2.1. 极向-环向矢量势

在我们的球壳中（4），可以写成 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}^*$ 其中

$$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{\nabla}\times(P\boldsymbol{e}_r)+T\boldsymbol{e}_r, \tag{5}$$

这是众所周知的 $\boldsymbol{B}$ (Backus1958所提出的多极—环向分解，在螺度相关背景下由Berger (1985年)和Berger & Hornig (2018年)讨论过。

要说明 $\boldsymbol{A}^*$ 存在，只需注意，对（5）取一次或两次旋度可得

$$\nabla_h^2 P=-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{B}, \tag{6}$$
$$\nabla_h^2 T=-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}, \tag{7}$$

在每个 S_r上，用曲面拉普拉斯算子表示

$$\nabla_h^2\equiv\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]. \tag{8}$$

根据我们的假设（ P 和 T均可由这两个泊松方程求解4）。请注意，解仅在相差关于 r的加法函数的意义下唯一。不过，这两种不确定性都不会影响 H_R；然而，改变 T 确实会改变 $\boldsymbol{A}^*$。为推导第2.3 节及后续部分的结果，我们需要通过选取特定的T 来固定 $\boldsymbol{A}^*$，使其满足

$$\oint_{S_r} T\,dS=0\quad\text{for each } r\in[r_0,r_1]. \tag{9}$$

2.2. 相对螺度的简洁表达式

众所周知，在我们的球壳几何中，2式对于 H_R 可大大简化（Berger1988；DeVore 2000；D´emoulin 2007）。为说明这一点，注意将等价分解式（5）应用于参考矢量势，可得 $\boldsymbol{A}^*_\mathrm{p}=\boldsymbol{\nabla}\times(P_\mathrm{p}\boldsymbol{e}_r)$，因为 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}_\mathrm{p}=\boldsymbol{0}$。然后分部积分可得

$$\int_V \boldsymbol{A}^*_\mathrm{p}\cdot\boldsymbol{B}_\mathrm{p}\,dV=\int_V \boldsymbol{B}_\mathrm{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\left(P_\mathrm{p}\boldsymbol{e}_r\right)dV=0. \tag{10}$$

由（2），可得

$$H_\mathrm{R}=\int_V \boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}\,dV+\int_V(\boldsymbol{A}^*_\mathrm{p}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}_\mathrm{p})\,dV \tag{11}$$
$$=\int_V \boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}\,dV+\oint_{\partial V}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{A}^*\times\boldsymbol{A}^*_\mathrm{p})\,dS. \tag{12}$$

但由于 P 和 P_p 都满足同一个泊松方程（6），它们在 S_0、 S_1 上只能相差一个加性常数，因此边界积分为零。所以

$$H_\mathrm{R}=\int_V \boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}\,dV. \tag{13}$$

换言之，对于球壳， H_R 在极向-环向规范下等价于 H。请注意，该表达式对于 T的任意选择都成立。它是本文推导能量界的出发点；对于这些能量界，我们将对 T采用特定选择（9）。

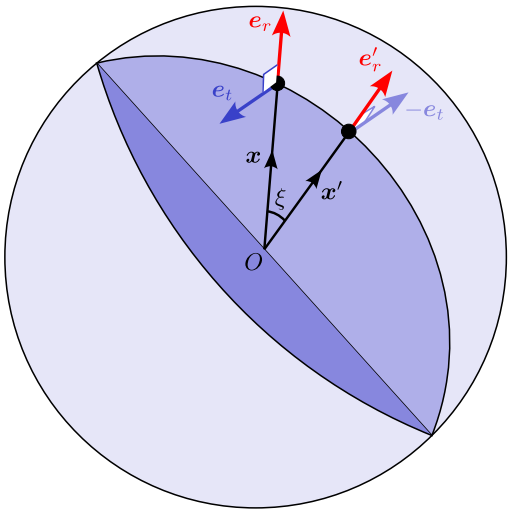

图1。 第 2.3节和2.4节的几何构型——尤其是 20式中 H_R的内禀表达式。注意， $\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{e}_r$ 以及 $\boldsymbol{x}'=r\boldsymbol{e}'_r$。

2.3. $\boldsymbol{A}^*_\mathrm{p}$的内禀表达式

为了推导能量界，我们将用 $\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{B}$。利用格林函数，可以将（6）和（7）的解写成

$$P(\boldsymbol{x})=-\int_{S'_r}(\boldsymbol{e}'_r\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}')G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\,dS', \tag{14}$$
$$T(\boldsymbol{x})=-\int_{S'_r}(\boldsymbol{e}'_r\cdot\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}')G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\,dS'. \tag{15}$$

这里， $\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{x}'=r\boldsymbol{e}'_r$ 是球面 S_r上的点，球面格林函数为

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi}\log(1-\cos\xi), \tag{16}$$

其中 ξ 是 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}'$ 之间的夹角（见图1）。特解（14）和（15）在每个 S_r 上都具有零均值（例如 Backus 1958），因此（15）特别满足（9）。代入（5）得

$$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}_r\times\left(\int_{S'_r}B_r(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\nabla}_h G\,dS'\right)$$
$$+\left(\int_{S'_r}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{e}'_r\times\boldsymbol{\nabla}'_h G\,dS'\right)\boldsymbol{e}_r. \tag{17}$$

正如Xiao 等（2023年）所观察到的，我们有

$$\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{\nabla}_h G=\frac{\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}}{4\pi r^3(1-\cos\xi)}, \tag{18}$$

and $\boldsymbol{e}'_r\times\boldsymbol{\nabla}'_h G=-\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{\nabla}_h G.$

2.4. $H_{\rm R}$的内禀表达式

顺带一提，我们可以利用（17）推导出 $H_{\rm R}$ 的一个新表达式。按照Xiao 等（2023年），我们定义单位向量

$$\boldsymbol{e}_t = \frac{\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{x}|} = \frac{\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{x}}{r^2 \sin\xi}, \tag{19}$$

它垂直于连接 $\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{x}'$ 的大圆（图1）。将（17）代入（13），并定义Γ（ξ）$=\sin\xi/$（$1-\cos\xi$），即可得到另一种表达式

$$H_{\rm R} = \int_{r_0}^{r_1} \int_{S_r \times S_r'} \frac{\Gamma(\xi)}{4\pi r} \Big[B_r(\boldsymbol{x}') B_t(\boldsymbol{x}) - B_r(\boldsymbol{x}) B_t(\boldsymbol{x}') \Big] \, dS' \, dS \, dr, \tag{20}$$

其中 $B_t \equiv \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e}_t$。注意，$\Gamma$（$\xi$）在$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$处存在奇点，因为当$\xi/$（$1-\cos\xi$）$\sim 2/\xi$时，$\xi \to 0$sin S'（$\boldsymbol{x}$趋于 ξ。不过，为 dS'选择坐标，使ξ位于北极，此时成为余纬，因此面积元 dS'还会带来一个ξ，这表明被积函数仍然有限。表达式（20）之所以称为“内禀”，是因为它既不涉及任何矢势，也不涉及任何参考场。

从图1可以看出，$B_t(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$中“绕着” $\boldsymbol{x}'$旋转的分量，反之对于 $B_t(\boldsymbol{x}')$也是如此。因此，（20）有着清晰的解释：它测量所有点对之间 $\boldsymbol{B}$ 相对于径向的平均绕数。Xiao等人（2023）指出，权重 $\Gamma(\xi)$自然地体现了球面几何；当 $\xi = \pi$时，该因子为零，这意味着$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 互为对跖点。他们还将（20）改写为沿磁力线而非高度的积分，由此展示了如何将球壳中的 $H_{\rm R}$ 表示为磁力线之间成对缠绕数的通量加权平均。这类似于用链接数对 H 作拓扑解释。

我们还可以将表达式（20） $H_{\rm R}$ 视为 $\boldsymbol{B}$的二点相关函数，它使用张量 B_iB_j的非对角分量。这让人想起了对 H 在周期区域中的著名解释（采用库仑规范，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}^{\rm c} = 0$），该解释曾用于太阳风湍流研究中的螺度评估（Matthaeus 和 Goldstein 1982年；Narita 2024年）。

3. 全局能量界

在第3.1节中，我们将Arnol'd（1986年）不等式（23）推广到 $H_{\rm R}$，适用于球壳。在此之前，回顾一下磁封闭区域中（23）的典型证明。证明从柯西－施瓦茨不等式开始

$$\left| \int_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\, dV \right| \le \int_V |\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|\, dV \le \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|, \tag{21}$$

其中 $\|\cdot\|^2 = \int_V |\cdot|^2\, dV$表示向量场在 L^2上的 V范数。不等式（21）在任意规范下均成立，但由于螺度在这样的区域中与规范无关，因此我们可以自由选择一个规范，使得 $\boldsymbol{A}$ 满足庞加莱′不等式

$$\|\boldsymbol{A}\| \le C\|\boldsymbol{B}\| \tag{22}$$

对于某个固定常数 C。例如，在磁闭合区域中，库仑规范 $\boldsymbol{A}^{\rm c}$满足这样的不等式，其中 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}^{\rm c} = 0$在 V中，且 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}^{\rm c} = 0$在 ∂V 上（例如，Yoshida & Giga 1990）。于是我们得到所需的能量界

$$\left| \int_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\, dV \right| \le C\|\boldsymbol{B}\|^2. \tag{23}$$

