arXiv:2601.05731v1 [math.FA] 9 Jan 2026

一种更简单且更高效的不动点迭代格式

NIDA IZHAR MALLICK[1],IZHAR UDDIN[2], *

[1,2]数学系，Jamia Millia Islamia，新德里-110025，
印度。
nidamallick2016@gmail.com, izharuddin1@jmi.ac.in。

摘要。 本文提出一种新的迭代格式，用于逼近非扩张映射的不动点。所提出的算法旨在提高收敛效率，同时保持理论上的稳健性。在对底层算子作出适当假设的条件下，我们证明了所生成序列的弱收敛和强收敛结果。为展示该格式的有效性，我们给出一个数值例子，并与文献中几种著名的迭代方法进行详细的比较研究。数值结果清楚地表明，所提出的方法比现有格式具有更快的收敛速度，从而证实了其计算优势。这些发现表明，这一新的迭代过程为求解应用数学及相关领域中的不动点问题提供了一种高效且可靠的替代方案。

关键词：非扩张映射，不动点理论。**AMS学科分类**：
47H09，47H10。

1. 引言

不动点理论是数学分析的一个重要领域，研究在特定映射下保持不变的点的存在性及其特征。形式上，若 W 是一个集合，且 $K: W \to W$ 是一个映射，则点 $w \in W$ 称为不动点，当且仅当 $K(w) = w$。虽然这看似是一个简单的概念，但它在纯数学和应用数学中都具有广泛而持久的重要意义，是用来证明各类数学问题的解的唯一性和存在性的有力工具。这一重要性体现在它在众多学科中的广泛应用：在数学分析和微分方程中，不动点结果常用于证明非线性积分方程、函数方程和微分方程解的存在性 [1, 2, 3, 4, 5]；在优化理论中，它们为迭代算法的收敛提供了理论基础 [6, 7]；在工程学和应用科学中，不动点技术见于控制理论 [8], 、信号处理 [9], 和图像复原过程 [10, 11]。

不动点理论的起源可追溯至布劳威尔不动点定理和巴拿赫不动点定理等经典结果。这些定理奠定了现代非线性分析的基础，并推动了广泛的推广与应用。其重要性

不仅在于其优雅的理论结构，也在于它能够将各种不同的问题统一到一个概念框架之下。
除了证明不动点的存在性之外，一个重要的研究方向是对不动点进行逼近。即使不存在精确的解析解，迭代方法也能提供计算不动点的实用手段。随着时间推移，人们提出并研究了许多配有更高效迭代方法的不动点定理，例如参见
[12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 26, 27, 28, 29]。这一从基础定理到先进迭代算法的发展历程，反映了该领域的持续演进：经典原理构成了现代计算技术的基础，而这些技术也不断适应日益复杂的高维问题。

最早且最具影响力的迭代方法包括曼恩[16], 石川[14],和Noor[17] 迭代格式，它们在塑造不动点逼近的理论与实践方面发挥了基础性作用。这些经典算法启发了各种改进与扩展，旨在提高收敛速度、稳定性，并使其适用于更广泛的映射类别。可参阅以下文献[19, 20], ，这些基础迭代格式在数学和应用科学的不同分支中有诸多应用。受这些经典迭代格式优势的启发，我们现在提出一种新的迭代算法，定义如下：

设 Z 为巴拿赫空间， W 为其非空的闭且凸子集，且 $K:W \to W$ 为自非扩张映射。则，

$$\begin{cases} s_1 \in W \\ r_n = (1-\beta_n)s_n + \beta_n K s_n, \\ s_{n+1} = (1-\alpha_n)r_n + \alpha_n K s_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，对于所有 $n \in \mathbf{N}$， α_n， $\beta_n \in (a,\ b) \subset (0,\ 1)$，且 $a,\ b \in (0,\ 1)$。
与每一步都采用一次加权平均的曼恩迭代不同，所提出的算法(1.1)引入了一个中间步骤，其思路类似于石川方法，但采用了不同的权重结构，因此参数选择更加灵活。与努尔三步法相比，我们的方法兼顾了计算简便性和更优的收敛行为，因此特别适用于某些对速度和稳定性都有较高要求的自非扩张算子类别。为进一步阐明结构差异，图 [1, 2] 以示意图的形式比较了石川迭代与所提出的算法。该图着重展示了中间步骤的位置，由此形成一种经过修改的更新序列，在保持简洁性的同时，有望提升收敛性能。

