arXiv:2601.05796v1 [math.AG] 9 Jan 2026

$\mathbb{A}^1$-低次对称幂与分裂托里克簇的欧拉示性数

Louisa F. Bröring

摘要

对于域 k 上的光滑射影概形 X，或者对于特征k 为零的任意簇 X，我们计算 $\mathrm{Sym}^2(X)$ 在 $\mathrm{char}(k) \neq 2$ 时的紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数，以及 $\mathrm{Sym}^3(X)$ 在 $\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$ 时的紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数。为此，我们将 Pajwani-Pál 最初研究的 G-等变二次欧拉示性数的定义推广到任意特征，并研究它与商的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数之间的关系。作为应用，我们证明，$\mathrm{Sym}^n(X)$ 的紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数与 Pajwani-Pál 为 $n = 2, 3$ 构造的幂结构所给出的预测一致。

此外，我们计算了分裂托里克簇的紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数，并证明它们所有对称幂的紧支撑$\mathbb{A}^1$-欧拉示性数都与 Pajwani-Pál 构造的幂结构所给出的预测一致。

目录

I引言 2 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数、低次对称幂与等变二次欧拉示性数 .3应用：与 Pajwani-Pál 的幂结构预测进行比较.4 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数、托里克簇及其对称幂. 5相关工作 .6记号与约定 .6致谢 .7

1 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数 7 2 幂结构与对称幂 11 3 $\mathbb{A}^1$-分裂环面簇及其对称幂的欧拉示性数 14 4 关于商的光滑性的结果 18

5 等变二次欧拉示性数 21
5.1 构造 .215.2 性质 .305.3 在 $\mathbb{A}^1$-商的欧拉示性数中的应用 . . . . . 386 显式计算 Sym^2 427 显式计算 Sym^3 468 与幂结构预测的比较 59

参考文献 64

引言

（紧支撑） $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数是拓扑学中欧拉示性数在代数几何中的一种精化。Hoyois [Hoy14] 最早在光滑射影概形的情形下研究了这一概念。其构造运用了动机同伦理论；对于任意簇，这一构造在特征为零时归功于 Arcila-Maya、Bethea、Opie、Wickelgren 和 Zakharevich [Arc+22]，在任意特征下则归功于 Levine、Pepin Lehalleur 和 Srinivas [LPS24]。设 k 是特征不为二的完美域，X 是其上的一个簇。那么 X 的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数 $\chi_c(X/k)$不是一个整数，而是域 k上（虚）非退化二次型所构成的格罗滕迪克-维特环 $\mathrm{GW}(k)$中的一个元素。更具体地说，$\mathbb{A}^1$-欧拉示性数定义了一个动机测度 $\chi_c\colon\ K_0(\mathrm{Var}_k) \to \mathrm{GW}(k)$。

$\mathbb{A}^1$-欧拉示性数包含大量信息：若 $k \subset \mathbb{R}$，且 X 是定义在 k上的光滑射影概形，那么 $\chi_c(X/k)$的秩等于 $X(\mathbb{C})$的拓扑欧拉示性数，而 $\chi_c(X/k)$相对于指定嵌入到 $\mathbb{R}$ 的符号等于 $X(\mathbb{R})$的拓扑欧拉示性数，参见 [Lev20，注 2.3 (1) 和命题 2.4 (6)]。此外，Saito [Sai94 的定理 2] 使我们能够将 $\chi_c(X/k)$的判别式解释为 ℓ-进上同调的行列式；这里的 ℓ可以是任意与基域的特征互素的数，参见 [PP23，定理 2.22]。

$\mathbb{A}^1$-欧拉示性数常用于精化计数几何计划，该计划旨在证明定义在更一般的域上的计数结果，通常以二次型的形式表述，并运用动机同伦理论。通过从精化结果中取秩或符号，往往可以推出已知的不变元或结果。

一般而言，$\mathbb{A}^1$-欧拉示性数难以计算，而关于 X 射影但不光滑的概形，几乎没有显式计算 $\chi_c(X/k)$的例子。尤其是，人们对商的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数知之甚少。

$\mathbb{A}^1$-低次对称幂的欧拉示性数与等变二次欧拉示性数

设 X 是定义在 k 上的光滑拟射影概形，并设 S_n 通过置换因子作用于 X^n 。商 $\mathrm{Sym}^n X := X^n/S_n$ 称为 X的第 n对称幂。以下，令$\langle a\rangle \in \mathrm{GW}(k)$表示二次型 $x \mapsto ax^2$，并令 H 表示双曲型$\langle 1\rangle + \langle -1\rangle \in \mathrm{GW}(k)$。本文旨在证明以下定理及其若干推论。

定理（见定理6.3）。设 X 是定义在 k上的连通光滑射影概形。将 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数 X 表示为 $\chi_c(X/k) = \beta - mH$，其中$\beta = \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i\rangle$ 且 $m \geq 0$。若维数 X 为奇数，则在 $\mathrm{GW}(k)$

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k) = n\langle 2\rangle + \sum_{1\leq i<j\leq n} \langle \alpha_i\alpha_j\rangle + m\langle -1\rangle + (m^2 - (n+1)m)\cdot H.$$

若维数 X 为偶数，则有

$$\begin{aligned}\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k) = n\langle 2\rangle + \sum_{1\leq i<j\leq n} \langle \alpha_i\alpha_j\rangle + m\langle -1\rangle + (m^2 - (n+1)m)\cdot H \\ + (\langle -2\rangle - \langle -1\rangle)\cdot \chi_c(X/k)\end{aligned}$$

在$\mathrm{GW}(k)$中。

定理（见定理 *7.11* 和注*7.12*）。假设 *char* $k \neq 2$ 不为 *3*，并设 X 是定义在 k 上的连通光滑射影概形。将 X 的 $\mathbb{A}^1$- 欧拉示性数表示为 $\chi_c(X/k) = \sum_{i=1}^m \langle \alpha_i\rangle - lH \in GW(k)$，其中 $l \geq 0$，并记作 $\beta = \sum_{i=1}^m \langle \alpha_i\rangle$。则

$$\begin{aligned}\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) = \langle 6\rangle \cdot \Bigg((\langle 1\rangle + (m-1)\langle 3\rangle)\beta + \sum_{1\leq i<j<k\leq m} \langle 6\alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle \\ + l\langle -6\rangle\beta + ml(l-1)H - \left(m + \binom{m}{2}\right) lH - \frac{1}{2}\binom{2l}{3} H \Bigg) \\ + (\langle 1\rangle - \langle 6\rangle)\cdot \chi_c(X/k) + (\langle 1\rangle - \langle 2\rangle)(\chi_c(X/k) - \langle 1\rangle)\chi_c(X/k)\end{aligned}$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

这两个定理的证明见第 6 节和第 7 节，其依据是以下观察：设 G 是一个阶数与 k 的特征互素的有限群，它作用于一个光滑射影 k-概形 X。若 X/G 光滑，则 $\chi_c((X/G)/k)$ 可显式描述为在 G-不变元上的霍奇上同调中，对杯积与迹进行复合所得的表达式 X。

概形 $\mathrm{Sym}^n X$ 对于 $n \geq 2$ 通常并不光滑。为了能够应用上述观察，我们多次进行爆 X^n 破（沿着

光滑中心），直到最终爆破所得商 Y/S_n 光滑为止。由于吹起时霍奇上同调会发生变化，我们必须追踪这些变化。为此，我们在第5节引入光滑射影 k概形 X 上带有 G 作用的 G-等变二次欧拉示性数 $\chi_G(X/k)$这一概念。这个欧拉示性数类似于 Pajwani-Pál 在 [PP23, Definition 3.5] 中引入的G-等变 de Rham 欧拉示性数。这个 G-等变二次欧拉示性数 $\chi_G(X/k)$ 取值于所谓的 G-等变非退化对称双线性型在 k 上构成的格罗滕迪克-维特环 $\mathrm{GW}^G(k)$ 中。 G-等变二次欧拉示性数在吹起下具有良好的性质，而将一个 G-等变非退化对称双线性型限制到其不变元上的操作会诱导出群同态 $\mathrm{GW}^G(k) \to \mathrm{GW}(k)$。对于光滑的 X/G，我们可以通过霍奇上同调和 X 的迹来计算 $\chi_c(X/G)$，这一观察转化为下述定理。

定理（参见定理 *5.39*）。设 X 是定义在 k 上的光滑射影概形，且 G 是一个阶数与 $\mathrm{char}\, k$ 互素的群，它作用于 X。设 $Y = X/G$ 是商，$\pi\colon X \to Y$ 是商映射。假设 G 在 X 的一个开稠密子集上自由作用，并假设 Y 光滑。那么 $\chi_c(Y/k) = \langle |G| \rangle \cdot \chi_G(X/k)^G$。

我们使用 $\chi_G(X/k)$ 以便于计算 p……的计算 $\chi_c(\mathrm{Sym}^n X/k)$ 对于 $n = 2, 3$.