接下来考虑我们的磁开放球壳。

3.1. 能量下界

对于 $H_{\rm R}$，我们不再能自由选择（1）中的矢势，而必须验证由（22）给出的特定规范 $\boldsymbol{A}^*$（见（5）和（9）是否满足该条件。我们发现，可以通过采用Cantarella 等人（2001年）的论证，并利用仅以 $\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 的积分表达式（17），来实现这一点。详见附录A，由此可得

$$\|\boldsymbol{A}^*\| \le \frac{\pi r_1}{2}\|\boldsymbol{B}\|, \tag{24}$$

因此（21）给出

$$|H_{\rm R}| \le \frac{\pi r_1}{2}\|\boldsymbol{B}\|^2, \tag{25}$$

或者等价地，能量界为

$$\|\boldsymbol{B}\|^2 \ge W_1 \equiv \frac{2|H_{\rm R}|}{\pi r_1} \tag{26}$$

对于我们的球壳。

界（26）并非紧界，也就是说，对于任何 $\boldsymbol{B}$，等号都可能无法成立，至少在某些边界条件下如此。为此，首先注意到，使比值 $W_1/\|\boldsymbol{B}\|^2$ 最大的磁场——换言之，使该界最紧的磁场——必须是满足以下条件的线性无力场：

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \alpha\boldsymbol{B}, \quad \alpha = \text{constant}. \tag{27}$$

这由 Woltjer 定理（Woltjer 1958年）可得；Berger 将该定理 （1984年）推广至 $H_{\rm R}$ 固定$B_r|_{\partial V}$的情形（我们在附录B 中利用$\boldsymbol{A}^*$给出另一种证明）。

然后考虑一个简单的例子：我们令两侧边界上的 B_r 与偶极“源表面”势场相匹配，

$$\boldsymbol{B}_{\rm p} = B_0 \left[\frac{r_0^3(r^3+2r_1^3)}{r^3(r_0^3+2r_1^3)} \cos\theta \boldsymbol{e}_r - \frac{r_0^3(r^3-r_1^3)}{r^3(r_0^3+2r_1^3)} \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta \right]. \tag{28}$$

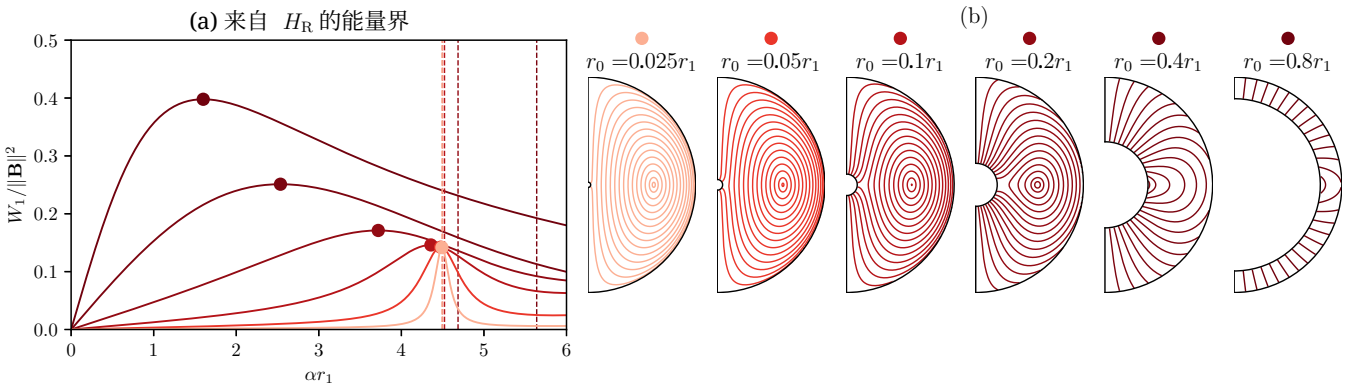

图2. 与 B_r （28）中的条件相匹配的线性无力场，在两侧的 S_0 和 S_1上。面板（a）显示这些场的能量界（26）中的比值与（归一化） α的关系。曲线代表具有不同 r_0/r_1的区域，彩色圆点表示各情形下使比值最大的解。面板（b）显示这些最大化解的磁通面。（a）中的竖直虚线表示最低的 α 共振值（附录 C）。

（这是唯一满足 $B_r = B_0 \cos\theta$ onS_0 且在 S_1上纯径向的无旋场。）存在一整族线性无力场，其 B_r 在两个边界上都与式 (28) 相匹配，但 α 的值各不相同（详见附录C），其比值 $W_1/\|\boldsymbol{B}\|^2$也各不相同。图 2(a) 绘出了该比值随（无量纲） αr_1变化的情况，每条曲线对应区域的一个不同 r_0/r_1 比值。对于任意 αr_1，这些线性无力场的比值 $W_1/\|\boldsymbol{B}\|^2$ 仅取决于区域的“形状” r_0/r_1 ，而与其绝对“大小” r_1无关。圆点表示每种区域形状下使 $W_1/\|\boldsymbol{B}\|^2$ 达到最大值的解；各解的磁力线拓扑见图 2(b)。这里的等值线表示恒定 $rR(r)\sin^2\theta$的曲面，其中 $R(r)$ 的定义见附录C。这些是轴对称场中的磁通面（与 $\boldsymbol{B}$相切）。请注意，最大螺度解的拓扑会随区域而变化：当 $r_0 = 0.8r_1$时，它是剪切拱形结构；而当 r_0 足够小时，则包含一个断开的“磁通绳”。

回到界（26）的紧致性问题，从图 2（a）可以看出，界在较大的 $W_1/\|\boldsymbol{B}\|^2$ 时最紧——也就是说，比值 r_0/r_1 最大；但对于图示中最薄的壳层（ $r_0 = 0.8r_1$ ），最大螺度解只能达到 $W_1 \approx 0.4\|\boldsymbol{B}\|^2$。相反，当 $r_0 \to 0$ 时，最大比值趋近于 $W_1 \approx 0.14\|\boldsymbol{B}\|^2$。在此极限下，相应的 αr_1 收敛于单位球的最小旋度特征值，约为 4.4934（Cantarella 等人 2000年，表I）。对于非零 r_0，可达到的比值取决于 B_r的边界条件；第 5节将讨论更符合太阳实际的构型。

3.2. 自由能下界

由于势场的 $H_R = 0$ ，人们可能会怀疑，非零的 H_R 不仅意味着（总）磁能的最小值， $\|\boldsymbol{B}\|^2$，如（26）所示，还意味着自由磁能的某个最小值， $\|\boldsymbol{B}_J\|^2$，其中

$$\|\boldsymbol{B}_J\|^2 = \|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_P\|^2 = \|\boldsymbol{B}\|^2 - \|\boldsymbol{B}_P\|^2. \tag{29}$$

在此，我们为球壳证明这一点。

为了推导以 H_R 表示 $\|\boldsymbol{B}_J\|^2$ 的界，我们回顾以下分解

$$H_R = H_J + H_{PJ}, \tag{30}$$

其中两项

$$H_J = \int_V \boldsymbol{A}_J \cdot \boldsymbol{B}_J \, dV, \quad H_{PJ} = 2\int_V \boldsymbol{A}_P \cdot \boldsymbol{B}_J \, dV \tag{31}$$

分别是规范不变的（Berger 1999）。它们分别被称为“载流”螺度和“体积穿越”螺度（Linan 等人 2018年）。选择 $\boldsymbol{A}_J = \boldsymbol{A}_J^*$ 使我们可以立即将（26）应用于 $\boldsymbol{B}_J$ ，从而得到

$$|H_J| \le \frac{\pi r_1}{2}\|\boldsymbol{B}_J\|^2. \tag{32}$$

这已经给出了自由能界

$$\|\boldsymbol{B}_J\|^2 \ge W_2 \equiv \frac{2|H_J|}{\pi r_1}, \tag{33}$$

但这只能说明具有非零 H_J的磁场中存在非零自由能。

进一步地，我们可以将 H_{PJ} 的下界限定为

$$|H_{PJ}| \le 2\int_V |\boldsymbol{A}_P|\,|\boldsymbol{B}_J|\,dV \le 2\|\boldsymbol{A}_P\|\,\|\boldsymbol{B}_J\|. \tag{34}$$

选取 $\boldsymbol{A}_P = \boldsymbol{A}_P^*$ 由式（24）可得

$$\|\boldsymbol{A}_P^*\| \le \frac{\pi r_1}{2}\|\boldsymbol{B}_P\| \tag{35}$$

因此，结合可得不等式

$$|H_{\mathrm{R}}| \leq \frac{\pi r_1}{2}\Big(\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2 + 2\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|\,\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|\Big). \tag{36}$$

MacTaggart （2025年）最近发表了一个形式相同但更严格的不等式，即 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2$ 的系数更小——这是通过注意到$\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}$ 是一个闭合磁场，从而估计式（32）可以由经典界（23）替代而得到的。

注意到（ $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|$）右侧出现了36。我们无法期望仅用$\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|$ 来界定 $|H_{\mathrm{R}}|$，因为在 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}$ 与 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}$相互链接的构型中，可以通过增强 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}$ 的强度，在保持$\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}$ 固定的情况下，使 $|H_{\mathrm{R}}|$无限增大。一个简单的例子是偶极子与环向磁场的线性组合：

$$\boldsymbol{B} = ar_0^3\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta\right) + \frac{br}{r_0}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi. \tag{37}$$

这里， $\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}$ 正是 ϕ分量，很容易证明

$$\boldsymbol{A}^* = \frac{br^2}{r_0}\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \frac{ar_0^3}{r^2}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \tag{38}$$

因此

$$H_{\mathrm{R}} = \frac{8\pi abr_0^4}{3}\left(\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1\right). \tag{39}$$

我们看到，通过增大 a $\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}$ 分量的振幅，同时保持 b 固定，使得 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}$ 不变，确实可以任意增大 H_{R} 。

根据初等微积分，我们可以解出（36）中的 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|$ ，得到

$$\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\| \geq \|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|\left(\sqrt{1 + \frac{2|H_{\mathrm{R}}|}{\pi r_1\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2}} - 1\right), \tag{40}$$

