arXiv:2601.05761v1 [math.CO] 9 Jan 2026

胖次要猜想的小反例

Sandra Albrechtsen*[1]、Marc Distel†[2]和 Agelos Georgakopoulos‡[3]

[1]莱比锡大学数学研究所，Augustusplatz 10，04109 莱比锡，德国[2]莫纳什大学数学学院，墨尔本，澳大利亚[3] 沃里克大学数学研究所，CV4 7AL，英国

2026年1月9日

摘要

我们通过提出比此前已知的反例简单得多的反例，缩小了满足胖次要猜想的图族与不满足该猜想的图族之间的差距，其中包括 K_t，$t \geq 6$ 和$K_{s,\,t}$，s，$t \geq 4$和$K_{2,\,2,\,2}$。

这是通过确立 Nguyen、Scott 和 Seymour 用来反驳“粗糙门格尔猜想”的图所具有的一种“粗糙自相似性”性质来实现的。
这一性质本身或许也值得关注。

关键词： 粗图论、拟等距、厚次 minor、自相似性。

2020年数学主题分类： 05C83, 05C10, 05C63, 51F30。

1 引言

我们继续研究 *K-厚次 minor*，这是经典图子式概念的一种几何类比，其中要求分支集之间至少相距 K，连接它们的边则由长路径取代；这些路径彼此之间，以及它们与非关联分支集之间，也至少相距K；详情见第 2.3 节。这一概念属于一个更广泛的框架，即从几何视角研究图的大尺度性质，称为“粗图论”，与 Gromov 研究几何群论的方法相呼应 [12, 9]。关于粗图论的研究动机，读者可参阅 [2, 5, 11]。该领域的另一个核心概念是拟等距，即度量空间之间的一种相似性概念（定义见第 2.2 节），它在几何群论的发展中发挥了开创性作用。

本文继续研究 Papasoglu 与第三作者提出的以下颇具影响力但并不成立的猜想。该猜想将胖子式与拟等距联系起来；本文缩小了已知满足该猜想的图与已知不满足该猜想的图之间的差距：

猜想 1.1 ([11])。对于每个有限图 J 和每个 $K \in$ 自然数集，都存在 $M, A \in$ 自然数集，使得每个不含 K-胖 J 子式的图都与一个不含 J 子式的图 (M, A)拟等距。

*由联邦教育与研究部资助的亚历山大·冯·洪堡教授职位框架下的亚历山大·冯·洪堡基金会资助 DanielKr´al。

†获澳大利亚政府研究培训计划奖学金资助。

‡获 EPSRC EP/V009044/1 资助项目资助。

我们称图 J 可压缩，如果它满足此猜想（对所有 K而言）；否则称其为不可压缩 。我们将给出规模远小于 Davies、Hickingbotham、Illingworth 和 McCarty [7]以及 Davies 与第一作者 [1]此前发现的不可压缩图。特别地，我们将证明 $K_{2,\ 2,\ 2}$ 是不可压缩的，并将据此推导出 K_t，$t \geq 6$ 和 $K_{s,\ t}$，s，$t \geq 4$ 均不可压缩。

此前已知以下图是可压缩的：圈 [11],$K_{1,\ t}$，$t \geq 1$ [11, 13] K_4^- [10, 4], $K_{2,\ 3}$ [6, 10], 以及 K_4 [4]。在一篇配套论文中，我们证明了 $K_{2,\ t}$，$t \geq 1$ 也都是可压缩的 [2]。结合前述反例，这些结果表明，库拉托夫斯基图 K_5，$K_{3,\ 3}$ 是一些“临界”情形，目前尚不清楚它们是否可压缩。这本质上就是 [11], 提出的“粗糙库拉托夫斯基猜想”，该猜想旨在刻画与平面图拟等距的图。

我们将要证明的结果加强了上述结果。首先是

定理 1.1。对于任意 $M, A \in$ 自然数集，存在一个图 G，它没有 *3*-胖 $K_{2,\ 2,\ 2}$ 子式 r 使得每个与 G （M, A）-拟等距的图都含有一个 2-胖 K_7 子式。

定理 1.1 比仅仅声称 K_6 不可压缩要强得多，原因有好几方面：我们保证的 $K_{2,\ 2,\ 2} \subset K_6 \subset K_7$以及 K_7 子式是 2-胖的。它也远比声称 $K_{2,\ 2,\ 2}$ 不可压缩要强。我们指出，$K_{2,\ 2,\ 2}$ 是一个平面图——同构于八面体的 1-骨架（图 11）。

同样，我们的下一个结果表明，对每个 $t \geq 4$，$K_{4,\ t}$ 都不可压缩，而且结论更强：

定理 1.2。对于每个 $t \in$ 自然数集 和 $M, A \in$ 自然数集，存在一个图 G，它没有 *3*-胖的 $K_{4,\ 4}$子式，并且每个与 G (M, A)拟等距的图都含有一个 *2*-胖的 $K_{4,\ t}$ 子式。

猜想 1。1 [7, 1] 的所有已知反例都基于 Nguyen、Scott 和 Seymour 的构造 [14]（见第 3 节中的图 1），我们将其称为*NSS* 图，该构造推翻了 [3, 11], 提出的“粗糙门格尔猜想”，我们的反例也同样如此。定理 1.1 和定理 1.2 的证明基于我们引入的一种新的图的粗几何性质，这种性质或许本身也值得关注；我们证明 NSS 图具有这一性质：如果对每个与 Y 拟等距的 X图（族） $\preceq$都成立，其中 X 是粗自相似的 $X \preceq Y$ 图（族），则称该图（族）具有此性质。这里 $\preceq$表示子式关系。本文的一个关键结果是

定理 1.3。无穷*NSS*图是粗自相似的。

更具体地说，我们将在第 5 节证明以下更精细的版本，并据此给出一个 2-胖模型。

定理 1.4。对于任意 $M \geq 1$、 $A \geq 0$ 和 k、$d \in$ 自然数集，存在 K、$D \in$ 自然数集，使得对所有 $k' \geq K$ 和 $d' \geq D$，以下结论成立：若 $G_{k',d'}$ 与图 H $(M,\ A)$拟等距，则 H 包含 $G_{k,\ d}$ 作为一个2-厚子式。

这里，$G_{k,d}$ 和 $G_{k',d'}$ 表示 NSS 图（见第 3 节）。特别地，这意味着 $G_{K,D}$ 本身包含 $G_{k,d}$ 作为一个 2-厚子式。

有趣的是，我们的证明用到了粗糙门格尔猜想的 2-路径版本；该版本已被证明成立 [3, 11], ，并应用于用于反驳 3-路径版本的图 [14]。定理 1.4 的另一个推论是，NSS 图本身是不可压缩的（第 4 节）。

定理 1.1 和 1.2 的证明中的另一个重要组成部分是

定理 1.5。$K_{2,\ 2,\ 2}$ 不是 *NSS* 图的9-厚次 *minor*。

我们结合最后两个定理以及以下观察来证明定理 1.1 和定理 1.2（见第 4 节）：$K_{2,\ 2,\ 2}$ 是 K_7 和 $K_{4,\ t,\ \ t\ \geq\ 4}$ 的子式，而后者又是 NSS 图的子式（定理 4.1 和定理 4.2）；此外，我们使用一个众所周知的幂技巧（定理 4.3），将肥度从 9 降至 3。我们在第 6 节证明定理 1.5。

在第 7 节中，我们证明，如果 J 是猜想 1.1 的一个反例，那么它的悬挂 $S(J)$也同样是反例；也就是说，它是由 J 添加一个新顶点 s_J，并将s_J 与每个 $v\ \in\ V(J)$用一条边相连后得到的图。结合定理 1.1，并以类似方式处理完全二部图（尽管这更为困难），我们推得

推论 1.6。 $K_t, t \geq 6$ 和 $K_{s,t},\ s, t \geq 4$ 均不可压缩。

将定理 1.2 与我们的结果（即 $K_{2,t}$ 可压缩 $[2],$ ）以及前面提到的“粗糙库拉托夫斯基猜想”进行比较，会引出以下一个尤其有趣的问题：

问题 1.2。 是否存在函数 f :自然数集 $\rightarrow$自然数集^2 和 s:自然数集 $\rightarrow$自然数集，使得每个不含 K-胖 $K_{3,t}$ 子式的图都拟等距于一个不含 $K_{3,s(t)}$ 子式的图？我们能否取 $s(t) = t$?

在第 8 节中，我们将证明以下事实：这表明，如果 $K_{3,\ t,\ \ t\ \geq\ 3}$ 最终是不可压缩的，那么就无法用我们在此证明 $K_{4,\ t,\ \ t\ \geq\ 4}$ 不可压缩时所用的方法来证明这一点：

命题 1.7。 对于每个 $K, t \in$ 自然数集，都存在 $k \in$ 自然数集，使得每个满足 $k' \geq k$ 和 $d' \geq K$ 的 *NSS* 图 $G_{k',\ d'}$ 都包含 $K_{3,\ t}$ 作为一个 K-厚次子式。

同样，我们注意到，对于每个足够大的 $k \in$自然数集，K_5 都是 K-厚次子式 $G_{k,\ K}$（命题 8.2），因此，如果 K_5 不可压缩（这是一个有趣的未决问题），那么就无法通过使用 NSS 图来证明这一点。

2 预备知识

我们沿用 $[8]$ 中基本的图论术语。我们不将 0 包含在自然数集 N 中。我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示 $\mathbb{N} \cup \{0\}$。

设 G 是一个图 G 且 $X,\ Y \subseteq V$（G）。一条 X–Y路径 恰好在其第一个顶点 X 处相交，并且恰好在其最后一个顶点 Y 处相交。

2.1 距离

设 G 是一个图。我们用 $d_G(v, u)$ 表示顶点 v 和 u 在 G中的距离。对于 G的两个顶点集合 U 和 U'，我们用 $d_G(U, U')$ 表示 U和 U'中各取一个元素所得的最小距离。如果 U或 U'中有一个只是单元素集合，则省略花括号，记作 $d_G(v, U') := d_G(\{v\}, U')$，表示 $v \in V(G)$。

给定 G的顶点集合 U，以 U 为中心、半径为 $r \in$自然数集的球（在 G中）记作 $B_G(U, r)$，它是 G 中与 U 的距离至多为 r 的所有顶点的集合，其中距离在 G中定义。如果对于某个 $v \in V(G)$有 $U = \{v\}$，则省略花括号，将以 v为中心、半径为 r的球（在 G中）记作 $B_G(v, r)$。

此外，G 的半径 rad(G) 是满足以下条件的最小数 $k \in$ 自然数集$_0$：对于某个顶点 $v \in V(G)$，有 $V(G) = B_G(v, k)$；如果不存在这样的 $k \in$ 自然数集$_0$，则取 ∞。另外，如果 $U \subseteq V(G)$，那么 U 在 G 中的半径是满足以下条件的最小数 $k \in$ 自然数集$_0$：存在 G 的某个顶点 v，使得 $U \subseteq B_G(v, k)$；如果不存在这样的 $k \in$ 自然数集$_0$，则取 ∞。

若 Y是 G的子图，则分别将 $d_G(U, V(Y))$、$\mathrm{rad}_G(V(Y))$ 和 $B_G(V(Y)\ r)$ 简记为 $d_G(U, Y)$、$\mathrm{rad}_G(Y)$ 和 $B_G(Y, r)$。

2.2 拟等距

对于 $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ 和 $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，一个 (M, A)-拟等距映射 是从图 H 到图 G 的映射 $\varphi\colon V(H) \to V(G)$，满足

(Q1) $M^{-1} \cdot d_H(g,\ h) - A \leq d_G(\varphi(g)\ \varphi(h)) \leq M \cdot d_H(g,\ h) + A$ 对于每个 $g,\ h \in V(H)$，并且

(Q2) 对于每个 $v \in V(G)$，存在 $h \in V(H)$，使得 $d_G(v,\ \varphi(h)) \leq A$。

以下是一个众所周知的事实。

引理 2.1. 如果图 H 与图 G 拟等距，且参数为 (M, A)，那么 G 与 H 拟等距，且参数为 $(M, 3AM)$。 □

我们指出，给定一个从 H 到 G 的 $(M,\ A)$-拟等距映射 φ，可以通过将 G 的每个顶点 v 映射到 H 中满足 $d_G(v,\ \varphi(h)) \leq A$ 的某个（任意）顶点 h，得到一个从 G 到 H 的 $(M,\ 3AM)$-拟等距映射。

根据定义，关于 (M, A)-拟等距的以下事实是显然的，因为对于 G 的任意一条边 uv，由 (Q1) 可知 $d_H(\varphi(u)\ \varphi(v)) \leq M + A$。

引理 2.2。设 $M \geq 1$, $A \geq 0$，且设 φ 是从图G到图 H 的一个(M, A)-拟等距。若 $U \subseteq V(G)$ 是连通的，则 $B_H(\varphi(U)\ M + A)$ 是连通的。 □

下一个引理大致说明，拟等距（粗略意义上）保持分隔集。

引理 *2.3*（[1, 引理 *2.3*]）。设 $M \geq 1$, $A \geq 0$，且设 φ 是从图 G 到图 H 的一个 (M, A)-拟等距。若 $X \subseteq V(G)$ 在G中分隔 $Y \subseteq V(G)$ 和 $Z \subseteq V(G)$，则 $B_H(\varphi(X)\ r)$ 在 H中分隔 $\varphi(Y)$ 和 $\varphi(Z)$，其中 $r := r(M, A) = M(M(3A + 1) + 2M^{-1}A + 1)$。

2.3 胖子式

设 J, G 是图。图 G 中图 J 的一个模型 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是由一族互不相交且连通的集合 $\mathcal{U}$（$U_x \subseteq V$（G）$x \in V$（J））以及一族内部不相交的 U_x–U_y 路径 $\mathcal{E}$ 组成的，每条路径对应图 J 的一条边 $e = xy$，并且当 $z \neq x, y$ 时，E_e 与每个 U_z 都不相交。U_x 是该模型的分支集，E_e 是该模型的分支路径。若对于任意两个不同的 $Y, Z \in \mathcal{U} \cup \mathcal{E}$，除非 $Y = E_e$ 且对于某个与 $e \in E$（J）关联的顶点 $x \in V$（J）有 $Z = U_x$，或反之，否则 $\mathrm{dist}_G(Y, Z) \geq K$，则图 G 中图 J 的模型 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 称为 $K \in$ N-胖。若图 G 包含图 X 的一个（K-胖）模型，我们称图 J 是图 G 的一个（K-胖）子式，并记作 $J \preceq G$（$J \preceq_K G$）。注意，图 G 的 0-胖子式恰好就是它的子式。

我们称 J 是 的渐近子式，G，记作 $J \preceq_\infty G$，若 J 是 G 的 K-厚次 minor G 对所有 $K \in$自然数集均成立。

2.4 两条路径的粗糙门格尔定理

我们需要以下关于两条路径的门格尔定理的“粗糙”版本。该版本由 Albrechtsen、Huynh、Jacobs、Knappe 和 Wollan 证明 [3, 定理 2]，Georgakopoulos 和 Papasoglu 也独立证明了该版本 [11, 定理 8.1]；我们在此陈述的版本出自后者。

定理 2.4 ([3, 11])。设 G 是一个图，S、T 是 $V(G)$ 的两个子集。对于每个$K > 0$，以下两者必有其一

(i) 两条路径连接 S 和 T，且它们在 G 中彼此的距离至少为 μK，其中 $\mu \geq 1/544$ 是一个普适常数；或者(ii) $U \subset V$ 是一个集合(G)，其半径为 U，满足 $G - U$ 不包含 S–T 路径。

3 NSS 图的构造

为证明定理 1.1，我们需要对每个 $M, A \in$ 自然数集，构造一个图 G，使其不与任何不含 K_7 子式的图 (M, A)-拟等距。正如引言中已经提到的，这些图 G 将是来自 [14] 的图。下面我们回顾它们的构造（见图 1）。

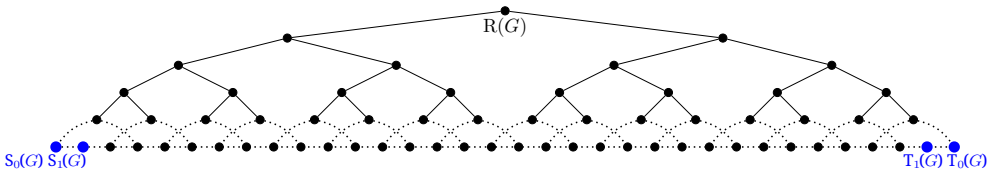


图 1：图 $G_{5,d}$ 如图所示。点线曲线表示长度为 $d+1$ 的路径。

NSS 图的高度 k 和细分长度 d，记作 $G_{k,d}$，通过归纳定义。对于 $k = 1$ 和 $d \in$ 自然数集，$G := G_{1,d}$ 是按如下方式得到的图：

(i) 从一条包含四个顶点的路径开始，按此顺序标记为 S_0, S_1, T_1, T_0，

(ii) 添加一个新顶点 R，使其与 S_0 和 T_0 相邻，最后

(iii) 将每条边细分为长度为 d 的路径。

定义 $\mathrm{S}_0(G) := S_0$，$\mathrm{S}_1(G) := S_1$，$\mathrm{T}_0(G) := T_0$，$TI(G) := S_1$，$\mathrm{R}(G) := R$。我们称 R(G) 为 G 的根。我们将维持以下性质：对于每个 $k \geq 1$，若 $G := G_{k,\ d}$，则 $\mathrm{S}_0(G)$、$\mathrm{S}_1(G)$、$\mathrm{T}_0(G)$、$\mathrm{S}_1(G)$、R(G) 均有定义，且它们是 G 中互不相同的顶点。

现在我们描述构造的归纳步骤。设 $k \in$ 自然数集，且 Δ_0 和 Δ_1 是 $G_{k-1,\ d}$ 的副本。那么 $G := G_{k,\ d}$ 是按如下方式得到的图：

(1) 取 Δ_0 和 Δ_1 的不交并，

(2) 将 $\mathrm{T}_1(\Delta_0)$ 与 $\mathrm{S}_0(\Delta_1)$ 识别，并将 $\mathrm{T}_0(\Delta_0)$ 与 $\mathrm{S}_1(\Delta_1)$ 识别；(3) 删除连接这两个识别后的顶点的两条长度为 d 的路径中的一条；最后，(4) 添加一个新顶点 R，使其与 $\mathrm{R}(\Delta_0)$ 和 $\mathrm{R}(\Delta_1)$ 相邻。

设集合 $\mathrm{S}_0(G) := \mathrm{S}_0(\Delta_0)$, $\mathrm{S}_1(G) := \mathrm{S}_1(\Delta_0)$, $\mathrm{T}_0(G) := \mathrm{T}_0(\Delta_1)$, $\mathrm{T}_1(G) := \mathrm{T}_1(\Delta_1)$, $\mathrm{R}(G) := R$（见图 1）。此外，设 $\mathrm{SS}(G) := \{\mathrm{S}_0(G), \mathrm{S}_1(G)\}$ 以及 $\mathrm{TT}(G) := \{\mathrm{T}_0(G), \mathrm{T}_1(G)\}$ 和 $\mathrm{RTT}(G) := \mathrm{TT}(G) \cup \{\mathrm{R}(G)\}$。我们称该集合为

$$\mathrm{Adh}(G) := \{\mathrm{S}_0(G), \mathrm{S}_1(G), \mathrm{T}_0(G), \mathrm{T}_1(G), \mathrm{R}(G)\} = \mathbf{SS}(G) \cup \mathbf{RTT}(G)$$