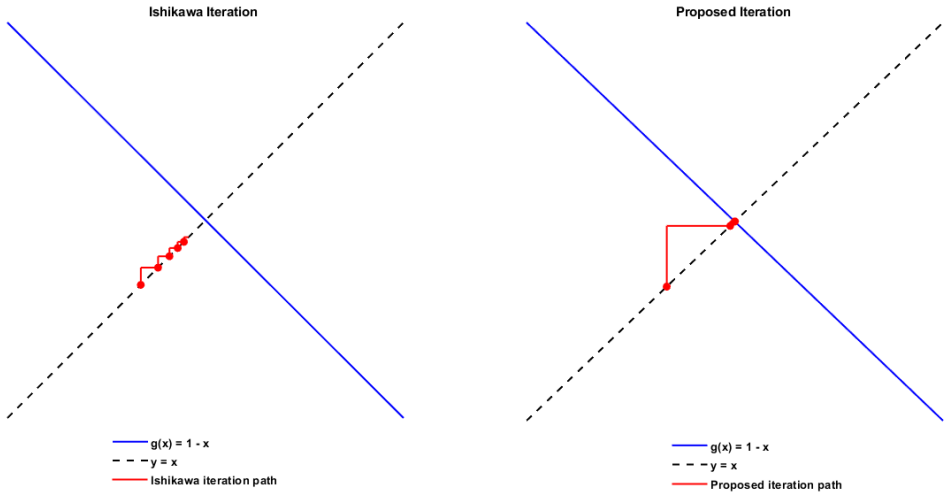

FIGURE 1. 石川迭代与所提出的迭代在求 $g(x) = 1 - x$ 不动点时的收敛路径。

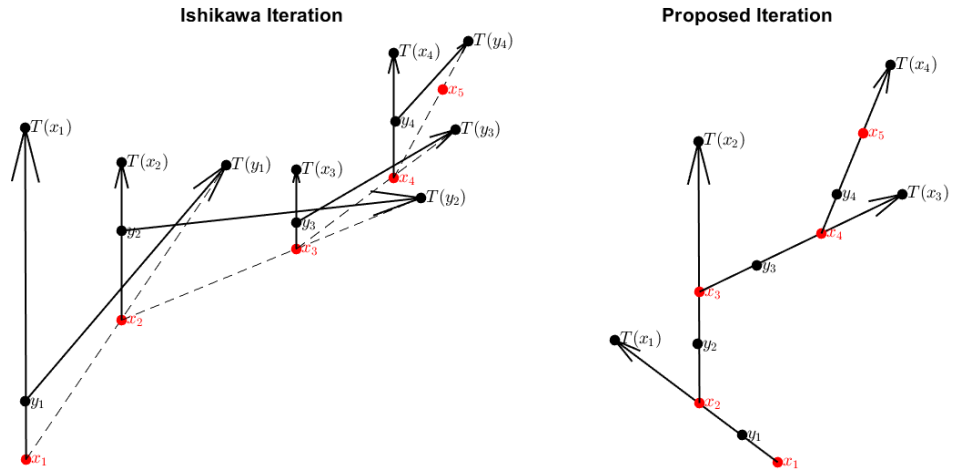

FIGURE 2. 石川迭代与我们所提出的迭代之间的差异。

图 [1] 说明，石川过程需要经过若干步才能逼近不动点，而所提出的方案用更少的迭代即可到达不动点，展现出更快的收敛行为。同样，图 [2] 突出显示，所提出的方案能够更直接、更高效地获得逐次逼近结果，所需的中间步骤少于石川过程。

2. 预备知识

本节总结了用于证明收敛定理的基本定义、引理和命题。

定义 2.1。 [30] 巴拿赫空间 Z 是一致凸的，当且仅当对每个 $\epsilon \in (0,2]$ 都存在一个 $\delta > 0$ 使得对于 s， $t \in Z$ 满足 $\|s\| \leq 1$， $\|t\| \leq 1$ 且 $\|s-t\| \geq \epsilon$，有

$$\|\frac{s+t}{2}\| < 1-\delta.$$

定义 2.2. [31] 若巴拿赫空间 Z 满足 Opial 条件，则对于其中任意序列 $\{s_n\}$，若其在 Z 中弱收敛于 $s \in Z$，即 $s_n \rightharpoonup s$，便有

$$\limsup_{n\to\infty} \|s_n - s\| < \limsup_{n\to\infty} \|s_n - t\|$$

对每个 $t \in Z$，都有 $s \neq t$。
若映射 $K: W \to Z$ 在 $y \in Z$ 处半闭，则对W 中的每个序列 $\{x_n\}$ 以及每个 $x \in Z$，$x_n \rightharpoonup x$，若 $Kx_n \to y$，则有 $x \in W$ 且 $Kx = y$。
设 $W \subset Z$ 非空、闭且凸，并假设 $\{s_n\}$ 是 Z中的有界序列。