对 χ_c(对称$^n X/k$）光滑射影 X 和 $n = 2$，3的计算利用了这样一个事实：我们可以找到一列以X^n 中在 S_n-作用下稳定的光滑子概形为中心的爆破，使最终爆破的 S_n-商光滑。我们使用素数阶循环群作用的光滑性判据来实现这一点，参见定理4.5，并通过循环群对 S_n 进行滤过。对于带有 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-作用的光滑概形，一般而言，无法找到一列以光滑中心进行的等变爆破，使得商光滑。这一复杂性使我们的方法无法应用于 $n \geq 4$。

应用：与 Pajwani-Pál 的幂结构预测进行比较

作为对我们计算 $\chi_c(\mathrm{Sym}^n X/k)$（其中 $n = 2$ 为 3）的应用，我们将结果与 Pajwani-Pál [PP25，推论 3.27] 中的一个预测进行比较。环 R 上的有限决定的幂结构是由一族函数 $a_n\colon R \to R$ （其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ）组成，并满足若干模仿 $f(t)^\alpha$ 对 $f(t) \in (\mathbb{Z}[[t]])^\times$ 和 $\alpha \in \mathbb{Z}$ 的定义的关系，见定义 2.1。在特征零的情形下，函数 $a_n^{\mathrm{Sym}}\colon K_0(\mathrm{Var}_k) \to K_0(\mathrm{Var}_k)$ $[X] \mapsto [\mathrm{Sym}^n X]$ 在 $K_0(\mathrm{Var}_k)$ 上构成幂结构。若 k 具有正特征，则在将 $K_0(\mathrm{Var}_k)$ 中由泛同胚关联的元素视为相同后，结论仍然成立，见定义 1.11。Pajwani-Pál [PP25，推论 3.27] 在 $\mathrm{GW}(k)$ 上构造了一个幂结构 a_*^{PP}，其性质是：若 $\mathrm{GW}(k)$ 上存在幂结构 a_*，且 χ_c 与幂结构相容，即对于 k 上的所有簇 X 及所有 $n \geq 0$，都有 $a_n(\chi_c(X/k)) = \chi_c(\mathrm{Sym}^n X/k)$，那么 a_* 必须与 a_*^{PP} 一致。幂结构简介见第 2 节。

一般而言， χ_c 是否与幂结构相容仍是一个未决问题。不过，确有某些概形类使得 χ_c 与幂结构相容。

对 $\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k)$ 和 $\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k)$ 的显式计算使我们能够检验其与 a_*^{PP}在 $*=2,3$ 时的相容性，详见第 8 节。

定理 （见定理 8.3）。 对于 X 上的光滑射影概形 k，有

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k) = a_2^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

定理 （见定理 8.6）。 假设 $\mathrm{char}\, k \neq 2$，3，并令 X 为 k上的光滑射影概形，则

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) = a_3^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

定理 （见定理 8.9）。 设 X 为 k 上的簇，并假设 k 的特征为零。则

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k) = a_2^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k)) \quad and \quad \chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) = a_3^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

为证明定理 8.9 ，只需利用 8.3 和 8.6 定理以及 Bittner 表示 [Bit04，定理 3。1]。

托里克簇及其对称幂的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数

在第 3 节中，我们计算分裂环面簇的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数，并验证所有环面簇都符合 Pajwani-Pál 的预测；这依赖于 Pajwani-Rohrbach-Viergever 的工作 [PRV24]。

命题 (参见命题 3.13)。 设 Σ 是一个秩为 n 的格 N中的扇。设X_Σ 是其在 k 上的关联分裂环面簇，并设 Σ_i 是 Σ 中秩为 $n-i$ 的锥的集合。则有

$$\chi_c(X_\Sigma/k) = |\Sigma_0| \cdot \langle 1\rangle + \sum_{i\geq 1} |\Sigma_i| \cdot (-2)^{i-1}(\langle -1\rangle - \langle 1\rangle) \in \mathrm{GW}(k).$$

命题 (参见命题 3.14)。 设 $X = X_\Sigma$ 是定义在k 上的分裂环面簇，且 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。则

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^n X/k) = a_n^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

本文所呈现的结果也构成了作者博士论文中的两章，该论文于2025年1月22日提交。

相关工作

关于与幂结构的相容性，还有一些相关结果。为概述这些结果，我们根据 [PRV24，定义41]，称簇 X 上的 k 为可对称化，若 $\chi_c(\mathrm{Sym}^n X/k) = a_n^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$ 对所有 $n \geq 0$均成立。

令 $K^{\mathrm{uh}}(\mathrm{Var}_k)$ 为 $K_0(\mathrm{Var}_k)$ 的商，其中将普遍同胚的簇视为相同，见定义 1.11。在 Pajwani-Pál[PP25 的早期工作、推论 4.30 和引理 2.9]，Pajwani-Rohrbach-Viergever [PRV24 的定理 4.10 和推论 4.3] 的基础上，我们证明所有 étale 线性簇都是可对称化的，也就是说，它们属于由 $[\mathbb{A}^1]$ 和零维簇生成的 $K_0^{\mathrm{uh}}(\mathrm{Var}_k)$ 子环。他们还证明，所有可对称化簇构成一个子模，其标量环是由零维簇生成的 $K_0^{\mathrm{uh}}(\mathrm{Var}_k)$ 子群。按照 [Lev20, p. 2189] 的定义，胞腔簇是 étale 线性簇。

与 Anna Viergever [BV25 的定理 27], 共同证明所有曲线都是可对称化的。

Bejleri-McKean [BM24，定理 7。10] 证明了：证明所有簇均可对称化，等价于证明所有簇 X 在 $\chi_c(X/k) = 0$均可对称化。他们还证明了 [BM24，定理 94]：当 k 上的所有簇均可对称化，只要 $\mathrm{GW}(k)$ 是无挠的。例如，毕达哥拉斯域就是这种情况，例如 $\mathbb{R}$根据 [Sch85，第 2 章，定理 4.10 (iii)]。

在本文的计算中，我们更多地采用 Pajwani- Pál [PP25]和 Pajwani-Rohrbach-Viergever [PRV24] 的方法，以扩展任意域上可对称化簇的类别。

记号与约定

下文中，设 k 为一个特征不为二的完美域。假设 k 是完美域并非绝对必要；我们这样做是为了避免技术上的复杂性。利用引理4.2 (1) 以及 [Lev20，备注 2.1 2]。

对于域 k 上的概形 X 和 Y，我们用 $X \times Y$ 表示它们在 k 上的纤维积。对于 k-向量空间 V 和 W，我们用 $V \otimes W$ 表示它们作为 k-向量空间的张量积。对于概形 X 上的点 $x \in X$，我们用 $k(x)$ 表示 x 处的剩余域。

对于光滑的 k-概形 X，我们用 $\mathrm{CH}^*(X)$ 表示 X 的肖氏环，用 TX 表示 X 的切丛。对于光滑闭子概形 $i\colon Y \subset X$，我们用 $N_Y X = i^*TX/TY$ 表示 X 中 Y 的法丛。

我们用 $\mathbb{A}^1$ 表示定义在 k 上的仿射直线 $\mathbb{A}^1_k$，用 $\mathbb{P}^n$ 表示定义在 k 上的 n 维射影空间 $\mathbb{P}^n_k$。若 X 是定义在 k 上的光滑射影概形，我们用 $\Omega^{X/k}$ 表示 X 相对于 k 的卡勒微分层。对于 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们记 $\Omega^i_{X/k} := \bigwedge^i \Omega^{X/k}$。对于一个等维、维数为 n 的光滑 k-概形 X，我们记 $\mathrm{Tr}^{X/k}\colon H^n(X, \Omega^n_{X/k}) \to k$，表示由塞尔对偶诱导的迹映射。若上下文已明确 X，我们也将 $\mathrm{Tr}^{X/k}$ 简记为 Tr。

