arXiv:2601.05795v1 [math.DG] 9 Jan 2026

# 定向圆视角下的阿波罗尼斯问题

Alexey Kurnosenko（alexeykurnosenko@gmail.com）

2026年1月12日

**摘要**

本文用定向圆和反演不变量来表述阿波罗尼斯问题的解：作一个与三个给定的圆（直线）相切的圆（直线）。这里的相切是指在公共点处切向量重合，与反切相区别。该问题有 0 个、1 个或 2 个解。依次反转每个给定的圆，可得到经典无向问题的其余解。

本文不使用通常的圆方程，而采用常曲率平面曲线的方程 $k$，当 $k=0$ 时，该曲线为直线。

本文还考虑了该问题的一种推广：所求圆与给定圆形成相同的角，该角可以是实角，也可以是虚角。

**关键词：** 阿波罗尼斯问题；反演不变量。

阿波罗尼斯问题是作圆的问题：作一个圆，使其与三个已知圆相切，这三个圆的半径为 $r_i$，圆心分别为点$(f_i,\ g_i)$：

$$(x-f_i)^2+(y-g_i)^2-r_i^2=0,\quad i=1,2,3$$

$[1,\mathrm{p.}\ 201]$, $[2,\mathrm{p.}\,101]$, [3]。解由关于 $r_0$、 $f_0$、 $g_0$的三个方程组成的方程组给出，它们分别是所求圆的半径和圆心：

$$\begin{cases}\ (f_0-f_i)^2+(g_0-g_i)^2-(r_0\pm r_i)^2=0,\quad i=1,2,3.\end{cases}\tag{1}$$

我们用定向圆来诠释这一解，将方程1中符号的选择视为曲率的符号（通常称为外切/内切）。这样，我们赋予这些圆一定的定向。相切是指公共点处切向量重合；反切则是指这些切向量方向相反。由此可得0个、1个或2个解。依次将三个圆中的每一个反向定向，即可得到经典无向问题的其余解。

图 1 展示了这种方法。在片段 0 中，三个给定的圆以其圆心和点 1、2、3 标出。箭头表示它们的定向。构造出与这三个圆相切的两个圆。在片段 1、2、3 中，其中一个给定的圆被反向。图中用虚线表示。由此得到其余 6 个解。

图 2 展示了给定的圆为直线时的构型。如果任意两个都不平行，则得到内切圆和三个旁切圆作为解。

在一些资料中，例如 $[1,\mathrm{p.}\,313]$,$[2,\ \mathrm{p.}\,149]$, ，阿波罗尼斯问题的一种推广被定义为：构造一个与三个给定的圆以相同角度 $\Psi_0$ 相交的圆。这里将该问题的进一步推广称为 阿波罗尼斯问题的等角版本。

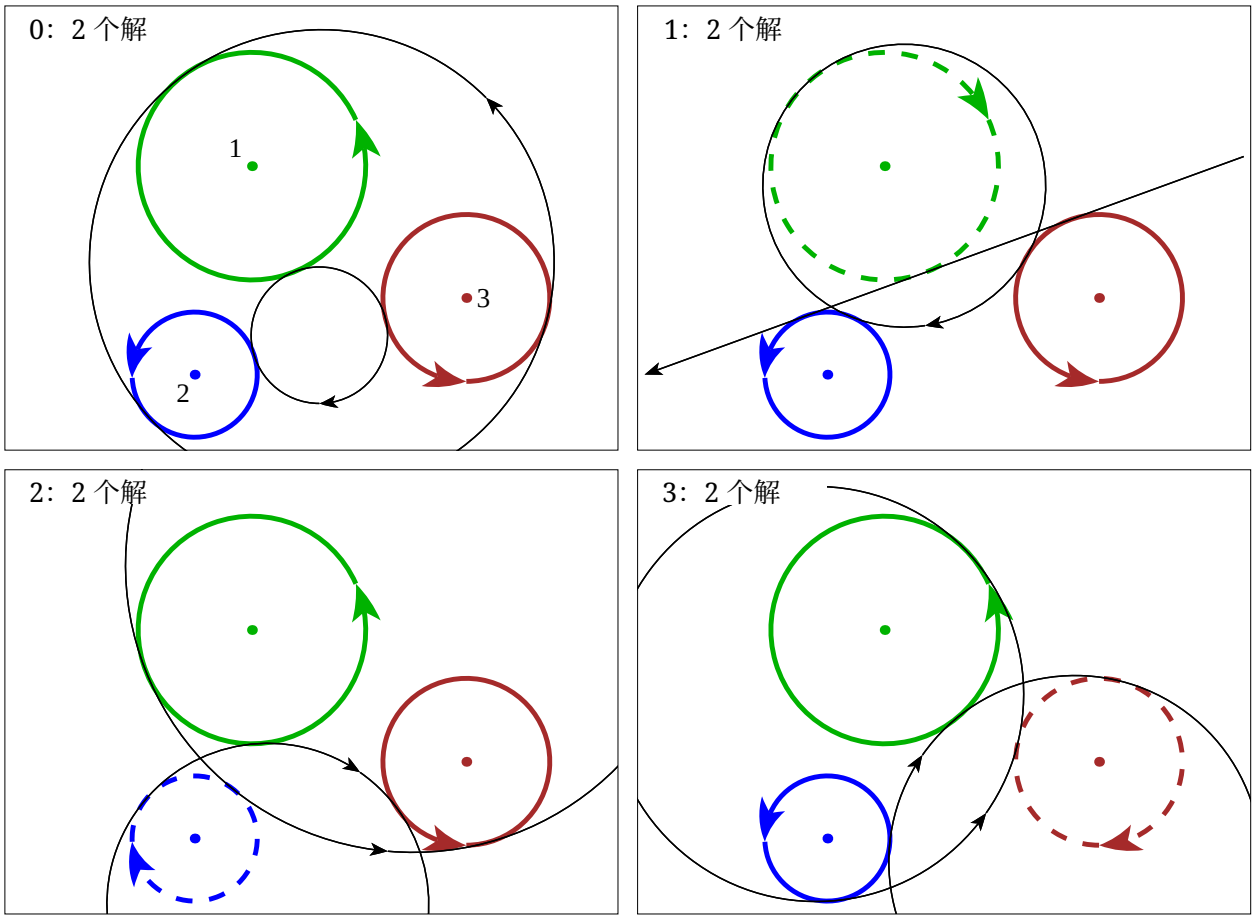



图1. 有8个解的构型；粗线表示给定的圆（粗虚线表示反向圆）；细线（包括片段1中的直线）表示阿波罗尼斯圆（式17）

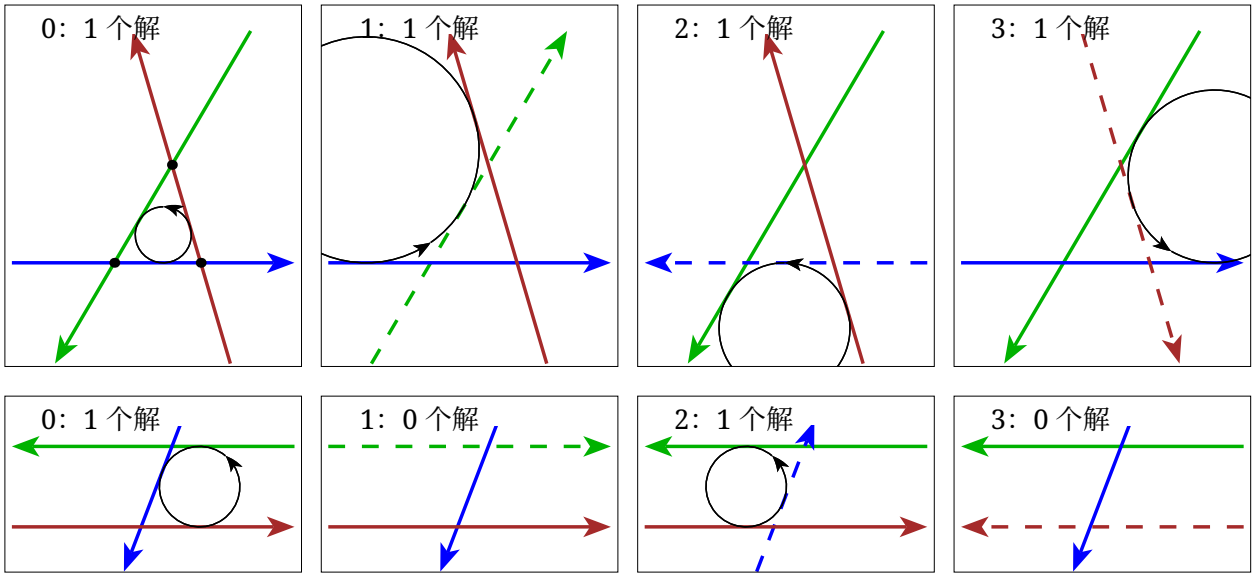
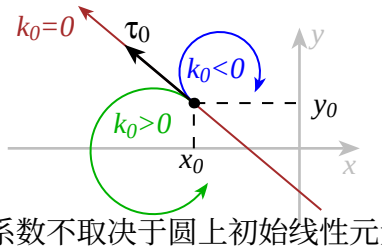



图 2。三条直线的作图（公式 13）

让我们介绍一些来自 [4]的信息。我们将由曲率元素 $\mathcal{K}=\{x_0, y_0, \tau_0, k_0\}$生成的常曲率 $k_0$ 曲线（圆；若 $k_0=0$，则为直线）的规范化方程定义为以下表达式




$$N(x,y;\mathcal{K}) = k_0\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right] + \\ +2(x-x_0)\sin\tau_0 - 2(y-y_0)\cos\tau_0 \equiv \\ \equiv a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d, \tag{2}$$

$$b^2+c^2-ad=1. \tag{3}$$

其系数不取决于圆上初始线性元素 $\{x_0, y_0, \tau_0\}$ 的选择，遵守归一化条件（3），并包含有关圆的定向的信息：

$$[a,b,c,d] = \left[k_0,\ -k_0x_0+\sin\tau_0,\ -k_0y_0-\cos\tau_0,\ k_0(x_0^2+y_0^2)-2x_0\sin\tau_0+2y_0\cos\tau_0\right].$$

方程 2 等价于 [5, 第 33] 页中给出的圆的方程：

$$Az\bar{z}+Bz-\bar{B}\bar{z}+C=0$$

（$A$ 和 $C$ 为纯虚数），其中 $z=x+\mathbf{i}\ y$、 $A=\mathbf{i}\ a$、 $B=c+\mathbf{i}\ b$、 $C=\mathbf{i}\ d$。

对于曲率为 $k_0\neq 0$ 且中心位于点（$f$， $g$）的圆

$$[a,b,c,d] = \left[k_0,\ -k_0f,\ -k_0g,\ k_0(f^2+g^2)-1/k_0\right].$$

曲率元素的恒等被理解为生成多项式的恒等：

$$\mathcal{K}_1\equiv\mathcal{K}_2 \quad\Longleftrightarrow\quad N(x,y;\mathcal{K}_1)\equiv N(x,y;\mathcal{K}_2).$$