对于每个 $s \in Z$，记为:

$$r(s,\{s_n\}) = \limsup_{n\to\infty} \|s - s_n\|.$$

序列 $\{s_n\}$ 相对于 W 的渐近半径由下式确定:

$$r(W,\{s_n\}) = inf\{r(s,\{s_n\}) : s \in W\},$$

以及渐近 序列 $\{s_n\}$ 的渐近中心 $A(W,\ \{s_n\})$由下式确定:

$$A(W,\{s_n\}) = \{s \in W : r(s,\{s_n\}) = r(W,\{s_n\})\}.$$

一个广为人知的结果指出，如果 W 是弱紧的，那么 $A(W,\ \{s_n\})$至少包含一个元素。此外，若一致凸巴拿赫空间 Z 中存在一个闭且凸的子集 W，使得序列 $\{s_n\}$ 在 W 中有界，则渐近中心唯一确定 [32, 33]。

引理 2.1. [34] 设 Z 是一致凸巴拿赫空间， W 是 Z的一个闭且凸子集，且 K: $W \to W$是非扩张映射。则 $I-T$在 W上是半闭的。

命题 2.1. [35] 设 Z 是一致凸巴拿赫空间，且 $\{q_n\}$ 是任意一个满足对所有 $n \geq 1$ 均有 $0 < p \leq q_n \leq r < 1$ 、并且对某个 p有 $r \in \mathbb{R}$的序列。设 $\{s_n\}$ 和 $\{t_n\}$ 是 Z 中的任意两个序列，满足$\limsup_{n\to\infty} \|s_n\| \leq g$、$\limsup_{n\to\infty} \|t_n\| \leq g$ 以及$\lim_{n\to\infty} \|q_n s_n + (1-q_n)t_n\| = g$，其中 $g \geq 0$。则$\lim_{n\to\infty} \|s_n - t_n\| = 0$。

定义 2.3. [36] 若赋范空间的非空子集 W 上的自映射 K 满足条件 (I)，则存在函数 m: $[0,\infty) \to [0,\infty)$，使得$m(0) = 0$ 且 $m(i) > 0$ 对所有 $i \in (0,\ \infty)$ 成立，并且该函数非递减，满足 $\|s - Ks\| \geq m(d(s,\ f(K)))$，对所有 $s \in W$均成立。这里， $F(K)$ 是 K 的所有不动点的集合，且$d(s,\ f(K) = inf\{\|s-t\|: t \in F(K)\}$。

定义 2.4.对于映射 $K: W \to W$，若序列 $\{s_n\}$ 属于 W 且满足 $\lim_{n\to\infty}\|Ks_n - s_n\| = 0$，则该序列 $\{s_n\}$ 称为近似不动点序列（简称 a.f.p.s.）。

定理 2.2. [37] 设 $p > 1$, $r > 0$ 是两个固定的实数。那么，巴拿赫空间Z 称为一致凸的，当且仅当存在一个连续、严格递增且凸的函数 $g: [0.\infty] \to [0.\infty], g(0) = 0$, 使得

$$\|\lambda s + (1-\lambda)t\|^p \le \lambda\|s\|^p + (1-\lambda)\|t\|^p - W_p(\lambda)g(\|s-t\|)$$

对所有 $s, t \in B_r$ 和 $0 \le \lambda \le 1$。这里，$W_p = \lambda(1-\lambda)^p + \lambda^p(1-\lambda)$ 且 B_r 是一个以零为中心、半径为 r的闭球。

3. 主要结果

本节中，我们为巴拿赫空间中非扩张映射的所提出的迭代（1.1）所产生的序列建立强收敛和弱收敛定理。

引理 3.1. 设 $W \neq \emptyset$ 是巴拿赫空间 Z 的闭凸子集，且 $K: W \to W$ 是一个非扩张映射，满足 $F(K) \neq \emptyset$。若序列 $\{s_n\}$ 按 (1.1)定义，则 $\lim_{n\to\infty}||s_n - w||$ 对任意 $w \in F(K)$均存在。