G_k的粘合，d（这个名称稍后就会明白）。

我们还定义 $\mathrm{S}\Delta(G) := \Delta_0$ 以及 $\mathrm{T}\Delta(G) := \Delta_1$。我们注意到 $\mathrm{SS}(\mathrm{S}\Delta(G)) = \mathrm{SS}(G)$，且 $\mathrm{TT}(\mathrm{S}\Delta(G)) = \mathrm{SS}(\mathrm{T}\Delta(G))$，并且 $\mathrm{TT}(\mathrm{T}\Delta(G)) = \mathrm{TT}(G)$（见图 2）。

若 $G = G_{1,d}$，则 G 的底部路径是避开 $\mathrm{R}(G)$ 的 $\mathrm{S}_0(G)$–$\mathrm{T}_0(G)$ 路径（且唯一）。若 $G = G_{k,d}$ 对某个 $k \geq 2$成立，则 G 的底部路径是仅使用 G 中只与细分边关联的顶点的 $\mathrm{S}_0(G)$– $\mathrm{T}_0(G)$ 路径（且唯一）。我们令 $B(G)$ 表示包含在 G中的（细分）二叉树，也就是说，$B(G)$ 是从 G中移除底部路径的细分顶点后剩下的子图。对于每个不是细分顶点的 $x, y \in V(G)$，G 中存在一条唯一的 x–y 路径，它与 G的底部路径内部不相交，我们称之为树路径。

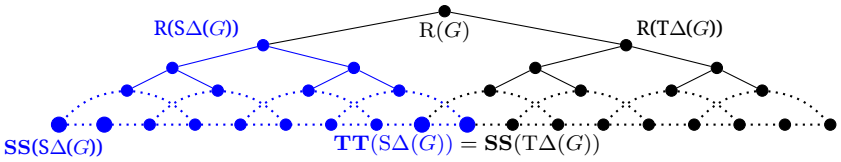


图 2： $G := G_{4,\ d}$ 的蓝色子图是三角形 SΔ(G)。

对于二叉树中的每个顶点 x $B(G)$，若其既不是叶也不是细分顶点，则 G 中存在某个 NSS 图的一个（唯一）副本（其高度小于 G，如果$x \neq$R(G)），且其根为 x。例如，如果 x 是 R(G) 的“左”后继，那么这个图就是 SΔ(G)。我们称这些图为 三角形 G。

由于每个三角形都同构于一个（唯一的）NSS 图，因此为 NSS 图定义的所有概念，例如 S_0(.) 和 Adh(.)，也都适用于三角形。注意，给定 G的一个（真）三角形 Δ，其粘合 Adh(Δ) 分隔 Δ 和 $G - V$(Δ)。我们称 G的子图 $G - (V(\Delta) \setminus$Adh(Δ)) 为 G中 Δ的外部 Ext(Δ, G)。如果上下文中已明确底层图 G，则我们将 Ext(Δ) 简写为：$=$ Ext(Δ, G)。

为了后续使用，我们指出，对于任意由 G 构成的三角形 Δ，若满足 **SS**(Δ) =**SS**(G)，则其根 R(Δ) 与 **TT**(Δ) 一起将 Δ 与 $G - V$(Δ) 分隔开。

本节余下部分将汇集一些我们后续需要的 NSS 图的性质。

引理 3.1 ([14, 2。1])。 设 $\ell \geq 1$，并设 $G : = G_{k,\ d}$，其中 $k > 2\ell + 2$ 和 $d > 2\ell$。若 $X \subseteq V(G)$ 且 $|X| \leq 2$，则在 G 中存在一条路径 P，连接 **SS**(G) 与 **TT**(G)，使得 $d_G(X, P) > \ell$。

3.1 SS(G)–TT(G)联结

本小节将介绍一些术语和观察结果，这些内容仅用于定理 1.3 的证明。

设 $G := G_{k,d}$，其中 $k, d \in$ 属于自然数集。一组从 SS(G) 到 TT(G) 的联结，是由一对不相交路径 P, Q 组成的。若 P, Q 中的一条将 T_1(G) 与 S_0(G) 连接起来（因此另一条将 T_0(G) 与 S_1(G) 连接起来），则称 P, Q 为交叉联结；否则称为嵌套联结（见图3）。

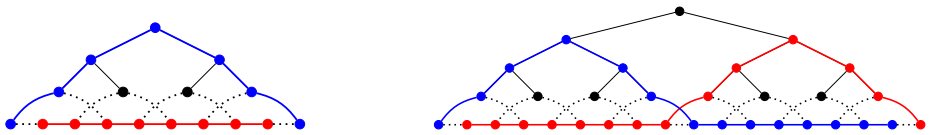


图3：嵌套联结（左）和交叉联结（右）。

观察3.2. 对于每个 $k, d \in$ 自然数集，*NSS* 图 $G_{k,d}$ 具有一个嵌套联结 P, Q，其中 $d_G(P, Q) = d$。 □

事实上，图3中展示了这样一个联结。

引理3.3. 设 Δ 是 *NSS* 图 G的一个三角形，Δ_0, Δ_1 是它的子三角形。设 P, Q 是 Δ 的一个联结，且避开 R(Δ)。那么

(i) *for each* $i \in \{0, 1\}$ *the paths* $P^i := P \cap \Delta_i$ *and* $Q^i := Q \cap \Delta_i$ *form a linkage of* Δ_i*;*

(ii) 联络 P, Q、 P^0, Q^0 和 P^1, Q^1 中至少有一组是交叉的。

证明。(i)：令 $W^i := W \cap \Delta_i$ 对应于 $W \in \{P, Q\}$ 和 $i \in \{0, 1\}$。由于 $\{\mathrm{R}(\Delta)\} \cup \mathbf{TT}(\Delta_0)$ 在 Δ 中分隔 Δ_0 和 Δ_1，并且由于避开 R(Δ)，子路径 P^0, Q^0 和 P^1, Q^1 分别是 Δ_0, Δ_1 的联络。

(ii)：不失一般性，设 P从 $\mathrm{S}_0(\Delta)$ 出发。如果 P^0，Q^0 和 P^1，Q^1 都是嵌套的，那么根据嵌套的定义，P^0 终止于 $\mathrm{T}_0(\Delta_0)$。由于 $\mathrm{T}_0(\Delta_0) = \mathrm{S}_1(\Delta_1)$，因此 P^1 终止于 $\mathrm{T}_1(\Delta_1)$。于是，P从 $\mathrm{S}_0(\Delta)$ 出发并终止于 $\mathrm{T}_1(\Delta)$，所以 P，Q是交叉的。

□

3.2 关于 NSS 图中路径的更多内容

在本小节中，我们将进一步观察 NSS 图，这些观察仅会在第 6 节中用到。

回想一下，Nguyen、Scott 和 Seymour [14] 构造 NSS 图，作为对“粗糙门格尔猜想”的反例 [3, 11]。为此，$G := G_{k,\,d}$ 的两项主要性质之一是：每当 P，Q 是连接 $\mathbf{SS}(G)$ 和 $\mathbf{TT}(G)$ 的路径时，P，Q 要么彼此之间的距离至多为 2，要么其中一条包含根 $\mathrm{R}(G)$。更准确地说

引理 3.4。[14, 2。2] 对于每个 $k \geq 1$ 和 $d \in$ 自然数集，如果 P、Q 是 $G := G_{k,\,d}$ 中连接 $\mathbf{SS}(G)$与 $\mathbf{TT}(G)$的路径，那么以下两者之一成立：

(i) P、Q 之间的距离至多为2；或者

(ii) P、Q 中的一个是连接 $\mathrm{S}_0(G)$ 与 $\mathrm{T}_0(G)$的 $B(G)$ 路径（唯一）。

我们还需要引理 3.4 的以下变体：

推论 3.5。对于每个 $k \geq 2$ 和 $d \in$ 自然数集，如果 P、Q 是 $G := G_{k,\,d}$ 中连接 $\mathbf{SS}(G)$ 与 $\mathbf{RTT}(G)$的路径，那么以下两者之一成立：

(i) P、Q 之间的距离至多为2；或者

(ii) P、Q 中有一条是 $B(G)$ 中连接$\mathrm{S}_0(G)$ 与$\mathrm{R}(G)$ 之间，或连接$\mathrm{S}_0(G)$与$\mathrm{T}_0(G)$之间的（唯一）路径。特别地，它包含$\mathrm{R}(G)$。

证明。我们对高度 k使用归纳法。对于 $k = 1$，该断言很容易验证，因为$G_{1,d}$ 只是一个细分后的 K_3。因此，我们可以假设 $k > 1$，并且该断言对所有 $k' < k$都成立。令 $G := G_{k,d}$，取给定的 P, Q，使得（不失一般性）P 从$\mathrm{S}_0(G)$出发（因而 Q 从$\mathrm{S}_1(G)$出发），并假设$d_G(P, Q) \geq 3$，即(i)不成立。

如果 P、Q 都终止于$\mathrm{TT}(G)$，那么由引理 3.4，(ii)成立。因此，我们可以假设 P、Q 中有一个终止于$\mathrm{R}(G)$。特别地，P、Q 是$\mathrm{SS}(G)$–$\mathrm{RTT}(G)$路径。现在反设(ii)也不成立，即 P 不是 $B(G)$中连接$\mathrm{S}_0(G)$与$\mathrm{R}(G)$的（唯一）路径。令 v_0v_1 为 $B(G)$中从$\mathrm{S}_0(G)$到$\mathrm{R}(G)$的（唯一）路径上第一条不包含于 P的边。令 Δ_0、Δ_1 为 G 中满足$\mathrm{R}(\Delta_0) = v_0$ 且$\mathrm{R}(\Delta_1) = v_1$的唯一三角形。特别地，$\mathrm{R}(\Delta_0) = v_0 \in V(P)$且 $\Delta_0 = \mathrm{S}\Delta(\Delta_1)$。由于$\mathrm{TT}(\Delta_0)$和边$\mathrm{R}(\Delta_0)\,\mathrm{R}(\Delta_1)$将$\mathrm{SS}(G)$与$\mathrm{TT}(G)$分隔开，$P$、$Q$ 都与$\mathrm{TT}(\Delta_0)$相交。由 $d_G(P, Q) \geq 3$ 且$\mathrm{S}_0(G) \in V(P)$，根据引理 3.4可得$\mathrm{T}_0(\Delta_0)$、$\mathrm{R}(\Delta_0) \in V(P)$以及$\mathrm{T}_1(\Delta_0) \in V(Q)$。

现在考虑 $\Delta'_0 := \mathrm{T}\Delta(\Delta_1)$。由于 $\mathbf{RTT}(\Delta'_0)$ 将 $\mathrm{T}_0(\Delta_0) = \mathrm{S}_0(\Delta'_0)$ 和 $\mathrm{T}_1(\Delta_0) = \mathrm{S}_1(\Delta'_0)$ 与 $\mathrm{Ext}(\Delta_0)$ 中的 $\mathbf{RTT}$ 分隔开，二者都与$\mathbf{RTT}(\Delta'_0)$相交。对 Δ'_0 应用归纳假设可得 Q，它始于 $\mathrm{S}_0(\Delta'_0)$，并包含 $\mathrm{R}(\Delta'_0)$。但这样一来，$d_G(P, Q) \leq d_G(\mathrm{R}(\Delta_0), \mathrm{R}(\Delta'_0)) = 2$，这就产生了矛盾。

□

如果 Δ 是 G 的一个三角形，并且路径P、Q 包含于 $\mathrm{Ext}(\Delta)$ 中，则类似于推论 3.5 的结果同样成立（见图 4）：

引理 3.6。 对于每个 $k \geq 2$ 和 $d \in$ 自然数集 以及 G 的每个三角形 $\Delta := G_{k,\,d}$，如果 P、Q 是$\mathrm{Ext}(\Delta)$ 中连接$\mathbf{SS}(\Delta)$ 与$\mathbf{RTT}(\Delta)$的路径，那么以下情况至少有一种成立：

(i) P与 Q 之间的距离至多为2 ，或

(ii) P、Q 中有一个是 $B(G)$ 中连接以下两对顶点之一的（唯一）路径：要么连接$\mathrm{S}_1($ $\Delta)$ 与$\mathrm{T}_1(\Delta)$ ，要么连接$\mathrm{S}_1(\Delta)$ 与$\mathrm{R}(\Delta)$。特别地，它与$\mathrm{R}(\Delta)$的距离至多为1 。

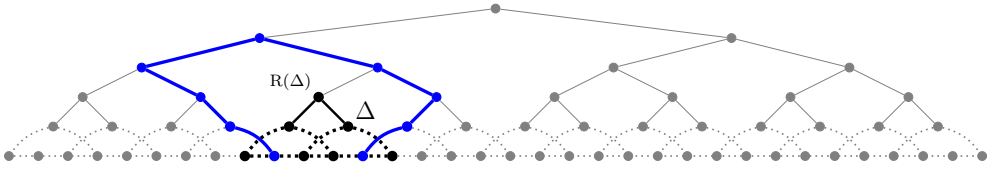


图 4：蓝色标示的是 $B(G)$ 中连接 $\mathrm{S}_1(\Delta)$ 与 $\mathrm{T}_1(\Delta)$ 的唯一路径，其中 Δ 以黑色标示。

引理 *3.6* 的证明。 令 k' 为 Δ 的高度。我们对 $n := k - k'$ 进行归纳。对于 $n = 0$，有 $\Delta = G$，因此在 $G[\mathrm{Adh}(G)]$ =Ext(G) 中不存在连接$\mathbf{SS}(\Delta)$ 与$\mathbf{RTT}(\Delta)$ 的路径，所以该断言显然成立。对于 $n = 1$ ，Ext(Δ) 中不存在连接$\mathbf{SS}(\Delta)$ 与$\mathbf{RTT}(\Delta)$ 的两条不相交路径，因为 $\mathrm{S}_0(\Delta)$ 与 $\mathrm{S}_1(\Delta)$，或 $\mathrm{T}_0(\Delta)$ 与 $\mathrm{T}_1(\Delta)$，是 Ext(Δ) 中的孤立顶点。因此，我们可以假设 $n \geq 2$。令 Δ_1，Δ_2 分别为包含 Δ 的 G 中高度为 $k' + 1$ 和 $k' + 2$ 的（唯一）三角形。我们假设 (i) 不成立，并证明此时 (ii) 必须成立。

我们先假设 $\Delta = \mathrm{S}\Delta(\Delta_1)$。再设 $\Delta' := \mathrm{T}\Delta(\Delta_1)$。不失一般性，令 P 从 $\mathrm{S}_1(\Delta)$开始。由于 $\mathrm{RTT}(\Delta_1)$ 在 Ext(Δ) 中将 RTT(Δ) 与 SS(Δ) 分隔开， P和 Q 都必须通过 $\mathrm{RTT}(\Delta_1)$ 重新进入 Δ_1。令 P'和 Q' 分别为 P和 Q的（唯一）子路径，它们从 SS(Δ) 开始，在 $\mathrm{RTT}(\Delta_1)$ 结束，且与 Δ_1内部不相交。由于 Δ_1 的高度比 Δ的高度 k' 大一，我们可以对 Δ_1应用归纳假设，由此可知， P' 是 $B(G)$ 中连接 $\mathrm{S}_1(\Delta_1)$ 与 $\mathrm{R}(\Delta_1)$ 或 $\mathrm{T}_1(\Delta_1)$ 的唯一路径，并且 Q' 终止于 $\mathrm{TT}(\Delta_1)$。特别地，$\mathrm{R}(\Delta_2) \in V(P)$，这意味着 Q 不会终止于 R(Δ)，因为 $d_G(\mathrm{R}(\Delta), \mathrm{R}(\Delta_2)) = 2$。

如果 P'终止于 $\mathrm{R}(\Delta_1)$，且 P上的下一条边是 $\mathrm{R}(\Delta_1)$ R(Δ)，那么 P就是 $B(G)$ 中连接 $\mathrm{S}_1(\Delta)$ 与 R(Δ) 的（唯一）路径，正如所需。因此，我们可以假设：如果 P' 终止于 $\mathrm{R}(\Delta_1)$，那么 P 包含边 $\mathrm{R}(\Delta_1)$ R(Δ')，且 P 上的下一个顶点是 R(Δ')。这意味着无论哪种情况， P中包含于 Δ' 的第一个顶点都是 R(Δ') 或 $\mathrm{T}_1(\Delta')$。

首先假设 P 通过 R(Δ') 进入 Δ' （并回忆一下，如前所示， Q 通过 $\mathrm{TT}(\Delta') = \mathrm{TT}(\Delta_1)$ 进入 Δ'）。由于 RTT(Δ') 的大小为 3，且其中每个顶点在 Ext(Δ') 中仅有一个邻点，$P \cap \Delta'$和 $Q \cap \Delta'$作为 P, Q 的子图是路径（一个端点在 RTT(Δ') 中，另一个端点在 TT(Δ) =SS(Δ') 中）。对 Δ' 应用推论 3.5 可知， $P \cap \Delta'$ 就是 $B(G)$ 中连接 $\mathrm{S}_0(\Delta')$ =$\mathrm{T}_1(\Delta)$ 与 R(Δ') 的（唯一）路径，因此 P就是 $B(G)$ 中连接 $\mathrm{S}_1(\Delta)$ 与 $\mathrm{T}_1(\Delta)$ 的（唯一）路径，故（ii）成立。

因此，我们可以假设 P通过 $\mathrm{T}_1(\Delta)$ 进入 Δ'（因此 Q 也通过 $\mathrm{T}_0(\Delta')$ 进入 Δ'）。现在我们再次分析 $P \cap \Delta'$和 $Q \cap \Delta'$；由于与上文相同的理由，它们仍然是路径。首先注意，它们的另一个端点（不在 $\mathbf{TT}(\Delta')$ 中的端点）必须包含在 $\mathbf{SS}(\Delta') \cup \mathrm{R}(\Delta')$ 中。根据 NSS 图的对称性，我们可以将推论 3.5 应用于 Δ'的翻转版本，由此可知， $Q \cap \Delta'$是 $B(G)$ 中连接 $\mathrm{T}_0(\Delta')$ 与 $\mathrm{S}_0(\Delta')$ 或 R(Δ') 的唯一路径。两种情况下， Q 都包含 R(Δ')，因此 $d_G(P, Q)$ $\leq d_G(\mathrm{R}(\Delta_2), \mathrm{R}(\Delta')) = 2$，这就产生了矛盾。

现在假设 Δ =$\mathrm{T}\Delta(\Delta_1)$。（此情形采用与前一种情形类似的思路。）令 $\Delta' := \mathrm{S}\Delta(\Delta_1)$。不失一般性，设 P 从 $\mathrm{S}_1(\Delta)$ 开始。由于