对于 p、q、p'、$q' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们记 $ab := a \cdot b := a \cup b \in H^{q+q'}(X, \Omega_X^{p+p'})$，表示 $a \in H^q(X, \Omega_X^p)$ 与 $b \in H^{q'}(X, \Omega_X^{p'})$ 的杯积。若将 $a \in H^q(X, \Omega_X^p)$ 视为次数为 $q-p$ 的对象，则此杯积是分次交换的；因此，对于 $a \in H^q(X, \Omega_X^p)$ 和 $b \in H^{q'}(X, \Omega_X^{p'})$，有 $ab = (-1)^{(q-p)(q'-p')}ba$。

对于拟紧拟分离概形 X，令 $\mathrm{SH}(X)$ 表示由 Hoyois 描述的 X 稳定动机同伦范畴 [Hoy17],，并令$1_X \in \mathrm{SH}(X)$ 表示 $\mathrm{SH}(X)$中相对于楔积的单位对象。

我们将集合$\{1, \ldots, n\}$ 上的置换群记为 S_n，并将符号同态记作 $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$。我们将 $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ 的核记为 A_n。对于拟射影 k-概形 X 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们将 X 的 n 次对称幂记为 $\mathrm{Sym}^n X = X^n/S_n$。这里，$S_n$ 通过置换 X^n 的因子来作用。

致谢

我谨向我的导师 Marc Levine 致以最诚挚的谢意，感谢他向我提出这个课题，并在过去几年里给予我宝贵的支持。我也非常感谢 Anna Viergever 与我进行了许多富有启发性的讨论，帮助我理清了对这个课题的思路。谨向 Sabrina Pauli 致以诚挚谢意，感谢她与我进行了许多精彩的讨论，并对我的论文提出了反馈。非常感谢 Jesse Pajwani 与我深入讨论等变二次欧拉示性数和欧拉示性数的计算。我还要感谢 Dhyan Aranha、Tom Bachmann、Linda Carnevale、Jochen Heinloth、Fabien Morel、Clémentine Lemarié-Rieusset、Herman Rohrbach、Hind Souly，以及我的第二位导师 Johannes Sprang，感谢他们与我进行有趣的讨论，并向我解释基本概念。我还要感谢 Niklas Müller 组织了一个关于 GIT 结构变化的研讨会，这促成了我在第3节中的计算；也感谢 Ulrich Görtz 向我推荐了论文 [Kni73]。我也非常感谢 Stefan Schreieder 和汉诺威莱布尼茨大学的代数几何研究组，在我探望伴侣期间为我提供工作场所，并让我在那里感受到热情友好的氛围。

本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）研究培训组 2553 资助，项目编号：412744520。

1 $\mathbb{A}^1$-欧拉特征

（紧支撑） $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数是对 k上的簇的（紧支撑）拓扑欧拉示性数的一种精化。这种精化是一种取值于二次型的格罗滕迪克-维特环中的动机测度。 $\mathbb{A}^1$ Hoyois 首先研究了光滑射影概形情形下的 [Hoy14]。Arcila-Maya、Bethea、Opie、Wickelgren 和 Zakharev 首次在特征零情形下构造了作为簇的 Grothendieck 环上的动机测度的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数-

ich [Arc+22，定理 2。13]。我们将在此简要介绍 Levine、Pepin Lehalleur 和 Srinivas 在任意特征下给出的构造 [LPS24，第5节。1]。

定义 1.1。令 $K_0(\mathrm{Var}_k)$ 表示 k 上簇的*Grothendieck* 群。也就是说，$K_0(\mathrm{Var}_k)$ 是由 k 上簇 X 的同构类$[X]$ 生成的自由阿贝尔群，并对剪切关系取商：对于 $Z \subset X$ 一个闭子簇，我们有

$$[X] = [Z] + [X \setminus Z]$$

在 $K_0(\mathrm{Var}_k)$ 中。

乘积法则 $[X][Y] = [X \times_k Y]$ 在 $K_0(\mathrm{Var}_k)$ 上诱导出环结构。从 $K_0(\mathrm{Var}_k)$ 出发的环同态称为动机测度。

定义 1.2。 k 上的格罗滕迪克-维特环GW(k) 定义为 k 上非退化二次型等距类所成幺半群（运算为正交直和）的群完备化。

二次型的张量积在群 GW(k) 上诱导出环结构。

注 1.3。设域 k 的特征不为 2，则非退化二次型与非退化对称双线性型等价。在此情形下，通过初等线性代数计算可得 GW(k) 的如下表示：二次型 $\langle a\rangle$ ：$x \mapsto ax^2$ 对 $x \in k^\times$ 生成 GW(k)，且这些型满足以下关系，其中 $a, b \in k^\times$:

(1) $a \cdot b = ab$，(2) $a + b = a + b + ab(a + b)$，只要 $a + b \in k^\times$，(3) $ab^2 = a$，以及 (4) $a + -a = 1 + -1 =: H$。

二次型 $H = \langle 1\rangle + \langle -1\rangle$ 称为双曲型。

这种表示的最初描述归功于 Witt [Wit37，第 1] 节。此处给出的表示见 [Mor12，引理 3。9], 其中，该表示是从维特环的相应结论推导出来的，该结论由 Milnor 和 Husemoller 证明 [MH73，第 4] 章中的引理 (1.1)。请注意，关系式 (1) 未包含在 [Mor12，引理 3 中。9] 因为其中的描述给出了作为群的 $\mathrm{GW}(k)$。我们在此加入该关系式，以描述 $\mathrm{GW}(k)$ 的环结构。

Morel-Voevodsky [MV99] 构造了一个不稳定动机同伦范畴。由此，Voevodsky [Voe98] 为诺特底概形 S构造了稳定动机同伦范畴 SH(S)。Hoyois [Hoy17]则为 S拟紧拟分离概形构造了 SH(S)。范畴 SH(S) 是一个对称幺半范畴，其单位对象记作 $1_S \in SH(S)$。关于 SH(S) 的介绍，参见 [Hoy17] 。与

拓扑学中的稳定同伦范畴类似，存在一个无限悬挂函子Σ^∞: $\mathrm{Sm}_S \to \mathrm{SH}(S)$ 从范畴 S上的光滑概形到 SH 的六函子形式体系也已构造出来，详见 [Hoy17]。

对于 k 一个完美域，Morel [Mor02，定理 6.4.1，注记 6.4。2] 构造了一个同构$\mathrm{GW}(k) \to \mathrm{End}^{\mathrm{SH}(k)}(1_k)$ 从域 k 上的二次型的格罗滕迪克 - 维特环到 $\mathrm{SH}(k)$ 的单位对象的自同态。

若 X 是域 k 上的特征零簇，其结构映射为p_X: $X \to$Spec(k)，则利用奇点消解可以证明，$(p_X)_!(1_X) \in$SH(k) 是一个强可对偶对象，正如 Dold-Puppe [DP80，定理 1.3] 中所引入的那样。现在，$(p_X)_!(1_X)$ 的范畴欧拉示性数可计算紧支撑的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数 $\chi_c(X/k) \in$ GW(k)。

若 X 是域 k 上的特征 $p > 2$ 簇，其结构映射为$p_X : X \to$Spec(k)，则利用 Riou 的一个结果 [Lev+19，推论 B.2]，可以证明，$(p_X)_!(1_X) \in$SH(k)$[\frac{1}{p}]$ 在对 p求逆后是一个强可对偶对象。现在，$(p_X)_!(1_X)$ 的范畴欧拉示性数给出欧拉示性数 $\chi_c(X/k) \in$GW(k)$[\frac{1}{p}]$；此处利用 Morel 的同构将 $\mathrm{End}^{\mathrm{SH}(k)[1/p]}(1_k)$ 与 GW(k)$[\frac{1}{p}]$识别。接着可以证明，$\chi_c(X/k)$ 属于单射 GW(k) $\to$GW(k)$[\frac{1}{p}]$ 的像，因此可以将紧支撑的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数定义为一个元素 $\chi_c(X/k) \in$ GW(k)。