两边平方即可得到所需的能量界

$$\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2 \geq W_3 \tag{41}$$

for

$$W_3 \equiv \frac{2|H_{\mathrm{R}}|}{\pi r_1} + 2\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2|H_{\mathrm{R}}|}{\pi r_1\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2}}\right). \tag{42}$$

注意，如果 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}$ 为零，使得 $\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}$，那么 $H_{\mathrm{R}} \equiv H_{\mathrm{J}}$ ，且（41）可化简为（33）。此外， W_3 始终非负：由（40）可知这一点。

图3 探讨了对于图2中相同的偶极线性无力构型，界限 (33) 和 (41) 的紧致程度。图中圆点同样对应于 $|H_{\mathrm{R}}|/\|\boldsymbol{B}\|^2$ 的极大值点。图 3(a) 显示，对于这些极大值点，随着 $r_0 \to 0$， $\|\boldsymbol{B}\|^2$ 中来自 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2$ 的比例越来越大。事实上，对于满足 $r_0 \leq 0.1r_1$ 的情形， $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2$ 可以忽略不计。间接证据是，当 r_0 较小时，图2中的磁通面变得“几乎闭合”，几乎不受开放边界条件的影响。相应地，随着 r_0 减小，H_{R} 中来自 H_{J} 的部分越来越多，如图3(b)所示。因此，当 $r_0 \to 0$ 时，图3(c)中的界限 (33) 的紧致程度趋近于图2(b)中原始界限 (26) 的紧致程度，其中 $W_2 \approx 0.14\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2$。另一方面，对于最薄的壳层 $r_0 = 0.8r_1$，从图3(b)可见 $H_{\mathrm{R}} \approx H_{\mathrm{PJ}}$，因此 $W_2/\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2 \to 0$ ，界限 (33) 也就失去了作用，尽管 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2$ 仍约为 $\|\boldsymbol{B}\|^2$ 的一半。

相比之下，线性无力场极大值解的能量界（41）的紧致程度对 α 呈非单调依赖关系（图 3d）。值得注意的是，对于所有 r_0，该界都与零保持一定距离，因此无论 H_{R} 主要来自H_{J} 还是 H_{PJ}，抑或来自二者的混合，都能保证自由能非零。另一方面，对于较小的 r_0 ，基于 H_{R} 的能量界 W_3 不会变得独立于 r_0，并且仍略低于 W_2 （当$r_0 = 0.025r_1$时），尽管 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2$ 相较于 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2$可以忽略不计。

4. 局域能量界

第 3 节推导的能量界基于对整个 H_{R} 积分得到的全局值 V。在此，我们将 H_{R} 进行空间分解，使其成为一系列更局域的不变量之和，从而得到更强的能量界。当然，也可以直接依据 $\|\boldsymbol{B}\|^2$ 对$\int_V |\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}|\,dV$进行界定，绕过不等式（21）中的第一个不等式。然而，该积分并非理想不变量，因此我们更倾向于用守恒量来界定能量，因为在数值模拟或测量中，这种守恒量可能更稳健。为此，我们需要将H_{R} 分解为由磁面隔开的子区域，而非任意体积（参见 Valori 等人，2020年）。

4.1. 域的划分

表达式（13）表明，与 Finn-Antonsen 公式（2）不同，它展示了如何将 H_{R}空间分解为一系列更局域的“子螺度”之和，

$$H_{\mathrm{R}} = \sum_{V_i\in\Pi} h_i, \text{ where } h_i = \int_{V_i}\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}\,dV, \tag{43}$$

其中， $\Pi = \{V_i\}$ 是 V的不相交划分，意味着$V = \bigcup_i V_i$ 以及对于 $i \neq j$而言的 $V_i \cap V_j = 0$ 。对于任意这样的划分，每个 h_i 可能并非理想不变量。但如果这些 V_i 是磁子体积——这意味着，在 ∂V_i 内部的那一部分上，$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}_i = 0$ 内部的

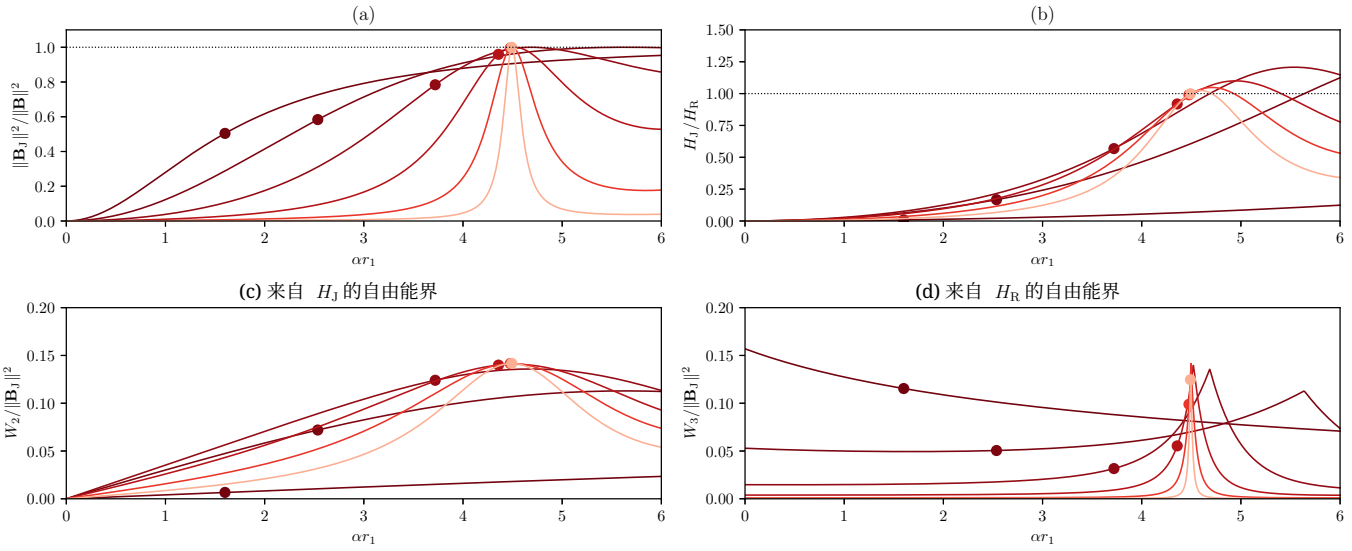

图3。 归一化的 (a) 自由能 $\|\boldsymbol{B}_J\|^2$ 和 (b) 电流承载螺度 H_J，对应于图 2中的线性无力场解。面板 (c) 和 (d) 分别显示能量界 (33) 和 (41) 中的比值 $W_2/\|\boldsymbol{B}_J\|^2$ 和 $W_3/\|\boldsymbol{B}_J\|^2$ 。曲线表示与图 2相同的区域 (r_0/r_1)，彩色圆点均表示使原始能量界 $W_1/\|\boldsymbol{B}\|^2$达到最大值的磁场。

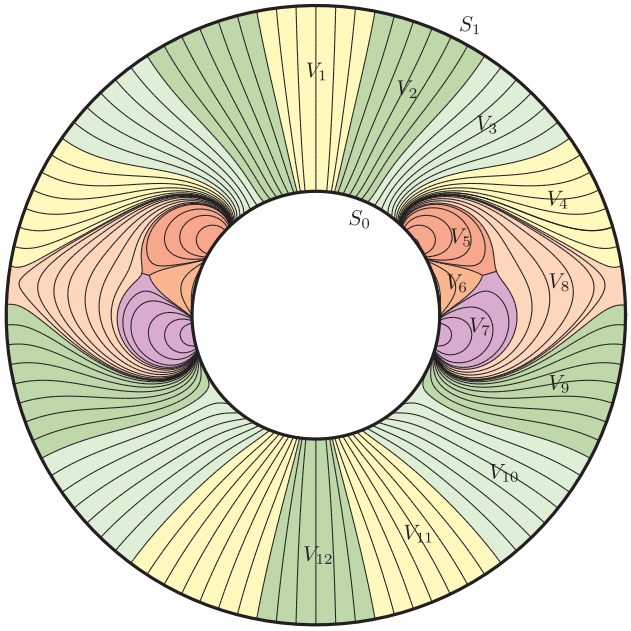

图4。 将球壳 V分割为磁子体积 V_1、...、 V_{12}的一个示例 Π，此例对应于轴对称磁场。每个子体积 V_i均关联一个子螺度 h_i，且 $\sum_{i=1}^{12} h_i = H_R$。

整体 V——那么，雷诺输运定理（例如Moffatt & Dormy 2019），结合未取旋的理想感应方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}^*}{\partial t} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\phi^*, \tag{44}$$

给出

$$\frac{dh_i}{dt} = \oint_{\partial V_i \cap \partial V} \left(\phi^* + \boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dS}. \tag{45}$$

在全局线锚边界条件 $\boldsymbol{v}|_{\partial V} = \boldsymbol{0}$下，括号中的第二项消失，因此也可得 $\boldsymbol{\nabla}_h \phi^*|_{\partial V} = 0$。这意味着我们可以将 ϕ^* 移到每个边界面S_0 和 S_1上的积分号外，因此由（4）可得

$$\frac{dh_i}{dt} = 0. \tag{46}$$

换句话说，每个子螺度在全局边界上为零的理想运动下都是不变量。因此，我们将 H_R 分解成了更局域的不变量，尽管 $\boldsymbol{A}^*$ 的计算仍是全局定义的。这种分割的一个例子见图4。

4.2. 磁分区给出的界

我们可以利用分割（43）为磁能给出一个更强的下界。为此，将该分割的无符号螺度定义为

$$\overline{H}_\Pi = \sum_{V_i \in \Pi} |h_i|. \tag{47}$$

同样，只要 V_i 是磁子体积，它就是一个理想不变量。它满足

$$\overline{H}_\Pi = \sum_{V_i \in \Pi} \left| \int_{V_i} \boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B}\, dV \right| \tag{48}$$

$$\leq \sum_{V_i \in \Pi} \int_{V_i} |\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B}|\, dV = \int_V |\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B}|\, dV. \tag{49}$$