点（$x, y$）位于圆 $\mathcal{K}$ 的左侧，当且仅当 $N(x, y; \mathcal{K}) < 0$。如果 $k > 0$，“左侧”意为“内部”。点（$x, y$）到圆 $\mathcal{K}$ 的带符号距离（符号继承自$N(x, y)$）等于

$$D(x,y;\mathcal{K}) = \frac{N(x,y;\mathcal{K})}{1+\sqrt{1+aN(x,y;\mathcal{K})}} \qquad \left[1+aN(x,y)=(ax+b)^2+(ay+c)^2\right]. \tag{4}$$

作为圆（2）的起始线性元素，可以选取离原点最近的点：

$$\{x_0,\ y_0,\ \tau_0\} = \{-l\sin\lambda,\ l\cos\lambda,\ \lambda\}, \quad \text{where} \quad l=\frac{d}{1+\sqrt{1+ad}}, \quad \lambda=\arg(-c+\mathrm{i}b); \\ [a,b,c,d] = \left[k_0,\ (k_0l+1)\sin\lambda,\ -(k_0l+1)\cos\lambda,\ l(k_0l+2)\right]. \tag{5}$$

这里， $\lambda$ 是该点处切线的斜率， $l$ 是从原点到 $\mathcal{K}$的距离（4）。如果圆心位于原点，则 $b=c=1+ad=0$，且角 $\lambda$ 可以任意选取。

在 [4] 中引入了圆对的反演不变量 $Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$。如果：

*a)* $k_{1,\ 2}\neq 0$, $L_{12}=|O_1O_2|$ 是圆心之间的距离， $O_i=(-b_i/a_i,\ -c_i/a_i)$;

*b)* $k_1=0$、 $k_2\neq 0$、 $D$ 是中心 $O_2$ 到直线 $\mathcal{K}_1$的距离 (4);

*c)* $\Psi_{12}$ 是两个圆的交角；

则：

$$Q^{(a)}=\frac{(k_1k_2L_{12})^2-(k_2-k_1)^2}{4k_1k_2}, \qquad Q^{(b)}=\frac{1+k_2D}{2}, \qquad Q^{(c)}=\sin^2\frac{\Psi_{12}}{2} \tag{6}$$

$\left[\cos\Psi_{12}=1-2Q,\ \sin^2\Psi_{12}=4Q(1-Q)\right]$。如果这些圆不相交，那么要么 $Q<0$，要么 $Q>1$，角 $\Psi_{12}$ 是虚数，并且 $|1-2Q|=\cosh\delta$，其中 $\delta$ 是这些圆之间的Coxeter反演距离 [6, 7]。要计算 $Q$，可以使用等式

$$4Q(\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2)=2+a_1d_2+a_2d_1-2(b_1b_2+c_1c_2).$$

值 $Q=0$（即 $\cos\Psi=1$）对应于圆相切（可能在点 $z=\infty$ ——平行且同向的直线处）。当 $Q=1$（$\cos\Psi=-1$）时，则为反向相切。若 $0<Q<1$（$|\cos\Psi|<1$），则圆相交。

曲率为 $k_1$、$k_2$ 且反演不变量值为 $Q_{12}$ 的圆对存在的必要条件是不等式

$$k_1^2+k_2^2-2k_1k_2(1-2Q_{12})\geq 0, \tag{7}$$

其中，等号仅在一对直线或一对同心圆的情况下成立，也就是说，此时该圆对不存在根轴。如果再补充以下要求，这个条件也将成为充分条件：若 $k_1=k_2=0$，则 $0\leq Q_{12}\leq 1$。

先说明一些记号。$N_0(x,y)=0$ 表示所求阿波罗尼斯圆的方程 2，$N_{1,\,2,\,3}(x,y)=0$ 表示三个已知圆的方程。使用的指标集合为：

$$(i,j,k)\in\{(1,2,3);\,(2,3,1);\,(3,1,2)\}\,. \tag{8}$$

这意味着对（10）中的求和式以及进一步对（16）中系数 $v_i$ 的定义进行约化。圆对的特征，例如 $Q_{ij}$，可约化为 $Q_i$。因此，$Q_3$ 表示 $Q_{31}$。（6）中的 $\Psi_{12}$、$L_{12}$ 也同理。行列式 $\Delta_n$、$n=1$、2、3、4，是从矩阵 $\mathcal{M}$ 中删去第 $n$ 列并乘以所示因子后得到的：

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{pmatrix}:\quad \Delta_4=\det\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix},\quad \begin{aligned}\Delta_1&=-\det\begin{pmatrix}b_i&c_i&d_i\end{pmatrix},\\ \Delta_2&=-\det\begin{pmatrix}a_i&c_i&d_i\end{pmatrix}/2,\\ \Delta_3&=+\det\begin{pmatrix}a_i&b_i&d_i\end{pmatrix}/2.\end{aligned} \tag{9}$$

我们为给定构型定义一个常数 $U$：

$$\begin{aligned}U&=\sum Q_i\left(Q_i-2Q_j\right)+4Q_1Q_2Q_3;\\ 4U&=\cos^2\Psi_1+\cos^2\Psi_2+\cos^2\Psi_3-2\cos\Psi_1\cos\Psi_2\cos\Psi_3-1=\Delta_2^2+\Delta_3^2-\Delta_1\Delta_4.\end{aligned} \tag{10}$$

等式 $\Delta_4=0$ 意味着给定的三个圆存在一条公垂线（24）。等式 $U=0$ 意味着：

给定的圆要么属于同一个圆束；

要么它们有一个唯一的公共点（在三条直线的情况下为点 $P_\infty=\infty$）。这些结论已在附录中证明（第 11 页）。

圆对 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 的根轴方程为

$$N(x,y)=\frac{k_1N_2(x,y)-k_2N_1(x,y)}{\sqrt{k_1^2+k_2^2-2k_1k_2(1-2Q_{12})}}.$$

三个圆的根心通常定义为一个点（$X$,$Y$），该点关于这些圆的幂相等 [7]。这个定义不适用于包含直线的三元组。更合适的定义 [1, p. 226] 将根心定义为任意两条根轴的交点：

$$\overline{X}=-\frac{\Delta_2}{\Delta_4},\quad \overline{Y}=-\frac{\Delta_3}{\Delta_4}. \tag{11}$$

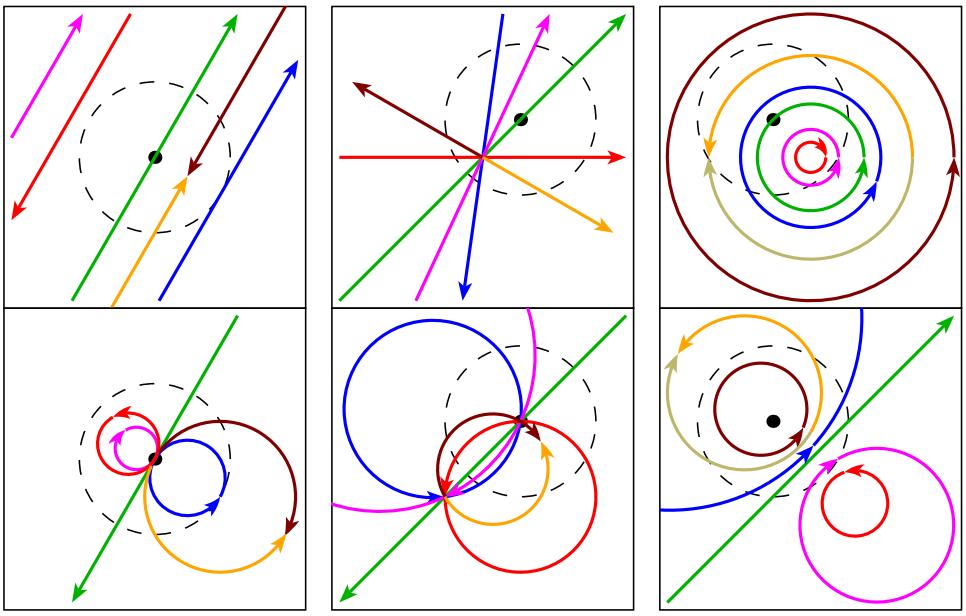


图3。圆/直线束；反演圆以虚线表示

反转一个给定的圆，例如 $\mathcal{K}_j$，意味着将其替换为

$$[\,a_j,\,b_j,\,c_j,\,d_j\,]\;\to\;[\,-a_j,\,-b_j,\,-c_j,\,-d_j\,],\quad Q_{ij}\;\to\;1-Q_{ij},\quad Q_{jk}\;\to\;1-Q_{jk}.$$

这不会改变 $U$的值，而 $\Delta_4$ 会变号。将 $\mathcal{K}_i$ 记作通过反转 $\mathcal{K}_i$得到的圆：

$$\mathcal{K}_i=\{x_i,\,y_i,\,\tau_i,\,k_i\}\quad\Longrightarrow\quad\overline{\mathcal{K}}_i=\{x_i,\,y_i,\,\tau_i+\pi,\,-k_i\}\,.$$

如果 $\mathcal{K}_1\equiv\mathcal{K}_2$ 或$\mathcal{K}_1\equiv\mathcal{K}_2$，则两个圆（作为点集）重合。

**圆/直线束**。 对于一对不重合的圆 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ ，考虑它们的线性组合，即满足方程的圆 $\mathcal{K}$

$$N(x,y)\equiv w_1N_1(x,y)+w_2N_2(x,y)=0,$$
$$\text{where}\quad w_1^2+w_2^2+2w_1w_2\cos\Psi_{12}=1.$$

The 通过对 $N$（$x$、 $y$）（3）进行归一化，可得到权重之间的关系。令

$$w_1=\frac{2(t+\cos\Psi_{12})}{t^2+2t\cos\Psi_{12}+1},\quad w_2=\frac{t^2-1}{t^2+2t\cos\Psi_{12}+1},$$

可得到圆族的方程，其中 $t$ 为族参数。在不与其他定义（[1, 第 215, 312], [7]页）相矛盾的情况下，我们将圆束称为圆/直线族，其中每个成员都是另外两个成员的线性组合。如果给定的三个圆属于同一个圆束，则（9）中的矩阵 $\mathcal{M}$ 的秩小于3，即

$$\Delta_1=0,\quad\Delta_2=\Delta_3=0,\quad\Delta_4=0.$$

图3展示了圆束。顶行是平凡圆束，底行是它们的逆像：抛物型、椭圆型和双曲圆束 [1, p. 218]。

**用系数表示的解** $[\,a_i,b_i,c_i,d_i\,]$允许将直线既作为给定的圆，也作为解纳入构型。设曲率为 $a_0$ 的圆 $\mathcal{K}_0$ 与

t三个给定的圆相切。相切条件 $Q(\mathcal{K}_0,\mathcal{K}_i)=0$ 给出三个方程 s:

$$\{2b_ib_0+2c_ic_0-a_id_0-a_0d_i-2=0,\quad i=1,2,3. \tag{12}$$

我们记

$$\Delta_{bc}=\det\begin{pmatrix}b_1 & c_1 & 1\\ b_2 & c_2 & 1\\ b_3 & c_3 & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}b_i & c_i & 1\end{pmatrix},\quad \begin{aligned}\Delta_{ab}&=\det\begin{pmatrix}a_i & b_i & 1\end{pmatrix},\quad \Delta_{bd}=\det\begin{pmatrix}b_i & d_i & 1\end{pmatrix},\\ \Delta_{ac}&=\det\begin{pmatrix}a_i & c_i & 1\end{pmatrix},\quad \Delta_{cd}=\det\begin{pmatrix}c_i & d_i & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**三条直线的解**。已知圆为:

$$\mathcal{K}_i=\{x_i,y_i,\tau_i,0\},\quad [\,a_i,\,b_i,\,c_i,\,d_i\,]=[\,0,\,\sin\tau_i,\,-\cos\tau_i,\,2y_i\cos\tau_i-2x_i\sin\tau_i\,]. \tag{13}$$