定义 1.4。（具有紧支集的） $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数 $\chi_c(X/k) \in$GW(k) 定义为在 Morel 的同构下，与 $\chi^{\mathrm{cat}}((p_X)_!(1_X)) \in \mathrm{End}^{\mathrm{SH}(k)[\frac{1}{e}]}(1_k)$ 相对应的元素。其中，e表示 k的指数特征。

这给出了一个动机测度 χ_c: $K_0(\mathrm{Var}_k) \to$ GW(k)。

由于本文只考虑具有紧支集的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数，为简洁起见，我们将省略“具有紧支集”，仅写作 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数。

注记 1.5。设 $k \subset \mathbb{R}$，并设 X 是定义在 k上的光滑射影概形。Levine [Lev20，注记 2。3] 表明，χ_c（X/k）的秩与 X（$\mathbb{C}$）的拓扑欧拉示性数一致，并且其符号与 X（$\mathbb{R}$）的拓扑欧拉示性数一致。

若 k 的特征不为 2 且 X 是定义在 k上的光滑射影概形，则 Saito 的一个定理 [Sai94，定理 2] 可用于将 $\chi_c(X/k)$ 的判别式解释为 ℓ-进上同调的行列式，其中 ℓ 与 k的特征互素。更详细的描述见[PP23，定理 2。22]。

例 1.6. 我们有

$$\chi_c(\mathbb{P}^n(k)) = \sum_{i=0}^{n} \langle (-1)^i \rangle = \begin{cases} \langle 1 \rangle + \frac{n}{2} \cdot H & \text{if } n \text{ is even,} \\ \frac{n+1}{2} H & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

例如，参见 [Hoy14，例 1。7] 或 [Lev20，例 2.6 1。] 中的证明。

$\mathbb{A}^1$-欧拉示性数通常很难计算。Levine-Raksit 的动机高斯-博内定理 [LR20，定理 5.3 和定理 8。4] 提供了一种通过欧拉类的推前来计算 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数的方法。Déglise-Jin-Khan 给出了一个更一般的版本 [DJK21，定理 4.6。1]。这里我们仅讨论动机高斯-博内定理的两个非平凡推论，它们足以证明本文中的结果。

定理 1.7 ([LR20，定理 8.6 (3)])。 设 X 是一个等维、光滑射影概形，定义在 k上。则有

$$\chi_c(X/k) = \left(\bigoplus_{i,j=0}^{\dim_k X} H^i(X, \Omega^j_{X/k})[j-i], q^{Hdg} \right) \in \mathrm{GW}(k) \qquad (1\text{-A})$$

在将 $\mathrm{GW}(k)$识别为有限维 k-向量空间的有界链复形范畴中次数 0 的对称对象所构成的格罗滕迪克-维特环时，详见 *Panin-Walter* *[PW18，第 4 节和5]*。这里， q^{Hdg} 是对称双线性型

$$\bigoplus_{i,j=0}^{\dim_k X} H^i(X, \Omega^j_{X/k})[j-i] \otimes \bigoplus_{i,j=0}^{\dim_k X} H^i(X, \Omega^j_{X/k})[j-i] \xrightarrow{\cup} H^n(X, \Omega^n_{X/k})[0] \xrightarrow{\mathrm{Tr}} k$$

其中，Tr 是塞尔对偶的迹映射。

或者，(1-A) 在应用从 $\mathbb{Z}$-分次非退化对称双线性型到 k 的典范映射后成立，详见例$\mathrm{GW}(k)$*5.18*。

推论 1.8 ([LR20，推论 8.7])。 设 X 是一个 n维光滑射影概形，定义在 k上。

- 若 n 为奇数，则 $\chi_c(X/k) = m \cdot H$，其中 $m \in \mathbb{Z}$为某个整数。
- 若 n 为偶数，则 $\chi_c(X/k) = Q + m \cdot H$，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 为某个整数，且 Q 是与由复合映射给出的对称双线性型相对应的二次型

$$H^{n/2}(X, \Omega^{n/2}_X) \times H^{n/2}(X, \Omega^{n/2}_X) \xrightarrow{\cup} H^n(X, \Omega^n_X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} k.$$

这里， $\cup$ 是杯积，迹 是塞尔对偶中的迹映射。

例 1.9。 剪刀关系给出 $[\mathbb{P}^n] = [\mathbb{A}^n] + [\mathbb{P}^{n-1}]$ 和 $[\mathbb{G}_m] = [\mathbb{A}^1] - [\mathrm{Spec}\, k]$。因此,

$$\chi_c(\mathbb{A}^n) = \chi_c(\mathbb{P}^n) - \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}) = \langle (-1)^n \rangle \quad \text{and} \quad \chi_c(\mathbb{G}_m) = \chi_c(\mathbb{A}^1) - \chi_c(\mathrm{Spec}\, k) = \langle -1 \rangle - \langle 1 \rangle.$$

注 1.10。紧支撑 $\mathbb{A}^1$欧拉示性数满足 $K_0(\mathrm{Var}_k)$中成立的所有关系。其中包括:

- For k-varieties X and Y, we have $\chi_c(X \times Y/k) = \chi_c(X/k) \cdot \chi_c(Y/k)$.

•若 $E \to X$ 是秩为 r 、底空间为 k簇 X的射影丛，则$\chi_c(E/k) = \chi_c(\mathbb{P}^r/k) \cdot \chi_c(X/k)$。~

• 若 $X = \mathrm{Bl}_Z X$ 是将 k-簇 X 沿闭子簇 Z 进行爆破所得，且 ~ ~若 $E \subset X$是例外除子，则 $\chi_c(X/k) = \chi_c(X/k) - \chi_c(Z/k) + \chi_c(E/k)$。

• 若 k-簇 $X = U \cup V$ 是不交并，由两个局部闭子簇 U， $V \subset X$组成，则 $\chi_c(X/k) = \chi_c(U/k) + \chi_c(V/k)$。

该 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数并非单射动机测度。核 χ_c中存在一些有意义的理想。其中之一是由泛拓扑同胚簇生成的理想，正如 Bejleri-McKean[BM24第 5]节所证明。

定义 1.11。概形间的态射 $f\colon X \to Y$ 若对于每个概形 $Y' \to Y$， $X \times_Y Y' \to Y'$ 所诱导的底层拓扑空间之间的映射都是同胚，则称其为泛同胚态射。

Let

$$I := ([X] - [Y];\ \text{存在一个泛同胚}\ f\colon X \to Y) \subset K_0(\mathrm{Var}_k)$$

是由通过泛同胚相联系的 k-簇之间的差所生成的理想。我们将模泛同胚的 k-簇 *Grothendieck* 环 定义为商环 $K_0^{\mathrm{uh}}(\mathrm{Var}_k) := K_0(\mathrm{Var}_k)/I$。

注 1.12 ([CNS18，第 2 章，命题 4.4.6 和推论 4.4.7])。我们有 $K_0(\mathrm{Var}_k) = K_0^{\mathrm{uh}}(\mathrm{Var}_k)$，如果 k 具有特征零。

命题 1.13 ([BM24，推论 5.4])。紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数可通过 $K_0^{\mathrm{uh}}(\mathrm{Var}_k)$因子化。

详见 [Lev20，第 2] 节，以及 [BM24，第 2–5] 节，了解 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数及其基本性质的详细论述。

2 幂结构与对称幂

幂结构的概念最早由 Gusein-Zade、Luengo 和 Melle-Hernández [GLM04] 研究并定义，随后在 [GLM06]中得到了进一步完善。正如 λ-环是外幂概念的一种推广，幂结构也是取幂概念的一种推广。在本节中，设 R 为一个交换环。R 上的幂结构是一个映射 $\varphi\colon R \times (1 + tR[[t]]) \to (1 + tR[[t]]);\ (r, f(t)) \mapsto f(t)^r$，满足某些性质；精确定义见[GLM06，第 354] 页。本文仅考虑 GLM06 第 354] 页意义下的有限决定幂结构。在这种情况下，幂结构完全由项 $(1-t)^{-r} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(r)t^i$确定，其中 $r \in R$ 满足某些条件。由于我们只关注这种情形，下面给出其精确定义。