这便恢复了（21），因此根据第 3 节可知， H_Π对于任意不相交划分 Π 也满足

$$\overline{H}_\Pi \le \frac{\pi r_1}{2}\|\boldsymbol{B}\|^2. \tag{50}$$

对于太阳日冕，其中存在螺度为正和为负的区域，通常只要选择足够精细的分割，得到的能量下界就会大于（26）。

4.3. 由磁力线螺度得到的下界

为了利用（ $\|\boldsymbol{B}\|^2$ 50）得到 的尽可能紧的下界，我们寻求最精细的分割 Π。具体做法是令每个 V_i 成为围绕单条磁力线的细磁通管 L_i，并取管半径 $r(V_i)$趋于零的极限。由于 h_i 在此极限下会趋于零，因此我们用磁通管的磁通量Φ_i 进行归一化，从而得到有限值

$$\mathcal{A}(L_i) = \lim_{r(V_i)\to 0} \frac{1}{\Phi_i}\int_{V_i} \boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}\, dV. \tag{51}$$

这种量称为磁力线螺度（Yeates & Berger 2024）。Berger (1988年)表明，该量有一个更简单的表达式

$$\mathcal{A}(L_i) = \int_{L_i} \boldsymbol{A}^*\cdot d\boldsymbol{l}. \tag{52}$$

同样，对于受线锚定理想演化的每条磁力线，该量都是不变量。对于闭合环形磁力线， $\mathcal{A}(L_i)$就是其所围磁通量。对于开放磁力线，它仍对应于一个磁通量，不过其解释更为微妙（例如，Yeates & Hornig 2016）。将（ H_R 43）中的求和替换为对 $\mathcal{A}(L_i)d\Phi_i$ 在所有磁力线上的积分，即可得到 。在（典型的）所有磁力线都与 ∂V 恰好相交两次的情况下，这可以写成

$$H_\mathrm{R} = \frac{1}{2}\oint_{\partial V} \mathcal{A}|B_r|\, dS, \tag{53}$$

其中， $\mathcal{A}$沿着从 ∂V上各点追踪得到的磁力线积分。

相应的、属于这个极限“磁力线”分割的无符号螺度，也可通过将（47）中的求和替换为积分得到，因此

$$\overline{H} = \frac{1}{2}\oint_{\partial V} |\mathcal{A}B_r|\, dS. \tag{54}$$

Yeates 将其称为“无符号螺度”(2020年)。由式（50）可知，它再次满足不等式

$$\overline{H} \le \frac{\pi r_1}{2}\|\boldsymbol{B}\|^2. \tag{55}$$

由于这是可能的最精细（磁）分割，因此它给出了分割方法所能得到的最紧能量界，即

$$\|\boldsymbol{B}\|^2 \ge W_4 \equiv \frac{2\overline{H}}{\pi r_1}. \tag{56}$$

显然，只有当 $\overline{H} = H_\mathrm{R}$ 时，（56）才会恰好退化为原来的界限（26）。这发生在 $\mathcal{A}$ 要么为零，要么在所有磁力线上符号一致的情况下。 $\mathcal{A}$处处为零的情况并不常见：正如Yeates (2020年所示，即使是（非轴对称）势场，单条磁力线上通常也具有非零的 $\mathcal{A}$值。另一方面， $\mathcal{A}$ 符号一致的第二种情况确实可能出现，至少在人工构造的场中如此。一个例子是第 3 节（附录 C）中的线性无力场族。因此，对于这些场，界限（56）不会提供新的信息。另一方面，太阳日冕中更常见的情况是 $\mathcal{A}$具有混合符号；在这种情况下，$H > H_\mathrm{R}$（例如，Yeates 2024）和界限（56）对 $\|\boldsymbol{B}\|^2$ 的约束更强。下一节将对此进行说明。

5. 数值示例

从观测结果可以清楚看出，真实的太阳日冕并不像图 2 (Pevtsov&Balasubramaniam 2003；Pevtsov 等人 2014) 所示的最大螺度场。具体而言，既存在具有正螺度的子区域，也存在具有负（磁力线）螺度的子区域；此外，还有一些区域——尤其是开放磁场中的区域——其磁力线很可能接近势场（Yeates &Hornig2016）。为呈现这些总体特征，我们在此展示 Yeates (2024年) 最近对第24太阳活动周进行的一些磁摩擦模拟；不过，我们在此纯粹是想大致了解太阳日冕磁场模型通常会呈现出什么样的特征。

5.1. 太阳活动周模拟

在 YeatesYeates(2024年) 的数值模拟中，下边界 $r_0 = R_\odot$通过表面磁通输运模型演化，而日冕磁场（位于 $r < r_1 = 2.5R_\odot$中）则通过持续弛豫作出响应。新活动区依据太阳动力学观测站（Solar Dynamics Observatory）的 SHARP（Spaceweather HMI Active RegionPatch）数据涌现（Bobra 等人 2014）。

图 5 将其中两个数值模拟与势场源表面（PFSS）外推结果进行了比较，比较时选取了太阳活动极大期附近的单个时刻。左栏显示磁力线，右栏显示太阳表面上的磁力线螺度分布（计算细节见附录 D）。正如 Yeates（2024年）所述，这两个数值模拟在光球上具有相同的 B_r ，但其逸出磁力线的螺度不同，

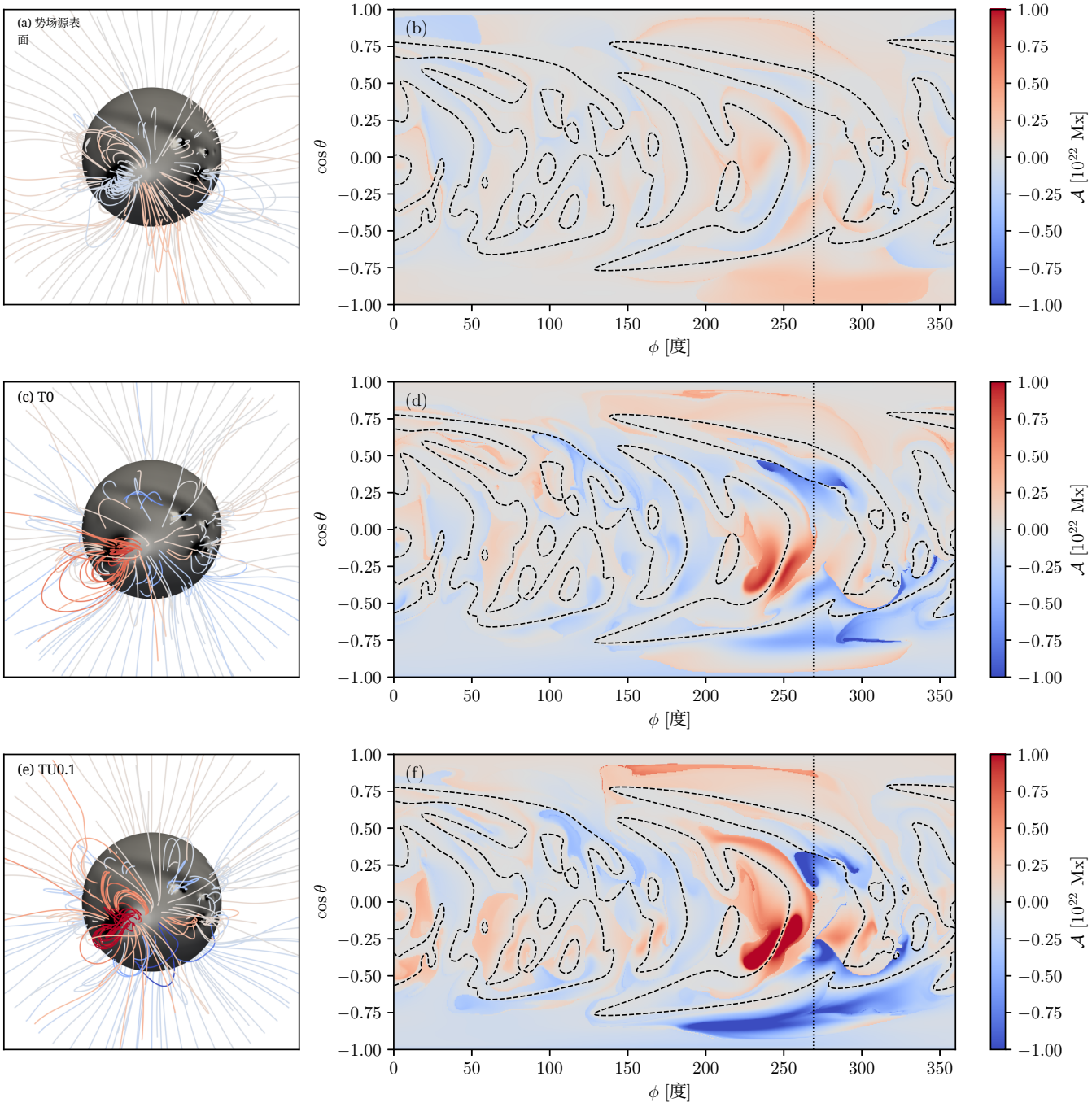

图5。 同一天（2014年12月15日）的磁力线螺度：势场源面外推结果（a、b），以及两组磁摩擦模拟结果——T0（c、d）和TU0.1（e、f），引自 Yeates (2024年)。右侧一列显示 $\mathcal{A}$ 随 $r = r_0$足点位置的变化，并以虚线标出光球中性线。点状竖线表示左侧一列的视点经度，左侧显示按 $\mathcal{A}$着色的（选定）磁力线。所有图中的色标上限相同；实际最大值分别为 0.4×10^{22} Mx、1.3×10^{22} Mx 和 3.3×10^{22}Mx。