证明。取 $w \in F(K)$ 和 $v \in W$。由于 K 是非扩张映射，我们有 $\|Kv - Kw\| \le \|v - w\|$。现在，

$$\begin{aligned}\|t_n - w\| &= \|\{(1-\beta_n)s_n + \beta_n Ks_n\} - w\| \\ &\le (1-\beta_n)\|s_n - w\| + \beta_n\|Ks_n - w\| \\ &\le (1-\beta_n)\|s_n - w\| + \beta_n\|s_n - w\| \\ &= \|s_n - w\| \end{aligned} \tag{3.1}$$

利用（3.1），我们得到

$$\begin{aligned}\|s_{n+1} - w\| &= \|\{(1-\alpha_n)t_n + \alpha_n Ks_n\} - w\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|t_n - w\| + \alpha_n\|Ks_n - w\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|t_n - w\| + \alpha_n\|s_n - w\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|s_n - w\| + \alpha_n\|Ks_n - w\| \\ &= \|s_n - w\|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

这意味着，对于所有$w \in F(K)$， $\|s_n - w\|$ 都是一个有下界的递减序列。因此，$\lim_{n\to\infty} \|s_n - w\|$ 存在。□

引理 *3.2.* 设 W 是一致凸巴拿赫空间Z 的一个非空子集，且该子集闭且凸； $K : W \to W$ 是一个自非扩张映射，且具有非空 $F(K)$。设 $\{s_n\}$ 是一个序列，其中 $\{s_1\} \in W$ 按（*1.1*）定义，且对所有 $n \in N$，$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (a, b) \subset (0,1)$，其中 $a, b \in (0, 1)$。

。那么 $F(K) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\{s_n\}$ 有界且$\lim_{n\to\infty} \|s_n - Ks_n\| = 0$。

证明。考虑 $F(K) \neq \emptyset$并取 $w \in F(K)$。于是，引理（3.1）给出了 lim 的存在性$_{n\to\infty} \|s_n - w\|$ 以及 $\{s_n\}$的有界性。令

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - w\| = r.$$

由（3.1），我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \|t_n - w\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|s_n - w\| = r.$$

由于， K 是非扩张映射，我们有

$$\|Ks_n - w\| \leq \|s_n - w\| = r \quad and \quad \|Kt_n - w\| \leq \|t_n - w\| = r.$$

对两边取上极限，得到

$$\limsup_{n\to\infty} \|Ks_n - w\| \leq r$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|Kt_n - w\| \leq r$$

此外，

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \|s_{n+1} - w\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|\{(1-\alpha_n)t_n + \alpha_n Ks_n\} - w\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(1-\alpha_n)(t_n - w) + \alpha_n(Ks_n - w)\| \end{aligned} \tag{3.3}$$

利用命题（2.1），我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \|t_n - Ks_n\| = 0.$$

Now,

$$\begin{aligned} \|s_{n+1} - w\| &= \|\{(1-\alpha_n)t_n + \alpha_n Ks_n\} - w\| \\ &= \|t_n - \alpha_n t_n + \alpha_n Ks_n - w\| \\ &= \|(t_n - w) - \alpha_n(t_n + Ks_n)\| \\ &\leq \|t_n - w\| + \alpha_n\|t_n - Ks_n\| \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\implies r \leq \liminf_{n\to\infty} \|t_n - w\|$$

我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \|t_n - w\| = r.$$

现在，利用定理（2.2），我们得到

$$\begin{aligned}\|t_n - w\|^2 &= \|\{(1-\beta_n)s_n + \beta_n K s_n\} - w\|^2 \\ &\leq (1-\beta_n)\|s_n - w\|^2 + \beta_n\|Ks_n - w\|^2 - \beta_n(1-\beta_n)\|s_n - Ks_n\|^2 \\ &\leq \|s_n - w\|^2 - \beta_n(1-\beta_n)\|s_n - w\|^2\end{aligned} \tag{3.5}$$

因此，

$$\beta_n(1-\beta_n)\|s_n - Ks_n\|^2 \leq \|s_n - w\|^2 - \|t_n - w\|^2.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\|s_n - Ks_n\|^2 &\leq \frac{1}{\beta_n(1-\beta_n)}[\|s_n - w\|^2 - \|t_n - w\|^2] \\ &\leq \frac{1}{a(1-b)}[\|s_n - w\|^2 - \|t_n - w\|^2].\end{aligned} \tag{3.6}$$