SS(Δ′) ∪ {R(Δ′)} 将 Ext(Δ) 中的 SS(Δ) 与 RTT(Δ) 分隔开，因此 P 和 Q 都必须经由 SS(Δ′) ∪ {R(Δ′)} 离开 Δ′。特别地，由于 SS(Δ′) ∪ {R(Δ′)} 的大小为 3，且其中每个顶点在 Ext(Δ′) 中都只有一个邻点，因此 $P \cap \Delta'$ 和 $Q \cap \Delta'$ 都是路径（连接 SS(Δ) = TT(Δ′) 与 SS(Δ′) ∪R(Δ′)）。利用 NSS 图的对称性，我们可以将推论 3.5 应用于 Δ′ 的翻转版本，由此可知 $P \cap \Delta'$ 是 $B(G)$ 中连接 $T_0(\Delta')$ = $S_1(\Delta)$ 与 R(Δ′) 或 $S_0(\Delta')$ 的唯一一条路径（因此 $P \cap \Delta'$ 是 Δ′ 中一条从“右侧”通往“左侧”或“顶部”的路径）；特别地，R(Δ′) ∈ $V(P)$。

我们先假设 $P \cap \Delta'$ 终止于 $S_0(\Delta')$。那么 $Q \cap \Delta'$ 终止于 $S_1(\Delta')$。因此， $P \cap \text{Ext}(\Delta_1)$ 和 $Q \cap \text{Ext}(\Delta_1)$ 是路径，它们从 $\mathbf{SS}(\Delta_1) = \mathbf{SS}(\Delta')$ 通向 $\mathbf{RTT}(\Delta_1)$。由于 Δ_1 的高度比 k' 的高度 Δ大 1，我们可以应用归纳假设。但这样一来，从 $S_1(\Delta_1)$ 开始的 $Q \cap \text{Ext}(\Delta_1)$ 就包含 $R(\Delta_2)$，因此它与 R(Δ′) ∈ P 的距离至多为 2，这就产生了矛盾。

因此， $P \cap \Delta'$ 终止于 R(Δ′)，并且它是 $B(G)$ 中连接 $T_0(\Delta')$ =$S_1(\Delta)$ 与 R(Δ′) 的唯一一条路径。于是， P 上 R(Δ′) 之后的下一个顶点必定是 $R(\Delta_1)$。如果 P 也包含边 $R(\Delta_1)$ R(Δ)，因而终止于 R(Δ)，那么 P 就是 $B(G)$ 中连接 $S_1(\Delta)$ 与 R(Δ) 的唯一一条路径，正如所需。因此，我们可以假设 P 不包含这条边；特别地，它终止于 TT(Δ)（因为它无法再仅通过使用 Ext(Δ) 中的顶点到达 R(Δ)）。同理， Q 必须终止于 TT(Δ)（因为 $R(\Delta_1) \in P$, 并且由于 P与 Q 不相交， Q 无法仅通过使用 Ext(Δ) 中的顶点到达 R(Δ)）。因此，$P \cap \text{Ext}(\Delta_1)$ 和 $Q \cap \text{Ext}(\Delta_1)$ 是从 $SS(\Delta_1) \cup \{R(\Delta_1)\}$ 通向 $TT(\Delta_1)$ 的路径。根据 NSS 图的对称性，并且由于 Δ_1 的高度比 k'的高度 Δ大 1，我们可以将归纳假设应用于 G的翻转版本，这意味着 $P \cap \text{Ext}(\Delta_1)$ 是 $B(G)$ 中连接 $R(\Delta_1)$ 与 $T_1(\Delta_1) = T_1(\Delta)$ 的（唯一一条）路径。因此， P 是 $B(G)$ 中连接 $S_1(\Delta)$ 与 $T_1(\Delta)$ 的唯一一条路径，所以 (ii) 成立。 □

4 猜想 1.1 的反例

本节中，我们假设定理 1.4 和定理 1.5 成立（我们将在接下来的两节中证明它们），并据此证明定理 1.1 和定理 1.2。我们首先寻找 K_7 和$K_{4,\ t}$ 的 2-胖模型。

定理 4.1。 K_7 对任意 $k \geq 13$ 和 $d \geq 2$ 都是 $G_{k,\ d}$ 的一个 2-厚子式。

证明。 图 5 展示了 $K_7 - \{16, 26\}$ 在 $G_{7,\ d}$ 中的一个（0-肥）模型。要在 $G_{9,\ d}$ 中得到 K_7 的模型，只需重复底部图示中的思路，不同之处在于，这次由第六个分支集而非第五个分支集利用根与第一和第二个分支集相连。

现在，我们可以通过结合刚刚在 $G_{9,\ d}$ 中找到的 0-肥模型，以及定理 1.4 所述的事实——$G_{9,\ d}$ 是某个 $G_{k,\ d'}$ 的 2-厚子式——从理论上推导出 2-胖模型 K_7 的存在。不过，我们也可以调整上述构造，直接在 $G_{13,\ d}$ 中构造一个 2-厚的 K_7 子式：将上图中 NSS 图的高度增加 2，就能使模型达到 $K_7 - \{15, 25, 16, 26\}$ 2-胖；若将下图中 NSS 图的高度增加 1（相对于灰色区域），模型也能达到 $K_7 - \{16, 26\}$ 2-胖。（另见图 7。）

□

定理 4.2。 $K_{4,\ t}$ 是 $G_{k,\ d}$ 的2厚次 *minor*，适用于每个 $t \in$ 自然数集 以及 $k \geq 3 + 2t$, $d \geq 2$。

证明。 图 6 展示了一个在 $G_{5,d}$ 中的 $K_{4,2}$ 模型，其中，$K_{4,t}$ 侧上大小为 4 的顶点的分支集彼此之间的距离至少为 2。很容易扩展图示，为每个满足相同性质的 $t \geq 3$ 找到一个在 $G_{1+2t,d}$ 中的 $K_{4,t}$ 模型：每增加一个想要引入的分支集，就将高度增加 2；分别向左和向右延长蓝色和绿色分支集；并利用根构造一个类似粉色分支集的新分支集。

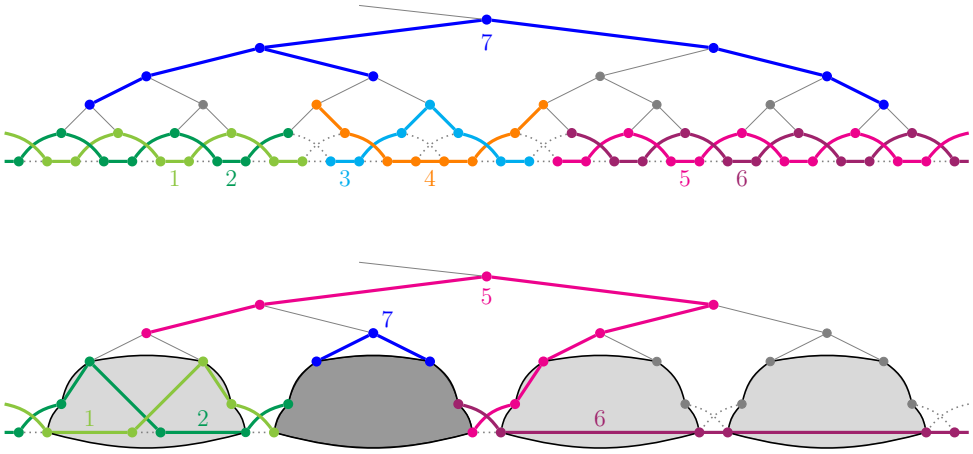


图 5：图中展示了 $K_7 - \{16, 26\}$ 在$G_{7,\ d}$中的一个模型的分支集。下图中的深灰色区域表示上图中的图。

与定理 4.1 中一样，现在我们可以通过定理 1.4 得到一个 2-胖 $K_{4,t}$ 模型。或者，如果我们用 $G_{3+3t,d}$ 代替$G_{1+2t,d}$，那么很容易调整上述构造，使模型 $K_{4,t}$ 的所有分支集两两之间的距离至少为 2。事实上，按照图 7 所示修改这个在 $G_{3+3t,d}$ 中的 $K_{2,t}$ 模型，我们就能得到一个 2-胖的 $K_{2,t}$ 模型。

□



图 6：图中展示了$K_{4,\ 2}$ 在$G_{5,\ d}$中的一个模型的分支集。蓝色和绿色集合是对应于$K_{4,\ 2}$“4 侧”上四个顶点的分支集，橙色和粉色集合则是对应于“2 侧”上两个顶点的分支集。

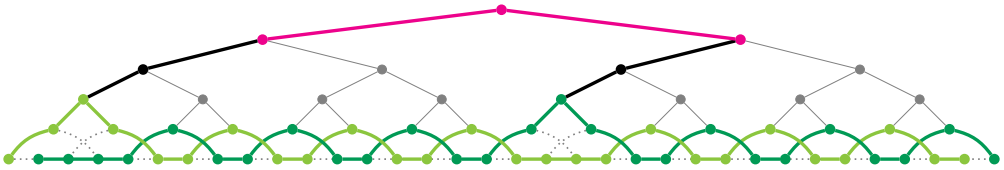


图 7：$K_{4,\ t}$的一个 2-胖模型的部分。黑色标示的是$K_{4,\ t}$ “t 侧”的一个（粉色）分支集与$K_{4,\ t}$“4 侧”的两个（绿色）分支集之间的分支路径。

给定一个图 G 和 $K \in$ 自然数集，其 K次幂 G^K 由 G通过在距离至多为 K的每一对不同顶点之间添加一条边得到。我们将使用下面关于图的幂的众所周知的观察 [7, 定理的证明 3]:

定理 4.3。令 $K \in$自然数集，令 J 为一个图，并令 G 为一个不包含 J作为 K-厚次 *minor* 的图。那么 G^K 不包含 J 作为3-厚次 *minor*。

此外， G 与 G^K拟等距$(K,0)$。

定理 *1.1* 和 *1.2* 的证明。令 $G_\infty := \bigcup_{n\in\text{自然数集}} G_{n,n}$ 表示无穷NSS图。我们将证明 G^9_∞ 具有所需性质。

根据定理 6.2，回想一下， G_∞ 不包含 O 作为 9-胖子式，因此，根据定理 4.3， G^9_∞ 不包含 O 作为 3-胖子式。由于 O 是$K_{4,4}$的子式，我们推得 G^9_∞ 不包含$K_{4,4}$ 作为 3-胖子式。

现在令 H 为一个图，使得对某个 $M, A \in$ 自然数集， G^9_∞ 与 H 拟等距,M A。根据定理 4.3， G 与 H 拟等距,$9M$ A。根据定理 1.4， H 包含G_∞ 作为 2-胖子式。由于根据定理 4.1， K_7 是 G_∞ 的子式，我们推得 K_7是 H 的 2-胖子式，正如定理 1.1 所述。类似地，根据定理 4.2， $K_{4,t}$ 是 G_∞ 的子式，因此它是 H 的 2-胖子式，正如定理 1.2 所述。 □

我们的证明实际上得出了以下更一般的结论，这或许有助于找到猜想 1.1 的其他反例。仍令 $G_\infty := \bigcup_{n\in\text{自然数集}} G_{n,\ n}$ 表示无穷NSS图，并令 G^9_∞ 表示其 9 次幂。

推论 4.4。 G^9_∞ 不包含 O 作为3-胖子式，但每个与 G^9_∞ 拟等距的图 H 都包含 G_∞，因此也包含 G_∞的任意子式，作为2-胖子式。

例如，这意味着$G_{k,\ d}$ 本身对任意足够大的 k 都是不可压缩的，使得$O \preceq G_{k,\ d}$。同样，这也意味着 G_∞ 是不可压缩的。

5 NSS 图的粗自相似性

如果对每个与拟等距的图（族），关系都成立，我们就称图（族） X 具有粗自相似性。如上所述，我们定义 $G_\infty := \bigcup_{n\in\text{自然数集}} G_{n,\ n}$。本节的目标是证明 G_∞ 具有粗自相似性；事实上，我们将进一步加强这一结论，要求其满足定理 1.4 中的 2-胖性。为方便起见，我们在此重述该定理:

定理 5.1。对于任意的 $M \geq 1$、 $A \geq 0$ 以及 k、$d \in$ 自然数集，存在 K、$D \in$ 自然数集，使得对所有 $k' \geq K$ 和 $d' \geq D$，以下结论成立：若 $G_{k',\ d'}$ 与一个图 H (M、A)-拟等距，则 H 包含 $G_{k,\ d}$ 作为一个 2-厚次 *minor*。

证明。在整个证明中，令 $M \geq 1$ 和 $A \geq 0$ 为任意但固定的对象。令 $r := r(M,\ A) + 1$ 由引理 2.3 对于 M， A 给出。我们从一些定义开始。

令 Δ 为某个$G = G_{k',\ d'}$ 的某个三角形，并令 φ 为从 G 到一个图 H 的 (M、A)-拟等距。置 $\nabla := H[B_H(\varphi(\Delta),\ r)]$。我们称 ∇ 为与 Δ 对应的 H 的三角形。将记号 $S_0(\Delta)$、$S_1(\Delta)$、$T_0(\Delta)$、$T_1(\Delta)$、$R(\Delta)$ 扩展到 ∇ 是直接的，只是现在它们表示 H 中半径为 r 的球，而非单个顶点；例如，$S_0(\nabla) := B_H(\varphi(S_0(\Delta)),\ r)$。我们称这些集合为 ∇ 的粘合球。我们还令 $SS(\nabla) := S_0(\nabla) \cup S_1(\nabla)$，$TT(\nabla) := T_0(\nabla) \cup T_1(\nabla)$，以及 $Adh(\nabla) := SS(\nabla) \cup TT(\nabla) \cup \{R(\nabla)\}$。需要指出的是，在证明后文使用这些记号时，映射 φ 和图 H 将由上下文明确。

如果每个粘合球都包含在 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 中与 $G_{k,d}$ 的“右侧”粘合顶点相对应的分支集中，我们就称 ∇ 中 $G_{k,d}$ 的模型 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是 自然的 （对于 ∇）；例如 $S_0(\nabla) \subseteq U_{S_0(G_{k,d})}$。

我们指出一个供后文使用的事实：如果 $(\mathcal{U},\ \mathcal{E})$ 是自然的，那么它的所有分支路径与 $H - \nabla$ 的邻域之间的距离至少为 2。事实上，由于每条分支路径的内部都包含在 $\nabla - Adh(\nabla)$ 中，根据引理 2.3，这一点即可得出，因为 r 比 $r(M,\ A)$ 大 1。

我们继续证明该命题。我们将给出满足要求的常数 K， D 的具体取值，但读者也可以忽略这些取值；重要的是，我们可以选取 K， D，使其相较于 k， d， M 和 A 足够大。更具体地说，它们要大于应用引理 2.3、3.1 和定理 2.4 所得到的数值。我们得到的取值为

$$K = K_k := \max\{2\ell + 3, \quad K_{k-1} + \lceil M(2r + A + 3)\rceil\}, \text{ and} \tag{1}$$
$$D = D_d := \max\{2\ell + 1, \quad \lceil M(4d + 2r + A)\rceil\} \tag{2}$$

其中 $\ell := \lceil \max\{M\lceil M\rceil(4r + 2A + 5) + 2r + A, \quad 544 \cdot (2r + 1)\} + r(M, \ 3AM)\rceil$，其中$r(M, \ 3AM)$由引理 2.3 给出。稍后我们将使用参数为 ℓ 的引理 3.1，因此我们对 K， D 的选择确保了$\mathbf{SS}(G_{K, \ D})$和$\mathbf{TT}(G_{K, \ D})$不可能被半径至多为 ℓ的两个球分隔开。

我们声称以下结论对任意 $k' \geq K$ 和 $d' \geq D$均成立：

> 对于任意高度为 $h \geq K$ 的$G_{k'}$的三角形 Δ，d'，以及从 G 到图 H 的任意 (M, A)-拟等距φ，对应于 Δ 的 H 的三角形 ∇ 包含 $G_{k, \ d}$ 的一个 2-胖自然模型。 $(*)$

这立即推出并加强了我们的结论。

我们通过对 k归纳来证明（$*$）。对于 $k = 1$，我们按如下方式在 H 中得到$G_{1,d}$的所需模型。对于每个 $x \in \mathrm{SS}(G_{1,d}) \cup \mathrm{TT}(G_{1,d})$，我们将其分支集定义为 $U_x := B_H(\varphi(x'), \ r)$，其中 x'是 Δ中与 x“处于相同位置”的粘合顶点；例如，若 $x = \mathrm{S}_0(G_{1,d})$，则为$x' = \mathrm{S}_0(\Delta)$。此外，对于 $x = \mathrm{R}(G_{1,d})$，我们令 $U_x := B_H(\varphi(B), \ r)$，其中$B$ 是从 Δ中删去所有虚线路径（即所有细分顶点）的内部后，包含$\mathrm{R}(\Delta)$的 Δ 的连通分支。由引理 2.2可知，每个 U_x 都是连通的。

此外，由引理 2.2可知，对于$G_{1,d}$的五条细分边 Q 中的每一条，在$\nabla - \bigcup_{x \in \mathrm{Adh}(G_{1,d})} U_x$中都存在一个（唯一的）连通分支，它与端点 x, y 在 Q中的两个分支集U_x 和 U_y 均有邻点；由引理 2.3（应用于$G_{k',d'}$ 和 H）可知，这五个连通分支两两不同。因此，我们可以在每个连通分支中选取一条从 U_x 到 U_y的最短路径 W_{xy}，其中 x, y 是 Q 在$G_{1,d}$中的两个端点。由于根据（2）有$d' \geq M(4d + 2r + A)$， ∇ 的粘合球彼此距离至少为 $4d$，因此路径 W_{xy} 的长度至少为 $4d$。由于 W_{xy} 是最短路径，因而也是诱导路径，所以很容易将它们划分为 $d - 1$ 个分支集和d 条分支路径，使得其中任意两者之间以及它们与 U_x, U_y之间的距离至少为2，除非它们对应一对关联的顶点/边。这就得到了 ∇中$G_{1,d}$ 所需的2-胖自然模型。

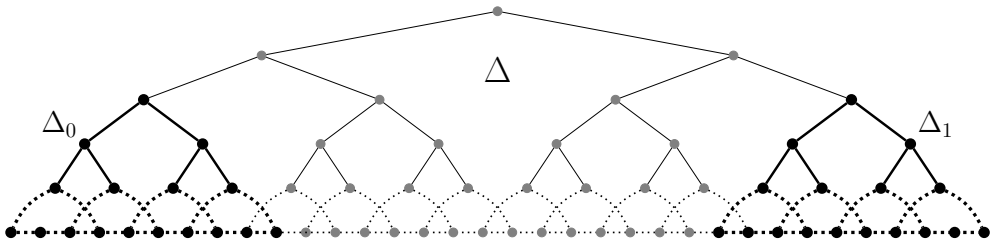


图8：定理 1.4 证明中位于 Δ 内部的三角形 Δ_0 和 Δ_1。

对于 $k > 1$，我们大致按如下方式构造 $G_{k, \ d}$ 在 H 中的模型。首先，对 Δ 最左端和最右端的两个子三角形 Δ_0， Δ_1 应用归纳假设（见图8），得到 $G_{k-1, \ d}$ 的 2-胖自然模型 $M_0 := (\mathcal{U}^0, \ \mathcal{E}^0)$ 和 $M_1 := (\mathcal{U}^1, \ \mathcal{E}^1)$。回想一下，我们通过归纳构造了