活动区。在 T0 运行中，所有区域均以无扭曲状态涌现，因此螺度主要通过差分自转产生的剪切注入。在 TU0.1 运行中，区域涌现时带有非零螺度，这也对日冕中的总螺度有所贡献。在这两种情况下，最强的螺度往往集中在中性线上方的剪切拱或磁通绳中，这在观测上对应于暗条通道（Martin1998）。在图 5(d,f) 中，我们可以看到此类结构的足点位于中性线两侧。请注意，尽管具有 $H_{\mathrm{R}}=0$，势场中也包含非零的磁力线螺度，如图5(b) 所示。这是由边界磁通分布的非平凡拓扑造成的（见 Yeates 2020）。

5.2. 时间序列

为了进行定量比较，我们从 T0 和 TU0.1 数值模拟中每隔 27 天获取的快照计算 $\|\boldsymbol{B}\|^2$，$\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2$，$H_{\mathrm{R}}$，以及$H$ 。图 6(a) 展示了这两次数值模拟中 $\|\boldsymbol{B}\|^2$ （乘以 r_0 以使其单位与螺度相同）的时间变化，以及基于（共用的）下边界分布得到的一系列相应的势场源面外推。尽管由于外边界条件不同，势场源面外推并不与任一参考场 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}$完全相同，但其能量仍是一个很好的近似。因此，该图表明，在这些数值模拟中，$\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2$ 始终占主导地位 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2$ ，这在许多全球日冕模型中都很常见（Yeates 等，2018）。

图6(b) 展示了 H_{R} 如何随占主导地位的非势场结构而在正负之间变化。例如，在图5所示快照的时刻，$H_{\mathrm{R}}>0$ 在 T0 和 TU0.1 中均成立，对应于 cos $\theta=-0.25$ 附近大型活动区占主导地位，且 $\phi=250°$。尽管图5(e) 和 (f) 中似乎并非由它主导，但纳入磁通加权因子 $|B_r|$ 后，它在式（53）中确实占主导地位。根据定义，对于势场源表面模型，$H_{\mathrm{R}}=0$ ，因为它是无电流场。相比之下，图5(c) 中的无符号螺度始终非负，其排序更为一致：TU0.1 的值大于 T0，并且势场源表面模型的值非零（但较小）。

5.3. 能量界

图右栏6 展示了第3 节和第4 节中三个能量界在 T0 和 TU0.1 数值模拟中的紧致程度。对于基于26的基本界（ $\|\boldsymbol{B}\|^2$ ，使用 $|H_{\mathrm{R}}|$，如图6（a）所示，只要 $H_{\mathrm{R}}\neq 0$，就能得到非零界；但请注意，比值 $W_1/\|\boldsymbol{B}\|^2$ 始终小得多，相比之下，图2中的线性无力示例则不然。部分原因在于， H_{R} 现在包含了正负贡献相互抵消的情况；此外，数值模型并非线性无力场，因此不是该比值的最大化者。2018年之后，比值明显上升，此时 H_{R} 变为始终为正，这是由某种特定的长寿命结构占主导地位所致。

图6(e) 展示了比值 $W_3/\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2$，即利用41式对自由能 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2$ 给出的界的紧致程度，所用参数为H_{R} 和 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2$。尽管当 $H_{\mathrm{R}}\neq 0$时，这一比值同样不为零，但其数量级比第一个界低得多。为理解界（41）的这一特性，将式（42）两边除以 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2$ ，并令 $\varepsilon\equiv W_1/\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2$。由图6(d) 以及$\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2<\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2$这一事实可知， $\varepsilon\ll 1$。接着在 $\varepsilon=0$ 附近进行泰勒展开，可得 $W_3\approx\varepsilon^2\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{p}}\|^2/4$，因此 $W_3/\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2\ll\varepsilon$ ，前提是 $\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}\|^2$ 并非太小。因此，对于全球日冕模型而言，自由能界不够紧致似乎是相当普遍的情况。

最后，图 6(f) 展示了基于无符号螺度的改进能量界（56）对 $\|\boldsymbol{B}\|^2$ 的约束紧密程度。总体而言，比值 $W_4/\|\boldsymbol{B}\|^2$ 大于$W_1/\|\boldsymbol{B}\|^2$，但从未超过 0.05（仅为偶极子示例中最大磁螺度线性无力场达到值的五分之一，其中 $r_0=0.4r_1$）。或许最重要的是，在 T0 和 TU0.1 两次运行中，这个无符号螺度界始终非零；而基于 H_{R}的界则不然。这表明，与 H_{R} 相比，H 或许更适合用于分析这些全球模拟。

6. 结论

上述推导出的界表明，非零相对螺度 $|H_{\mathrm{R}}|$意味着非零磁能，这与磁封闭区域中的经典螺度 $|H|$ 类似。同样，我们证明了非零 $|H_{\mathrm{R}}|$意味着非零自由磁能。然而，与 H一样，即使在 $H_{\mathrm{R}}=0$的情况下，磁场也会对能量施加不可忽略的拓扑约束。式（H 54）中的无符号螺度似乎是最自然的推广；我们证明了，如果它非零，那么即使对于具有 $H_{\mathrm{R}}=0$的场，也意味着磁能非零。

在经典磁封闭情形下， $\boldsymbol{B}$ 在给定磁能下使螺度达到最大的构型仅取决于区域的几何形状（Arnol'd 1986；Cantarella 等，2001）。在 H_{R}的情况下，可达到的螺度以及最大化构型的性质还取决于$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}$的边界分布。我们以偶极子边界条件这一最简单的情形说明了最大化的 $\boldsymbol{B}$，但未来可以

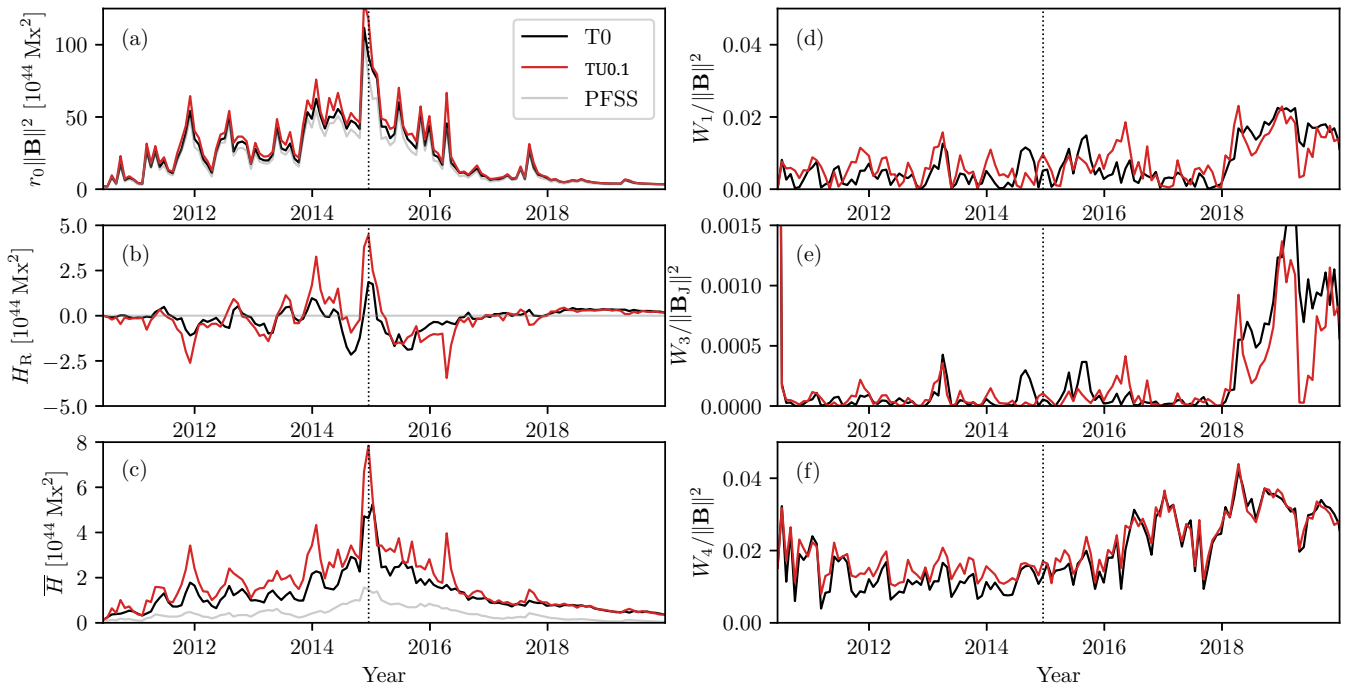

图 6. 势场源表面数值模拟以及两种磁摩擦模拟 T0、TU0.1 的积分量时间序列，改编自 Yeates （2024年）。左侧面板显示 (a) 能量 $r_0\|\boldsymbol{B}\|^2$、(b) 相对螺度 H_R和 (c) 无符号螺度 H，由方程（47）给出。右侧面板 (d–f) 分别显示能量界（ $W_1/\|\boldsymbol{B}\|^2$、$W_3/\|\boldsymbol{B}_\mathrm{J}\|^2$ 和 $W_4/\|\boldsymbol{B}\|^2$ ）中的比值，对应方程（26）、（41）和（56）。点状竖线表示图 5所示的时间。