方程组（12）化为 $\{2b_0b_i+2c_0c_i-a_0d_i=2$, 由此得

$$a_0=\frac{2\Delta_{bc}}{\Delta_1},\quad b_0=-\frac{\Delta_{cd}}{\Delta_1},\quad c_0=\frac{\Delta_{bd}}{\Delta_1},\quad \text{and}\quad d_0\overset{(3)}{=}\frac{b_0^2+c_0^2-1}{a_0}.$$

这是半径为 $a_0^{-1}$、中心为该点的圆

$$O_0=\left(-\frac{b_0}{a_0},\,-\frac{c_0}{a_0}\right)=\left(\frac{\Delta_{cd}}{2\Delta_{bc}},\,-\frac{\Delta_{bd}}{2\Delta_{bc}}\right). \tag{14}$$

解存在的条件是 $\Delta_{bc}\neq 0$ 和 $\Delta_1\neq 0$。第一个条件意味着不存在平行且同向的直线：对于三条直线, $\Delta_{bc}^2=16Q_1Q_2Q_3$ 成立。第二个条件意味着不存在公共点：由三条直线构成的三角形面积等于

$$S=\frac{\Delta_1^2}{4\,|\sin\Psi_1\sin\Psi_2\sin\Psi_3|},\quad \text{where}\quad \Psi_i=\tau_j-\tau_i,\quad \sin^2\Psi_i=4Q_i(1-Q_i).$$

解如图2所示。

**一般情况,** $U\neq 0$。求解方程组（12）中的 $b_0$、$c_0$、$d_0$，得:

$$b_0=\frac{a_0\Delta_2-\Delta_{ac}}{\Delta_4},\quad c_0=\frac{a_0\Delta_3+\Delta_{ab}}{\Delta_4},\quad d_0=\frac{a_0\Delta_1-2\Delta_{bc}}{\Delta_4}, \tag{15}$$

归一化 $b_0^2+c_0^2-a_0d_0=1$ 得到方程

$$Ua_0^2-2Va_0+W=0,\quad \text{where}\quad \begin{aligned}V&=\sum a_iv_j,\quad v_i=Q_i(Q_i-Q_j-Q_k),\\ W&=\sum a_iQ_j\,(a_iQ_j-2a_jQ_k)\,,\end{aligned} \tag{16}$$

且 $V^2-UW=\Delta_4^2\,Q_1Q_2Q_3$。因此,

$$a_0=\frac{V\pm\Delta_4\sqrt{Q_1Q_2Q_3}}{U}.$$

若 $\Delta_4=0$, 则不确定性 $0/0$ 源于将 $a_0$ 代入（15），例如,

$$b_0=\frac{1}{U}\underbrace{\frac{V\Delta_2-U\Delta_{ac}}{\Delta_4}}_{0/0}\pm\frac{\Delta_2}{U}\sqrt{Q_1Q_2Q_3},$$

由等式揭示

$$V\Delta_2-U\Delta_{ac}=\Delta_4\sum b_iv_j,\quad V\Delta_3+U\Delta_{ab}=\Delta_4\sum c_iv_j,\quad V\Delta_1-2U\Delta_{bc}=\Delta_4\sum d_iv_j.$$

如果满足 $Q_1Q_2Q_3 \geq 0$，则存在解：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{U}\left(\sum a_i v_j \pm \Delta_4 \sqrt{Q_1Q_2Q_3}\right), \qquad b_0 = \frac{1}{U}\left(\sum b_i v_j \pm \Delta_2 \sqrt{Q_1Q_2Q_3}\right), \\ c_0 &= \frac{1}{U}\left(\sum c_i v_j \pm \Delta_3 \sqrt{Q_1Q_2Q_3}\right), \qquad d_0 = \frac{1}{U}\left(\sum d_i v_j \pm \Delta_1 \sqrt{Q_1Q_2Q_3}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

无向问题的解的数量取决于列表中非负乘积的数量

$$Q_1Q_2Q_3, \quad (1-Q_1)Q_2(1-Q_3), \quad (1-Q_1)(1-Q_2)Q_3, \quad Q_1(1-Q_2)(1-Q_3).$$

无需将两个圆反转：得到的解将是已找到解的反转。若将方程组（1）中的项（$r_0 \pm r_i$）替换为（$r_0 - r_i$），并假设半径继承曲率符号，将 $r_0 \to 1/a_0$替换为 $r_i \to 1/a_i$，则排除 $f_0$、$g_0$后得到方程（16）。

具有 $U \neq 0$ 的构型见图1、4、5、6、7、8、11。

**情形** $U = 0$。让我们从解是否存在的角度，考察命题1（第11页）中列举的具有 $U = 0$的构型。

1.1 三条直线（反）平行。如果它们方向相同，那么解就是任意一条方向相同的直线。其逆像为：三个给定圆属于同一个抛物型圆束，因此要么得到平凡解族（若 $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$，则圆束中的任意一个圆都是解），要么无解。

1.2 三条直线交于一点 $P_0$。不存在解。逆构形是三条圆，它们有两个公共点，分别是点 $P_0$ 和 $P_\infty$ 的像；也就是说，三条圆属于同一个椭圆型圆束，因此不会出现解。

1.3 其他任意三条直线。可能存在解（图2）。逆构形也可能存在解（图9）：三条圆（并非全是直线）有唯一的公共点 (11)，它是点 $P_\infty$的像：

$$\mathcal{K}_i = \left\{\overline{X},\, \overline{Y},\, \tau_i,\, a_i\right\}, \quad \Delta_4 \neq 0. \tag{18}$$

2. 对于三条同心圆，显然不存在解。当三条圆属于双曲圆束时，其逆像也不存在解。

3. 给定的两条圆重合。当 $\mathcal{K}_1 \equiv \mathcal{K}_2$ 时，不存在解：任何与 $\mathcal{K}_1$相切的圆，都与 $\mathcal{K}_2$反切。当 $\mathcal{K}_1 \equiv \mathcal{K}_2$ 时，我们得到平凡解，即与另外两个圆相切的圆族。此问题已在 [4, 第2853]页讨论。附录中，我们将按照本注释（27）给出其解。

因此，对于 $U = 0$，我们只关注构型（13）和（18）。（18）的解：

$$a_0 = \frac{W}{2V}, \quad b_0 = -a_0\overline{X} - \frac{\Delta_{ac}}{\Delta_4}, \quad c_0 = -a_0\overline{Y} + \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_4}, \quad d_0 = \frac{b_0^2 + c_0^2 - 1}{a_0} = \frac{a_0\Delta_1 - 2\Delta_{bc}}{\Delta_4}.$$

构型（18）如图9、图10所示。

当给定的某些圆为点时，我们不考虑简单构型。例如，如果$\mathcal{K}_3$是点（$f_3$, $g_3$），则解为 $\mathcal{K}_0 = \{f_3, g_3, \tau_0, a_0\}$，其中未知数 $\tau_0$、$a_0$由两个方程 $Q\left(\mathcal{K}_{1,\,2}, \mathcal{K}_0\right) = 0$求得：

$\{\, a_0 n_i + 2$ 余弦 $\tau_0(a_i g_3 + c_i) - 2$ 正弦 $\tau_0(a_i f_3 + b_i) + 2 = 0$，其中 $n_i = N(f_3, g_3;\ \mathcal{K}_i) \quad i = 1,\ 2$。

**笛卡尔三圆定理**讨论非定向两两相切圆。考虑定向后，只有当每对圆都反切时，即 $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$，才有两个非平凡解。于是 $U = 1$，并且

$$a_0 = -(a_1 + a_2 + a_3) \pm 2\sqrt{a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1} = V \pm |\Delta_4| \,. \tag{19}$$

示例见图11。此处未展示反向构型：若将给定圆中的一个反向，它便与另外两个圆相切（同时也与自身相切），也就是说，会得到一个平凡的二重解。

**阿波罗尼斯问题的等角版本**。令 $\Psi_0$ 为所求圆与三个给定圆中每一个的有向交角。如果在两个交点之一处该角为 $\Psi_0 = \tau_0 - \tau_i$，那么在另一个交点处该角等于 $-\Psi_0$。我们已经讨论过 $\Psi_0 = 0$的问题。该问题的推广是构造圆族，其族参数为 $\cos\Psi_0$ （见 [2]：“38.1, 与三个给定圆成相等角相交的圆”）。

我们来使用已知结果 [1, 第313]页：“XVI. 与三个给定圆成相等角相交的圆构成一个圆束，其轴为这三个圆的相似轴。该圆束中所有圆的圆心都位于一条垂线上，这条垂线从三个圆的根心向其相似轴作下。”[1]

我们进一步将 $\Psi_0$ 的虚值纳入这一族中。这样便将解族补全为一个完整的圆束。在图12中，$|\cos\Psi_0| \le 1$ 对应的解以细线绘出。虚线所示的解则补足了该圆束，其取值为 $|\cos\Psi_0| > 1$。

[1, 第 269]：“两个定向圆只有一个相似中心（不是两个！）.....三个定向圆有三个两两对应的相似中心，它们位于同一条直线—（唯一的！）上，这条直线就是这三个圆的相似轴。”[2]