$G_{k,\,d}$：将 $G_{k-1,\,d}$ 的两个副本中两对顶点分别识别，并添加一个与它们的根顶点相邻的新顶点。我们将使用 M_0，M_1 作为 $G_{k-1,\,d}$ 的两个副本，并按如下方式将其扩展为 ∇ 内的一个 2-胖自然 $G_{k,\,d}$-模型（见图 9）。

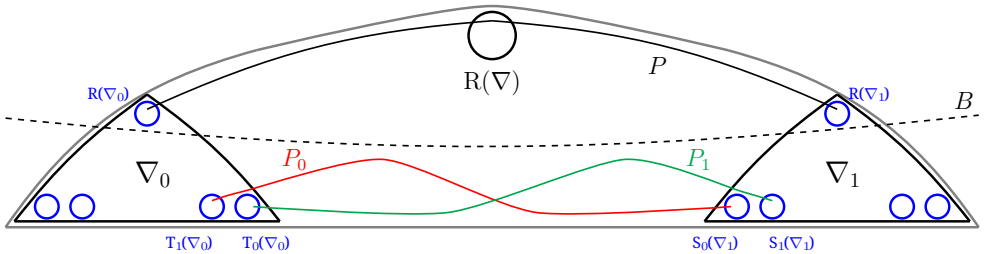


图 9：$G_{k,d}$ 在 ∇ 中的模型示意图，出自定理 1.4 的证明。蓝色标出的是 ∇_0, ∇_1的粘合球。路径 P_0, P_1 互不相交。

首先，我们用一条路径 P 在 ∇ 中连接 M_0、M_1 的根分支集，该路径经过 $R(\nabla)$。然后，在 ∇中找到一对不相交路径 P_0 和 P_1：P_0 从 $\mathrm{T}_1(\nabla_0)$通往 $\mathrm{S}_0(\nabla_1)$，P_1 从 $\mathrm{T}_0(\nabla_0)$通往 $\mathrm{S}_1(\nabla_1)$；这两条路径彼此之间，以及它们与 P 和其余的 ∇_0、∇_1之间的距离至少为 2。（这一步是证明中最具挑战性的部分。）接下来，我们收缩每个 P_i，从而将对应于 $\mathrm{T}_0(G_{k,d})$（分别是 $\mathrm{T}_1(G_{k,d})$）的 M_0 分支集与对应于 $\mathrm{S}_1(G_{k,d})$（分别是 $\mathrm{S}_0(G_{k,d})$）的 M_1 分支集连接起来。（注意，M_0、M_1 是自然的，因此例如 $\mathrm{T}_0(\nabla_0) \subseteq U^0_{\mathrm{T}_0(G_{k-1,d})}$。）最后，我们构造一个包含 $R(\nabla)$的新分支集，并使用 P 的边将它连接到 M_0、M_1的根分支集。这些新的分支集和路径，与 M_0、M_1 中未作修改的分支集和路径一起，构成了G_k在 ∇中的所需模型的分支集和路径。

让我们将这一构造精确化。我们首先对位于 Δ最左侧和最右侧的两个高度为 h' 的子三角形 Δ_0, Δ_1 应用归纳假设（$*$），从而开始构造模型；如图8所示。注意，根据（1），$h' \geq K_{k-1}$。这样，我们便分别在 ∇_0 和 ∇_1中得到$G_{k-1,d}$ 的2-胖自然模型$M_0 := (\mathcal{U}^0, \mathcal{E}^0)$和 $M_1 := (\mathcal{U}^1, \mathcal{E}^1)$。注意，根据（1）和（2），我们对 $d' > M(r + A + 1)$和 $h > h' + M(2r + A + 2)$的选择意味着∇_0, ∇_1 彼此之间的距离至少为2。

令 P^- 为二叉树 $B(\Delta)$ 中唯一的 $\mathrm{R}(\Delta_0)$–$\mathrm{R}(\Delta_1)$ 路径。注意，由引理 2.2 可知 $B_H(\varphi(P^-)\ M + A)$ 是连通的，因此 $B_H(\varphi(P^-)\ M + A)$ 包含一条 $\mathrm{R}(\nabla_0)$–$\mathrm{R}(\nabla_1)$ 路径 P；我们选取这样一条最短路径，这意味着 P 是诱导的，并且至多只有它的前两个顶点向 ∇_0 发出边，至多只有它的最后两个顶点向 ∇_1 发出边。注意，根据引理 2.3（应用于 $G_{k'}$、$_{d'}$、H 和 $X := \mathrm{Adh}(\Delta) \cup \mathrm{TT}(\mathrm{S}\Delta(\Delta))$），$P$ 必须与 $\mathrm{R}(\nabla)$ 相交；这里我们利用了 P^- 与 $X \setminus \mathrm{R}(\Delta)$ 的距离至少为 h'，因此 $P \subseteq B_H(\varphi(P^-)\ M + A)$ 与 $B_H(\varphi(X)\ r) \setminus \mathrm{R}(\nabla)$ 不相交，因为 $h' \geq M(M + A + r + 1) + A$。此外，由于根据 (1) 和 (2)，$(\mathrm{R}(\Delta_0), \mathrm{R}(\Delta_1)) \geq \min\{2d', 2(h - h')\} \geq 2M(r + A + 3)$，我们推得 P 的长度至少为 6。

令 $q := \lceil M\lceil M\rceil(4r+2A+5) + 2r + A\rceil$ 和 $B := B_H(\mathrm{R}(\nabla)\ q)$。粗略地说，相对于 M，q 很大；但 K, D 是在 q 之后选取的，而且它们甚至比 q 更大（更精确地说，K，$D \geq 2\ell \geq 2q$）。我们声称，在 $\nabla - B$ 中存在两条 $\mathrm{TT}(\nabla_0)$–$\mathrm{SS}(\nabla_1)$ 路径 P_0, P_1，满足 $d_H(P_0, P_1) \geq 2$，使得 P_0 从 $\mathrm{T}_1(\nabla_0)$ 出发并终止于 $\mathrm{S}_0(\nabla_1)$，而 P_1 从 $\mathrm{T}_0(\nabla_0)$ 出发并终止于 $\mathrm{S}_1(\nabla_1)$（见图 9）。我们将此断言的证明推迟到后面；首先说明给定 P_0, P_1 后如何完成证明。

为此，我们沿用上述思路，将 M_0, M_1 合并成 $G_{k,d}$ 的一个模型：每个 P_i 都将 M_0 的一个分支集连接到 M_1 的“右侧”分支集（如图 9 所示），并且

根据引理 2.3，且由于我们对 q 的选择，除此之外它与 ∇_0, ∇_1 不相交，并且 R(∇_0), R(∇_1) $\subseteq B$。对于每个 $i \in \{1,2\}$，我们构造一个新的分支集，将这两个分支集与 P_i 合并，即对应于 T_1(SΔ($G_{k,d}$)) 的分支集定义为 $U^0_{\mathrm{T}_1(G_{k-1,d})} \cup V(P_0) \cup U^1_{\mathrm{S}_0(G_{k-1,d})}$，对应于 T_0(SΔ($G_{k,d}$)) 的分支集也类似定义。

我们构造一个对应于根 R($G_{k,\ d}$) 的新分支集，它由 R(∇) 以及 P 的顶点（不包括其开头和结尾的两个顶点）组成；并令对应于 $G_{k,\ d}$ 中连接 R($G_{k,\ d}$) 与其在 B($G_{k,\ d}$) 中的子节点的两条边的分支路径，分别由 P 中包含其开头或结尾两个顶点的长度为 2 的子路径组成。这些分支集和分支路径，连同 M_0，M_1 中我们未作修改的分支集，共同构成 $G_{k,\ d}$ 在 ∇ 中的模型。根据构造，该模型在 ∇ 中是自然的。此外，它是 2-胖的，因为 $d_H(\nabla_0,\ \nabla_1) \geq 2$，且根据对 P，P_0，P_1 的选择，其中我们使用了这样的事实：按照自然的次模型的定义之后的备注，M_0，M_1 的每条分支路径到 P 的距离至少为 2。

因此，只需找到上述路径 P_0, P_1。我们首先证明，在 $\nabla - B$ 中存在两条 SS(∇)–TT(∇) 路径 Q_0, Q_1，它们彼此的距离至少为 $2r+1$（在 $\nabla - B$ 中）。否则，根据门格尔定理的两条路径粗略版本——定理 2.4——存在一个顶点 $w \in \nabla$，使得 $B_\nabla(w, 544 \cdot (2r+1))$ 与 $\nabla - B$ 中所有 SS(∇)–TT(∇) 路径都相交。令 $v \in V(\Delta)$ 满足 $d_H(w, f(v)) \leq A$。根据引理 2.1 和 2.3，$B_G(v, M \cdot 544 \cdot (2r+1) + 3AM + R)$ 在 $\Delta - B_G$(R(Δ) $Mq + 3AM + R$) 中分隔 SS(Δ) 和 TT(Δ)，其中 $R := r(M, 3AM)$ 由引理 2.3 给出。由于根据 (1) 和 (2) 有 $h \geq 2\ell + 3$ 和 $d \geq 2\ell + 1$，且因为 $\ell = M \cdot \max\{q, 544 \cdot (2r+1)\} + 3AM + R$，这与引理 3.1 矛盾。因此，在 $\nabla - B$ 中存在两条 SS(∇)–TT(∇) 路径 Q_0，Q_1，它们彼此的距离至少为 $2r+1$（在 $\nabla - B$ 中）。根据 [14],，它们在 ∇ 中的距离要小得多，但我们只声称该距离至少为 2；这是因为 $\nabla - B$ 是 ∇ 的诱导子图。

由引理 2.3，且根据我们对 q 的选择，R(∇_0)、R(∇_1) $\subseteq B$，路径 Q_0、Q_1 均与 TT(∇_0) 和 SS(∇_1) 相交。由于 ∇_0、∇_1 的粘合球是 ∇ 中半径为 r 的球，因此它们在 $\nabla - B$ 中的直径至多为 $2r$，因为它们避开了 B；又由于 Q_0、Q_1 在 $\nabla - B$ 中彼此距离至少为 $2r+1$，所以 Q_0、Q_1 中恰有一个与 $\mathrm{T}_1(\nabla_0)$ 相交，另一个与 $\mathrm{T}_0(\nabla_0)$ 相交；对于 $\mathrm{S}_0(\nabla_1)$、$\mathrm{S}_1(\nabla_1)$，情况类似。令 P_0、P_1 分别为 Q_0、Q_1 的 TT(∇_0)–SS(∇_1) 子路径。注意，由引理 2.3，P_0、P_1 与 ∇_0、∇_1 仅在端点处相交。

不失一般性，假设 P_0 从 $\mathrm{T}_1(\nabla_0)$ 开始，且 P_1 从 $\mathrm{T}_0(\nabla_0)$ 开始。如果 P_0 在 $\mathrm{S}_0(\nabla_1)$ 结束（因此 P_1 在 $\mathrm{S}_1(\nabla_1)$ 结束），那么 P_0，P_1 正如所需。在另一种情况下，如果 P_0，P_1 的端点顺序错误，我们将在 ∇ 的某个合适的子三角区内对其进行局部重新布线，以交换它们的端点（见图 10）。

令 Δ' 为 Δ 中紧邻 Δ_1 的一个子三角区，即 TT(Δ') =SS(Δ_1)，并选择它使得 R(Δ') 与 R(Δ_1) 之间的距离恰为 $\lceil M(2r+A+1) \rceil$。这是可行的，因为在 Δ 中，存在一个紧邻 Δ_1 的三角形，其根之间的整数距离可以是从 2 到 $h+1$ 的任意值。因此，按照我们对 q 的选择，d_G(R(Δ), R(Δ')) $= (h - h') + \lceil M(2r + A + 1) \rceil - 2 \leq M^{-1}(q - 2r - A)$，从而 d_H(R(∇), R(∇')) $\leq q - 2r$，这意味着 R(∇') $\subseteq B$。由此以及引理 2.3 可知，P_0 和 P_1 都与 SS(∇') 相交。由于 ∇' 的粘合球在 $\nabla - B$ 中的直径至多为 $2r$，且 P_0、P_1 在 $\nabla - B$ 中彼此距离至少为 $2r+1$，因此 P_0、P_1 中恰有一个与 $\mathrm{S}_0(\nabla')$ 相交，另一个与 $\mathrm{S}_1(\nabla')$ 相交。不失一般性，我们可以假设，若某个 P_i 与 $\mathrm{S}_0(\nabla')$ 或 $\mathrm{S}_1(\nabla')$ 相交，那么它们的交集是一条路径；否则，我们便可以在该球内缩短 P_i。事实上，P_1、P_2 在 $\Delta - B$ 中仍会彼此距离至少为 $2r+1$，因为 $d_H(\mathrm{S}_0(\nabla'), \mathrm{S}_1(\nabla')) \geq M^{-1} \cdot d_G(\mathrm{S}_0(\Delta), \mathrm{S}_1(\Delta)) - A - 2r$，且 $d_G(\mathrm{S}_0(\Delta), \mathrm{S}_1(\Delta)) \geq d' \geq M(4r + A + 1)$。同理，我们也可以假设，若 P_0 或 P_1 与 TT(SΔ(∇')) 相交，那么这个交集也是一条路径。在

特别是， P_0 （以及 P_1）与 ∇' （以及与 $\mathrm{S}\Delta(\nabla')$ 和 $\mathrm{T}\Delta(\nabla')$）的交集是一条路径。

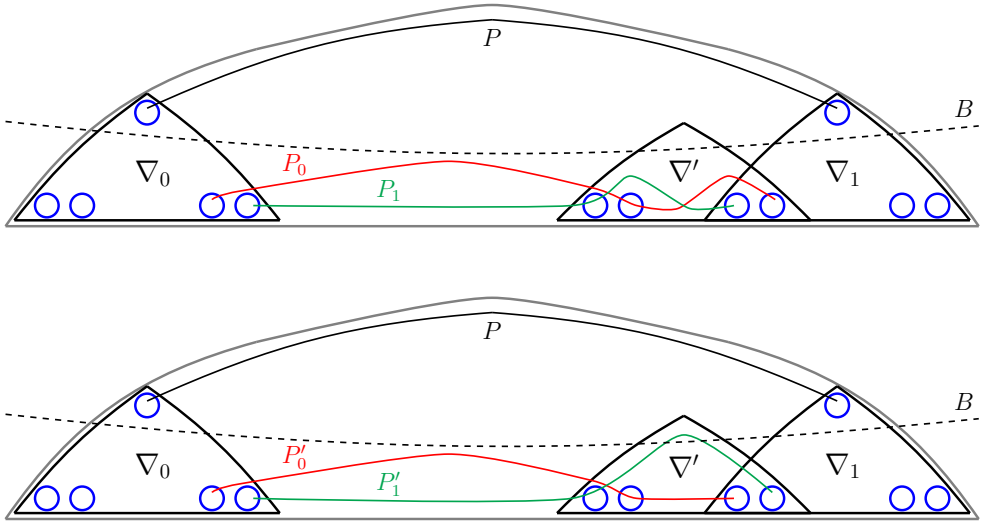


图 10：路径 P_0， P_1（上方）与重布线路径 P'_0， P'_1（下方）的示意图。在此情形下，我们有 $\nabla'' = \nabla'$ 和 $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}'$。

现在，我们在 ∇' 内重布 P_0, P_1 ，以交换它们在 $\mathrm{SS}(\nabla_1)$ 中的端点（见图 10）。为此，注意，将第 3.1 节中（嵌套和交叉）联结的定义推广到 H 中的三角形是显然可行的（因为这些定义只涉及路径如何与某个 NSS 图 G' 的 $\mathrm{SS}(G') \cup \mathrm{TT}(G')$ 相交）。特别地，由于 P_0, P_1 与 ∇'、$\mathrm{S}\Delta(\nabla')$ 和 $\mathrm{T}\Delta(\nabla')$ 的交集都是路径，根据引理3.3 (i)，它们在 ∇' 上诱导出一个联结 $\mathcal{P}'$ ，并在其两个子三角形 $\mathrm{S}\Delta(\nabla')$ 和 $\mathrm{T}\Delta(\nabla')$ 上分别诱导出两个联结 $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ （同样，引理3.3及其证明可直接推广到 H ，因为我们修改了路径P_0, P_1 ，使它们与 $\mathrm{TT}(\mathrm{S}\Delta(\nabla'))$ 的交集为路径）。根据引理3.3 (ii)，其中至少一个是交叉联结。我们可以利用观察3.2，在同一个（子）三角形内用一个嵌套联结替换这样的交叉联结（见图 10）。更确切地说，设 $\mathcal{P}'' \in \{\mathcal{P}', \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1\}$ 为交叉联结，并设 $\nabla'' \in \{\nabla', \mathrm{S}\Delta(\nabla'), \mathrm{T}\Delta(\nabla')\}$ 为包含 $\mathcal{P}''$ 的三角形。我们对 ∇'' 在 G 中的“原像” Δ'' 应用观察3.2（即满足 $\nabla'' = H[B_H(\varphi(\Delta'')\ r)]$ 的 G 的三角形 Δ''），从而在 Δ'' 中得到一个嵌套联结 Q''_0, Q''_1。根据引理 2.2， $B_H(\varphi(Q''_0)\ M + A)$ 和 $B_H(\varphi(Q''_1)\ M + A)$ 连通，因此我们可以分别在这些集合内选取 $\mathrm{SS}(\nabla'')$–$\mathrm{TT}(\nabla'')$ 路径 Z_0, Z_1。由于根据 (2)， $d_G(Q''_0, Q''_1) \geq d'$ 且 $d' \geq M(2M + 3A + 2)$，可知 Z_0, Z_1 彼此之间的距离至少为 2。

回想一下， P_0 和 P_1 与 $\mathrm{SS}(\nabla'') \cup \mathrm{TT}(\nabla'')$ 的交集是路径，并且 P_0、P_1 避开 $\mathrm{R}(\nabla') \subseteq B$。因此，通过用 Z_0替换 $\mathcal{P}''$，并适当调整 $\mathrm{SS}(\nabla'') \cup \mathrm{TT}(\nabla'')$ 中每个粘合球内的路径，我们将 P_0、P_1 修改为一对路径 P'_0、P'_1，使得 P'_0 终止于 $\mathrm{S}_0(\nabla_1) \subseteq U^1_{\mathrm{S}_0}(G_k, d)$，而 P'_1 终止于 $\mathrm{S}_1(\nabla_1) \subseteq U^1_{\mathrm{S}_1}(G_k, d)$。此外， P'_0 和 P'_1 彼此之间的距离（在 H中）至少为 2。事实上，由于选择方式，P_0 和 P_1 在 $H - B$ 中的距离很大，因此它们在 H中的距离至少为 2。此外，根据上一段，Z_0 和 Z_1 彼此之间的距离（在 H中）至少为 2。最后，对于 $i \in \{0, 1\}$， $P'_i - Z_i$ 和 Z_{1-i}彼此之间的距离（在 H中）至少为 2，因为 Z_{1-i} 包含于 $B_H(\varphi(\Delta'')\ M + A)$中，且$P'_i - Z_i$避开 ∇''，因而尤其避开 $B_H(\varphi(\Delta'')\ M + A + 1) \subseteq \nabla''$，但其粘合球 $\mathrm{SS}(\nabla'') \cup \mathrm{TT}(\nabla'')$ 除外（这里隐含地用到了 P_0、P_1 避开 $\mathrm{R}(\nabla')$ 这一点）。