定义 2.1 ([PP25，推论 2.5])。一个幂结构在 R 上是由一族函数构成的 a_n: $R \to R$ 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，记作 a_*，并满足以下条件:

- $a_0 = 1$,
- $a_1 = \mathrm{id}_R$,
- $a_i(0) = 0$ 对所有 $i \geq 1$,
- $a_i(1) = 1$ 对所有 $i \geq 1$，且
- $a_n(r+s) = \sum_{i=0}^{n} a_i(r) \cdot a_{n-i}(s)$ 对所有 $r,\ s \in R$ 且 $n \geq 0$。

定义 2.2 ([PP25，定义 2.6 和命题 2。7])。环同态 $\varphi\colon R \to S$ 在配备幂结构的环之间 a_*^R和 a_*^S保持幂结构，如果有 $\varphi(a_n^R(r)) = a_n^S(\varphi(r))$ 对所有 $r \in R$ 且 $n \geq 0$。

引理 2.3. 设 a_* 是环 R 上的一个幂结构，且 $r_1, \ldots, r_m \in R$。那么对于 $n \geq 0$，有

$$a_n\left(\sum_{i=1}^{m} r_i\right) = \sum_{i_1+\cdots+i_m=n} a_{i_1}(r_1)\cdots a_{i_m}(r_m).$$

证明。对 n 作归纳，并使用加法关系 $a_n(r+r') = \sum_{i=0}^{n} a_i(r)a_{n-i}(r')$。

□

例 2.4. McGarraghy [McG05，第 4] 构造了所谓的非阶乘对称幂，其定义在 $\mathrm{GW}(k)$ 上。这些对象构成一个幂结构 a_*^{NF}，其构造本质上依据 [McG05，命题 4。23] 这个幂结构由 $a_n^{\mathrm{NF}}(\langle\alpha\rangle) = \langle\alpha^n\rangle$ 确定。

例 2.5. 在 $K_0^{\mathrm{uh}}(\mathrm{Var}_k)$ 上存在一个由 $a_n^{\mathrm{Sym}}([X]) = [\mathrm{Sym}^n X]$ 确定的幂结构，适用于拟射影 k-簇 X。注意，a_i^{Sym} 是卡普兰诺夫 ζ 函数的系数，参见 [Kap00, (1.3)] 或 [Mus11, 第 1 节4]。在特征零下，这定义了 $K_0(\mathrm{Var}_k)$ 上的一个幂结构，因为 $K_0(\mathrm{Var}_k) = K^{\mathrm{uh}}(\mathrm{Var}_k)$。Gusein-Zade、Luengo 和 Melle-Hernández [GLM04; GLM06] 首先指出这定义了一个幂结构。更详细的说明见 [BM24, 第 6] 节。

由于取对称幂的运算在$K^{\mathrm{uh}}(\mathrm{Var}_k)$上构成幂结构，而格罗滕迪克-维特环也具有幂结构，因此人们不禁会问，紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数是否与 $K_0^{\mathrm{uh}}(\mathrm{Var}_k)$上的幂结构 a_*^{Sym}以及$\mathrm{GW}(k)$上的某种幂结构相容。McKean和Nicaise向Pajwani和Pál提出了这个问题，他们证明了以下结果。

定理 2.6 ([PP25，推论 3。27])。 存在一种幂结构， a_*^{PP}，定义在$\mathrm{GW}(k)$上，使得

$$a_n^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha\rangle) = \langle\alpha^n\rangle + \frac{n(n-1)}{2}t_\alpha$$

对于 $\alpha \in k^\times$。这里 $t_\alpha = \langle 2\rangle + \langle\alpha\rangle - \langle 1\rangle - \langle 2\alpha\rangle$。

此外，若 $\mathrm{GW}(k)$ 上存在一种幂结构，使得 χ_c： K_0^{uh}(簇$_k$) $\to \mathrm{GW}(k)$与幂结构相容，那么这种幂结构就是 *Pajwani-Pál* 幂结构 a_*^{PP}。

注 2.7。 按照此处给出的形式，Pajwani-Pál 仅在特征零时证明了定理 2.6。在正特征下，他们证明了 χ_c 在零维簇子环上的限制 $K_0(\text{Ét})$在 K_0(簇$_k$)上的断言，因为那里 a_*^{Sym}存在一种无需对普遍同胚求逆的幂结构。由于 $K_0(\text{Ét}) \subset K_0^{\mathrm{uh}}$(簇$_k$)，他们的陈述也同样适用于此处。

注 2.8。此幂结构 a_*^{PP}与 McGarraghy 的非阶乘对称幂结构 a_*^{NF}一致，当 2 是 k 中的平方时。更一般地， $a_n^{\mathrm{PP}}(\alpha) = a_n^{\mathrm{NF}}(\alpha)$ 当且仅当 $[2] \cup [\alpha] = 0 \in H^2(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，参见 [PP25，引理 3.29]。也就是说， a_*^{PP}在由所有满足$a_n^{\mathrm{PP}}(\alpha) = \alpha^n$的 α 生成的子群上与 a_*^{NF} 一致。特别地，二次型 1 和 -1 属于此子群。

注 2.9 ([PP25，推论 3.19])。 根据 [PP25，推论 3.18], 元素t_α 在 $\mathrm{GW}(k)$中是二阶挠元。因此， a_*^{PP}的定义可以改写为

$$a_n^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha\rangle) = \begin{cases} \langle\alpha^n\rangle, & n \equiv 0, 1 \mod 4, \\ \langle\alpha^n\rangle + t_\alpha, & n \equiv 2, 3 \mod 4. \end{cases}$$

一般而言， χ_c 是否与幂结构相容仍是一个未决问题。不过，对于某些类别的概形， χ_c 与幂结构相容。

定义 2.10 ([PRV24，定义 4.1])。 若簇 X 满足 可对称化 条件$\chi_c(\mathrm{Sym}^n(X)) = a_n^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X))$ 对所有 $n \geq 0$均成立。

如引言中所述，目前已有一些可对称化簇的例子。

注 2.11。 Pajwani-Rohrbach-Viergever 仅使用a_*^{PP}的具体定义来检验 $\mathbb{A}^n$ 是否可对称化；在这种情况下，项 t_α 会消失。由于$t_\alpha \in \mathrm{GW}(k)$ 是挠的，因此 Bejleri-McKean 在相容性结果 t_α 中也没有出现项 [BM24，定理 9。4]。本文证明的相容性结果，是自 [PP25] 以来，首次实际计算可能非零的 t_α。

3 $\mathbb{A}^1$-分裂托里克簇及其对称幂的欧拉示性数

现在我们将计算分裂环面簇及其对称幂的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数。我们的方法深受以下关于复环面簇拓扑欧拉示性数的计算启发，该计算见于 [VA 10]。

Demazure [Dem70]首先构造了托里克簇。我们简要回顾遵循 Elizondo、Lima-Filho、Sottile 和 Teitler 的分裂托里克簇构造 [Eli+14，第 2 节。1] 为陈述相关结果，令 N为一个秩为 n 的有限生成自由阿贝尔群，并令 $M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$为其对偶。

定义 3.1 ([Eli+14，第 218]页）。令 σ 为 N的有限生成子半群。极性 $\sigma^\vee$ 的 σ 是有限生成子半群

$$\sigma^\vee = \{u \in M \mid u(v) \geq 0 \text{ for all } v \in \sigma\}$$

M的。

一个锥是饱和的有限生成子半群 σ，也就是说，$(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$。一个面是锥 σ 的子半群 σ，满足存在 $u \in \sigma^\vee$ 使得

$$\tau = \{v \in \sigma \mid u(v) = 0\}.$$

若 0 是锥 σ的一个面，则锥 σ 称为尖。

注 3.2。设 σ 是一个锥。下文中，我们用 $\tau \preceq \sigma$ 表示 τ 是 σ的一个面。

另外，注意到 σ 是 σ 的一个面，因为 σ 是与 $u = 0 \in \sigma^\vee$相关联的面。

定义 3.3 ([Eli+14，第 218]页。设 σ 是 N中的一个尖锥。我们可以将 σ 与以下仿射概形相关联：$V_\sigma := \mathrm{Spec}\, k[\sigma^\vee]$，它是由以下元素生成的半群代数在 k 上的 $\sigma^\vee$。