在两边取 $\lim_{n\to\infty}$，得到

$$\|s_n - Ks_n\| = 0.$$

□

定理 3.3。设 K，W 和 Z 与引理中定义的相同*3.2*使得映射K 满足 *Opial* 条件，且 $F(K) \neq \emptyset$。若 $\{s_n\}$ 是由迭代过程定义的迭代序列(1.1)，则 $\{s_n\}$ 弱收敛到 K的不动点。

证明。设 $w \in F(K)$。于是，根据引理 3.1，$\lim_{n\to\infty} \|s_n - w\|$ 存在。为了证明迭代 (1.1) 弱收敛到 K的唯一不动点，我们将验证序列 $\{s_n\}$ 在 $F(K)$ 中包含唯一的弱子列极限。为此，考虑 $\{s_n\}$的两个子序列$\{s_{n_j}\}$和 $\{s_{n_k}\}$，它们分别弱收敛于 u和 v。由引理 3.2，我们有 $\lim_{n\to\infty} \|Ks_n - s_n\| = 0$；由引理 2.1，显然 $(I-K)$ 在零处是半闭的，从而得到 $u, v \in F(K)$。

现在，我们继续验证唯一性。由于 u，$v \in F(K)$，这意味着 $\lim_{n\to\infty} \|s_n - u\|$和 $\lim_{n\to\infty} \|s_n - v\|$ 存在。设 $u \neq v$。
然后，应用 Opial 条件，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|s_n - u\| &= \lim_{j\to\infty} \|s_{n_j} - u\| \\ &< \lim_{j\to\infty} \|s_{n_j} - v\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \|s_n - v\| \\
&= \lim_{k\to\infty} \|s_{n_k} - v\| \\
&< \lim_{k\to\infty} \|s_{n_k} - u\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|s_n - u\|.
\end{aligned}$$

这与我们的假设矛盾，因此 $u = v$。由此，序列 $\{s_n\}$ 弱收敛到 K 的一个不动点。□

定理 3.4。设 K 是定义在一致凸巴拿赫空间 Z 中具有 $F(K) \neq \emptyset$的非空闭凸子集 W 上的非扩张映射 Z，且 $F(K) \neq \emptyset$。若 $\{s_n\}$ 是由迭代过程 (1.1)定义的迭代序列，则 $\{s_n\}$ 强收敛到 $F(K)$ 中的一个点，当且仅当 $\liminf_{n\to\infty} d(s_n, F(K)) = 0$。

证明。若序列 $\{s_n\}$ 收敛到点 $w \in F(K)$，则显然 $\liminf_{n\to\infty} d(s_n, F(K)) = 0$。反过来，假设 $\liminf_{n\to\infty} d(s_n, F(K))$ =0。由引理 3.1，有 $\lim_{n\to\infty} \|s_n - w\|$ 对所有 $w \in F(K)$均存在，因此得到

$$\|s_{n+1} - w\| \leq \|s_n - w\| \quad for\ any\ w \in F(K)$$

由此可得,

$$d(s_{n+1}, F(K)) \leq d(s_n, F(K))$$

因此，$\{d(s_n, F(K))\}$ 是一个以下界零为下界的非递减序列，这表明 $\lim_{n\to\infty} d(s_n, F(K))$ 存在。由于 $\liminf_{n\to\infty} d(s_n, F(K)) = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} d(s_n, F(K)) = 0$。现在，我们找到了 $\{s_n\}$ 的一个子序列 $\{s_{n_j}\}$，以及 $F(K)$ 中的一个序列$\{w_j\}$，使得对所有 $j \in \mathbb{N}$，$\|s_{n_j} - w_j\| \leq \frac{1}{2^j}$。根据引理 3.1 的证明，我们有

$$\|s_{n_{j+1}} - w_j\| \leq \|s_{n_j} - w_j\| \leq \frac{1}{2^j}$$

利用三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\|w_{j+1} - w_j\| &\leq \|w_{j+1} - s_{j+1}\| + \|s_{j+1} - w_j\| \\
&< \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} \\
&\leq \frac{1}{2^{j-1}} \\
&\to 0 \quad as\ \ j \to \infty
\end{aligned}$$