这就完成了我们对G_{k}的（形式化）构造，d。注意，P_0'、P_1'仅在它们的端点处相交，而 P 则完全不相交，这是因为我们对 ∇'的选择。此外，请注意，Z_0、Z_1，因此P_0'、P_1'可能与 B 相交（事实上，其中一个会在 R(∇'') 中与 B 相交），但它们不会与 R(∇) 或 B_H(P、*2)* 相交（参见图 *10*）。特别地，我们在中的模型d 是 2-胖的。 □

6 NSS 图的非胖子式

注意，$K_{2,\ 2,\ 2}$ 与八面体的 1-骨架同构。因此，为简化记法，以下将此图记为 O。等价地，O 是从 K_6 中删除一个完美匹配后得到的图。后一个定义很容易推出

命题 6.1. 对于 O 中的任意四个不同顶点 v_0、v_1、u_0、u_1，在 O中，$\{v_0, v_1\}$ 与 $\{u_0, u_1\}$ 之间存在一个完美匹配。 □

注意，O 是平面图，且具有顶点传递性。

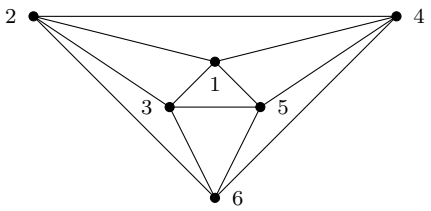


图 11：图 O。

本节证明定理 1.5，并为方便起见在此重述：

定理 6.2。 O 不是任意 $k, d \in$ 自然数集 所对应的 $G_{k,d}$ 的9-胖子式。

结合 NSS 图粗自相似的结果（定理 1.3），以及 NSS 图包含 O 作为（2-胖）子式这一事实，可知 O 是猜想 1.1 的一个反例（详见第 4 节）。

我们认为，NSS 图实际上甚至排除了 O 作为 3-胖子式，但证明起来更加困难。因此，我们决定优先考虑证明的简洁性，而非肥度。

为了证明 O 不是任何 NSS 图的 9-胖子式，我们将采用以下树分解：

构造 6.3。设 $G := G_{k,d}$，其中 $k, d \in$ 属于自然数集。令 $B'(G) \subseteq B(G)$ 为 G 的连通分支；移除所有“虚线”路径的内部（即 G 中那些在构造 $G_{k,d}$ 时通过细分一条边得到的路径）后，该连通分支包含 r。对于 $B'(G)$ 的每个节点 x，我们定义

$$V_x := \mathrm{Adh}(\Delta_x) \cup \mathbf{TT}(\mathrm{S}\Delta(\Delta_x)) \cup \mathbf{RRR}(\Delta_x)$$

其中 Δ_x 是以 x为根的 G 的（唯一）三角形，但如果 x 是 $B'(G)$的一片叶（此时 S$\Delta(\Delta_x)$不存在），则令 V_x :=Adh(Δ_x)。参见图 12。

令 T 为从 $B'(G)$ 得到的树：对于 G 中的每条虚线路径 P，向 $B'(G)$ 添加一个顶点 v_P，并将其连接到 $B'(G)$ 中一个袋 V_x 包含 P 的端点的节点 x。（注意，对于每条这样的 P，都存在这样的节点。）我们设 V_{v_P}:= $V(P)$。

容易验证，$(T,\ \mathcal{V})$ 是 G 的树分解。对于 $e=xy\in B'(G)$ 中满足 y 是 $B'(G)$ 中 x 的后继的边，其每个粘合集 V_e 都具有如下形式

$$V_e=\{y\}\cup\mathbf{SS}(\Delta_y)\cup\mathbf{TT}(\Delta_y)=\mathrm{Adh}(\Delta_y),$$

以及 G 它所诱导的分离是（V（Δ_y） V（Ext（Δ_y））。[8, 引理 12.3。1] 任意图 xy 的 T 任意树分解（$T,\ \mathcal{V}$）中的每条边 G都会诱导出a separation $\{A_e^x,A_e^y\}$ of $G$where $A_e^z:=\bigcup_{t\in V(T_z)}V_t$, for $z\in\{x,y\}$，是所有袋 V_t 的并集；这些袋对应于节点 t，而节点属于 $T-xy$ 中唯一包含 z 的连通分支 T_z。）

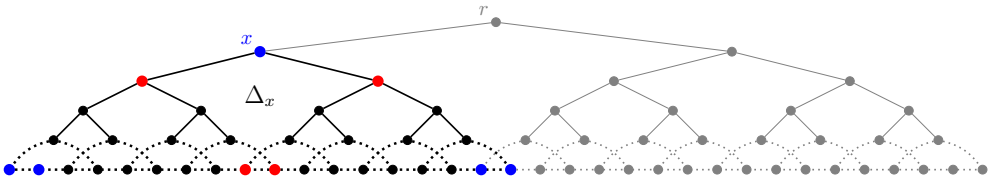


图 12：边 $e=rx$ 的粘合集 V_e 以蓝色标出。红色顶点是包含在袋 V_x 中但不包含在 V_r 中的顶点。黑色三角形是 Δ_x。

在开始证明定理 6.2 之前，我们先举一个简单的例子，说明 K_8 不是任何 NSS 图的 3-胖子式，以展示构造 6.3 中树分解的用途：

命题 6.4。 K_7 不是 $G_{k,\ d}$ 的3-胖子式，对任意 $k,d\in$ 自然数集均成立。

证明。 反设 $G:=G_{k,\ d}$ 包含 K_7的一个 3-胖模型 $(\mathcal{U},\ \mathcal{E})$。令 $(T,\ \mathcal{V})$ 为构造 6.3 中的 G 的树分解。由于 $(T,\ \mathcal{V})$ 的粘合度为 5，而 K_7 是 6-连通的，对于每条边 $e=xy\in E(T)$, $\{A_e^x,A_e^y\}$ 中恰有一侧与 $\mathcal{U}$中的所有分支集相交。因此，将每条边 T 定向至与所有分支集相交的一侧，便定义了 $E(T)$的一个定向。由于 T 有限，存在一个汇 $x\in V(T)$，即 T中的节点 x，其所有关联边都朝向 x。于是，袋 V_x 与 $\mathcal{U}$中的每个分支集相交。

显然， x 不可能是 $T-B'(G)$（形如 v_P）的节点，因为它们的袋仅为一条路径，且对应于其唯一关联边的粘合集大小为 2。因此， $V_x=\mathrm{Adh}(\Delta_x)\cup\mathrm{TT}(\mathrm{S}\Delta(\Delta_x))\cup\mathrm{RRR}(\Delta_x)$。由于 RRR($\Delta_x$)中的顶点两两距离至多为 2，而 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 是 3-胖的，因此至多有一个、也就恰好有一个分支集 U_i与 RRR(Δ_x)相交，设该分支集为 $i=1$。此外，V_x–RRR(Δ_x)中的另外六个顶点分别包含在不同的分支集 U_i 中，且满足 $i\neq 1$。由于 K_7 是完全的，且 K_7 的模型 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 是 3-胖的，因此 G 中存在两条 SS(Δ_x)–TT(S$\Delta(\Delta_x)$) 路径 Q_1,Q_2，它们避开 RTT(Δ_x)，且彼此距离至少为 3。但这样一来， Q_1,Q_2必须包含在 S$\Delta(\Delta_x)$中，因为它们避开 RTT(Δ_x)。由引理 3.4，其中一者必须与 R(S$\Delta(\Delta_x)$) $\in$ RTT(Δ_x)相交，矛盾。 □

我们指出，命题 6.4 与定理 4.1 和 5.1 一起蕴含 K_7 是不可压缩的。

我们希望模仿命题 6.4 的证明来证明定理 6.2，但现在无法再保证我们的树分解中存在一个袋，它与假设模型 of O 的每个分支集都相交。不过，我们仍然可以采用相同的策略，找到一个与假设模型 of O 的每个分支集都相交的袋，或者找到一个与四个分支集相交的粘合，使得另外两个分支集位于对应分离的不同侧。无论哪种情况，实质上都只会有一种难以处理的构型，我们将在下文的构型 6.5 中定义这一构型。

在接下来的几节中，我们经常会用到这样一个事实：如果 W 是 O 中的一条路径，并且给定图 G 中 O 的一个模型 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$，那么我们可以在 X 中找到一条 A–B 路径，使得：$=\bigcup_{w\in V}(w)$ $G[U_w]\cup\bigcup_{e\in E}(w)$ E_w 对所有 $A,B\subseteq V(X)$ 均成立。因此，我们会说 W 诱导出一条 A–B 路径。为此，请注意，若假设 $\mathcal{U}$ 中的分支集都是树，那么接下来由 W 诱导出的 A–B 路径通常是唯一的。（事实上，在下文中它总是唯一的，但这对我们的论证并不重要。）

若 $(\mathcal{U},\ \mathcal{E})$ 在 G 中是 3-胖的，且 $P,\ P'$ 分别是 G 中由 O 内不相交路径 $W,\ W'$ 诱导的路径，那么 $P,\ P'$ 彼此之间的距离至少为 3。

6.1 O 的无胖模型不能良好地与粘合 $\mathrm{Adh}(P)$ 相交

为方便起见，我们按如下方式为 O 的顶点编号。令 $V(O)\ =\ [6]$ 和$E(O):=\{ij\in[6]^2:\ i\neq j$和 $i+j\neq 7\}$。因此，O 包含 $[6]^2$ 中除 16，25 和 34 以外的所有边。

构型 6.5。设 Δ 是 $G:=G_{k,\ d}$ 的一个三角形，其中 $k,d\in$ 自然数集，并且假设 G 包含 O 的一个 3- 胖模型 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$。进一步假设存在互不相同的 $i,j,h\in\{3,4,5\}$，使得（图 *13* ）

(i) $\mathrm{R}(\Delta)\in U_2$、$\mathrm{S}_0(\Delta)\in U_i$、$\mathrm{S}_1(\Delta)\in U_j$,

(ii) $\mathbf{TT}(\Delta)\cap U_h\neq\emptyset$,

(iii) $U_1\cap V(\Delta)\neq\emptyset$ 以及 $U_6\cap V(\mathrm{Ext}(\Delta))\neq\emptyset$，并且

(iv) $(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 的每条分支路径都包含在 Δ 或 $\mathrm{Ext}(\Delta)$ 中。

我们指出，尽管构型 6.5 相当特殊，但考虑到 O 的顶点传递性以及 NSS 图的对称性，它实际上是我们必须考虑的唯一棘手情形。

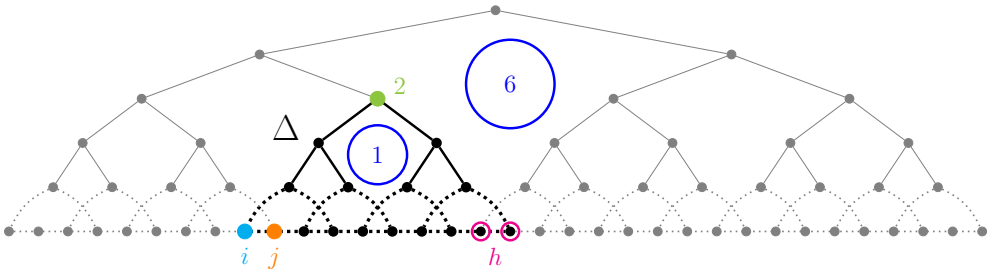


图13：构型 6.5 示意图。分支集 U_2 包含 $R(\Delta)$，分支集 U_i、U_j 分别包含 $\mathrm{S}_0(\Delta)$ 和 $\mathrm{S}_1(\Delta)$，而 U_h 至少包含 $\mathrm{T}_0(\Delta)$ 和 $\mathrm{T}_1(\Delta)$ 中的一个。此外，U_1 与 $V(\Delta)$ 相交，U_6 与 $\mathrm{Ext}(\Delta)$ 相交。注意，U_1、U_6 中有一个可以同时与 $V(\Delta)$ 和 $\mathrm{Ext}(\Delta)$ 相交。

本节的主要工作集中于以下内容：

引理 6.6。构型 *6.5* 不可能出现。

我们通过附加的辅助引理来准备其证明，这些辅助引理排除了我们当前设定的某些细化。

引理 6.7。设 G、Δ 和 $(\mathcal{U}$、$\mathcal{E})$ 如构型 *6.5* 中所述。那么 U_i、U_j 均不与$\mathbf{TT}(\Delta)$相交。

证明。反设存在某个 $n \in \{i, j\}$，使得集合 U_n 与 **TT**(Δ) 相交，并令 m 为 $\{i, j\}$ 的另一个元素。则 U_1、U_6 均不与 Adh(Δ) 相交，由 (iii) 可知 $U_1 \subseteq V(\Delta) \setminus \mathrm{Adh}(\Delta)$，且 $U_6 \subseteq V(\mathrm{Ext}(\Delta)) \setminus \mathrm{Adh}(\Delta)$。

由于 U_n 与 SS(Δ) 和 TT(Δ) 均相交，却避开了 R(Δ) $\in U_2$，因此存在一条 SS(Δ)–TT(Δ) 路径 P，位于 $G[U_n]$ 中，且包含于 Δ 或 Ext(Δ) 中。令 $H \in \{\Delta, \mathrm{Ext}(\Delta)\}$ 满足 $P \subseteq H$，并令 $\ell \in \{1, 6\}$ 满足 $U_\ell \subseteq V(H) \setminus \mathrm{Adh}(\Delta)$。那么，由 $m\ell k$ 诱导的 SS(Δ)–TT(Δ) 路径 Q 避开了 R(Δ) $\in U_2$（因为 $2 \notin \{m, l, k\}$），因此 Q 也包含于 H 中，因为 $U_\ell \subseteq V(H) \setminus \mathrm{Adh}(\Delta)$。由于 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是 3-胖，P、Q 彼此之间以及它们与 R(Δ) $\in U_2$之间的距离至少为 3。但这与引理 3.4 或 3.6 矛盾。 □

引理 6.8. 设 G, Δ 和 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 如构型 *6.5* 中所述，并假设 $U_1 \subseteq V(\Delta) \setminus \mathrm{Adh}(\Delta)$。那么，凡是存在的 $E_{ih}, E_{2j}, E_{i6}, E_{j6}$ 都包含于 $\mathrm{Ext}(\Delta)$ 中；若 E_{2i}, E_{jh} 均存在，则它们至多有一个包含于 Δ 中。

证明。**E_{ih}, E_{i6}:** 反设 E_{i6}（若 E_{ih} 存在，则为 E_{ih}）不包含于 Ext(Δ) 中，由 (iv) 可知它包含于 Δ 中。特别地，若 $E_{i6} \subseteq \Delta$，则由 (iii) 可知 U_6 与 TT(Δ) 相交。由 (iv) 以及假设 $U_1 \subseteq V(\Delta) \setminus \mathrm{Adh}(\Delta)$，还可得 $E_{12} \cup E_{1j} \subseteq \Delta$。这意味着由 $j12$ 诱导的 S_1(Δ)–RTT(Δ) 路径 P 包含于 Δ 中。类似地，由引理 6.7，且因为 E_{i6}（或 E_{ih}）包含于 Δ 和 $2 \notin \{i, h, 6\}$ 中，由 $i6$（或 ih）诱导的 S_0(Δ)–TT(Δ) 路径 Q 包含于 Δ 中。由于 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是 3-胖的，且 R(Δ) $\in U_2$，路径 Q 到 P 以及到 R(Δ) $\in U_2$ 的距离至少为 3。但这与推论 3.5 矛盾。

E_{2j}, E_{j6}: 假设 $E_{j6} \subseteq \Delta$（或 $E_{2j} \subseteq \Delta$），以导出矛盾。此情形与前一种情形类似，区别在于我们分别用 E_{j6}、E_{2j}、E_{16} 替换 E_{i6}、E_{ih}、E_{12}，并用 $j6$（或 $j2$）替换 $j12$，再用 $i1h$ 替换 $i6$（或 ih）。

E_{2i}、E_{jh}: 假设 E_{2i}、$E_{jh} \subseteq \Delta$，以导出矛盾。由引理 6.7，$i2$ 和 jh 诱导的 SS(Δ)–RTT(Δ) 路径 P、Q 包含在 Δ 中。由于 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是 3-胖，P、Q 之间的距离至少为 3。由推论 3.5 可知，P 是 $B(G)$ 中唯一的 S_0(Δ)–R(Δ) 路径。由于 $U_1 \subseteq V(\Delta) \setminus \mathrm{Adh}(\Delta)$，由 $i12$ 诱导的 S_0(Δ)–RTT(Δ) 路径 P' 也包含在 Δ 中。此外，由于 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是 3-胖，P' 与 Q 的距离至少为 3。再次对 P'、Q 应用推论 3.5，可得 P' 也是 $B(G)$ 中唯一的 S_0(Δ)–R(Δ) 路径。但这意味着 $P = P'$，从而导出矛盾，因为 P' 与 U_1 相交，而 P 不与其相交，因此 $P \neq P'$。 □

下一个引理与前一个类似，区别在于我们假设的是 $U_6 \subseteq V(G - \Delta)$，而不是$U_1 \subseteq V(\Delta) \setminus \mathrm{Adh}(\Delta)$:

引理 6.9. 设 G, Δ 和 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 如构型 *6.5* 中所述，并假设 $U_6 \subseteq V(G - \Delta)$。那么，凡是存在的 $E_{2i}, E_{jh}, E_{1i}, E_{1j}$ 都包含在 Δ 中；若 E_{2j}, E_{ih} 均存在，则其中至多一个包含在 $\mathrm{Ext}(\Delta)$ 中。

证明。证明与引理 6.8 的证明类似，只需交换 1 和 6、i 和 j，以及 Δ 和 Ext(Δ)。在前两种情况下，我们会得到两条路径 $P, Q \subseteq$ Ext(Δ)，它们连接 SS(Δ) 与 RTT(Δ)，且 Q 从 S_1(Δ) 出发（而非从 S_0(Δ) 出发），并且到 P 和 R(Δ) 的距离至少为 3，这与引理 3.6 矛盾（而非推论 3.5）。在第三种情况下，我们会得到两条 S_1(Δ)–RTT(Δ) 路径 P, P'，它们位于 $B(G)$ 中，且 P 由 $j2$ 诱导，P' 由 $j62$ 诱导。由于 P' 与 U_6 相交而 P 不相交，但两者都包含在 $B(G)$ 中，因此 P' 包含 P 的全部顶点，唯独不包括其最后一个顶点。这意味着 R(Δ) 在$B(G)$ 中的前驱包含在 U_j 中，因此 U_j 到 R(Δ) $\in U_2$ 的距离为 1，矛盾。 □