注 3.4 ([Eli+14，第 218]页。设 $\tau \subset \sigma$ 是 N中一个尖锥的面。因此，包含 $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$ 诱导出一个开浸入 $V_\tau, \to V_\sigma$，因为 $k[\tau^\vee]$是 $k[\sigma^\vee]$的分式域的一个子环。

定义 3.5 ([Eli+14，第 218])。扇 Σ 由 N 中的有限个尖锥组成，并满足以下条件 N：

(1) Σ中任意一个锥的每个面也都是 Σ 中的一个锥，并且

(2) Σ 中任意两个锥的交集都是公共面，根据（1），它也必然是 Σ中的一个锥。

定义 3.6 ([Eli+14，第 218]页)。给定一个扇 Σ 于 N中，我们将其关联的 分裂环面簇 X_Σ 构造为 $X_\Sigma = \mathrm{colim}_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma$。也就是说，对于 V_σ 中的 σ 一个锥 Σ，将相应的仿射概形 Σ沿着与 Σ中较小锥相对应的公共子概形粘合起来。

注意，由于 Σ 中的所有锥都是尖的，它们都包含作为一个面的锥 $\mathbf{0}$。因此，每个仿射 V_σ 都包含仿射概形 V_0。

注记 3.7 ([Eli+14，第 218]页）。我们有 $0^\vee = M$ 因此，我们有 $V_0 = \operatorname{Spec} k[M] \cong \mathbb{G}_m^{\operatorname{rank} N}$，它是一个分裂环面。

注记 3.8 ([Eli+14，第 218]页）。设 Σ 是 N中的一个扇，并设 $T = \operatorname{Spec} k[M] = V_0 \cong \mathbb{G}_m^{\operatorname{rank} N}$。对于一个锥 $k[\sigma^\vee] \to k[M]$，包含 $\sigma \in \Sigma$ 诱导出一个忠实作用

$$T \times_{\operatorname{Spec} k} V_\sigma \to V_\sigma$$

通过映射 $k[\sigma^\vee] \to k[M] \otimes k[\sigma^\vee]$; $u \mapsto u \otimes u$。该作用与包含 $V_\tau \to V_\sigma$ （对于 τ 而言， σ的一个面）相容，因此， T 对 V_σ 的作用组装成 X_Σ 上的一个忠实 T 作用。

为了计算如 $\mathbb{A}^1$ 中分裂环面簇的紧支集欧拉示性数 [VA 10], ，我们需要根据扇 Σ中的锥，将分裂环面簇分解为分裂环面。这通常称为轨道-锥对应。为方便读者，现简要回顾其表述。详见 Fulton [Ful93，第 3 节。1] 以了解详情。

设 σ 是 Σ中的一个锥。设 $N_\sigma \subset N$ 为由 σ 生成的子格，并令 $N(\sigma) = N/N_\sigma$。令

$$M(\sigma) = \{u \in M \mid u(v) = 0 \text{ for all } v \in \sigma\}$$

因此， $M(\sigma) = N(\sigma)^\vee$。定义 $O_\sigma = \operatorname{Spec} k[M(\sigma)]$，并对 $\tau \preceq \sigma$ 中的一个面定义 $V_\sigma(\tau) = \operatorname{Spec} k[\sigma^\vee \cap M(\tau)]$。

对于 $\sigma \in \Sigma$ 和 $\tau \preceq \sigma$ 中的一个面，由如下赋值诱导的满射环同态为 $i^*_{\tau\preceq\sigma}\colon k[\sigma^\vee] \to k[\sigma^\vee \cap M(\tau)]$ 和 $i^*_\tau\colon k[\tau^\vee] \to k[M(\tau)]$

$$i^*_{\tau\preceq\sigma}(u) = \begin{cases} u \in k[\sigma^\vee \cap M(\tau)] & \text{if } u \in M(\tau) \cap \sigma^\vee, \\ 0 \in k[\sigma^\vee \cap M(\tau)] & \text{otherwise,} \end{cases}$$

对于 $u \in \sigma^\vee$ 和

$$i^*_\tau(u) = \begin{cases} u \in k[M(\tau)] & \text{if } u \in M(\tau), \\ 0 \in k[M(\tau)] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $u \in \tau^\vee$。这些环同态定义了闭浸入 $i_{\tau\preceq\sigma}\colon V_\sigma(\tau) \to V_\sigma$ 和 $i_\tau\colon O_\tau \to V_\tau$。

此外，包含 $\sigma^\vee \cap M(\tau) \subset M(\tau)$ 和 $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$ 诱导出包含 $j^*_{\tau\preceq\sigma}\colon k[\sigma^\vee \cap M(\tau)] \to k[M(\tau)]$ 和 $j^*_{\sigma\succeq\tau}\colon k[\sigma^\vee] \to k[\tau^\vee]$。诱导的概形态射 $j_{\tau\preceq\sigma}\colon O_\tau \to V_\sigma(\tau)$ 和 $j_{\sigma\succeq\tau}\colon V_\tau \to V_\sigma$ 是开浸入。

这些态射诱导出概形的交换图

$$\begin{array}{ccc} O_\tau & \xrightarrow{j_{\tau\preceq\sigma}} & V_\sigma(\tau) \\ \downarrow{\scriptstyle i_\tau} & & \downarrow{\scriptstyle i_{\tau\preceq\sigma}} \\ V_\tau & \xrightarrow{j_{\sigma\succeq\tau}} & V_\sigma. \end{array}$$

这将 O_τ 实现为 V_σ的一个局部闭子集。通过描述 $X_\Sigma = \operatorname{colim}_{\sigma\in\Sigma} V_\sigma$，这也将 O_σ 表示为 X_Σ的一个局部闭子集。此外，O_σ 是一个 T-轨道，同构于 $\mathbb{G}_m^{\operatorname{rank} N - \operatorname{rank}\sigma}$。

命题 3.9 (轨道-锥对应 [Ful93，第 54] 页命题。设 Σ 是 N中的一个扇。那么，对于每个锥 σ， Σ都有如下分解：V_σ 分解为局部闭子集

$$V_\sigma = \coprod_\tau O_\tau$$

其中 τ 遍历 σ的面。

特别地，我们得到一个分解

$$X_\Sigma = \coprod_{\sigma\in\Sigma} O_\sigma$$

将 X_Σ 分解为局部闭子集。

注记 3.10。注意，[Ful93，第 54] 页命题仅针对 $k = \mathbb{C}$陈述，但其证明对任意域也成立。

引理 3.11。设 $n \geq 1$ 为一个整数，则有

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2i+1} = 2^{n-1}.$$

证明。首先注意到我们有

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2i+1}.$$

因此，只需证明其中一个等式即可。

我们先考虑 $n = 2m+1$ 为奇数的情况。因此，我们有 $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$，并且

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{n-2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2i+1},$$

其中，我们在最后一个等式中重新编排了求和指标，将 i 替换为 $m-i$，并注意到 $m = \lfloor n/2\rfloor$。这就完成了 n 为奇数时的证明。

若 $n = 2m$ 为偶数，则由上述奇数情形可得

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n-1}{2i-1} + \binom{n-1}{2i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n-1}{2i-1}}_{=2^{n-2}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n-1}{2i}}_{=2^{n-2}} = 2\cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}.$$

至此，偶数情形的证明完成。 □

引理 3.12. 对于 $n \geq 1$

$$\chi_c(\mathbb{G}_m^n/k) = (-2)^{n-1}(\langle -1\rangle - \langle 1\rangle).$$

证明。 由例 1.9，可得 $\chi_c(\mathbb{G}_m/k) = \langle -1\rangle - \langle 1\rangle$。利用引理 3.11 即得

$$\begin{aligned}
\chi_c(\mathbb{G}_m^n/k) &= (\langle -1\rangle - \langle 1\rangle)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \langle (-1)^i \rangle \\
&= (-1)^{n-1} \underbrace{\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1}}_{=2^{n-1}} \langle -1\rangle - (-1)^{n-1} \underbrace{\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i}}_{=2^{n-1}} \langle 1\rangle \\
&= (-2)^{n-1}(\langle -1\rangle - \langle 1\rangle).
\end{aligned}$$