相　似中心是两个中间圆之一的圆心 [4], ，即中间圆

$$N(x, y; \mathcal{K}_1) - N(x, y; \mathcal{K}_2) = 0.$$

它的半径可能为零，也可能是虚数（若 $Q_{12} \le 0$），但它的圆心

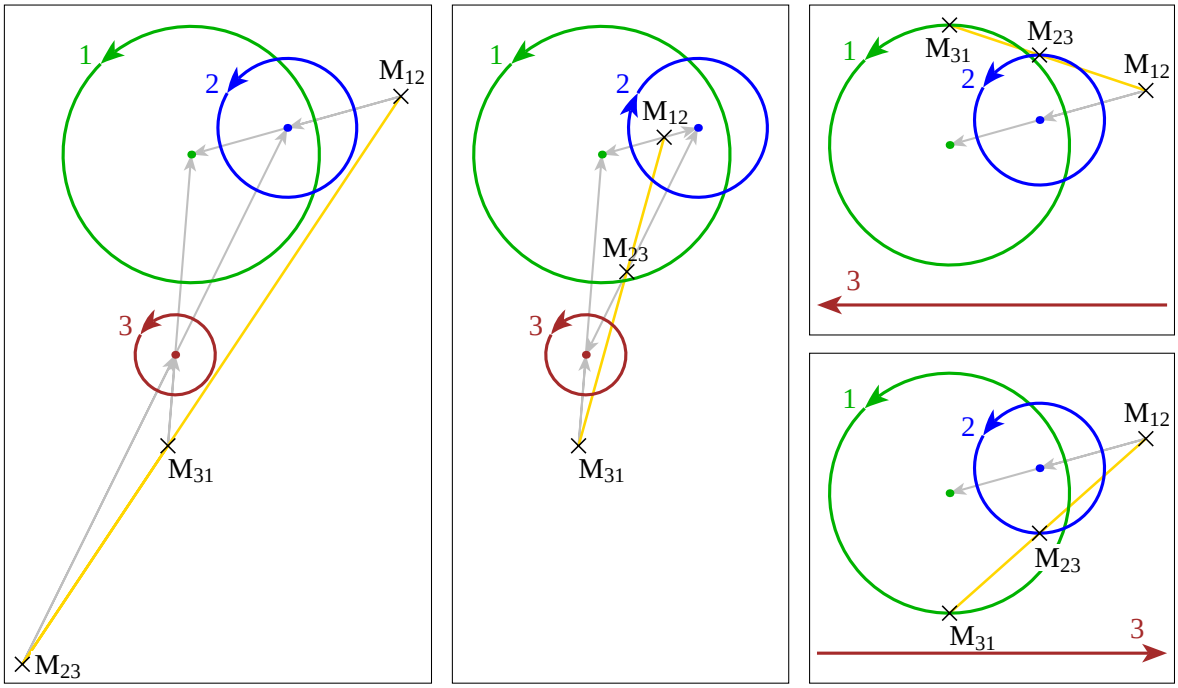
$$M_{12} = \left( -\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}, -\frac{c_1 - c_2}{a_1 - a_2} \right)$$

为实数。由于给定的圆中允许直线，因此可能不存在相似关系：直线与圆不相似。在这些情况下，我们也将点 $M_{ij}$ 称为相似中心（系数为 0）。三个给定圆的相似轴方程为

$$x\Delta_{ac} - y\Delta_{ab} + \Delta_{bc} = 0.$$

[1]原文：“XVI. 与三个已知圆以相同角度相交的圆构成一个圆束，其轴为这三个圆的相似轴。圆束中所有圆的圆心都位于一条垂线上，该垂线从三个圆的根心投向它们的相似轴。”[2]原文：“两个定向圆只有一个相似中心（不是两个！）.....三个定向圆有三个两两对应的相似中心，它们位于同一条直线—（唯一的！）上，这条直线就是这三个圆的相似轴。”

四种构型中相似中心的位置如下所示：




定义一个常数 $G$:

$$G = Q_1(a_1-a_3)(a_2-a_3)+Q_2(a_2-a_1)(a_3-a_1)+Q_3(a_3-a_2)(a_1-a_2) \equiv \left(\Delta_{ab}^2+\Delta_{ac}^2\right)/4.$$

If $G=0$, then the similarity axis is not defined.

方程组 $1-2Q(\mathcal{K}_i,\mathcal{K}_0)=\cos\Psi_0$ 是方程组（12）的一个类比，其形式为:

$$\{\, 2b_ib_0+2c_ic_0-a_id_0-d_ia_0=2\cos\Psi_0, \quad i=1,2,3. \tag{20}$$

其关于 $b_0$、$c_0$、$d_0$的解:

$$b_0\Delta_4=a_0\Delta_2-\Delta_{ac}\cos\Psi_0, \quad c_0\Delta_4=a_0\Delta_3+\Delta_{ab}\cos\Psi_0, \quad d_0\Delta_4=a_0\Delta_1-2\Delta_{bc} \tag{21}$$

$\cos\Psi_0$.归一化 $b_0^2+c_0^2-a_0d_0=1$ 得到关于 $a_0$ 的方程:

$$Ua_0^2-2Va_0\cos\Psi_0+W'=0, \tag{22}$$

$$W'=W\cos^2\Psi_0-\frac{1}{4}\Delta_4^2(1-\cos^2\Psi_0)=G\cos^2\Psi_0-\frac{1}{4}\Delta_4^2.$$

其判别式的形式为 $(V\cos\Psi_0)^2-UW'$，等于 $\Delta_4^2D$，其中

$$D=\frac{1}{4}U\left(1-\cos^2\Psi_0\right)+Q_1Q_2Q_3\cos^2\Psi_0.$$

$U\neq0$ 存在于 $D\geq0$:

$$a_0=\frac{1}{U}\left(\cos\Psi_0\sum a_iv_j\pm\Delta_4\sqrt{D}\right), \qquad b_0=\frac{1}{U}\left(\cos\Psi_0\sum b_iv_j\pm\Delta_2\sqrt{D}\right),$$
$$c_0=\frac{1}{U}\left(\cos\Psi_0\sum c_iv_j\pm\Delta_3\sqrt{D}\right), \qquad d_0=\frac{1}{U}\left(\cos\Psi_0\sum d_iv_j\pm\Delta_1\sqrt{D}\right).$$

在记号 $\mathcal{K}_0^{\pm}(\cos\Psi_0)$ 中，上标的正负号对应于根式前的符号。圆 $\mathcal{K}_0^{+}(\cos\Psi_0)$ 是圆 $\mathcal{K}_0^{-}(-\cos\Psi_0)$ 的反向圆。

我们通过计算圆束中两个公共点之间的距离 $2F$ 来确定圆束的类型；对于双曲圆束，这两个公共点是复数:

$$F^2 = \frac{U - 4Q_1Q_2Q_3}{4G}.$$

在 $F^2 < 0$ 处，圆束为双曲型；在 $F^2 = 0$ 处为抛物型；在 $F^2 > 0$ 处为椭圆型。

**的解:** 如果 $U = 0$ 由于给定的圆属于同一个圆束（特别是当其中两个圆重合时），那么 $V = 0, \Delta_4 = 0$。当 $\cos\ \Psi_0 = 0$ ($\Psi_0 = \pm\pi/2$) 时，方程 22 对任意 $a_0$ 都具有形式 $0 = 0$。其解为与给定圆的圆束正交的圆束。

如果由于构型（18）而有 $U = 0$，则由（22）定义 $a_0$

$$a_0 = \frac{W'}{2V\cos\Psi_0},$$

并由（21）得到 $b_0$、$c_0$、$d_0$。

计算两个解 $\Psi$ 与 $\mathcal{K}_0(\cos\ \Psi_1)$ 及 $\mathcal{K}_0(\cos\Psi_2)$ 的交角，得到

$$\cos\Psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\Psi_1}{\cos\Psi_2} + \frac{\cos\Psi_2}{\cos\Psi_1}\right).$$

由于 $|\cos\ \Psi| > 1$，解的圆束为双曲型（图13）。

三**条直线的解**。代入（20） $a_i = 0$，得到

$$a_0 = \frac{2\Delta_{bc}\cos\Psi_0}{\Delta_1}, \quad b_0 = -\frac{\Delta_{cd}\cos\Psi_0}{\Delta_1}, \quad c_0 = \frac{\Delta_{bd}\cos\Psi_0}{\Delta_1}; \qquad d_0 = \frac{b_0^2 + c_0^2 - 1}{a_0}.$$

这是一个以点（14）为中心的同心圆圆束。其中一个圆绘于图2中。与（13）中一样，当 $\Delta_1 \neq 0$ 和 $\Delta_{bc} \neq 0$ 时，存在解。

考虑相似性轴未定义的其他构型。

1. 三个相似中心均未定义： $a_1 = a_2 = a_3$。解见图14（1：、2：）。

2. 该构型包含两条平行且同向的直线，例如 $a_1 = a_2 = 0$、$Q_1 = 0$、 $a_3 \neq 0$。因此，两个相似中心有定义且重合：图14（3：）。

3. 三个相似中心均有定义（$a_1 \neq a_2$、 $a_2 \neq a_3$、 $a_3 \neq a_1$）且彼此重合。图14（4：）。$G = 0$ 得到

$$Q_3 = Q_1\frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2} + Q_2\frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} \quad \Longrightarrow \quad P_\perp = -\left[a_3Q_2\frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} - a_1Q_1\frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2}\right]^2 \leq 0.$$

仅允许 $P_\perp = 0$ （23），由此可得

$$Q_2 = Q_1\frac{a_1(a_2 - a_3)^2}{a_3(a_1 - a_2)^2}, \quad Q_3 = Q_1\frac{a_2(a_1 - a_3)^2}{a_3(a_1 - a_2)^2}, \quad V = 0.$$

4. $Q_{ij} = 0, a_i = a_j \neq 0$; （非零）曲率相等且相切意味着圆 $\mathcal{K}_i$ 与圆 $\mathcal{K}_j$ 重合，因此问题就变成了构造与两个给定圆相切的圆族这一问题的等角版本。对于 $\cos\Psi_0$ 的任意取值，解都是由 $a_0$ 参数化的圆族：图 14(5:)。

# 附录

命题*1.* </*style*}当且仅当满足以下条件时，$U=0$ 相等：

*1.* 三个已知圆是直线，或可通过反演转化为三条直线 .

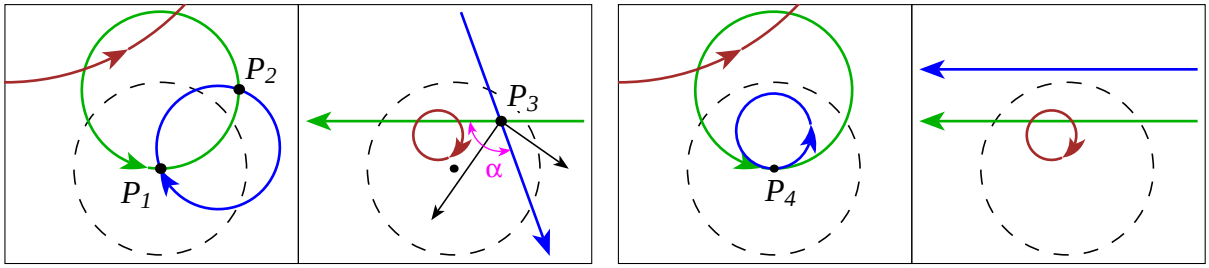
*2.* 三个圆是同心圆，或可通过反演转化为三条同心圆。*3.* 三个圆中有两个重合。

**证明**。对于列出的三种情况，通过代入可验证等式 $U=0$：

*1.* $\mathcal{K}_i=\{x_i,\,y_i,\,\tau_i,\,0\}$，$2Q_i=1-\cos(\tau_j-\tau_i)$.*2.* $\mathcal{K}_i=\{f,\,g-1/a_i,\,0,\,a_i\}$，其中 $(f,g)$ 是三个圆的公共中心：$Q_{i\,(6)}=-(a_j-a_i{}^2)$ .*3.* $\mathcal{K}_1\equiv\mathcal{K}_2 \implies Q_1=0,\quad Q_3=Q_2,\quad U=(Q_2-Q_3)^2=0;\mathcal{K}_1\equiv\mathcal{K}_2 \implies Q_1=1,\quad Q_3=1-Q_2,\quad U=(Q_2+Q_3-1)^2=0.$