现在我们可以证明构型 6.5 不会出现。

引理 *6.6* 的证明。根据 (iii)，要么 $U_1 \subseteq V(\Delta) \setminus \mathrm{Adh}(\Delta)$ 且 $U_6 \subseteq V(G-\Delta)$，要么 $U_6 \cap \mathrm{Adh}(\Delta) \neq \emptyset$，要么 $U_1 \cap \mathrm{Adh}(\Delta) \neq \emptyset$。我们分别考虑这些情形：

情形 1： $U_1 \subseteq V(\Delta) \setminus A(\Delta)$ 并且 $U_6 \subseteq V(G-\Delta)$。

根据命题 6.1，在 O 与 $\{2,h\}$ 之间存在一个完美匹配，即 $2i, hj \in E(O)$ 或 $2j, hi \in E(O)$。若 $2i, hj \in E(O)$，则根据引理 6.9，E_{2i}, E_{hj} 包含于 Δ中，这与引理 6.8 矛盾。若 $2j, hi \in E(O)$，则根据引理 6.8，E_{2j}, E_{hi} 包含于 Ext(Δ) 中，这与引理 6.9 矛盾。

情形 2： $U_6 \cap \mathrm{Adh}(\Delta) \neq \emptyset$

由 (i)，我们有 $U_6 \cap \mathbf{TT}(\Delta) \neq \emptyset$。此外，根据 (iii)，$U_1 \subseteq V(\Delta) \setminus V(\Delta)$，并且根据 (iv)，每条分支路径都包含于 Δ 或 Ext(Δ) 中。

我们首先证明 E_{ih}，$E_{jh} \subseteq \Delta$（如果它们存在）。为此，反设 E_{nh} 存在，其中 $\{n,m\} = \{i,j\}$，且包含于 Ext(Δ) 中。那么，由 nh 诱导的 **SS**(Δ)–**TT**(Δ) 路径 P 包含于 Ext(Δ) 中（因为它避开了 R(Δ) $\in U_2$）。由于 $m \neq 1$ 且 U_6 与 **TT**(Δ) 相交，O 中的路径 $m6$ 也诱导出一条 **SS**(Δ)–**TT**(Δ) 路径 Q，它包含于 Ext(Δ) 中，因为根据引理 6.8，$E_{m6} \subseteq$Ext(Δ)（并且它避开了 R(Δ) $\in U_2$）。由于 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是 3-胖，P，Q 彼此之间以及与 R(Δ) $\in U_2$ 的距离至少为 3。但这与引理 3.6 矛盾。

由引理 6.8 可知 $ih \notin E(O)$。因此，$\{i,h\} = \{3,4\}$；由 O 的对称性，我们不妨假设 $i = 3$ 和 $h = 4$。特别地，$j = 5$。由于 $jh = 45 \in E(O)$，由前面的论证可得 $E_{jh} \subseteq \Delta$。但此时，E_{2i}（它作为$2i = 23 \in E(O)$而存在）包含于 Ext(Δ) 中，这是引理 6.8 的结论。因此，S_0(Δ)–R(Δ) 路径 P由 $i2$诱导，且包含于 Ext(Δ) 中。由引理 6.8，S_1(Δ)–**TT**(Δ) 路径 Q也由 $j6$ 诱导，且包含于 Ext(Δ) 中（因为它避开了 S_0(Δ) $\in U_i$ 和 R(Δ) $\in U_2$）。由于P, Q 彼此至少相距 3，因为 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是 3-胖，这与引理 3.6 矛盾。

情形 3： $U_1 \cap \mathrm{Adh}(\Delta) \neq \emptyset$

证明与情形 2 的证明类似，只需交换 1 和 6，以及 Δ 和 Ext(Δ)，并交换引理 3.6 和推论 3.5。特别地，我们得到 $E_{ih}, E_{jh} \subseteq$ Ext(Δ)。由引理 6.9 可得 $jh \notin E(O)$，从而 $\{j,h\} = \{3,4\}$；根据对称性，不妨设 $j = 3$ 和 $h = 4$。特别地，$i = 5$。由此可得 $ih = 45$, $2j = 23 \in E(O)$，由引理 6.9 可知这蕴含 $E_{2j} \subseteq \Delta$。因此，由 $j2$ 诱导的 S_1(Δ)–R(Δ) 路径 P 和由 $i1$ 诱导的 S_0(Δ)–**TT**(Δ) 路径 Q 均包含在 Δ 中。由于 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是 3- 胖，因此 P, Q 彼此之间的距离至少为 3，这与推论 3.5 矛盾。

□

6.2 O 子式与树分解

本节证明两个推论，它们由构型 6.5 不可能出现这一事实推得。这两个推论描述了图 O 的胖模型如何与构造 6.3 中的树分解 $(T, \mathcal{V})$ 相互作用。为此，回顾一下，$(T, \mathcal{V})$ 的“相关”粘合集具有 Adh(Δ) 的形式，而“相关”袋具有V_Δ = Adh(Δ) ∪ **TT**(SΔ(Δ)) ∪ **RRR**(Δ) 的形式，其中 Δ 是 NSS 图的某个三角形。

推论 6.10. 设 Δ 是某个 *NSS* 图 G 的一个三角形，并假设 G 包含图 O 的一个 3-胖模型 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$。那么，$\mathrm{Adh}(\Delta)$ 至多与 $\mathcal{U}$ 中的四个分支集相交。

证明。反设 Adh(Δ) 与 $\mathcal{U}$ 中的五个分支集相交。由于|Adh(Δ)| = 5 和 $|O| = 6$，$\mathcal{U}$ 中恰有一个分支集不与 Adh(Δ) 相交，其余所有分支集都恰好与 Adh(Δ) 相交一次。由 O 的顶点传递性，不妨设 $U_1 \subseteq V$(Δ)\Adh(Δ) 或 $U_6 \subseteq V$(Ext(Δ))\Adh(Δ)。我们分两种情况讨论：

情形 1： $\mathrm{R}(\Delta) \notin U_1 \cup U_6$。

由 O 的顶点传递性，不妨设 R(Δ) $\in U_2$。此外，由于 G 的对称性，不妨设 U_1 和 U_6 不与**SS**(Δ)相交。因此，(i) 和 (ii) 成立。此外，(iii) 成立，这是因为 U_1、U_6 中的一个与 Adh(Δ) 相交，而另一个分别包含于 Δ 或 Ext(Δ) 中。最后，(iv) 成立，因为 Adh(Δ) 的全部都包含在分支集内，因此没有分支路径能够穿过它。于是我们处于构型 6.5 中，这与引理 6.6 矛盾。

情形 2： $\mathrm{R}(\Delta) \in U_1 \cup U_6$。

设 $\{m,n\} = \{1,6\}$，使得 R(Δ) $\in U_n$。设 i、j、k、ℓ，使得 SS(Δ) $\subseteq U_i \cup U_j$ 且 TT(Δ) $\subseteq U_k \cup U_\ell$。根据命题 6.1，不失一般性，$ik$、$j\ell \in E(O)$。于是 ik、$j\ell$ 诱导出两条 SS(Δ)–TT(Δ) 路径 Q_{ik}、$Q_{j\ell}$，它们彼此之间以及与 R(Δ) $\in U_1 \cup U_6$ 的距离至少为 3，因为 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 是 3- 胖。根据引理 3.4 和 3.6，其中一条包含于 Δ，另一条包含于 Ext(Δ)。不失一般性，设 Q_{ik} 包含于子图 $H \in \{\Delta,\text{Ext}(\Delta)\}$ 中，该子图也包含 U_m。由于$n \notin \{j,\ell\}$，$jm\ell$ 也诱导出一条 SS(Δ)–TT(Δ) 路径 $Q'_{j\ell}$，它位于 H 中，与 Q_{ik} 以及 R(Δ) $\in U_n$ 的距离至少为 3。但这与引理 3.4 或 3.6 矛盾。 □

推论 6.11. 设 $(T,\mathcal{V})$ 是由构造 *6.3* 为某个 *NSS* 图 G构造的树分解。假设 G 包含一个 O的 5-胖模型$(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 。那么 T的任何袋 V_x 都不会与 $\mathcal{U}$中的六个分支集全部相交。

证明。 反设某个袋 V_x 与六个分支集全部相交。显然，x 不可能是 T 的一片叶（形如 v_y），因为它们的袋只构成一条路径，且与其唯一关联边 yv_y 对应的粘合集大小为 2。令Δ := Δ_x。根据 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 是否与**RRR**(Δ)相交，我们分两种情形讨论：

情形 1：对于某个 $i \in [6]$，**RRR**$(\Delta) \cap U_i \neq \emptyset$。 $i \in [6]$。

我们将 $\mathcal{U}$中的 U_i 替换为 $B_G(U_i, 2)$，并相应缩短每条路径 E_{ij}，也就是说，我们将 $\mathcal{E}$ 中的每条分支路径 E_{ij} 替换为 E_{ij}的某个 $B_G(U_i, 2)$–U_j 子路径。于是，RRR(Δ)是新分支集 U_i 的子集；又由于 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 是 5- 胖的，新模型 O 是 3- 胖的。由于每个 U_j 仍与 V_x 相交，因此 V_x = Adh(Δ) ∪TT(SΔ(Δ)) 与新模型 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 的所有分支集相交；特别地，$V_x \setminus$ RRR(Δ) 与除 U_i 以外的所有分支集相交。回想一下，$V_x \setminus$ RRR(Δ) = SS(Δ) ∪TT(SΔ(Δ)) ∪TT(Δ)。结合前面的论证可知，这三个集合中有两个包含于$\bigcup_{j\in[6]\setminus\{i\}} U_i$中。由于任取这样的组合，其形式必为 Adh(Δ) \ R(Δ)、Adh(SΔ(Δ)) \R(SΔ(Δ)) 或 Adh(TΔ(Δ)) \ R(TΔ(Δ))，且 RRR(Δ) $\subseteq U_i$，因此某个粘合集 Adh(Δ)、Adh(SΔ(Δ)) 或 Adh(TΔ(Δ)) 与 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 的五个分支集相交，这与推论 6.10 矛盾。

情形 2： 没有分支集与**RRR**（Δ）相交。

那么，V_Δ –RRR(Δ)中的全部六个顶点都分别包含在$\mathcal{U}$中互不相同的分支集中；令 SS(Δ)$\subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2}$、TT(SΔ(Δ))$\subseteq U_{i_3} \cup U_{i_4}$ 以及 TT(Δ)$\subseteq U_{i_5} \cup U_{i_6}$。根据命题 6.1，不失一般性，$i_1i_3, i_2i_4, i_3i_5, i_4i_6 \in E(O)$。令 P,Q 分别为由 i_1i_3, i_2i_4诱导的 SS(Δ)–TT(SΔ(Δ))路径。由于 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 是 3-胖的，P,Q 彼此之间的距离至少为 3。因此，P,Q 中要么有一个与 R(Δ)相交，要么它们包含在 SΔ(Δ)中；在后一种情况下，根据引理 3.4，P,Q 中有一个包含 R(SΔ(Δ))。于是，P,Q中有一个（不妨设为 P）与 R(Δ) ∪R(SΔ(Δ)) ⊆RRR(Δ)相交。用同样的论证，由 i_3i_5, i_4i_6诱导的 SS(TΔ(Δ))–TT(Δ)路径中有一条（记为P'）与 R(Δ) ∪R(TΔ(Δ)) ⊆RRR(Δ)相交。由于 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$ 是 3-胖的，RRR(Δ)与 P 和 P' 的交集，要么包含在 $\mathcal{E}$中的同一条分支路径内，要么 $\mathcal{U}$ 中的某个分支集与 RRR(Δ)相交（交于 P 或 P'中）。前一种情况不可能，因为 P,P' 没有与同一条分支路径相交；后一种情况则与情形 2 的假设矛盾。

□

6.3 平衡模型

为了证明定理 6.2，我们还需要最后一个引理。该引理给定 O 的一个足够胖的模型后，找出一个不那么胖、但在某个三角形 Δ的粘合 Adh(Δ)附近“表现得更好”的模型，也就是说，它在某种程度上（但尚未完全）接近配置 6.5 中的假设。

引理 6.12. 设 $K \geq 3$，并假设对于某个 $k, d \in$ 自然数集，*NSS* 图 $G := G_{k,d}$包含一个 $3K$-胖模型 O。那么在 G 中存在一个 K-胖模型$(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ O，以及 G 的一个三角形 Δ，使得

(1) $U_1 \subseteq V(\Delta) \setminus \mathrm{Adh}(\Delta)$ 和 $U_6 \subseteq V(G - \Delta)$,

(2) $\mathrm{Adh}(\Delta) \cap U_i \neq \emptyset$ 对所有 $i \in \{2,3,4,5\}$ 均成立，并且

(3) $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 的每条分支路径都包含于 Δ 或 $\mathrm{Ext}(\Delta)$ 中。

证明。假设 G 包含 O 的一个 $3K$-胖模型 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$。令 $(T, \mathcal{V})$ 为构造 6.3 给出的 G 的树分解。注意，对于 $B'(G) \subseteq T$ 的每条边 $e = xy$，存在 G 的一个三角形 Δ，使得 $V_e =$ Adh(Δ) 且 (A_e^x, A_e^y) =($V(\Delta)$ V(Ext(Δ)))。我们分两种情况讨论。

情形 1： </style}对于 的每条边，都存在一侧，使得每个 都与$(A_e^z, K-1)$相交。

由于 $|V_e| \leq 5$，但对所有 $i \neq k \in [6]$, $|O| = 6$ 和 $d_G(U_i, U_k) > 2K - 2$，所以对 T 的每条边 $e = xy$，都存在唯一一侧 A_e^z，使得对所有 $i \in [6]$, $B_G(A_e^z, K-1) \cap U_i \neq \emptyset$。因此，将每条边 e 定向至其端点 z，便定义了 $E(T)$ 的一个定向。由于 T 是有限的，存在一个汇 $t \in V(T)$，即 T 的一个节点 t，其所有关联边都定向至 t。于是，对所有 $i \in [6]$, $B_G(V_t, K-1) \cap U_i \neq \emptyset$。我们对所有 $i \in [6]$ 设定 $U_i' := B_G(U_i, K-1)$，并将分支路径 E_{ij} 缩短为 U_i'–U_j' 路径 $E_{ij}' \subseteq E_{ij}$。于是 $(\mathcal{U}', \mathcal{E}')$ 是 O 的一个 $(K+2)$-胖模型，因为 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是 $3K$-胖的，且其所有分支集都与 V_t 相交。但由于 $K \geq 3$，这与推论 6.11 矛盾。

情形 2： </style有一条边 以及两个顶点 ,(O)，使得 $U_k \subseteq A_e^x \setminus B_G(A_e^y, K-1)$ 且 $U_\ell \subseteq A_e^y \setminus B_G(A_e^x, K-1)$。

情形 2a： $k\ell \notin E(O)$。

由 O 的顶点传递性可知，我们不妨设 $k = 1$ 和 $\ell = 6$，于是 (1) 成立。U_1和 U_6之间有四条路径 $Q_j \subseteq E_{1j} \cup G[U_j] \cup E_{j6}$，对于 $j \in \{2,3,4,5\}$。对于所有 $j \in \{2,3,4,5\}$，我们按如下方式定义 U_j'。若 $U_j \cap V_e \neq \emptyset$，则令 $U_j' := U_j$。若$U_j \subseteq A_e^y \setminus A_e^x$，则 E_{1j}与 V_e 相交。由于 $d_G(U_1, V_e) \geq K$，E_{1j} 中连接 U_j 和 V_e 且与 V_e 内部不相交的（唯一）子路径 Q_j' 与U_1的距离至少为 K。令 $U_j' := U_j \cup V(Q_j')$，并令 E_{1j} 中剩余的子路径 E_{1j}' 从 U_1 出发，终止于Q_j'中的第一个顶点。否则，若 $U_j \subseteq A_e^x \setminus A_e^y$，则类似地定义 U_j'和E_{j6}'。于是 $(\mathcal{U}', \mathcal{E}')$（其中 $U_1' = U_1, U_6' := U_6$，且对所有尚未定义的 E_{ij}，$E_{ij}' := E_{ij}$）仍然是 K-fat，并且每个满足 $j \in \{2,3,4,5\}$ 的分支集 U_j'都与 V_e相交，因此 (2) 成立。

现在，我们进一步修改模型（$\mathcal{U}'$，$\mathcal{E}'$），使其满足 (3)，同时保持 (1) 和 (2)。为此，假设某个 E_{ij}' 既不包含于 Δ，也不包含于 Ext(Δ)；否则我们就已经完成了。特别地，E_{ij}' 与 Adh(Δ) 相交于一个内部顶点 v。注意，由于$|\mathrm{Adh}(\Delta)| = 5$，且根据 (2)，$\mathcal{U}'$ 中的四个分支集与 Adh(Δ) 相交，因此分支路径 E_{ij}' 和顶点 v 都是唯一的。

由于 $16 \notin E(O)$，不失一般性，我们可以假设 $i \neq \{1,6\}$。令 Q 为 E_{ij}' 中连接 U_i' 与 $v \in$Adh(Δ) 的（唯一）子路径。若 $d_G(Q, U_j') \geq K$，特别是当 $j = \{1,6\}$ 时，则我们可以在模型 $(\mathcal{U}', \mathcal{E}')$ 中用 $U_i' \cup V(Q)$ 替换 U_i'，并用 E_{ij}' 中从 U_j' 开始、以一个

以 Q 的端点为终点的路径替换 。根据上述相同的论证，这仍然是 O 的一个 K-胖模型，此外还满足 (3)。

否则，令 u 为 Q 上距离 U'_j 为 $< K$ 的第一个顶点。令 Q' 为 Q 上位于 U'_i 和 u 之间的子路径，并令 Q'' 为一条长度为 $K-1$ 的 u–U'_j 路径。随后我们将 E'_{ij} 更新为 E''_{ij}: $= Q' \cup Q''$。由于 $i,\ j \notin \{1,6\}$，我们有 $E'_{ij} = E_{ij}$，因此 E'_{ij} 到除 $U'_i,\ U'_j$ 之外的所有分支集和路径的距离均为 $\geq 3K-2$。因此，由于 Q' 的长度至多为 $K-1$，路径 E''_{ij} 到所有其他分支集和路径的距离至少为 $2K-1$ 。于是，新的 O 模型（使用 E''_{ij}）也是 K-胖的，而且还满足 (3)。