这表明，$\{w_j\}$ 是 $F(K)$中的柯西序列。已知 $F(K)$是闭集，这意味着 $\{w_j\}$ 收敛于某个 $w \in F(K)$。再次利用三角不等式，可得

$$\|s_{n_j} - w\| \leq \|s_{n_j} - w_j\| + \|w_j - w\|$$

由于 $j \to \infty$，我们有 $\{s_{n_j}\}$强收敛于 $w \in F(K)$。根据引理 3.1，对于所有 $w \in F(K)$，$\lim_{n\to\infty} \|s_n - w\|$ 存在，这意味着 $\{s_n\}$ 强收敛于 $w \in F(K)$。□

现在，我们证明以下关于满足条件 (I) 的映射的强收敛定理。

定理 3.5. 设 K 是定义在一致凸巴拿赫空间 W 的非空闭凸子集 Z 上的非扩张映射，且满足 $F(K) \neq \emptyset$，并设 $\{s_n\}$ 为由 (1.1)定义的序列。若 K 满足条件 (I)，则 $\{s_n\}$ 强收敛到 K的一个不动点。

证明。由引理 3.1，所有 $w \in F(K)$ 的 $\lim_{n\to\infty} \|s_n - w\|$ 均存在，因此 $\lim_{n\to\infty} \|s_n - F(K)\|$ 存在。假设对某个 $r \geq 0$，$\lim_{n\to\infty} \|s_n - w\| = r$。若 $r = 0$，则结论成立。

假设，$r > 0$。根据假设和条件 (I)，

$$m(d(s_n, F(K))) \leq \|s_n - Ks_n\|.$$

由于，$F(K) \neq \emptyset$，由引理 3.2 可得 $\lim_{n\to\infty} \|s_n - Ks_n\| = 0$，这意味着

$$\liminf_{n\to\infty} m(d(s_n, F(K))) = 0.$$

由于 m 是非递减函数，因此有 $\lim_{n\to\infty} d(s_n, F(K)) = 0$。因此，我们有 $\{s_n\}$ 的一个子序列 $\{s_{n_k}\}$ 以及一个子序列 $\{t_n\} \subset F(K)$，使得

$$d(s_{n_k}, t_{n_k}) < \frac{1}{2^k},$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。因此，

$$d(t_{k+1}, t_k) \leq d(t_{k+1}, s_{k+1}) + d(s_{k+1}, t_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \to 0,$$

当 $k \to \infty$时。这表明 $\{t_k\}$ 是 $F(K)$ 中的柯西序列，因此它收敛到一点 w。由于 $F(K)$是闭的且 $w \in F(K)$，因此 $\{s_{n_k}\}$强收敛到w。由于 $\lim_{n\to\infty} \|s_n - w\|$ 存在，我们有 $\{s_n\} \to w \in F(K)$。证明完毕。□

4. 数值例子

示例 4.1。设 $Z = \mathbb{R}$ 和 $W = [-1, 1] \subset Z$ 配备范数 $\|x\| = |x|$。定义自映射 K，其在 W 上的定义为

$$K(x) = 1 - x$$

显然，上述映射是一个非扩张映射。
令 $\alpha_n = 0.2$ 和 $\beta_n = \frac{n}{2n+1}$对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立，并取 0。01 和 -0.5 作为两个不同的