反演不会改变 $Q_i$ 和 $U$。现在只需证明不存在其他构型。

1. 圆 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 交于点 $P_1$ 和 $P_2$：$0<Q_1<1$。




以 $P_1$ 为反演中心对构型进行反演（虚线表示反演圆），得到一对直线，它们交于点 $P_3$，即点 $P_2$的逆像。将原点移至 $P_3$，并选择适当的旋转后，得到以下构型：

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 &\to \quad \mathcal{K}_1'=\{0,\,0,\,-\alpha,\,0\}\,;\\ \mathcal{K}_2 &\to \quad \mathcal{K}_2'=\{0,\,0,\quad \alpha,\,0\}\,;\\ \mathcal{K}_3 &\to \quad \mathcal{K}_3'=\{-l_3\sin\tau_3,\,l_3\cos\tau_3,\,\tau_3,\,k_3\}\,.\end{aligned}$$

$\mathcal{K}_3'$ 是一个任意圆，采用记号（5）表示。那么

$$Q_1=\sin^2\alpha,\quad 2Q_2=1-(1+k_3l_3)\cos(\tau_3+\alpha),\quad 2Q_3=1-(1+k_3l_3)\cos(\tau_3-\alpha),$$

且 $U=k_3l_3\,(2+k_3l_3)\cos^2\alpha\sin^2\alpha$。等式 $U=0$ 成立的条件是：

- $k_3=0$：反演得到三条直线；
- $l_3(2+k_3l_3)=d_3=0$ 表示圆 $\mathcal{K}_3'$ 也经过原点：因此，三个得到的圆以及三个原始圆都有一个唯一的公共点。
- $\alpha=0$、$\alpha=\pi$或 $\alpha=\pm\pi/2$：两条直线重合（至多方向相反），这意味着两个原始圆重合；

如果圆 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 的公共点是（反向）相切点 $P_4$，那么，以中心为 $P_4$的圆进行反演后，它们的逆像是两条平行（$\tau_2=\tau_1$）或反向平行（$\tau_2=\tau_1+\pi$）的直线：

$$\mathcal{K}_1'=\{-l_1\sin\tau_1,\, l_1\cos\tau_1,\, \tau_1, 0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{K}_2'=\{-l_2\sin\tau_2,\, l_2\cos\tau_2,\, \tau_2, 0\}$$

并且 $U=k_3^2(l_1\pm l_2)^2$：$+$符号表示反切。若得到三条直线（$k_3=0$），或圆 $\mathcal{K}_1$ 与 $\mathcal{K}_2$ 重合（$l_2=\pm l_1$），则等式 $U=0$ 成立。

2. 假设两圆对没有公共点：$|\cos\Psi_i|>1$。对给定构型进行反演，使圆 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 的像成为同心圆，并将原点移至它们的公共中心：

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 &\to \quad \mathcal{K}_1'=\{0,\, -1/a_1,\, 0,\, a_1\}\,, \quad a_1\neq 0;\\
\mathcal{K}_2 &\to \quad \mathcal{K}_2'=\{0,\, -1/a_2,\, 0,\, a_2\}\,, \quad a_2\neq 0;\\
\mathcal{K}_3 &\to \quad \mathcal{K}_3'=\{-l_3\sin\tau_3,\, l_3\cos\tau_3,\, \tau_3,\, a_3\}\,.
\end{aligned}$$

Then

$$Q_1=-\frac{(a_1-a_2)^2}{4a_1a_2}, \quad Q_2=\frac{(1+a_2l_3)(a_2a_3l_3+2a_2-a_3)}{4a_2}, \quad Q_3=\frac{(1+a_1l_3)(a_1a_3l_3+2a_1-a_3)}{4a_1},$$

并且 $U=\dfrac{(1+a_3l_3)^2(a_1-a_2)^2-(a_1+a_2)^2)}{16a_1^2a_2^2}$。以下情况满足等式 $U=0$：

- $a_1=\pm a_2$：所得的两个同心圆，因此也包括两个原始圆，重合；
- $1+a_3l_3=0$ 表示圆 $\mathcal{K}_3'$的中心也位于原点。原始圆是三条同心圆的逆像。

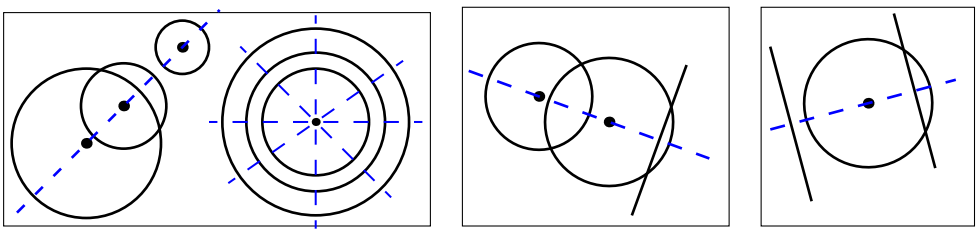
因此，$U=0$ 仅可能出现在所列构型中。 □

**注。** 由 $U$ 的公式可知，$U\geq -1/4$：最小值在 $k_3l_3=-1$、$\sin^2\alpha=1/2$处取得，即在 $Q_1=Q_2=Q_3=1/2$ 处取得（图 8 中的构型）。尽管定义（10）允许 $U<-1/4$，但这样的 $Q_i$ 值无法由任何曲率实现。

**命题 2。** 若三个圆的曲率为$k_1$、$k_2$、$k_3$，且它们不同时等于零，其逆不变量的两两值为 $Q_{12}$、$Q_{23}$、$Q_{31}$，则其存在的必要条件是不等式

$$P_\perp=\sum k_i^2(1-Q_{jk})Q_{jk}+\sum k_ik_j(Q_{ij}-Q_{ki}-Q_{jk}+2Q_{ki}Q_{jk})\geq 0, \tag{23}$$

其中求和遍历指标（8）。$P_\perp=0$ 当且仅当三个圆具有一条公垂线。



(24)

**证明。**
1. 我们先从所有 $k_i$ 均不为零的情形开始。由（6）可确定

每对圆的圆心间距 $L_i = |O_iO_j|$：

$$L_i^2 = \frac{k_i^2 + k_j^2 - 2k_ik_j(1-2Q_{ij})}{k_i^2 k_j^2}.$$

存在一对曲率为 $k_i$、 $k_j$ 且不变量为 $Q_{ij}$ 的圆，意味着 $L_i^2 \geq 0$ (7)。让我们构造一个边长为 $L_1$、 $L_2$ 和 $L_3$ 的三角形，并将这些圆的圆心置于其顶点。 不等式 (23) 构成了存在这样一个三角形的充要条件:

$$P_\perp = k_1^2k_2^2k_3^2\, P \geq 0, \quad \text{where} \quad P = \frac{1}{16}(L_1+L_2+L_3)(L_2+L_3-L_1)(L_3+L_1-L_2)(L_1+L_2-L_3).$$

$P$ 是三角形的面积平方。方程 $P_\perp = 0$ 意味着三角形退化为一条线段或一个点，以及三个圆共线。

2. 现在令 $k_{1,2} \neq 0$、 $k_3 = 0$ 和 $D_{1,2}$ 表示从圆的圆心$\mathcal{K}_{1,2}$ 到直线 $\mathcal{K}_3$ 的距离 (4)，而 $L_1$ 是两个圆心之间的距离。那么 (6)

$$Q_{31} = (1+k_1D_1)/2, \quad Q_{23} = (1+k_2D_2)/2,$$

方程 23 的形式为

$$P_\perp = \frac{1}{4}k_1^2k_2^2\left[\, L_1^2 - (D_1-D_2)^2 \,\right] \geq 0.$$

$D_1$ 和 $D_2$ 的符号相同或相反，取决于圆的圆心位于直线 $\mathcal{K}_3$ 的同侧还是异侧。而等式 $L_1 = |D_1 - D_2|$导致 $P_\perp = 0$，只有当两个圆心位于同一条垂线上时才可能成立，也就是说，三个圆具有一条公垂线。

3. 现在令 $k_1 \neq 0, k_2 = k_3 = 0$。于是

$$P_\perp = k_1^2 Q_{23}(1-Q_{23}),$$

并且 $P_\perp \geq 0$ 是直线 2 和 3 这一对直线的存在条件。 $P_\perp = 0$ 意味着两条直线（反向）平行，因此整个三元组存在一条公垂线。

□

推论。</style>当且仅当以下条件成立时，等式 $\Delta_4 = 0$ 才可能成立：

三条圆都是直线；三条圆有一条公垂线。

这由等式 $4P_\perp = \Delta_4^2$可得。

**一些有用的公式**。

1. 要计算阿波罗尼斯圆与给定圆的切点，定义两个相切圆的公共线元素 $\{x, y, \tau\}$：

$$x = \frac{b_1-b_2}{a_2-a_1}, \quad y = \frac{c_1-c_2}{a_2-a_1}, \quad \cos\tau = \frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2-a_1}, \quad \sin\tau = \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2-a_1}.$$

2. 将圆 $\mathcal{K}_1$ 关于某个圆 $\mathcal{K}^\star$ 反演，得到圆 $\mathcal{K}_2$: $\left|a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad d_2\right|^\top$

$$= 2(1-2Q^\star)\cdot\left|a^\star \quad b^\star \quad c^\star \quad d^\star\right|^\top - \left|a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad d_1\right|^\top, \quad \text{where} \quad Q^\star = Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}^\star).$$

3. 为构造给定 $a_i$ 和 $Q_i$ 的构型，采用特殊坐标系或许更方便。作为 $\mathcal{K}_1$，我们选取一个曲率非零的圆：

$$\mathcal{K}_1 = \{f_1,\, g_1 - 1/a_1,\, 0,\, a_1\}, \quad a_1 \neq 0, \qquad \mathcal{K}_2 \overset{(5)}{=} \{-l_2\sin\lambda_2,\, l_2\cos\lambda_2,\, \lambda_2,\, a_2\}.$$

这对圆的公垂线是直线

$$\mathcal{K}_\perp = \{f_1,\, g_1,\, \mu,\, 0\}: \quad x(s) = f_1 + s\,\cos\mu, \quad y(s) = g_1 + s\,\sin\mu.$$

由条件 $Q(\mathcal{K}_\perp, \mathcal{K}_2) = 1/2$ 得到 $\mu$ 的值：

$$\begin{array}{l} \sin\mu = m_1/m_0, \\ \cos\mu = m_2/m_0, \end{array} \quad \text{where} \quad \begin{array}{l} m_1 = a_2 g_1 - (a_2 l_2 + 1)\cos\lambda_2, \\ m_2 = a_2 f_1 + (a_2 l_2 + 1)\sin\lambda_2, \end{array} \quad m_0 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}.$$