谨慎地对任意分布进行计算，包括第5节数值模拟中的那些分布。这将提供一种标准化的方法，用于评估太阳日冕中的给定磁场构型有多么“螺旋化”，并可能应用于预测太阳爆发。

球壳以外的区域又如何呢？首先，我们预计所有结果都可以（经过小幅修改）推广到无限平面板层的情形（即两个平行平面之间的体积），因为 $\boldsymbol{B}$ 的极向—环向分解在那里也同样存在。由于这种区域在太阳物理学中的实际相关性有限，本文不再赘述。更有意义的可能是有限区域，例如笛卡尔盒。对于这样的区域，D´emoulin （2007年指出，通过选取 $H_\mathrm{R} = \int_V \boldsymbol{A}^\mathrm{c}\cdot\boldsymbol{B}\,dV$ 以匹配 $\boldsymbol{A}^\mathrm{c}$，我们再次可以写成$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}^\mathrm{c} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}^\mathrm{c}_\mathrm{p}$，其中参考矢势 ∂V在 $\boldsymbol{A}^\mathrm{c}_\mathrm{p}$ 全域内满足库仑规范条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}^\mathrm{c}_\mathrm{p}=0$，并且 V满足 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}^\mathrm{c}_\mathrm{p}|_{\partial V}=0$。然而，除球壳或无限板层之外，这并不能给出用 $\boldsymbol{A}^\mathrm{c}$ 表示 $\boldsymbol{B}$的显式表达式，因此尚不清楚如何推导出 $\|\boldsymbol{B}\|^2$的能量界，尽管 MacTaggart (2025年)最近推导出了一个类似于第3.2节的自由能界。

在其他某些情况下——例如双周期区域（Xiao 等 2025年），或有限磁通管（Prior & Yeates 2014年; Candelaresi 等 2021年）——已知存在$\boldsymbol{A}$，其可用 $\boldsymbol{B}$ 表示，并且相应的 H 还可以用绕数来解释。然而，在这些情况下， H 可能不同于 H_R （Prior & Yeates 2014年给出了一个明确的例子）。这就提出了一个问题：一般而言， H_R 是否是物理上最相关的螺度定义，或者它是否仅在球壳等更特殊的区域中才与这种定义相一致。事实上，MacTaggart &Valli (2023年)已经提出了将 H_R 推广到多重连通区域的方法，但其与能量之间的关系仍有待进一步研究。

ARY 获得了 UKRI/STFC 资助，项目编号为 UKRI1216。作者感谢 Christopher Prior 对初稿提出意见，并感谢 Daining Xiao 和 Mitchell Berger 进行富有成效的讨论。SDO数据由美国国家航空航天局和 SDO/HMI科学团队提供。

设施： SDO（HMI）

附录

A. 庞加莱不等式的证明

为推导（24）关于 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{p}}^{*}$，我们改写了 Cantarella 等人 （2001年）提出的一个论证，该论证最初应用于磁封闭区域中的 Biot-Savart 积分。我们从关于 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的表达式（17）出发，利用（18）将其写成以下形式

$$\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi r^{3}}\int_{S_r'}\left[B_r(\boldsymbol{x}')\frac{\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}}{1-\cos\xi}+\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}')}{1-\cos\xi}\boldsymbol{e}_r\right]dS'. \tag{A1}$$

由于 $\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{e}_r$，被积函数中的两项对于任意 $\boldsymbol{x}'$ 都是正交向量，因此

$$|\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{x})|^{2}=\frac{1}{(4\pi r^{3})^{2}}\left[\left|\int_{S_r'}B_r(\boldsymbol{x}')\frac{\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}}{1-\cos\xi}\,dS'\right|^{2}+\left|\int_{S_r'}\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}')}{1-\cos\xi}\,dS'\right|^{2}\right]. \tag{A2}$$

(A2中的第一项满足

$$\left|\int_{S_r'}B_r(\boldsymbol{x}')\frac{\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}}{1-\cos\xi}\,dS'\right|\le\int_{S_r'}\left|B_r(\boldsymbol{x}')\right|\frac{|\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}|^{1/2}}{(1-\cos\xi)^{1/2}}\,\frac{|\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}|^{1/2}}{(1-\cos\xi)^{1/2}}\,dS' \tag{A3}$$

$$\le r^{2}\left(\int_{S_r'}|B_r(\boldsymbol{x}')|^{2}\Gamma(\xi)\,dS'\right)^{1/2}\left(\int_{S_r'}\Gamma(\xi)\,dS'\right)^{1/2}. \tag{A4}$$

利用柯西-施瓦茨不等式以及 $|\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}|=r^{2}\sin\xi$ 这一事实。如同在 (20) 中一样，我们使用简写 $\Gamma(\xi)=\sin\xi/(1-\cos\xi)$。类似地，(A2) 中的第二项满足

$$\left|\int_{S_r'}\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}')}{1-\cos\xi}\,dS'\right|\le r^{2}\left(\int_{S_r'}|\boldsymbol{B}_h(\boldsymbol{x}')|^{2}\Gamma(\xi)\,dS'\right)^{1/2}\left(\int_{S_r'}\Gamma(\xi)\,dS'\right)^{1/2}. \tag{A5}$$

由对称性可知，积分 $\int_{S_r}\Gamma(\xi)\,dS'$ 与 $\boldsymbol{x}$ 无关，因此可直接令 $\boldsymbol{x}$ 为北极来计算，得到

$$\int_{S_r'}\Gamma(\xi)\,dS'=2\pi^{2}r^{2}. \tag{A6}$$

因此，(A2) 总体给出

$$|\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{x})|^{2}\le\frac{1}{8}\int_{S_r'}|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')|^{2}\Gamma(\xi)\,dS'. \tag{A7}$$

对所有 $\boldsymbol{x}$ in S_r 积分后，得到

$$\int_{S_r}|\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{x})|^{2}\,dS\le\frac{1}{8}\int_{S_r'}|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')|^{2}\left(\int_{S_r}\Gamma(\xi)\,dS\right)dS'=\frac{\pi^{2}r^{2}}{4}\int_{S_r'}|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')|^{2}\,dS'. \tag{A8}$$

最后，对 r 积分得到

$$\|\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{x})\|^{2}\le\int_{r_0}^{r_1}\frac{\pi^{2}r^{2}}{4}\int_{S_r}|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')|^{2}\,dS'\,dr\le\frac{\pi^{2}r_1^{2}}{4}\|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\|^{2}. \tag{A9}$$

B. 相对螺度的 Woltjer 定理

Berger (1984年)（见附录 A）指出，Woltjer(1958年) 的著名定理同样适用于相对螺度：也就是说，对于给定的 H_{R} 和 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial V}$，最小能量态（若存在）必须是满足式（27）的线性无力场。这里我们利用式（13）为球壳区域给出一种简单的替代证明。

首先考虑 $\|\boldsymbol{B}\|^{2}$ 的一阶变分。分部积分得

$$\delta\|\boldsymbol{B}\|^{2}=2\int_{V}\delta\boldsymbol{A}^{*}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\,dV-2\oint_{\partial V}\boldsymbol{B}\cdot(\delta\boldsymbol{A}^{*}\times\boldsymbol{n})\,dS. \tag{B10}$$

表面项消失，因为 $\delta\boldsymbol{A}^*\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$，这是因为 $\boldsymbol{A}^*\times\boldsymbol{n}|_{\partial V}$在极向-环向规范（5）中仅取决于$B_r|_{\partial V}$，而根据假设，该量是固定的。另一方面，应用类似的边界条件后，我们得到

$$\delta H_{\mathrm{R}}=2\int_V \delta\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}\,dV. \tag{B11}$$

接下来，我们沿用Woltjer (1958年的原始论证，通过引入拉格朗日乘子 $\|\boldsymbol{B}\|^2$，在固定 H_{R} 且边界上 B_r 固定的条件下对其进行极小化，从而得到 α

$$\int_V 2\delta\boldsymbol{A}^*\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}-\alpha\boldsymbol{B})\,dV=0. \tag{B12}$$

当且仅当满足（ $\delta\boldsymbol{A}^*$ ）时，对所有允许的扰动27均成立。

C. DIPOLAR LINEAR FORCE-FREE EXAMPLE

通过变量分离（例如，Berger 1985；Durrant 1989），可以证明，满足（27）且 B_r在28上满足（ S_0 且 S_1 的解具有如下形式

$$\boldsymbol{B}=B_0\left[\frac{2R\cos\theta}{r}\boldsymbol{e}_r-\frac{(rR)'\sin\theta}{r}\boldsymbol{e}_\theta+\alpha R\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\right], \tag{C13}$$

其中，撇号表示对 r 求导，径向函数 $R(r)$ 用球贝塞尔函数表示为

$$R(r)=Aj_1(\alpha r)+By_1(\alpha r), \tag{C14}$$

其中常数 A、 B 由 S_0 和 S_1上的边界条件确定。具体而言，

$$A=-\frac{r_0y_1(\alpha r_1)-cr_1y_1(\alpha r_0)}{2\lambda},\qquad B=\frac{r_0j_1(\alpha r_1)-cr_1j_1(\alpha r_0)}{2\lambda}, \tag{C15}$$

这里我们采用简写

$$\lambda\equiv y_1(\alpha r_0)j_1(\alpha r_1)-j_1(\alpha r_0)y_1(\alpha r_1),\qquad c\equiv\frac{3r_0^3}{r_0^3+2r_1^3}. \tag{C16}$$

对于 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的所有取值，该解均存在，但以下离散的“共振”值除外： $\lambda=0$ (Berger 1985年）。这些值对应于使下述齐次问题 α在 $B_r(r_0,\ \theta,\ \phi)=B_r(r_1,\ \theta,\ \phi)=0$具有非平凡解的取值——即球壳中的旋度特征函数（ Cantarella 等人 2000年）。图2(a) 中以竖直虚线标出了每个 r_0 对应的最低共振 α 值。