初始猜测值。我们得到了以下表格和图表，用于比较一些著名迭代格式的收敛速度。

步骤	初始点 = 0.01				初始点 =-0.5			
	Mann	石川	Noor	New	Mann	石川	Noor	New
1	0.01	0.01	0.01	0.01	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
2	0.206	0.14067	0.17333	0.46733	-0.1	-0.23333	-0.16667	0.43333
3	0.3236	0.22691	0.28658	0.50131	0.14	-0.057333	0.064444	0.50267
4	0.39416	0.28933	0.3628	0.49989	0.284	0.070057	0.22	0.49977
5	0.4365	0.33614	0.4128	0.50001	0.3704	0.1656	0.32204	0.50003
6	0.4619	0.37189	0.44504	0.5	0.42224	0.23856	0.38783	0.5
7	0.47714	0.39949	0.46557	0.5	0.45334	0.29487	0.42974	0.5
8	0.48628	0.42093	0.47854	0.5	0.47201	0.33863	0.45621	0.5
9	0.49177	0.43767	0.48668	0.5	0.4832	0.3728	0.47281	0.5
10	0.49506	0.4508	0.49175	0.5	0.48992	0.39958	0.48317	0.5
11	0.49704	0.4611	0.49491	0.5	0.49395	0.42062	0.48961	0.5
12	0.49822	0.46922	0.49686	0.5	0.49637	0.43719	0.4936	0.5
13	0.49893	0.47562	0.49807	0.5	0.49782	0.45025	0.49607	0.5
14	0.49936	0.48068	0.49882	0.5	0.49869	0.46057	0.49759	0.5
15	0.49962	0.48468	0.49927	0.5	0.49922	0.46873	0.49852	0.5
16	0.49977	0.48784	0.49956	0.5	0.49953	0.47518	0.49909	0.5
17	0.47714	0.39949	0.46557	0.5	0.49972	0.4803	0.49945	0.5
18	0.49992	0.49233	0.49983	0.5	0.49983	0.48435	0.49966	0.5
19	0.49995	0.49391	0.4999	0.5	0.4999	0.48757	0.49979	0.5
20	0.49997	0.49516	0.49994	0.5	0.49994	0.49012	0.49987	0.5

TABLE 1. 迭代值。

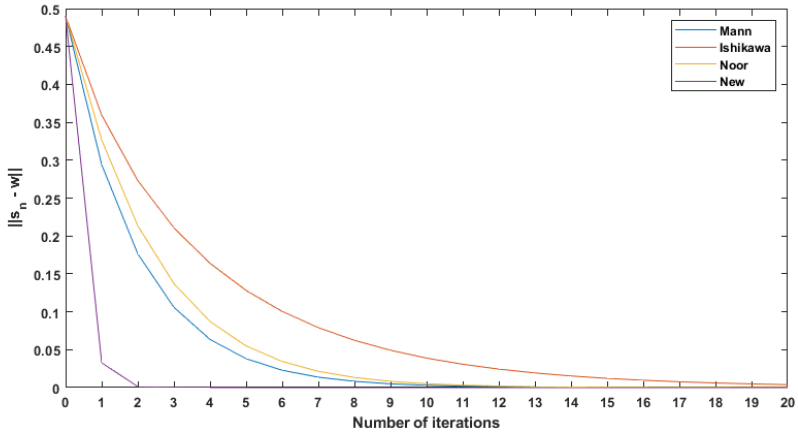

FIGURE 3

5. CONCLUSION

本文提出了一种新的迭代格式，用于求取实 Banach（或 Hilbert）空间中非线性算子的不动点。理论分析证明，在适当条件下，由所提

方法生成的序列弱收敛且强收敛。此外，本文给出了一个数值例子，将新格式与若干现有迭代方法的性能进行了比较。比较结果表明，所提出的迭代过程收敛速度更快，凸显了其计算效率和实际应用价值。这些结果表明，新格式是求解不动点问题的一种可靠且有效的替代方案，未来还可将其扩展至更广泛的算子类别和应用领域。

作者贡献： 两位作者贡献相同。**利益冲突：** 作者声明不存在利益冲突。**数据可用性声明：** 作者没有需要报告的事项。**伦理声明：** 作者没有需要报告的事项。**经费：** 本稿的撰写未获得任何经费支持。

References

[1] Agarwal, R.P., El-Gebeily, M.A., O'Regan, D.：偏序度量空间中的广义压缩映射。Applicable Analysis，87(1)，109–116（2008）。[2] Khamsi, M.A., Kirk, W.A}：度量空间与不动点理论导论。Wiley-Interscience，纽约（2001）。[3] Goebel, K., Kirk, W.A.：度量不动点理论专题。剑桥大学出版社，剑桥（1990）。[4] Saif, M., Almarri, B., Aljuaid, M., Uddin, I.：通过不动点迭代求解边值问题的数值解。计算与应用数学，43，440（2024）。[5] Almarri, B., Saif, M., Akram, M., Uddin, I.：一种基于格林函数求解边值问题的有效不动点方法。非线性与凸分析杂志，25，2881–2891（2024）。[6] Sahu, D.R., Berinde, V.：非扩张映射不动点的迭代逼近及其应用。数值泛函分析与优化，33(8)，953–974（2012）。[7] Xu, H.K.：非线性算子的迭代算法。伦敦数学会杂志，66(1)，240–256（2002）。[8] Deimling, K.：非线性泛函分析。施普林格，柏林（1985）。[9] Cegielski, A.：希尔伯特空间中不动点问题的迭代方法。施普林格，柏林（2012）。[10] Byrne, C.：凸集上的迭代投影与分裂可行性问题。反问题，18(2)，441–453（2002）。[11] Censor, Y., Elfving, T., Kopf, N., Bortfeld, T.：多集分裂可行性问题及其在反问题中的应用。反问题，21(6)，2071–2084（2005）。[12] Abbas, M., Nazir, T.：一种应用于约束最小化和可行性问题的新型快速迭代过程。Mat. Vesn. 66，223–234（2014）。[13] Agarwal, R.P., O'Regan, D., Sahu, D.R.：近似渐近非扩张映射不动点的迭代构造。J. Nonlinear Convex Anal. 8，61–79（2007）。[14] Ishikawa, S.：通过一种新的迭代方法求不动点。Proc. Amer. Math. Soc. 44，147–150（1974）。[15] Khan, S.H.：Picard–Mann混合迭代过程。Fixed Point Theory Appl. 2013，69（2013）。[16] Mann, W.R.：迭代中的平均值方法。Proc. Amer. Math. Soc. 4，506–510（1953）。