如果这些圆同心，则 $m_1 = m_2 = 0$，且角 $\mu$ 可任意选取。$\mathcal{K}_\perp$ 与 $\mathcal{K}_2$ 相交于 $s$，它由方程 $N_2(x(s),\, y(s)) = 0$ 确定：$s = (\pm 1 - m_0)/a_2$。选取符号 $+$ 后，我们发现了在 $a_2 = 0$ 处产生的不确定性 $0/0$：

$$s = \frac{a_2(f_1^2 + g_1^2 - l_2^2) - 2(f_1 m_2 + g_1 m_1 + l_2)}{1 + m_0}.$$

$\mathcal{K}_2$ 在点 $(x(s),\, y(s))$ 处的切线斜率等于 $\mu + \pi/2$。我们选取一个新的坐标系，其原点位于 $(f_1,\, g_1)$，横轴沿着 $\mu$ 的方向：

$$x + \mathrm{i}y \;\to\; x' + \mathrm{i}y' = [\,(x - f_1) + \mathrm{i}(y - g_1)\,]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu}, \quad \lambda \to \lambda - \mu. \tag{25}$$

在此坐标系中

$$\begin{array}{l} \mathcal{K}_1 = \{0,\, -1/a_1,\, 0,\, a_1\}, \\ \mathcal{K}_2 = \{x_2{=}s,\, 0,\, \pi/2,\, a_2\}, \end{array} \qquad Q_{12} = \frac{(a_1 x_2 - 1)(a_1 a_2 x_2 + a_2 - 2a_1)}{4a_1}. \tag{26}$$

变换后的 $\mathcal{K}_3$ 可写成任意圆（5）。

**与两个给定圆相切的圆族**。我们在特殊坐标系中构造这个圆族，在该坐标系中，给定圆呈（26）式。与两个给定圆相切的圆 $\mathcal{K}_0$ 的圆心 $(X,\, Y)$ 的轨迹是一条二次曲线 [4]。补充说明：该圆锥曲线的焦点位于圆心 $O_{1,\,2}$ 处。由条件 $Q\left(\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_{1,\,2}\right) = 0$ 消去 $a_0$ 后得到的圆锥曲线方程为

$$Y^2 + (1 - \varepsilon^2)X^2 - 2\varepsilon p X - p^2 = 0, \quad \varepsilon^2 = \frac{a_1^2(a_2 x_2 - 1)^2}{(a_2 - a_1)^2}, \quad p^2 = \frac{4Q_1^2}{(a_2 - a_1)^2}.$$

这是焦点位于原点、离心率为 $\varepsilon$、焦参数为 $p$ 的圆锥曲线方程。在退化情形下，它是一对重合直线：

$$\begin{array}{ll} Q_1 = 0: & Y^2 = 0; \\ a_2 = a_1: & (2a_1 X - a_1 x_2 + 1)^2 = 0; \end{array}$$

代入 $X = P(\xi)\cos\xi,\, Y(\xi) = P(\xi)\sin\xi$，得到

$$P(\xi) = \frac{2Q_1}{P_0(\xi)}, \quad \text{where} \quad P_0(\xi) = a_1(a_2 x_2 - 1)\cos\xi + (a_1 - a_2).$$

记 $P_1(\xi) = P_0(\xi) - 2a_1 Q_1$。所求的圆 $\mathcal{K}_0$ 为

$$a_0(\xi) = \frac{a_1 P_0(\xi)}{P_1(\xi)}, \quad b_0(\xi) = \frac{-2a_1 Q_1 \cos\xi}{P_1(\xi)}, \; c_0(\xi) = \frac{-2a_1 Q_1 \sin\xi}{P_1(\xi)}, \quad d_0(\xi) = \frac{4a_1 Q_1 - P_0(\xi)}{a_1 P_1(\xi)}. \tag{27}$$

若 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 相切，则解为以下族

$$\mathcal{K}_0(l_0) = \{\pm l_0,\, 0,\, \mp\pi/2,\, a_0\}, \quad a_0 = \frac{-2a_1}{a_1 l_0 - 1}.$$

接下来，我们从坐标系（$x'$, $y'$）回到原方程组（25）。

# 参考文献

[1] 雅格洛姆 几何变换 *II*：线性变换与圆变换 （俄文）。莫斯科：LENAND，2020 年，616 页。[2] 佩多 几何学：一门综合课程。多佛出版社，纽约，1988 年。[3] 布鲁恩、费希尔、威尔克 反演中的阿波罗尼奥斯。《数学杂志》，第 56 卷，第 2 期（1983），第 97—103 页。[4] 库尔诺先科 一对圆的反演不变量。《数学科学杂志》，第 110 卷，第 4 期，2002 年，第 2848–2860 页（译自《POMI 科学研讨会纪事》，261（1999））。[5] 雅格洛姆 几何中的复数。 纽约和伦敦：学术出版社，1968 年。[6] 考克斯特 反演距离。《纯粹与应用数学年鉴》，（4）71，1966 年，第 73–83页。[7] 考克斯特、格雷策 重温几何学。纽约和锡拉丘兹，1967 年。