□

命题 3.13。 设 Σ 是秩为 n 的格 N 中的一个扇。设 X_Σ 是其在 k 上对应的分裂环面簇，且设 Σ_i 是 Σ 中秩为 $n-i$ 的锥的集合。那么我们有

$$\chi_c(X_\Sigma/k) = |\Sigma_0| \cdot \langle 1\rangle + \sum_{i\geq 1} |\Sigma_i| \cdot (-2)^{i-1}(\langle -1\rangle - \langle 1\rangle) \in \mathrm{GW}(k).$$

证明。 扇 Σ 给出了 X_Σ 的一个分解，将其写成局部闭子概形的不交并

$$X_\Sigma = \coprod_{\sigma\in\Sigma} \mathbb{G}_m^{n-\operatorname{rank}\sigma}$$

根据命题3.9。在这个分解中，有 $|\Sigma_i|$ 个 $\mathbb{G}_m^i$ 的副本。因此，所需公式由剪刀关系和引理 3.12 得出。 □

利用命题 3.9，我们还可以证明环面簇是可对称化的。

命题 3.14。 设 $X = X_\Sigma$ 是 k 上的一个分裂环面簇。那么 X 是可对称化的。

证明。由命题3.9，可得

$$[X] = \sum_{i=0}^{N} \nu_i [\mathbb{G}_m^i] \in K_0(\mathrm{Var}_k)$$

对于某个 $\nu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。现在，$\mathbb{G}_m^i$ 是 K_0-étale 线性，符合 [PRV24，定义 3。1], 因为 $[\mathbb{G}_m] = [\mathbb{A}^1] - [\operatorname{Spec} k] \in K_0(\mathrm{Var}_k)$。由于 K_0-étale 线性簇根据 [PRV24定义 3构成一个环，并且根据 [PRV24定理 410], 可对称化，因此我们得到 X 是可对称化的。

□

4 商的光滑性结果

在本节中， G 表示一个在 k上温和的有限群；也就是说，G 是一个阶数与 k 的特征互素的有限群。为了计算 $\mathbb{A}^1$群作用下商的-Euler 示性数，我们需要一些关于商的基本结果，以及一个用于判定商是否光滑的判据。本节汇集了必要的结果，并在找不到合适参考文献时，为方便读者给出这些众所周知定理的证明。我们想指出，Viehweg 也曾在代数闭域上给出命题 4.1 的证明 [Vie95，推论 3。46] 。

命题 4.1. 若 G 是一个作用于拟射影 k-概形X上的有限群，则商 X/G 存在且为一个概形，并且仍是拟射影的。此外，若 X 是射影的，则 X/G也是射影的。

证明。 商 X/G 作为概形存在，这是由 Serre [Ser88，第 III 章，第 12 节，命题 19]之后的例 1 得出的。此外，商映射是有限的，并且 X/G 是正规的。因此， [Gro61，命题 6.61] 表明 X/G具有一个丰线丛，因此是拟射影的。

注意， X/G 是分离的，因为 X/G 是拟射影的。因此， X/G若 [Sta24，标签 01W6] 若 X 是射影的，则 [Sta24，标签 0BCL], 由于固有的拟射影概形是射影的，我们得到 X/G 若 X是射影的，则 □

以下是更一般结果的一个特例；例如参见[Moo14，定理 4。16] 关于第（1）部分的一般版本。

引理 4.2。 设 $k \subset K$ 为域扩张。设 G为作用于拟射影 k-概形 X上的有限群，从而诱导出 G 在拟射影 K-概形 $X_K := X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} K$上的作用，其中 G在$\operatorname{Spec} K$上平凡作用。

（1）存在一个典范同构

$$X_K/G \cong (X/G)_K.$$

（2）存在一个典范同构

$$(X_K)^G \cong (X^G)_K.$$

证明。 如上所述，我们可以将问题归结为 $X = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的情形。设 k_G 为 G 上的函数环，将其视为不交并 $\amalg_{g\in G} \operatorname{Spec} k$，即 $k_G = \prod_{g\in G} k$。通过借助 $\prod_{g\in G} a_g \otimes \prod_{g'\in G} b_{g'} \mapsto \prod_{(g,g')\in G\times G} a_g b_{g'}$ 将 $k_G \otimes_k k_G$ 与 $k_{G\times G}$ 等同，G 上的乘法赋予交换环k_G 一个 k 上交换霍普夫代数的结构。作用

ρ: $G \times_k \mathrm{Spec}\ A \to \mathrm{Spec}\ A$ 上的 G 在 $\mathrm{Spec}\ A$ 上的作用，通过 ρ^*: $A \to k_G \otimes_k A$ 赋予 A 一个 k_G 上的余模结构。我们还有映射 i: $A \to k_G \otimes_k A, i(a) = 1 \otimes a$。不变元的子-$k$-代数 A^G 是 ρ^* 和 i 的等化子。

同样，我们可以将不变子-K-代数 $(A \otimes_k K)^G$描述为以下两个映射的等化子: ρ_K^*: $A \otimes_k K \to K_G \otimes_K (A \otimes_k K)$ 和 i_K: $A \otimes_k K \to K_G \otimes_K (A \otimes_k K)$; 这里 ρ_K: $G \times_{\mathrm{Spec}\, K} (\mathrm{Spec}\ A \otimes_k K) \to \mathrm{Spec}\ A \otimes_k K$是 ρ的基扩张。通过同构 $K_G \otimes_K (A \otimes_k K) \cong (k_G \otimes_k A) \otimes_k K$，我们得到 $\rho_K^* = \rho^* \otimes \mathrm{id}_K$ 和 $i_K = i \otimes \mathrm{id}_K$。由于 $k \subset K$ 是平坦扩张，这诱导出同构 $(A \otimes_k K)^G \cong A^G \otimes_k K$。这就证明了 (1)。

(2) 的证明类似：我们有如下笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} X^G & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^\vee} \\ X & \xrightarrow{\delta} & \prod_{g\in G}^k X \end{array}$$

其中 $\prod_{g\in G}^k$ 表示 $\mathrm{Spec}\, k$ 上的乘积， δ 是对角映射，而 $\rho^\vee$ 是映射 $\rho^\vee(x) = \prod_{g\in G} \rho(g)(x)$。我们有相应的笛卡尔方块来描述 $(X_K)^G$。由于存在典范同构 $(\prod_{g\in G}^k X)_K \cong \prod_{g\in G}^K (X_K)$，将 $\rho^\vee \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{id}^{\mathrm{Spec}\, K}$变换为 $\rho_K^\vee$，对 δ也同理，因此我们有

$$(X^G)_K = (X \times_{\prod_{g\in G}^k X} X)_K \cong X_K \times_{\prod_{g\in G}^K X_K} X_K = (X_K)^G. \qquad \square$$

引理 4.3。设 X 是定义在 k 上的光滑拟射影概形， G是作用于 X 的有限群。假设 G的阶与 k的特征互素。那么 X^G 仍然光滑。

证明。根据引理 4.2 (2)，我们可以在代数闭包上检验光滑性。因此，不妨设 k 是代数闭的。令 $x \in X^G$。存在 X 的一个在 G-作用下稳定的开仿射子概形。由于可以局部检验光滑性，因此不妨设 X 是仿射的。

注意，Luna [Lun73《第三章第一节引理》第 96] 页仅用到了作用群在所关注的极大理想上的作用是半单的这一点；对于我们在 X 上的 G-作用，情况正是如此。因此， [Lun73《第三章第一节引理》第 96] 页推出存在一个 G-等变态射 φ: $X \to T_x X$，它在 x 处 étale，并将 x 送到 0；这里我们赋予 $T_x X$ 由诱导得到的 G-作用。由于 φ 限制为一个态射$X^G \to (T_x X)^G$，且在 x 处 étale，只需证明 $(T_x X)^G$ 是光滑的。但在 $T_x X$ 上的作用是一个作用于 k-向量空间的 k-线性作用。