[17] Noor, M.A.：一般变分不等式的新型近似格式。J. Math. Anal. Appl. 251(1)，217–229（2000）。[18] Thakur, B.S., Thakur, D., Postolache, M.：一种用于逼近非扩张映射不动点的新迭代格式。Filomat 30，2711–2720（2016）。[19] Artsawang, N., Ungchittrakool, K.：用于求解单调包含问题和图像复原问题的非扩张映射惯性 Mann 型算法。Symmetry 12，750（2020）。[20] Khuri, S.A., Louhichi, I.：一种用于求解边值问题的新型 Ishikawa–Green 不动点格式。Appl. Math. Lett. 82，50–57（2018）。[21] Krasnosel'skii, M.A.：关于逐次逼近方法的两点观察。Usp. Mat. Nauk 10，123–127（1955）。[22] Browder, F.E.：巴拿赫空间中的非扩张非线性算子。Proc. Natl. Acad. Sci. USA 54，1041–1044（1965）。[23] Zum, G.D.：压缩映射原理。Math. Nachr. 30，251–258（1965）。[24] Kirk, W.A.：一个关于不增加距离的映射的不动点定理。Am. Math. Mon. 72，1004–1006（1965）。[25] Thakur, B. S., Thakur D., Postolache M.：用于数值计算非扩张映射不动点的新迭代格式。J. Inequal. Appl. 2014，328（2014）。[26] Ullah, K., Arshad, M.：巴拿赫空间中不动点数值计算的新迭代过程。U. P. B. Sci. Bull., Ser. A 79(4)，113–122（2017）。[27] Ullah, K., Arshad, M.：通过一种新迭代过程数值计算 Suzuki 广义非扩张映射的不动点。Filomat. 32(1)，187–196（2018）。[28] Hussain, N., Ullah, K., Arshad, M.：通过新迭代过程逼近 Suzuki 广义非扩张映射的不动点。J. Nonlinear Convex Anal. 19(8)，1383–1393（2018）。[29] Ullah, K., Arshad, M.：巴拿赫空间中的新三步迭代过程与不动点逼近。J. Linear Topol. Algebra. 7(2)，87–100（2018）。[30] Clarkson, J.：一致凸空间。Trans. Am. Math. Soc. 40，396–414（1936）。[31] Opial, Z.：非扩张映射逐次逼近序列的弱收敛。Bull. Am. Math. Soc. 73，591–597（1967）。[32] Edelstein, M.：具有不动点性质的渐近中心的构造。Bull. Am. Math. Soc. 78，206-208（1972）。[33] Edelstein, M.：一致凸巴拿赫空间中的不动点定理。Proc. Am. Math. Soc. 44，369–374（1974）。[34] Goebel, K., Kirk, W.A.：度量不动点理论专题。剑桥高级数学研究丛书，第28卷。剑桥大学出版社（1990）。[35] Schu, J.：渐近非扩张映射不动点的弱收敛与强收敛。Bull. Austral. math. Soc. 43(1)，153-159（1991）。[36] Senter, H.F., Dotson Jr., W.G.：非扩张映射不动点的逼近。Proc. Am. Math. Soc. 44，375–380（1974）。[37] Xu, H.K.：巴拿赫空间中的不等式及其应用。Nonlinear Anal. 16(12)，1127–1138（1991）。