情形 2b： 对于情形 *2* 中的每一对 $k', \ell' \in V(O)$ ，我们都有 $k'\ell' \in E(O)$。

特别地， $k\ell \in E(O)$，因此根据 O的顶点传递性，不妨设$k = 2$ 和 $\ell = 3$。现在我们如下修改（$\mathcal{U},\ \mathcal{E}$）。首先，将每个与 $B_G(V_e,\ K-1)$相交的 U_i 替换为其周围的球 $B_G(U_i,\ K-1)$（同时保持所有其他U_j'不变）。随后，我们将每条分支路径 E_{ij} 替换为一条合适的子路径。由此得到 O的一个新模型（$\mathcal{U}',\ \mathcal{E}'$）。由于（$\mathcal{U},\ \mathcal{E}$）是 3-胖的，该模型是 K-胖的。

其次，对于如情形 2中的每一对 $k'\ell'$ ，根据情形 2b中的假设，我们有$k'\ell' \in E(O)$，因此$E'_{k'\ell'}$ 与 V_e相交。现在按照情形 2a中的类似方式修改$E'_{k'\ell'}$和 $U'_{k'},\ U'_{\ell'}$。为此，令 $\{i,j\} = k'\ell'$满足 $i \neq 2,\ 3$，除非 $k'\ell' = k\ell$。由于根据关于 $k'\ell'$的假设，$d_G(U_j,\ V_e) \geq K$ ，因此 E'_{ij} 中连接U'_i 和 V_e且与 V_e内部不相交的（唯一）子路径 Q_i 与 U'_j之间的距离至少为 K。我们令U''_i:= $U'_i \cup V(Q_i)$，并令 E''_{ij}为 E'_{ij}的剩余子路径，该子路径从 Q_i的最后一个顶点开始，并在 U'_j处结束。由此得到 O的一个新模型（$\mathcal{U}'',\ \mathcal{E}''$）（其中所有其他分支集/路径均保持不变），该模型仍然是 K-胖的。

根据构造， U''_2和 U''_3中有一个与 V_e相交（按照构造的第二步，因为 23 是一条边，符合情形 2）。此外，由于 O 的每个其他顶点都向 2、3 中至少一个发送一条边，因此对于 $i \in \{1,4,5,6\}$，每个分支集 U''_i也与 V_e相交。事实上，如果 U_i 到 V_e的距离至多为 $K-1$ ，那么由于构造的第一步， U''_i与 V_e 相交。否则， U_i包含在 $\{A^x_e, A^y_e\}$的一侧，且不含 V_e周围的（$K-1$）-球；于是根据情形 2b 的假设， i 必须向 $\{k,\ell\}$ 中的顶点 j发送一条边，该顶点的分支集 U_j包含在 $\{A^x_e, A^y_e\}$的另一侧。因此，由于构造的第二步， U''_i与 V_e 相交。于是，($\mathcal{U}''$、$\mathcal{E}''$) 的五个分支集与 V_e相交。由于($\mathcal{U}''$、$\mathcal{E}''$)是 K-胖的，这与推论 6.10 矛盾。

□

6.4 完成定理 6.2 的证明

现在我们已经收集到足够的要素来完成证明:

定理 *6.2* 的证明。 反设 $G := G_{k,d}$ 对某个 $k,d \in$ 自然数集，包含一个 O 的 9-胖模型 $(\mathcal{U},\mathcal{E})$。由引理 6.12， G 包含一个 O 的 3-胖模型 $(\mathcal{U}',\mathcal{E}')$，以及一个三角形 Δ ，使得 (1) 至 (3) 成立。我们分两种情形讨论。

情形 1： $\mathcal{U}'$ 中的某个分支集包含$\mathrm{R}(\Delta)$。

由 O 的顶点传递性，我们不妨设 R(Δ) $\in U'_2$。此外，由于 G 的对称性，我们不妨设 U'_3, U'_4, U'_5 中有两个与 SS(Δ) 相交。但这就得到构型 6.5，与引理 6.6 矛盾。

情形 2： $\mathcal{U}'$ 中没有分支集包含$\mathrm{R}(\Delta)$。

令 U_i, U_j, U_k, U_ℓ 满足 $\{i,j,k,\ell\} = \{2,3,4,5\}$ ，使得 $\mathrm{S}_0(\Delta), \mathrm{S}_1(\Delta) \in U_i \cup U_j$ 且 $\mathrm{T}_1(\Delta), \mathrm{T}_0(\Delta) \in U_k \cup U_\ell$。由命题 6.1，不失一般性， $ik, j\ell \in E(O)$。由于 $(\mathcal{U}', \mathcal{E}')$ 是 3-胖的，SS(Δ)–TT(Δ) 路径 $Q_{ik}, Q_{j\ell}$ 由 $ik, j\ell$ 诱导，且彼此距离至少为 3。此外， $Q_{ik}, Q_{j\ell}$ 各自都包含在 Δ 或 Ext(Δ) 中，因为它们穿过分离 $\{\Delta,\mathrm{Ext}(\Delta)\}$ 的唯一方式是经过 R(Δ)，但这受到 (3) 和情形 2 的假设的阻止。

先假设 $Q_{ik}, Q_{j\ell}$ 包含在同一个子图 $H \in \{\Delta, \mathrm{Ext}(\Delta)\}$ 中。那么由引理 3.4 或 3.6，其中一个（设为 Q_{ik}）是 $B(G) \cap H$ 中唯一的 SS(Δ)–TT(Δ) 路径。根据 (1)，由 $i1k$（若 $H = \Delta$）或由 $i6k$（若 $H = \mathrm{Ext}(\Delta)$）诱导的 SS(Δ)–TT(Δ) 路径 Q'_{ik} 也包含在 H 中。由于 $(\mathcal{U}', \mathcal{E}')$ 是 3- 胖的，Q'_{ik} 到 $Q_{j\ell}$ 的距离也至少为 3。但引理 3.4 或 3.6 推出 $Q_{ik} = Q'_{ik}$，这就产生矛盾。特别地，我们可以假设 $Q_{ik} \subseteq \Delta$，且 $Q_{j\ell} \subseteq \mathrm{Ext}(\Delta)$。根据 (1)，由 $j1\ell$ 诱导的 SS(Δ)–TT(Δ) 路径 $Q'_{j\ell}$ 包含在 Δ 中，而由 $i6k$ 诱导的 SS(Δ)–TT(Δ) 路径 Q'_{ik} 包含在 Ext(Δ) 中。根据引理 3.4 和 3.6，并且由于 $(\mathcal{U}', \mathcal{E}')$ 是 3-胖的，$Q_{ik}, Q_{j\ell}$（若 $S_0(\Delta) \in U_i$）或者 $Q'_{ik}, Q'_{j\ell}$（若 $S_1(\Delta) \in U_i$）要么都与 R(Δ) 的距离至多为 1。但这与 $(\mathcal{U}', \mathcal{E}')$ 是 3-胖的相矛盾。

□

7 悬挂保持不可压缩性

给定一个图 G，我们将它的悬挂 $S(G)$ 定义为添加一个顶点 s_G，并用边将 s_G 与每个 $v \in V(G)$ 相连。

引理 7.1。设 G 是一个图，且 $v \in V(S(G))$。那么 G 是 $S(G) - v$ 的子图。

证明。我们指定一个双射 $b\colon V(G) \to V(S(G)) \setminus \{v\}$，它保持边。如果 v 是悬挂顶点 s_G，则取 b 为恒等映射。否则，对每个 $u \neq v \in V(G)$，令 $b(v) := s_G$，并令 $b(u) = u$。

□

定理 7.2。设 H 是一个最小度为 $\delta(H) \geq 3$ 的图（可能是无限图或不连通图）。若 H 不可压缩，则 $S(H)$ 不可压缩。

证明。设 X 是一个图，证明了 H 不可压缩；也就是说，$H \not\preceq_\infty X$，但对于每个与 X 拟等距的图 X'，都有 $H \preceq X'$。

对于每个 $n \in$ 自然数集，我们通过向 X_n 中添加一个新的顶点 a_n，并用一条路径将 x 中的每个顶点 X 连接到 a_n P_x，路径长度为 n，使这些路径仅在 a_n 处相交，从而得到一个图 X.

令 $Y := \bigcup_{n \in \text{自然数集}} X_n$。我们声称，$Y$ 证明了 $S(H)$ 是不可压缩的，也就是说，它满足以下两个断言：

$$S(H) \not\preceq_\infty Y. \tag{3}$$

and

$$S(H) \preceq Y' \text{ holds for every graph } Y' \text{ quasi-isometric to } Y \tag{4}$$

为证明 (3)，假设 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 是 Y 中 $S(H)$ 的一个 K-厚次模型，其中 $K \in \in$ 自然数集。由于 $S(H)$ 连通，$(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 位于 Y 的某个连通分支 X_n 中。注意，在构造 Y 时，没有任何分支集 $U_v \in \mathcal{U}$ 能包含在某条 X–a_n 路径的内部，因为根据我们对 H 的假设，$d(v) \geq 3$，因此 $\mathcal{U}$ 中的每个分支集都包含 a_n 或 X 的一个顶点。如果某个 U_v 包含 a_n，就将其连同与之关联的分支路径一起移除，从而得到 $Y - a_n$ 中 $S(H)$ 的一个模型 $(\mathcal{U}', \mathcal{E}')$。类似地，如果某条分支路径包含 a_n，那么我们可以令 v 为 $S(H)$ 中对应边的一个端点，再次得到 $Y - a_n$ 中 $S(H)$ 的一个模型 $(\mathcal{U}', \mathcal{E}')$。注意，现在我们可以从 $\mathcal{U}'$ 的分支集中移除 $Y - X$ 的所有顶点，而不破坏其连通性，也不影响其作为 $S(H) - v$ 的模型这一性质。由此得到 $X \subseteq X_n$ 中 $S(H)$ 的一个模型 $(\mathcal{U}'', \mathcal{E}'')$。此外，$(\mathcal{U}'', \mathcal{E}'')$ 在 X 中仍是 K-厚的，因为 X 是 X_n 的子图，并且 $(\mathcal{U}'', \mathcal{E}'')$ 的每个分支集 / 路径都包含于 $(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ 中。由此可知，$S(H) - v$ 是 X 的一个 K- 厚次 minor。根据引理 7.1，H 也是 X 的一个 K- 厚次 minor。由于根据假设 $H \not\preceq_\infty X$，我们可以推知，对每个 $K \in \in$ 自然数集，这一结论不可能成立，从而证明了 (3)。

为证明 (4)，令 $\varphi\colon V(Y) \to V(Y')$ 是一个 (M, A)-拟等距，其中 $M \geq 1$ 和 $A \geq 0$。我们取一个相对于 M, A 足够大的 $n \in \in$自然数集；其具体大小将在下文说明。令 ι 表示从 X 到 X_n 的恒等映射。注意，ι 是一个 n- 局部等距，即对于每个满足 $d_X(x, y) \leq n$ 的 $x, y \in X$，它都满足 $d_X(x, y) = d_{X_n}(x, y)$（图 14 左）。令$\varphi' := \varphi \circ \iota$ 和 $X' := Y'[\varphi'(X)]$。

注意，对于每个 $xy \in E(X_n)$，都有 $d_Y(\varphi(x)\ \varphi(y)) \leq M + A =: C$。因此，我们可以为每个 $xy \in E(X)$ 添加一条长度至多为 C 的 $\varphi'(x)$–$\varphi'(y)$ 路径到 X' 中，从而得到 Y' 的一个子图 $X'' \supseteq X'$，使得对于每个 $xy \in E(X)$，都有 $d_{X''}(\varphi'(x)\ \varphi'(y)) \leq C$。注意，在下文中，我们可以选取足够大的 n，使得 $\varphi(a_n) \notin X''$；此外，当 X 不连通时，X'' 也不连通。我们断言

$$\varphi' \text{ is a quasi-isometry from } (X, d_X) \text{ to } (X'', d_{X''}). \tag{5}$$

拟满射性质 (Q2) 显然。为验证 (Q1)，一个方向上有

$$d_{X''}(\varphi'(x), \varphi'(y)) \leq C \cdot d_X(x, y)$$

根据 X'' 的构造，对每个 x，都有 $y \in V(X)$。对于另一个方向，设 $x' :=\varphi'(x)\ y' := \varphi'(y)$，并令 $P = (x' =)z_0 \dots z_k (= y')$ 是 X'' 中一条长度为 $d_{X''}(x', y')$ 的 x'–y' 路径。根据 X'' 的构造，对于 P 的每个顶点 z_i，我们可以在 X' 中选取一个顶点 z_i'，使得 $d_{Y'}(z_i, z_i') \leq d_{X''}(z_i, z_i') \leq C$，由此可以选取 $z_0' = x'$ 和 $z_k' = y'$。特别地，由于 $z_i' \in V(X')$，存在某个 $v_i \in V(X)$，使得 $\varphi(v_i) = z_i'$（其中令 $v_0 := x$ 且 $v_k := y$）。于是，根据三角不等式，对于每个 $i < k$，都有 $d_{Y'}(z_i', z_{i+1}') \leq C' := 2C + 1$；由此可推出 $d_Y(v_i, v_{i+1}) \leq M(C' + A) =: C''$。选取 $n > C''$，并回想 ι 是一个 n-局部等距映射，再应用 k 次三角不等式，我们得到

$$d_X(x, y) = d_X(v_0, v_k) \leq C''k = C'' d_{X''}(x', y').$$

这就完成了对（5）的证明。

令 $a := \varphi(a_n)$，并令 W 为包含 a 的 $Y' \backslash X''$ 的连通分支；当 n 大于 $M(C+A)$ 时，该连通分支存在，因为此时 a_n 距离 X 太远，以至于 a 不可能包含于 X'' 中（因为 X'' 中的每个顶点到某个 X 的 φ'-像的距离至多为 C ($\lfloor C/2 \rfloor$)）。令 Z 为 X'' 中向 W 发出一条边的顶点集合。我们断言

$$d_{Y'}(v, Z) \leq M^2(2C + A) + A + 2C \text{ for every } v \in V(X''). \tag{6}$$

（只需 $d(v,\ Z)$ 有界即可。）我们先检验 $v = \varphi'(u)$ 对某个 $u \in V(X)$ 成立的情形。令 P 为 X_n 的构造中的一条 u–a_n 路径，其长度至少为 n。根据引理 2.2，$B_{Y'}(\varphi(V(P))\ C)$ 是连通的，因此在 Y' 中存在一条 P'，它是一条 v–a 路径，并且与 $\varphi(V(P))$ 的距离不超过 C。

设 q 是 W 中 P' 的第一个顶点，这样的顶点存在，因为 P' 以 $a \in W$ 结尾。由于 P' 以 X'' 开始，顶点 q 不是 P' 的第一个顶点。设 p 是 P' 的前一个顶点，因此它位于 X'' 中。事实上，边 pq 表明 p 位于 Z 中。

注意，$d_{Y'}(p,\ \varphi(P)) \leq C$，因为 $p \in V(P')$。因此，我们可以选取 $b \in V(P)$，使得

$$d_{Y'}(p, \varphi(b)) \leq C. \tag{7}$$

此外，$d_{Y'}(p,\ X') \leq C$，因为 $p \in X''$。结合这两个不等式，我们可推出 $d_{Y'}(\varphi(b)\ X') \leq 2C$。由于 $X' = \varphi'(X)$，且 $\varphi|_{X_n}$ 是一个 $(M,\ A)$-拟等距，因此 $d_{X_n}(b,\ X) \leq M(2C + A)$。

事实上，由此可得 $d_{X_n}(b,\ u) \leq M(2C + A)$：因为 $b \in P_u$，每条避开 u 的 b–X 路径X_n 都必须包含 a_n，以及某个 $x \in X_n$ 对应的一条完整路径 P_x。由于我们选择的 n 大于 $M(2C + 1)$，每条这样的路径长度至少为 $M(2C + 1)$，因此 $d_{X_n}(b,\ u) = d_{X_n}(b,\ X)$。

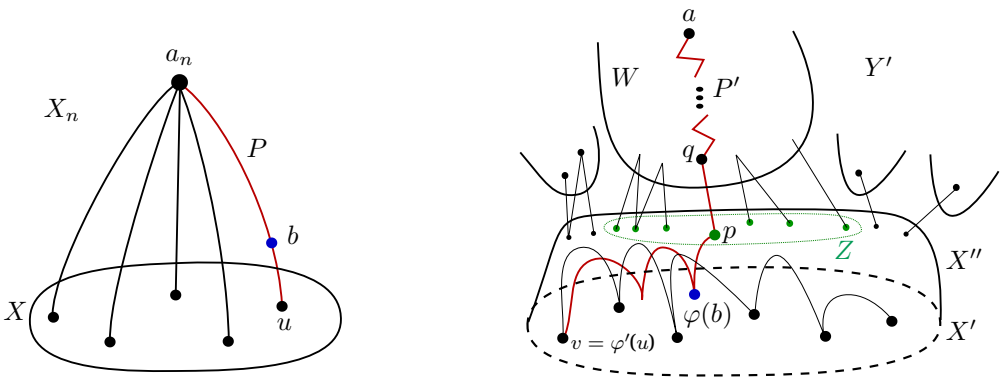


图14：图 X_n （左），以及在 (6) 的证明中它在 φ 下的像（右）。绿色顶点表示 Z，红色曲线表示 P'。

再次沿反方向应用拟等距界，我们进一步得到$d_{Y'}(\varphi(b)\ v = \varphi(u)) \le M^2(2C + A) + A$，将其与 (7) 结合可得 $d_{Y'}(p,\ v) \le M^2(2C + A) + A + C$。

对于一般情形 $v \in V(X'')$，回忆一下，根据 X'' 的定义，每个 $v \in V(X'')$ 到 X' 的距离不超过 C。因此，在上述界的右侧加上 C 即可得到 (6)。

由 (6) 可知，我们现在可以将 X'' 分解为一族直径有界的连通子图，使每个子图都包含 Z 中的一个元素；所用思路类似于 Voronoi 分解。为此，我们以 Z 为森林中各树的根集合，在 X'' 上构造一个广度优先生成森林 F。具体而言，我们递归地按以下方式构造 F。首先令 F_0 为顶点集为 Z 且没有边的图。构造好 F_i 后，对于每个满足 $d_{X''}(v, F_i) = 1$ 的 $v \in V(X'')$，从 v 向任意选取的 F_i 中某个顶点添加一条边，从而得到 F_{i+1}。注意，由 (6) 可知，这个过程在有界步数后终止，得到 X'' 的一个生成森林 F；其每个连通分支恰好包含 Z 中的一个顶点，并且在 X'' 中具有有界半径（其界为 $M'B + A' + C$，其中 B 是 (6) 中的界，而对于任意 $x, y \in X'$，取 $M', A' \in \in$自然数集，使得 $d_{X''}(x, y) \le M' \cdot d_{Y'}(x, y) + A'$，即可通过观察到 $X'' \subseteq B_{Y'}(X', C) = B_{Y'}(\varphi'(X)\ C)$，且 $d_{X''}(\varphi'(x)\ \varphi'(y)) \le C \cdot d_X(x, y) + C$，得出这一点，因为 φ 是一个 (C, C)-拟等距，而 $d_X(x, y) \le M \cdot d_{Y'}(\varphi(x)\ \varphi(y)) + A$）。