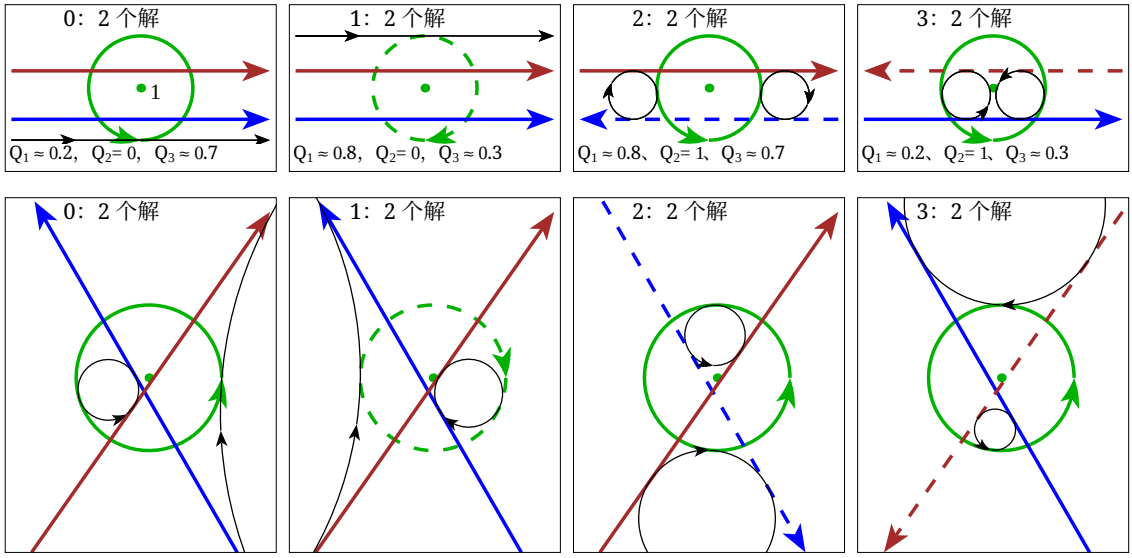



图4. 含两条直线的构型

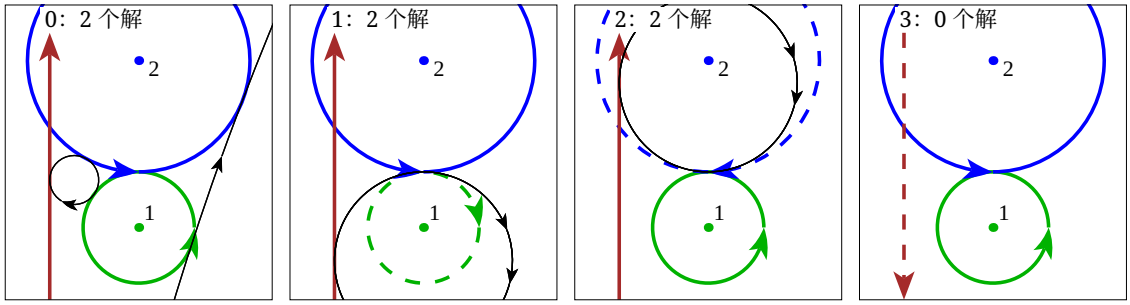



图5. 有6个解的构型；在片段1：和2：　$Q_1 = 0$上，解(17)是倍数

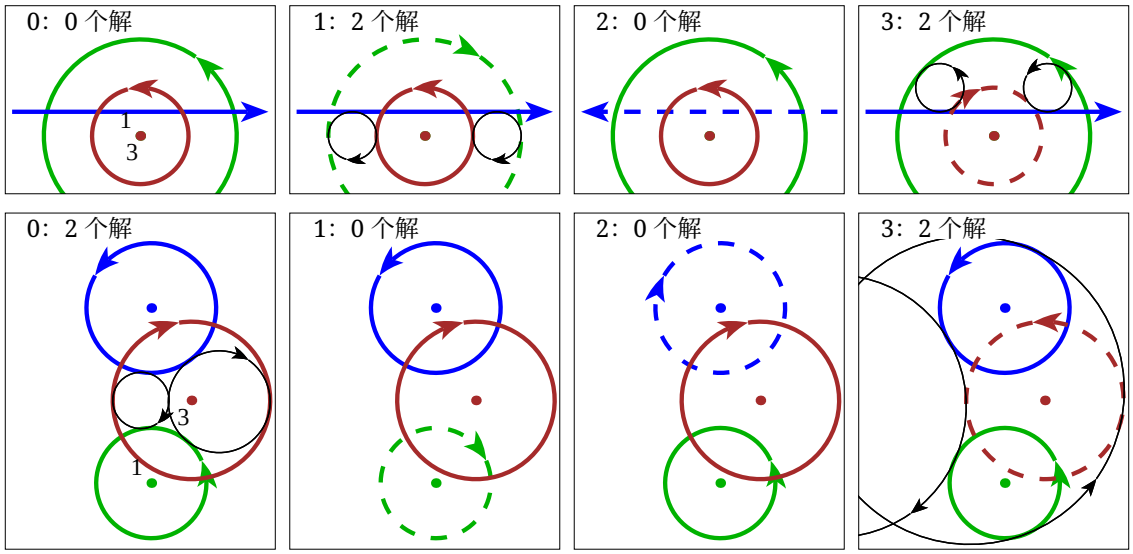



图6：有 4 个解的构型

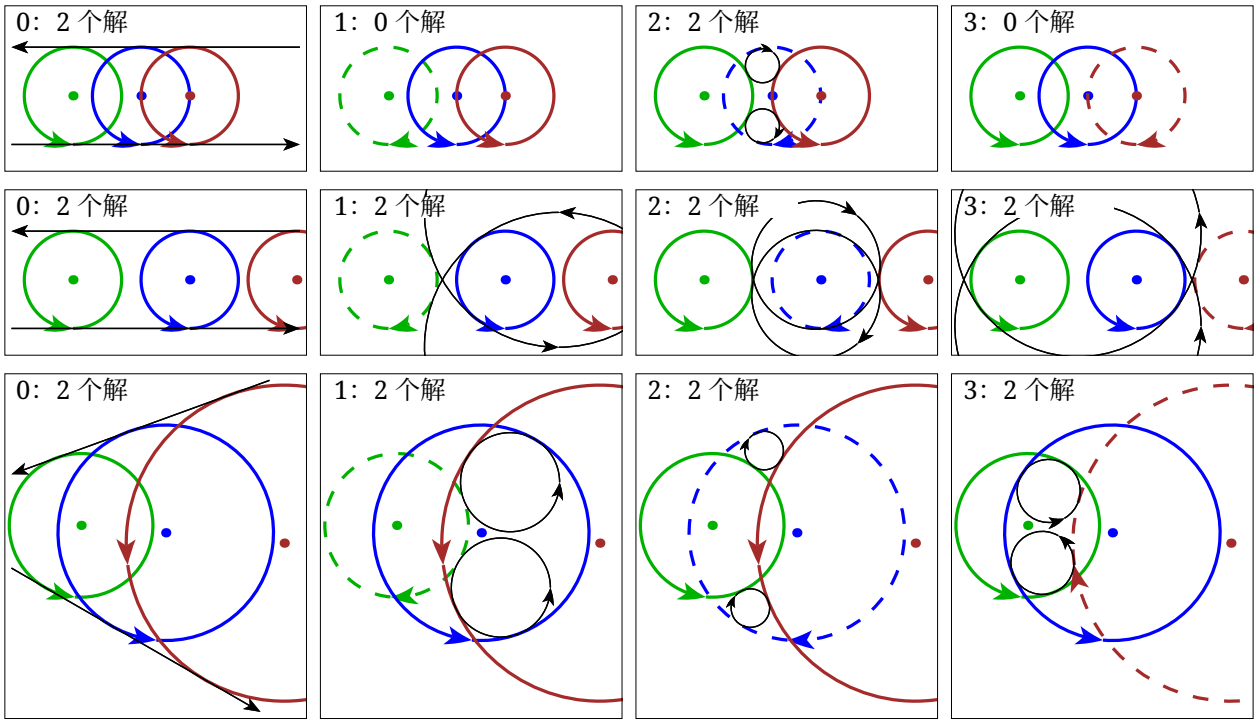



图7. 给定的圆共线（$\Delta_4 = 0$）

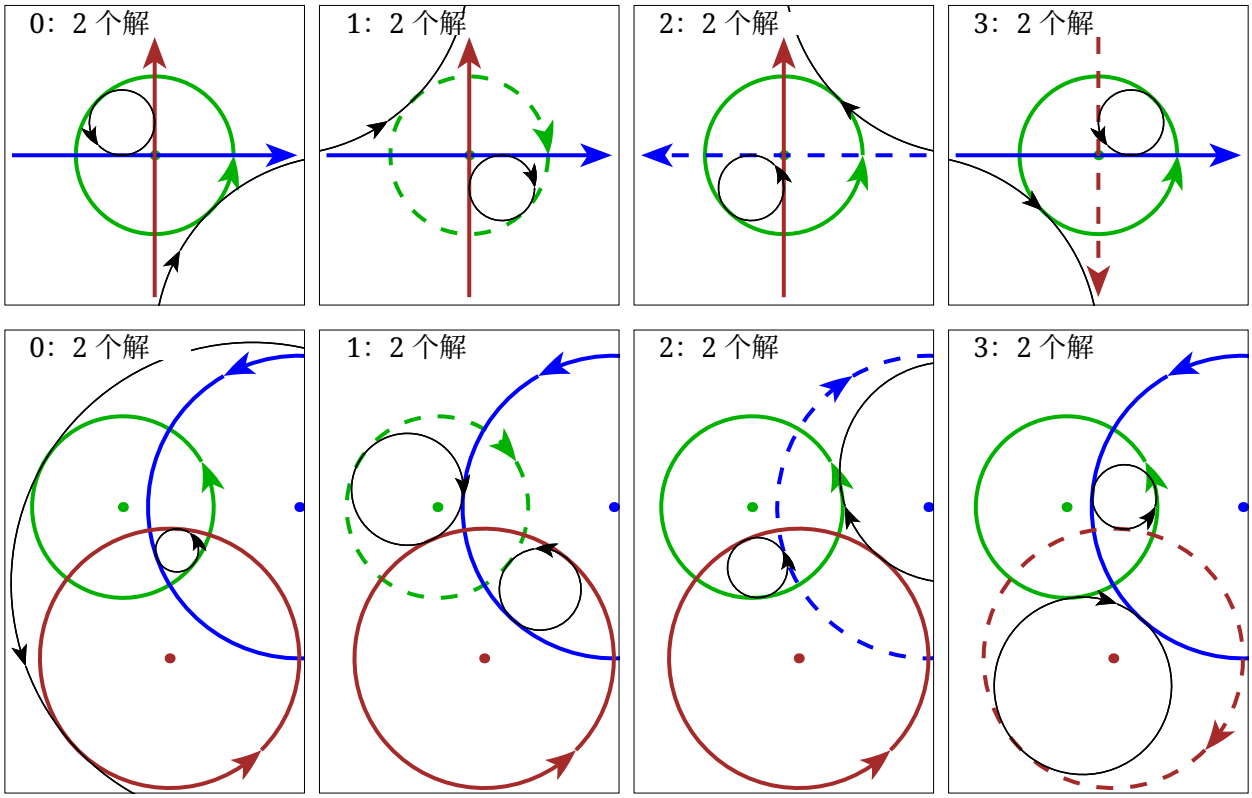



图8. 给定的圆两两正交（$Q_i = 1/2$, $U = -1/4$）

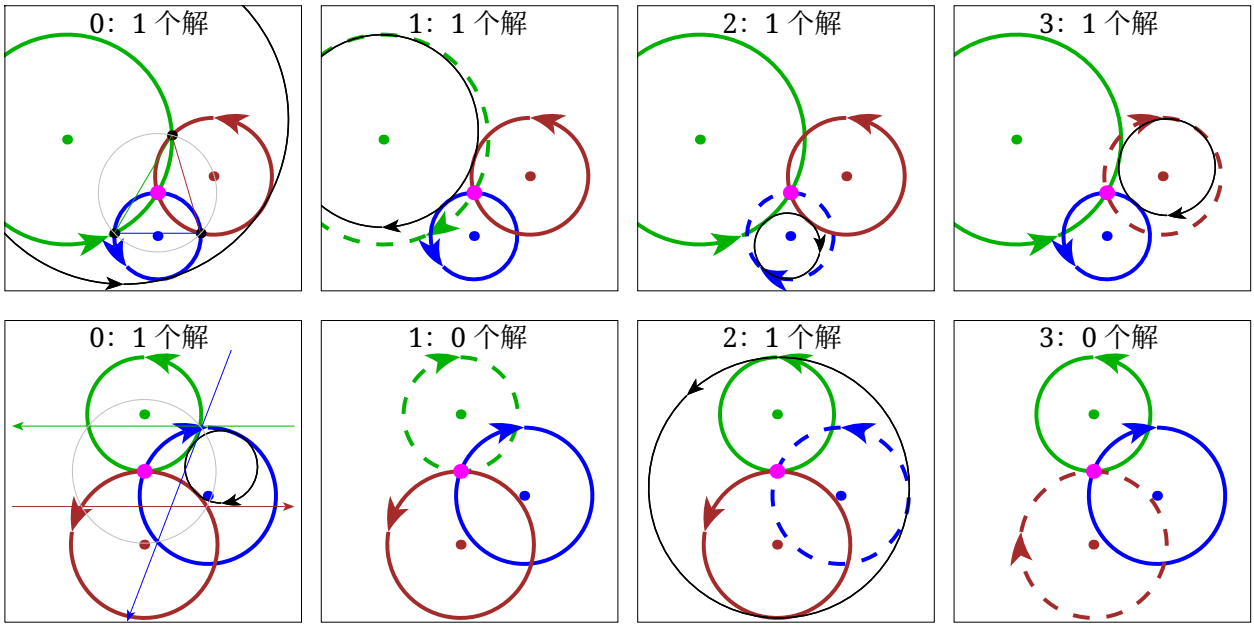