对于线性无力场，有 $\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\alpha B_r$，因此，由于 $\cos\theta$ 是 ∇_h^2的特征函数，方程（6）和（7）的解为

$$P(r,\theta)=B_0rR\cos\theta,\quad T(r,\theta)=\alpha P(r,\theta), \tag{C17}$$

由此得到的矢势为

$$\boldsymbol{A}^*=B_0\left[\alpha rR\cos\theta\boldsymbol{e}_r+R\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\right]. \tag{C18}$$

根据（13），相对螺度（参见Berger 1985年）因此为

$$H_{\mathrm{R}}=\int_V\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{B}\,dV=\frac{16\pi B_0^2\alpha}{3}\int_{r_0}^{r_1}(rR)^2\,dr. \tag{C19}$$

类似地，能量可化简为单个积分

$$\|\boldsymbol{B}\|^2=\frac{8\pi B_0^2}{3}\int_{r_0}^{r_1}\left[(2+\alpha^2r^2)R^2+([rR]')^2\right]dr. \tag{C20}$$

在 α的共振值处， $\|\boldsymbol{B}\|^2$ 和 H_{R} 都会发散至无穷大，但如图2(a)所示，它们的比值却不会发散，因为 λ^{-2} 这一因子在两者之间相互抵消。

为了计算 $H_{\rm J}$ 和 $H_{\rm PJ}$，使用矢势会比较方便

$$\boldsymbol{A}_{\rm p} = \frac{B_0 r_0^3 (r^3 + 2r_1^3)}{2r^2 (r_0^3 + 2r_1^3)} \sin\theta \boldsymbol{e}_\phi \tag{C21}$$

对于参考场（28），由于在此规范下 $\boldsymbol{A}_{\rm p} \cdot \boldsymbol{B}_{\rm p} = 0$ 且我们有

$$H_{\rm PJ} = 2\int_V \boldsymbol{A}_{\rm p} \cdot \boldsymbol{B}\, dV = \frac{8\pi B_0^2 r_0^3 \alpha}{3(r_0^3 + 2r_1^3)} \int_{r_0}^{r_1} (r^3 + 2r_1^3) R\, dr, \tag{C22}$$

由此，我们使用 $H_{\rm J} = H_{\rm R} - H_{\rm PJ}$ 计算出 $H_{\rm J}$。

最后请注意，这些场中的磁力线螺度 $\mathcal{A}$ 对每条磁力线都具有相同的符号。这一点可由以下事实看出：(51)

$$\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B} = \alpha B_0^2 R^2 (1 + \cos^2\theta). \tag{C23}$$

D. 磁力线螺度的数值方法

与所有磁螺度计算一样，必须谨慎选用数值方法，以免引入虚假的 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}$ 贡献（Valori 等（2016））。这里概述第 $\mathcal{A}$ 节中 H 和 5 的计算方法（代码见 Yeates 2025）。如 Yeates （2024年）所述，数值模拟采用有限体积法，并在交错网格对应的网格面上提供 $\boldsymbol{B}$ 分量。由于相邻网格单元共用面上的数值，这确保了 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ 在每个三维网格单元内以积分意义得到保持。为确保在计算 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ 时， $\boldsymbol{A}$的分量 $\boldsymbol{A}$ 交错排列在网格边上，并以强制满足离散斯托克斯定理的方式计算，使得 $\int_{S_{ij}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}\, dS = \oint_{\partial S_{ij}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$ 在每个网格面上均成立 S_{ij}。

D.1. *Vector potential*

我们不直接从 $\mathcal{A}$ 计算 $\boldsymbol{A}^*$ （使用52），而是改为计算

$$\mathcal{A}(L_i) = \int_{L_i} \boldsymbol{A}' \cdot d\boldsymbol{l} \tag{D24}$$

其中 $\boldsymbol{A}'$ 的计算较为简单。为确保经过此规范变换后，所有磁力线上的 $\mathcal{A}$ 均保持不变，我们要求：(i) 在 S_0 和 S_1上均有 $\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{A}^*$；(ii) 对于 $r \in [r_0, r_1]$，每条 S_r 上均有 $\oint_{S_r} A'_r\, dS = 0$。将 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{\nabla}\chi$写出即可看出这一点，因此条件 (i) 意味着 $\chi(r_0,\ \theta,\ \phi) \equiv \chi_0$，且 $\chi(r_1,\ \theta,\ \phi) \equiv \chi_1$，二者均为常数。因此

$$\int_{L_i} \boldsymbol{A}' \cdot d\boldsymbol{l} = \mathcal{A}(L_i) + \chi_1 - \chi_0. \tag{D25}$$

接着，根据（9）可知 $\oint_{S_r} A^*_r\, dS = 0$，条件 (ii) 意味着

$$\oint_{S_r} \frac{\partial \chi}{\partial r}\, dS = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\oint_{S_r} \chi\, dS\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \chi_1 = \chi_0. \tag{D26}$$

D.2. 数值算法

为计算合适的 $\boldsymbol{A}'$，我们按以下步骤进行：

1. 计算 $\boldsymbol{A}^\dagger$ 在 DeVore-库仑规范下的值（DeVore 2000；Moraitis 等（2018）），

$$\boldsymbol{A}^\dagger(r,\theta,\phi) = \frac{r_0}{r}\boldsymbol{\nabla} \times \left[\psi(\theta,\phi)\boldsymbol{e}_r\right] + \frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{B}(r',\theta,\phi) \times \boldsymbol{e}_r\, r' dr', \quad \text{where } \nabla_h^2 \psi = -B_r(r_0,\theta,\phi), \tag{D27}$$

选择零均值的解 ψ，使其均值为零 S_1。根据定义， $A^\dagger_r \equiv 0$ 因此 $\boldsymbol{A}^\dagger$ 已满足条件 (ii)。此外， ψ 与 P 第2节中的 $\boldsymbol{A}^\dagger$ 相一致，因此 S_0也满足 S_1上的条件 (i)，但不一定满足 ψ。泊松方程和径向积分的离散化方式保证了每个网格面上的离散斯托克斯定理成立，其中 B_r 与径向网格面上的 ψ

2. 将规范变换为 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^\dagger + \boldsymbol{\nabla} g$，使其满足条件 (i) 和 (ii)，同时在每个网格面上保持 $\oint_{\partial S_{ij}} \boldsymbol{A}' \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{\partial S_{ij}} \boldsymbol{A}^\dagger \cdot d\boldsymbol{l}$ 不变。规范函数 g位于网格顶点处，并按如下方式确定：

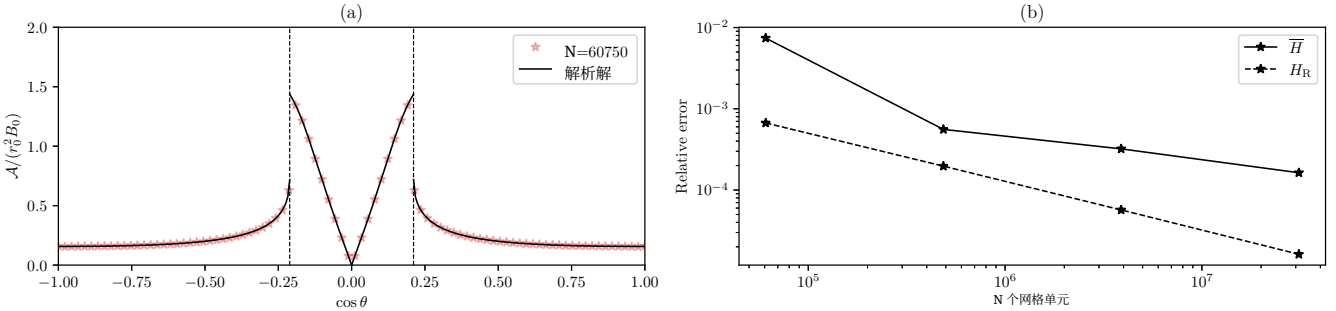

图 7. 使用线性无力场（C13）进行数值收敛测试。面板 (a) 显示 $\mathcal{A}$ 随 S_0足点余纬的变化，而面板 (b) 显示数值近似的 H 和 H_R 的误差如何随离散化 $\boldsymbol{B}$的网格分辨率变化。

(a) 通过求解 $\nabla_h^2 P = -B_r$，计算 S_1 上的极点值 $A_\theta^*(r_1, 0, \phi)$ 和 $A_\theta^*(r_1, \pi, \phi)$。这些值将在下一步中作为边界条件使用。(b) 通过在 S_1上求解 $\nabla_h^2 g = -\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \boldsymbol{A}^\dagger$，计算 S_1 上的规范函数 $g(r_1, \theta, \phi)$，并选择零均值解（这个加性常数只影响 A'_r，不影响 A'_θ 或 A'_ϕ）。这将确保 S_1上的 $\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \boldsymbol{A}' = 0$，进而确保 S_1上的 $\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{A}^*$。由于顶点的第一行和最后一行位于两极，为避免数值问题，我们求解时省略这两行的 g，并根据诺伊曼条件 $\partial g/\partial\theta = A_\theta^* - A_\theta^\dagger$ 设置两极处的 g 值。(c) 设置 $g(r_0, \theta, \phi) \equiv 0$，以便在 S_0上保持条件 (i)。(d) 通过在 $g(r_0, \theta, \phi) \equiv 0$ 与 $g(r_1, \theta, \phi)$之间进行线性插值，填入中间 S_r 处的 $g(r, \theta, \phi)$。由于 $g(r_1, \theta, \phi)$ 为零均值，这将保持条件 (ii)。

计算出 $\boldsymbol{A}'$ 后，我们使用（二阶）中点法追踪磁力线 L_i，然后通过沿每条磁力线对 D24进行数值积分来计算（ $\boldsymbol{A}'$。为计算H，我们假设不存在闭合磁力线，并通过在 54和 S_0 上以原始网格分辨率两倍的网格追踪磁力线，对其进行近似 S_1。