Let $\mathring{X}$ 是通过将 X'' 的每个连通分支收缩成一个点而得到的子式。由于每个被收缩的集合直径有界，因此 X 与X''拟等距，参见例如 [2, 引理 2.2]。

Thus $\mathring{X}$ 因此 (5) 证明了，H 是与 X 拟等距，取由此有得中的一个模型 $\mathcal{B}$，并通过解收缩 F 中与 $\mathcal{B}$内 $\mathring{X}$ 的顶点相对应的每个连通分支，将其扩展为 H 在 X'' 中的一个模型 $\mathcal{B}'$。我们还可以将 $\mathcal{B}'$ 扩展为 $S(H)$ 在 Y' 中的一个模型，将 W 用作新的分支集；注意，Z中的每个顶点，因此 $\mathcal{B}'$中的每个分支集，都有一条边连到 W。这就完成了 (4) 的证明。

□

结合定理 1.1，可轻易推出推论 1.6 的前半部分，即对每个 $t \ge 6$，K_t 都是不可压缩的。对定理 7.2 的证明稍作改动，即可处理后半部分：

推论 7.3。$K_{s,\ t}$ 对每个 s、$t \ge 4$都不可压缩。

证明。令 $X := G_\infty (= \bigcup_{n\in\text{自然数集}} G_{n,n})$ 表示上述无穷 NSS 图。回想一下，根据定理 4.2和定理6.2，$K_{4,t}, t \geq 4$ 是 X 的一个子式，但不是 9-胖子式，故由定理 5.1 可解决情形 $s = 4$。因此，剩下要证明的是，对于 $t' \geq s' \geq 1$，$K_{s'+4,t'+4}$ 是不可压缩的。

我们将基于 X 重复 Y 的构造，这一构造来自定理 7.2 n 的证明。更准确地说，设 Y_1 是按照定理 7.2 的证明中针对 $X = G_\infty$ 的方式构造的图 Y；给定 Y_i，对于 $1 < i < s'$，设 Y_{i+1} 是按照定理 7.2 的证明中针对 $X = Y_i$ 的方式构造的图 Y。由于 K_4，对于每个与 X 拟等距的图 X'，都有 $_{t'+4} \preceq X'$，因此将 (4) 应用 s' 次（先对 Y_1，然后对 Y_2，依此类推），可得：对于每个与 $Y_{s'}$ 拟等距的图 Y'，$S^{s'}(K_{4,t'+4}) \preceq Y'$ 成立，其中 $S^{s'}(K_{4,t'+4})$ 是 K_4 的 s' 重悬挂，即 $S^{s'}(K_{4,t'+4}) = S(S(\ldots S(K_{4,t'+4})))$，嵌套 s' 次。由于 $K_{s'+4,t'+4} \preceq S^{s'}(K_{4,t'+4})$，这表明对于每个与 $Y_{s'}$ 拟等距的图 $Y_{s'}$，都有 $K_{s'+4,t'+4} \preceq Y'$。

另一方面，与证明 (3) 类似，若$K_{s'+4,t'+4} \preceq_\infty Y_{s'}$ 成立，那么从 $Y_{s'}$ 中 $K_{s'+4,t'+4}$ 的一个 9-胖模型里移除使用了 s' 个“顶点”的分支集或分支路径后，我们就会得到 $Y_{s'}$ 中 $K_{4,t'+4-s'}$（的某个超图）的一个 9-胖模型；这不可能，因为 $t' + 4 - s' \geq 4$ 和 $K_{4,4}$ 不是 X 的 9-胖子式。 □

8 渐近 $K_{3,t}$ 与 K_5 子式

正如引言中提到的，我们知道 $K_{2,t}$ 是可压缩的，即满足猜想 1.1；但 $K_{4,t}$（其中 $t \geq 4$）是不可压缩的（定理 1.2）。本节旨在说明，若 K_5 或 $K_{3,t}$ 是不可压缩的，即不满足这一猜想（这是一个有趣的未决问题），那么就不能像我们处理 $K_{4,t}$ 那样，通过使用 NSS 图来证明这一点。下面的命题将命题 1.7 表述得更精确。

命题 8.1。对于每个 K、$t \in$ 自然数集，都存在 $k \in$ 自然数集，使得 $G_{k,K}$ 包含一个K-厚次 *minor* $K_{3,t}$。

我们指出，从证明中很容易看出，如果我们将 $K_{3,t}$ 这一侧的大小为 3 的部分补成完全图，命题 8.1 仍然成立（这一步在构造的第一步中就可以完成）。

证明。固定 $K \in$N，我们对 t 使用归纳法证明该命题。归纳假设通过对对应于 $K_{3,t}$ 的大小为 3 的划分侧的三个分支集 B_1，B_2，B_3 施加一些条件，强化了该命题，即

$$G_t := G_{k(K,t),K} \text{ contains a } K\text{-fat model of } K_{3,t} \text{ such that (Figure 15)} \tag{8}$$

(i) B_1 包含 $\mathsf{S}_0(G_t)$；

(ii) B_2 包含 $\mathsf{T}_1(G_t)$；并且

(iii) B_3 包含二叉树 $B(G_t)$ 中 $\mathsf{R}(G_t)$ 与 $\mathsf{T}_0(G_t)$ 之间的（唯一）路径。

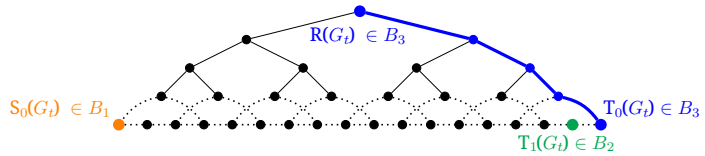


图 15：G_t 以及我们对K_3的 K-胖模型的一部分，$_t$ 这出现在命题 8.1 的归纳假设中

我们从 $t=0$ 开始归纳，此时我们的模型仅由三个分支集 B_1、B_2、B_3 构成。我们选择 $k=k(K、0)=1$（以及 $d=K$），并将 (i)–(iii) 中的“包含”替换为“由.....构成”，从而定义 B_i。

在归纳步骤中，假设我们已经找到如（8）中的 G_t，接下来按如下方式构造G_{t+1}。我们将高度 k 增加 $4K+1$，即令 $k(K,t+1):=k(K,t)+4K+1$。根据我们的递归构造，通过组合$G_{k(K,t+1)-1,K}$的两个副本 $\Delta_0:=\mathrm{S}\Delta(G_{t+1})$和 $\Delta_1:=\mathrm{T}\Delta(G_{t+1})$，得到 G_{t+1}。我们将 G_t 与 Δ_1 中高度为 $k(K,t)$的最左侧三角形 Δ_1' 识别，即将 $\mathrm{S}_0(G_t)$ 与 $\mathrm{S}_0(\Delta_1)$ 识别（图 16 中以灰色标示）。我们将通过扩展 Δ_1' 内部的$K_{3,t}$模型来构造$K_{3,t+1}$ 的模型；该模型由将后者与 G_t识别而得到，不同之处在于，我们将在 Δ_1'内部将$K_{3,t}$ 的模型沿垂直方向“翻转”，也就是说，将该模型与 G_t 的自同构复合，该自同构将 $\mathrm{S}_0(G_t)$ 与 $\mathrm{T}_0(G_t)$ 互换。翻转后，我们有 $\mathrm{T}_0(\Delta_1')\in B_1$、$\mathrm{S}_1(\Delta_1')\in B_2$以及 $\mathrm{S}_0(\Delta_1')\in B_3$（见图16）。

为了构造 $K_{3,t+1}$ 的模型，我们将保持与 t侧对应的分支集不变，在该侧再引入一个分支集 B^{t+1}，并扩展与大小为三的侧对应的分支集 B_1,B_2,B_3，再用一条分支路径将每个 B_i, $i\le 3$与 B^{t+1} 连接起来。图16对此作了总结。

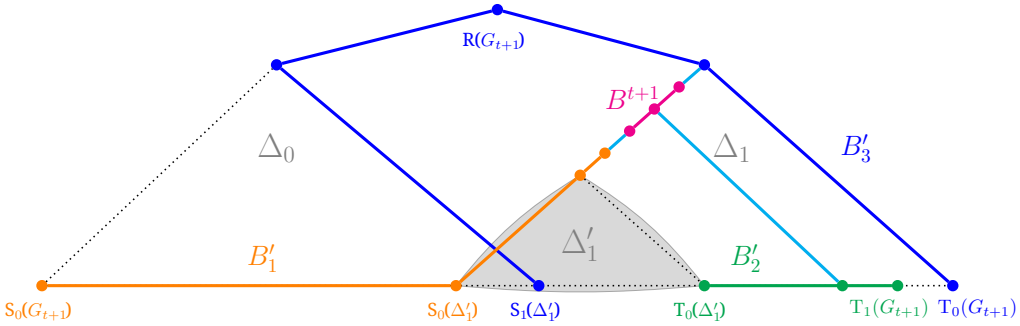


图 16：执行归纳步骤以构造 G_{t+1}。灰色区域表示 G_t 的翻转（并重新着色）副本，其中包含 $K_{3,t}$ 的一个模型。

令 N 为 Δ_1 中从 $\mathrm{R}(\Delta_1')$ 到 $\mathrm{R}(\Delta_1)$ 的树路径。注意，N 的长度为 $5K$，并令 m,n 分别为 N 的第 K 个和第 $3K$ 个顶点。

回想一下，翻转后，根据 (i)，$\mathrm{T}_0(\Delta_1')\in B_1$。我们用 G_{t+1} 的底部路径的子路径 P_1 将 B_1 扩展到 $\mathrm{T}_1(G_{t+1})$。由此得到的新分支集 $B_2':=B_1\cup P_1$ 将在我们对 $K_{3,t+1}$ 在 G_{t+1} 中的模型里充当 B_2；这满足 (ii)，因为 $\mathrm{T}_1(G_{t+1})\in B_2'$。回想一下，$\mathrm{S}_1(\Delta_1')\in B_2$。我们用 P 中从 $\mathrm{S}_1(\Delta_1')=\mathrm{T}_0(\Delta_0)$ 到 $\mathrm{R}(\Delta_0)$ 的树路径 P_2^1、从 $\mathrm{R}(\Delta_0)$ 到其父节点 $\mathrm{R}(G_{t+1})$ 的边 e，以及 Δ_0 中从 $\mathrm{R}(G_{t+1})$ 到 $\mathrm{T}_0(G_{t+1})$ 的树路径 P_2^2 来扩展 B_2。新的分支集 $B_3':=B_2\cup P_2^1\cup\{e\}\cup P_2^2$ 将在我们的新模型中充当 B_3；这满足 (iii)，因为 $P_2^2\subset B_3'$。回想一下，$\mathrm{S}_0(Q')\in B_3$。我们用 P 的底部路径中从 $\mathrm{S}_0(\Delta_1')$ 到 $\mathrm{S}_0(G_{t+1})$ 的子路径 P_3，以及 N 中从 $\mathrm{R}(\Delta_1')$ 到 m 的子路径 P_3' 来扩展 B_3。新的分支集$B_1':=P_3\cup B_3\cup P_3'$ 将在我们的新模型中充当 B_1；它满足 (i)。

为了完成我们的模型，还需要定义新的分支集 B^{t+1} 及其关联分支路径。我们令 B^{t+1} 为 N 的一条长度为 $2K$、以 n 为中间顶点的子路径。N 中从 m 到 B^t 以及从 B^t 到 $\mathrm{R}(\Delta_1)$的两条长度均为 K 的子路径，是所需分支路径中的两条：其中一条连接 B^{t+1} 和 $m\in B_1'$，另一条连接 B^{t+1} 和 $\mathrm{R}(G_t)\in B_3'$。最后一条分支路径是 Δ_1 中从n 到底部路径的向右树路径，其终点为 B_2'。

至此，我们完成了 $K_{3,t+1}$ 在 G_{t+1} 中的模型构造。根据构造，该模型满足我们的归纳假设。事实上，该模型各部分之间的所有距离都至少为 K。

□

8.1 渐近 K_5 子式

正如引言中所提到的，我们不知道 K_5 是否可压缩，即是否满足猜想 1.1。下面的命题与命题 8.1 类似，它表明，如果 K_5 不可压缩，那么同样无法通过使用 NSS 图来证明这一点。

命题 8.2. 对于每个 $K \in$自然数集，都存在某个 $k \in$自然数集，使得 $G_{k,\,K}$ 包含一个K_5 K-厚次子式。

证明（概要）。图 17 展示了 K_5 在 $G_{k,\,K}$ 中的一个 K-胖模型的分支集，其中 $k \in \mathbb{N}$ 足够大。五个分支集分别用不同颜色表示。注意，虚线表示长度至少为 K 的 $B(G_{k,\,K})$ 中的路径。K_5 的 K-胖模型的分支路径未明确画出，但可以选择使得每条分支路径都是图 17 中的一条虚线或虚线路径。 □

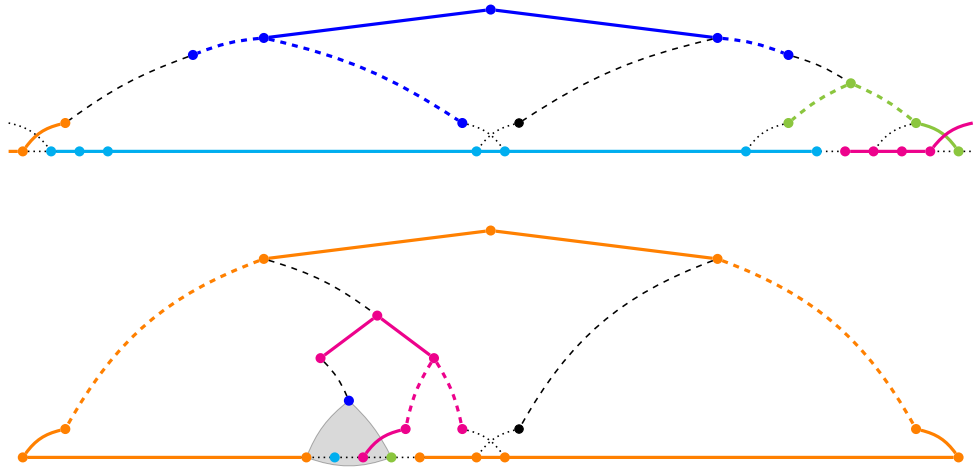


图 17：图中展示了某个足够大的 NSS 图 G 中 K_5 的一个 K-胖模型的分支集。虚线表示 $B(G)$ 中长度至少为 K 的路径。下图中的灰色区域表示上图中的图。

9 后续问题

设 J 是一个有限图或无限图，X 是一个无限图或有限（或无限）图族。若 X 是一个图族，我们称 J 是 X 的（K-厚次 minor），如果 J 是 X中某个元素的（K-厚次 minor）。

回顾一下，若对于每个$K \in$自然数集，J 都是 X 的 K-厚次 minor，则称 J 是 X的渐近子式。在这种情况下，我们记作 $J \preceq_\infty X$。若对于每个与 X拟等距的图（族）X'，$J \preceq X'$ 都成立，则称 J 是 X的粗子式，并记作$J \preceq_c X$。最后，若 $J \preceq_c X'$ 成立但 $J \not\preceq_\infty X$不成立，则称 J 是 X的细子式，并记作 $J \preceq_{\text{thin}} X$。因此

$$J \text{ is incompressible —i.e. a counterexample to Conjecture 1.1— if and only if there is } X \text{ such that } J \preceq_{\text{thin}} X. \tag{9}$$

如前所述，所有已知的不可压缩图都是借助 NSS 图证明为不可压缩的。下面的问题询问是否必然如此。回忆一下，G_∞ 表示无穷NSS图 $\bigcup_{n\in\text{自然数集}} G_{n,\,n}$。

问题 9.1。 设 $J \preceq_{\text{thin}} X$ 对于某些图 J、 X成立。是否必有 $G_\infty \preceq_{\text{c}} X$ 成立?

类似于问题 9.1，我们可以提出

问题 9.2。 假设 X 是粗糙门格尔猜想的一个反例。是否必然有$G_\infty \preceq_{\text{c}} X$ 成立?

回顾一下，粗糙门格尔猜想 [3, 11] 断言：对于每个 d， $k \in$ 自然数集，都存在某个 $r \in$ 自然数集，使得对于每个图 G 和两个集合 X， $Y \subseteq V(G)$，要么存在 k 条路径连接 X 和 Y，且它们之间的距离至少为 d；要么存在一个集合 $Z \subseteq V(G)$，其大小至多为 $k-1$，使得每条连接 X–Y的路径都与 G 相交 $B_G(Z, r)$。Nguyen、Scott 和 Seymour [14] 利用 G_∞证明了这一猜想不成立。因此，问题 9.2 所问的是，这个 G_∞ 是否基本上是唯一的反例。

参考文献

[1] S. Albrechtsen 和 J. Davies。关于猜想中的粗糙网格定理的反例。arXiv:2508.15342。[2] S. Albrechtsen、M. Distel 和 A. Georgakopoulos。排除 $K_{2,\ t}$ 作为厚次 minor。arXiv:2510.14644。[3] S. Albrechtsen、T. Huynh、R. W. Jacobs、P. Knappe 和 P. Wollan。关于两条诱导路径的门格尔型定理。*SIAM* 离散数学杂志，38(2):1438–1450，2024。[4] S. Albrechtsen、R. W. Jacobs、P. Knappe 和 P. Wollan。拟等距于无 K_4子式图的图的刻画。*Combinatorica*，45:61，2025。[5] M. Bonamy、N. Bousquet、L. Esperet、C. Groenland、C.-H. Liu、F. Pirot 和 A. Scott。次闭族的渐近维数与曲面的 Assouad-Nagata 维数。欧洲数学会杂志，26(10):3739–3791，2023。[6] V. Chepoi、F. F. Dragan、I. Newman、Y. Rabinovich 和 Y. Vax`es。将图度量嵌入树和外平面图的常数近似算法。离散与计算几何，47(1):187–214，2012。[7] J. Davies、R. Hickingbotham、F. Illingworth 和 R. McCarty。厚次 minor 无法被稀疏化（通过拟等距）。arXiv:2405.09383。[8] R. Diestel。图论 （第6版）。施普林格出版社，2024。[9]C. Drutu 和 M. Kapovich。几何群论，美国数学会讨论班出版物第63卷。美国数学会，2018。电子版见 http://people.maths.ox.ac.uk/drutu/tcc2/ChaptersBook.pdf。[10]K. Fujiwara 和 P. Papasoglu。仙人掌图的粗几何刻画。arXiv:2305.08512。[11] A. Georgakopoulos 和 P. Papasoglu。图 minor 与度量空间。*Combinatorica*，45:33，2025。[12] M. Gromov。无限群的渐近不变量。载于几何群论，第*2*卷（萨塞克斯，*1991*），伦敦数学会讲义系列第182号，第1–295页。剑桥大学出版社，1993。

[13] T. Nguyen、A. Scott 和 P. Seymour。渐近结构。II. 路径宽度与加性准等距。arXiv:2509.09031。[14] T. Nguyen、A. Scott 和 P. Seymour。粗糙门格尔猜想的一个反例。组合理论杂志（*B*辑），173:68–82，2025。