图9。 $U=0$，三条直线的逆像：原先（见图2）的公共点 $z=\infty$ 已变为三个所得圆的唯一公共点（公式11）

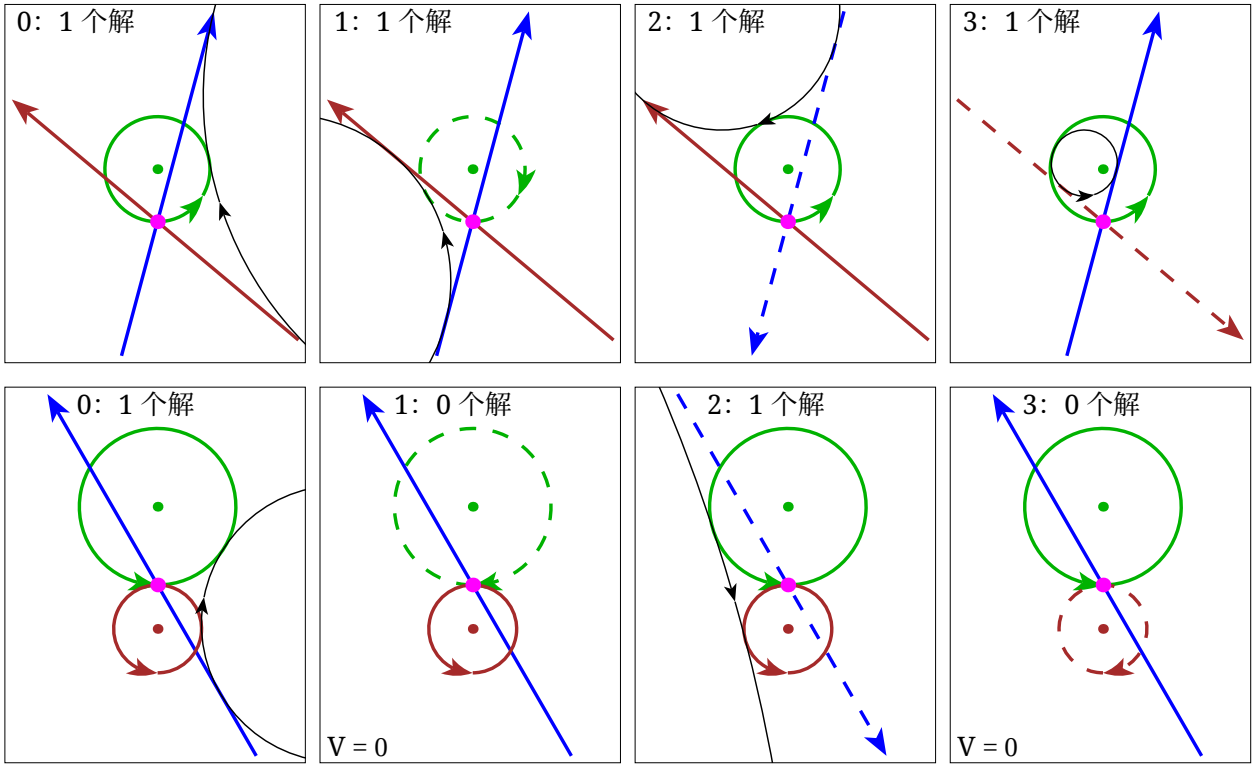



图10。 $U=0$，含直线的构型

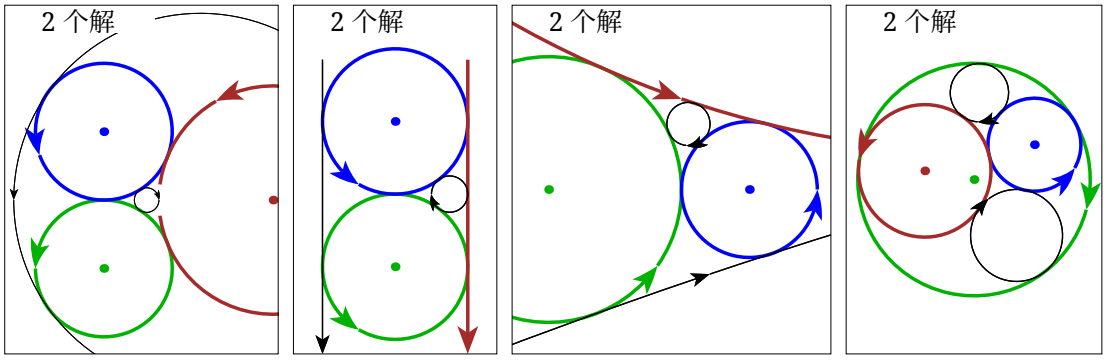



图11。关于笛卡尔定理（公式19）

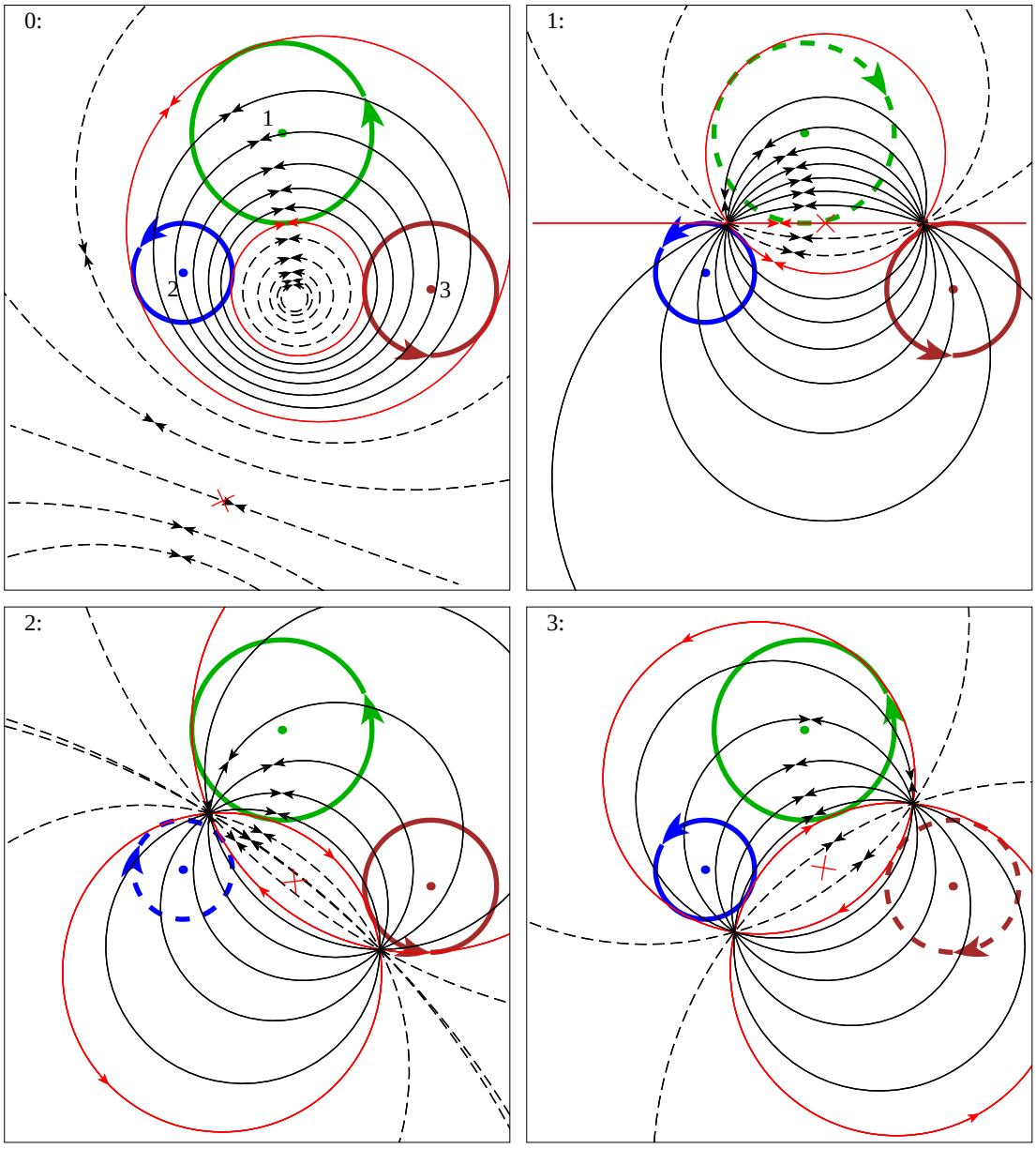



图12。阿波罗尼斯问题等角版本的解， $U \neq 0$

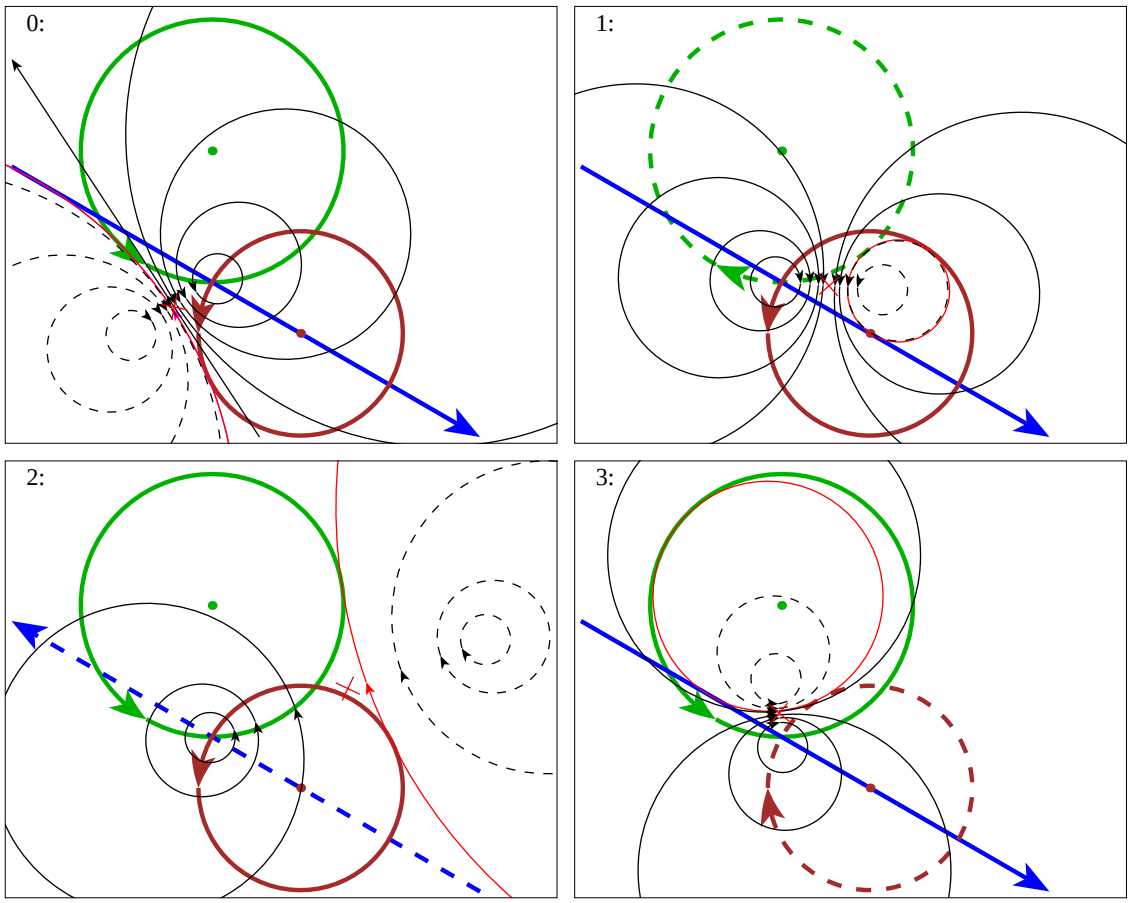



图13。该问题等角版本的解， $U = 0$

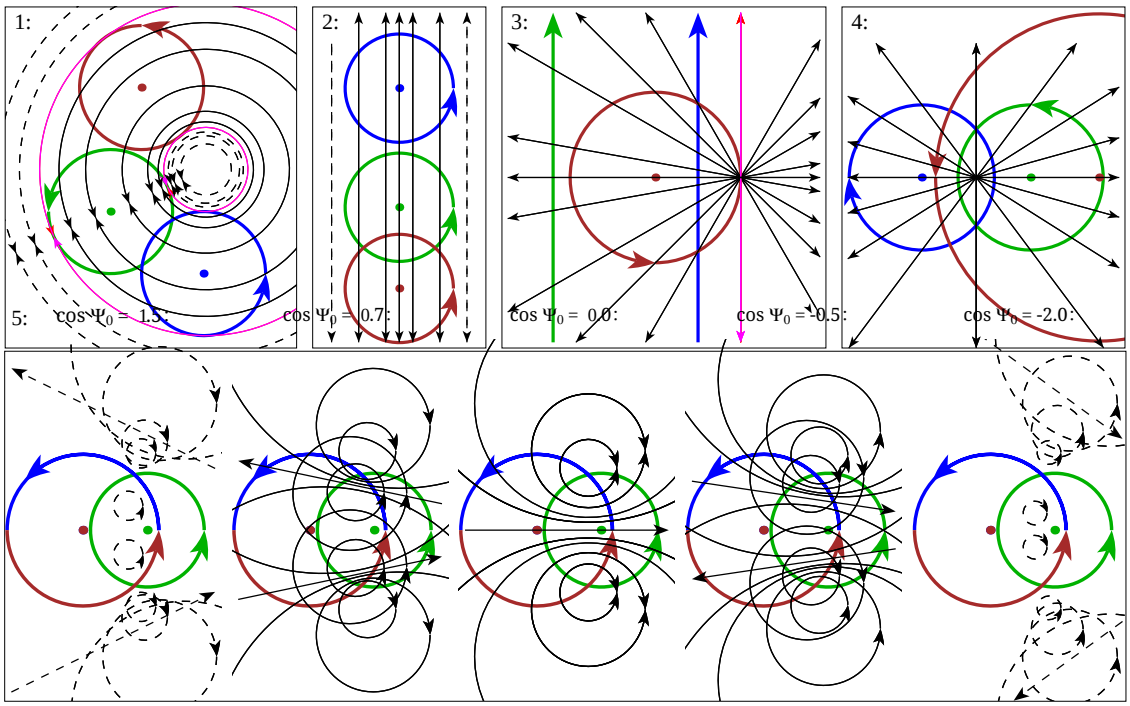



图14. 相似性轴未定义（$G = 0$）