D.3. 收敛测试

图7 展示了数值方案的收敛性。在一项测试中，线性无力场（C13）被离散化到与第 5 节数值模拟所用的相同三维网格上。我们固定 $r_0 = 0.8$，$r_1 = 1$，$\alpha = 1.6$和 $B_0 = 1$。对于（C13），$\mathcal{A}$ 可通过用径向分量r对（52）进行参数化，并对每条磁力线计算 r 中的积分，从而以任意精度求得。图7（a）中的实线展示了这一“解析”解；注意位于

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \frac{r_1 R(r_1)}{r_0 R(r_0)}}, \tag{D28}$$

处的分界面，它们分隔了靠近两极的开放磁力线与靠近赤道的闭合磁力线。星形符号表示完全以“非先验”的方式，利用第 $\mathcal{A}$ D.2 节所述方法，根据离散化的数据立方体计算得到的 $15 \times 45 \times 90$ 分布。在本例中，数据立方体的分辨率仅为（第 5 节数值模拟所用分辨率的四分之一）。

图 7(b) 中的实线显示了在网格分辨率从 H 到 $\overline{15} \times 45 \times 90$ 时，根据数据立方体数值计算得到的 $120 \times 360 \times 720$误差。该测试的真实值由（C19）给出，因为 $H = H_R$ 对于（C13）。尽管数值计算包含多个阶段（在网格上离散化 $\boldsymbol{B}$，计算 $\boldsymbol{A}'$，追踪磁力线，沿磁力线积分 $\mathcal{A}$，并对 S_0 和 S_1上的结果进行积分），但我们观察到网格分辨率提高时（缓慢）收敛。虚线显示了通过在三维网格上对 $\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}$ 进行直接数值积分来近似计算 H_R 的结果。这种方法省去了其中几个阶段，精度也略高，但当 $\mathcal{A}$具有 H 混合符号时，无法用于计算。

参考文献

Aly, J. J. 2014年，载于《Journalof Physics Conference Series》，第 544 卷，《Journal of PhysicsConference Series》（IOP），012003，doi: 10.1088/1742-6596/544/1/012003

Arnol’d, V. I. 1986年，《苏联精选数学》，5，327

Backus, G. 1958年，《物理学年鉴》，4，372，doi：10.1016/0003-4916(58)90054-X Berger, M. A. 1984年，《地球物理与天体物理流体动力学》，30，79，doi：10.1080/03091928408210078 —. 1985年，《天体物理学杂志增刊》，59，433，doi：10.1086/191079 —. 1988年，《天文学与天体物理学》，201，355 —. 1993年，《物理评论快报》，70，705，doi：10.1103/PhysRevLett.70.705 —. 1999 年，《等离子体物理与受控聚变》，41，B167，doi：10.1088/0741-3335/41/12B/312 —. 2003年，载于《非线性动力学进展》，编者 A. Ferriz-Mas & M. N´u˜nez，345–374，doi：10.1201/9780203493137.ch10 Berger, M. A., & Field, G. B. 1984年，《流体力学杂志》，147，133，doi：10.1017/S0022112084002019 Berger, M. A., & Hornig, G. 2018年，《物理学杂志 A：数学与一般》，51，495501，doi：10.1088/1751-8121/aaea88 Blackman, E. G. 2015年，《空间科学评论》，188，59，doi：10.1007/s11214-014-0038-6 Bobra, M. G., Sun, X., Hoeksema, J. T., 等 2014年，《太阳物理学》，289，3549，doi：10.1007/s11207-014-0529-3 Candelaresi, S., & Brandenburg, A. 2011年，《物理评论 E》，84，016406，doi：10.1103/PhysRevE.84.016406 Candelaresi, S., Hornig, G., MacTaggart, D., & Simitev, R. 2021年，《非线性科学与数值模拟通讯》，103，106015，doi：10.1016/j.cnsns.2021.106015 Cantarella, J., DeTurck, D., & Gluck, H. 2001年，载于《纪念琼·伯曼七十寿辰会议论文集》，编者 J. Gilman, X.-S. Lin, & W. Menasco（罗得岛州普罗维登斯：美国数学会/国际出版社），1–22 Cantarella, J., DeTurck, D., Gluck, H., & Teytel, M. 2000年，《等离子体物理学》，7，2766，doi：10.1063/1.874127 D´emoulin, P. 2007年，《空间研究进展》，39，1674，doi：10.1016/j.asr.2006.12.037 D´emoulin, P., & Pariat, E. 2009年，《空间研究进展》，43，1013，doi：10.1016/j.asr.2008.12.004 Demoulin, P., Pariat, E., & Berger, M. A. 2006年，《太阳物理学》，233，3，doi：10.1007/s11207-006-0010-z DeVore, C. R. 2000年，《天体物理学杂志》，539，944，doi：10.1086/309274 Durrant, C. J. 1989年，《澳大利亚物理学杂志》，42，317，doi：10.1071/PH890317 Finn, J. M., & Antonsen, Jr., T. M. 1985年，《等离子体物理与受控聚变评论》，9，111 Freedman, M. H., & He, Z.-X. 1991年，《数学年刊》，134，189 Linan, L., Pariat, ´E., Moraitis, K., Valori, G., & Leake, J. 2018年，《天体物理学杂志》，865，52，doi：10.3847/1538-4357/aadae7 MacTaggart, D. 2025年，《探索太空》，129，19，doi：10.1007/s11038-025-09578-8 MacTaggart, D., & Valli, A. 2023年，《物理学杂志 A：数学与一般》，56, 435701，doi: 10.1088/1751-8121/acfd6c Martin, S. F. 1998年，《太阳物理学》，182, 107，doi: 10.1023/A:1005026814076 Matthaeus, W. H., & Goldstein, M. L. 1982年，J. Geophys. Res., 87, 6011，doi: 10.1029/JA087iA08p06011 Moffatt, H. K., & Dormy, E. 2019年，自激流体发电机，doi: 10.1017/9781107588691 Moffatt, H. K., & Ricca, R. L. 1992年，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》，439, 411，doi: 10.1098/rspa.1992.0159 Moraitis, K., Pariat, ´E., Savcheva, A., & Valori, G. 2018年，《太阳物理学》，293, 92，doi: 10.1007/s11207-018-1314-5 Narita, Y. 2024年，载于《地球物理学、天体物理学及其他领域中的螺旋度》，K. Kuzanyan, N. Yokoi, M. K. Georgoulis, & R. Stepanov 编，第 283 卷，105–116，doi: 10.1002/9781119841715.ch7 Pevtsov, A. A., & Balasubramaniam, K. S. 2003年，《空间研究进展》，32, 1867，doi: 10.1016/S0273-1177(03)90620-X Pevtsov, A. A., Berger, M. A., Nindos, A., Norton, A. A., & van Driel-Gesztelyi, L. 2014年，《空间科学评论》，186, 285，doi: 10.1007/s11214-014-0082-2 Pontin, D. I., Candelaresi, S., Russell, A. J. B., & Hornig, G. 2016年，《等离子体物理与受控聚变》，58, 054008，doi: 10.1088/0741-3335/58/5/054008 Prior, C., & Yeates, A. R. 2014年，《天体物理学杂志》，787, 100，doi: 10.1088/0004-637X/787/2/100 Ricca, R. L. 2013年，《地球物理与天体物理流体动力学》，107, 385，doi: 10.1080/03091929.2012.681782 Schuck, P. W., & Linton, M. G. 2024年，《天体物理学杂志》，961, 156，doi: 10.3847/1538-4357/acf471 Thalmann, J. K., Georgoulis, M. K., Liu, Y., et al. 2021年，《天体物理学杂志》，922, 41，doi: 10.3847/1538-4357/ac1f93 Toriumi, S., & Wang, H. 2019年，《太阳物理学生活评论》，16, 3，doi: 10.1007/s41116-019-0019-7 Valori, G., D´emoulin, P., Pariat, E., et al. 2020年，《天文学与天体物理学》，643, A26，doi: 10.1051/0004-6361/202038533 Valori, G., Pariat, E., Anfinogentov, S., et al. 2016年，《空间科学评论》，201, 147，doi: 10.1007/s11214-016-0299-3 Woltjer, L. 1958年，《美国国家科学院院刊》，44, 489，doi: 10.1073/pnas.44.6.489 Xiao, D., Prior, C. B., & Yeates, A. R. 2023年，《物理学杂志 A：数学与一般》，56, 205201，doi: 10.1088/1751-8121/accc17 —. 2025年，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》，481, 20240152，doi: 10.1098/rspa.2024.0152

Yeates, A. R. 2020年，《天体物理学杂志通讯》，898，L49，doi: 10.3847/2041-8213/aba762—. 2024年，《太阳物理学》，299,83，doi: 10.1007/s11207-024-02328-5—. 2025年，sphtools，v1.0，Zenodo，doi: 10.5281/zenodo.17607526Yeates, A. R., & Berger, M. A. 2024年，载于《地球物理学、天体物理学及其他领域中的螺旋度》，K. Kuzanyan, N. Yokoi, M. K. Georgoulis, & R. Stepanov 编，第 283 卷，1–16，doi: 10.1002/9781119841715.ch1Yeates, A. R., Bianchi，F., Welsch，B. T., & Bushby，P. J. 2014年，《天文学与天体物理学》，564, A131，doi: 10.1051/0004-6361/201323276 Yeates，A. R., & Hornig，G. 2016年，《天文学与天体物理学》，594，A98，doi: 10.1051/0004-6361/201629122Yeates，A. R., Amari，T., Contopoulos，I., 等. 2018年，《空间科学评论》，214，99，doi：10.1007/s11214-018-0534-1Yi，S., & Choe，G. S. 2022年，《科学报告》，12，2944，doi: 10.1038/s41598-022-07040-7Yoshida，Z., & Giga，Y. 1990年，《数学杂志》，204，235