注意，若 H 是一个在线性作用于 $\mathbb{A}^N$ 上的循环群，则 H 可通过特征分解为$\mathbb{A}^N$ 个线性子空间。特别地，$(\mathbb{A}^N)^H$ 是由平凡特征给出的线性子空间。特别地，若 G 在线性作用于 $\mathbb{A}^N$ 上，则 $(\mathbb{A}^N)^G = \bigcap_{g\in G} (\mathbb{A}^N)^{\langle g\rangle}$ 是线性子空间的交集，因此是光滑的。这里，$\langle g\rangle$ 表示由 $g \in G$生成的循环群。

如果将这一观察应用于 $(T_x X)^G$，我们便得到 $(T_x X)^G$ 是光滑的。 $\square$

引理 4.4。 设 X 是在 k 上的光滑概形，且 G 作用于 X。则诱导的 G-作用在 X 中 X^G 的法丛 $N_{X^G}X$ 上没有非平凡不动点。

证明。 设 $i\colon X^G \to X$ 为包含。根据定义，我们有 $N_{X^G}X = i^*TX/T(X^G)$。点 $x \in X$ 处的切向量等同于一个态射 $\operatorname{Spec} k(x)[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \to X$，其像为 x。因此，我们看到 $T(X^G) = (i^*TX)^G$。特别地，$(N_{X^G}X)^G = (i^*TX/(i^*TX)^G)^G = 0$。 □

定理 4.5。 设 X 是在 k 上的光滑拟射影概形，且 $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是一个素数阶为 $p \neq$ 且 $p \neq \operatorname{char} k$ 的循环群。假设 $D = X^G \subset X$ 是一个除子。则 X/G 是光滑的。

证明。 将 k 替换为其代数闭包后，我们可以检验 X/G 的光滑性。因此，不妨假设 k 是代数闭的。由于 G 具有素数阶， G 在 $X \setminus D$ 上自由作用，因此，$(X/G) \setminus D$ 是光滑的，因为投影映射 $\pi\colon X \to X/G$ 在 D 之外是 étale 的。

因此，我们只需证明 X/G 在每个点 $x \in D$ 处都是光滑的。由于 k 是代数闭的，因而是完美的，所以我们需要证明$\mathcal{O}_{X/G,x}$ 对每个 $x \in D$ 都是正则的。

设 $A = \mathcal{O}_{X,x}$，并令 $\mathfrak{m}_{X,x} = (t, x_1, \ldots, x_n) \subset A$ 为极大理想，使得 t 是 D 的局部方程，因此 $\mathcal{O}_{D,x} = A/(t)$，且 $\dim A = n+1$。由于 X 和 D 是光滑的，我们可以找到这样的生成元。由于 G 在 D 上作用平凡，因此 G 在 $\mathfrak{m}_{D,x}/\mathfrak{m}_{D,x}^2$ 上作用平凡，其中 $\mathfrak{m}_{D,x} = (x_1, \ldots, x_n) \subset A/(t)$ 是极大理想。由于取 G-不变元是正合的，我们可以将 $\mathfrak{m}_{D,x}/\mathfrak{m}_{D,x}^2$ 的生成元提升为 $(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2)^G$ 中的元素。由同样的论证，我们可以将这些元素提升为元素 $x_1', \ldots, x_n' \in A$，使其在 G-作用下不变，并且 $\mathfrak{m}_{X,x} = (t, x_1', \ldots, x_n')$。

群 G在 $(t)/(t^2)$ 上的作用非平凡，这是由引理 4.4 得出的，因为 $(t)/(t^2)$ 同构于 D 在 X中的法丛对偶的纤维。因此，生成元 $g \in G$ 通过乘以一个本原 p次单位根 $\zeta \in k$来作用。由于 $k[G]$是半单的， $k[G]$-模的正合序列

$$0 \to (t^2) \to (t) \to (t)/(t^2) \to 0$$

分裂，因此我们可以找到一个元素 $t' \equiv t \bmod (t^2)$，使得 $g \cdot t' = \zeta t'$。

特别地，我们有 $\mathfrak{m}_{X,x} = (t', x_1', \ldots, x_n')$。通过完成 A，得到$\hat{}A = k[[t', x_1', \ldots, x_n']]$，利用 [Sta24、Tag 032A 和 Tag 0C0S]。此外， g作用于 $\hat{}A$，其作用方式为 $g \cdot t' = \zeta t'$ 和 $g \cdot x_i' = x_i'$，因此，

$$\widehat{(A^G)} = (\hat{A})^G = \left\{ \sum_{i \geq 0} f_i t^{pi} \mid f_i \in k[[x_1', \ldots, x_n']] \right\} \cong k[[t^p, x_1', \ldots, x_n']]$$

是正则的。因此，$\mathcal{O}_{X/G,\,x} = A^G$ 根据 [Mat80， （24.D）， 第 175]。 □

引理 4.6。 设 X 是 k 上的光滑概形，且 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用于 X。则 G 通过乘以 -1 的方式作用于 X^G 在 X 中的法丛 $N_{X^G}X$ 。

证明。 在 X^G上局部地，我们得到分解 $N_{X^G}X = (N_{X^G}X)_1 \oplus (N_{X^G}X)_{-1}$为等型分量。这里 G通过乘以 ± 1 的方式作用于 $(N_{X^G}X)_{\pm 1}$。由于 $N_{X^G}X$ 没有非平凡的 G-不变元，根据引理4.4，我们得到 $N_{X^G}X = (N_{X^G}X)_{-1}$，从而得证。 □

推论 4.7. 设 X 是定义在 k 上的光滑拟射影概形，且 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用于 X。将 X 上的 G 作用延拓到 X^G 中 X 的爆破 $\mathrm{Bl}_{X^G} X$ 。则 $(\mathrm{Bl}_{X^G} X)/G$ 光滑。

证明. 设 $E \subset \mathrm{Bl}_{X^G} X$ 为例外除子。因此，我们有一个 G-等变同构 $E \cong \mathbb{P}(N_{X^G}X)$。由引理 4.6， G 通过乘以 -1 作用于 $N_{X^G}X$。因此， G 在 $E = \mathbb{P}(N_{X^G}X)$ 上平凡作用，从而 $E \subset (\mathrm{Bl}_{X^G} X)^G$。由于我们对 X 上 G 作用的不动点轨迹进行爆破，因此也有 $(\mathrm{Bl}_{X^G} X)^G \subset E$，从而 $E = (\mathrm{Bl}_{X^G} X)^G$。因此，由定理 4.5，$(\mathrm{Bl}_{X^G} X)/G$ 光滑。 □

5 等变二次欧拉示性数

在本节中， G 表示一个在 k上温和的有限群；也就是说，G 是一个阶数与 k的特征互素的有限群。

5.1 构造

Pajwani 和 Pál [PP23，第 3] 节首先利用德拉姆上同调引入了等变二次欧拉示性数。此处我们将遵循 Schlichting [Sch10]，采用霍奇上同调以及正合范畴的格罗滕迪克-维特环这一语言，给出一种不同且更自然的构造。正合范畴的格罗滕迪克-维特环最早由 Quebbemann-Scharlau-Schulte 构造 [QSS79，第 280 页及后续页]。当特征为零时，此处的构造等价于 Pajwani-Pál 的构造，见命题5.20。

$\mathbb{A}^n$ 个正合范畴是一个加性范畴$\mathcal{E}$ ，并配有一组短正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \tag{5-A}$$

满足某些性质。精确定义见 Quillen [Qui73，第 2 节中的第一个定义，第 100] 页。

态射 $\varphi\colon\ A \to B$ 在 $\mathcal{E}$ 中称为一个 膨胀，如果 φ 在 f 中出现，且 （5-A） 是 $\mathcal{E}$中的某个正合列。如果 φ 在 g 中出现，且 （5-A） 是 $\mathcal{E}$中的某个正合列，那么 φ 称为一个 合流。一个正合范畴 $\mathcal{E}$ 中每个短正合列都分裂，称为 分裂正合范畴。

例 5.1. 设 $\mathrm{Rep}_k(G)$ 为有限维 k 向量空间中 G-表示所构成的范畴。更确切地说，$\mathrm{Rep}_k(G)$ 是左 $k[G]$-模 M 构成的范畴，其底层 k 向量空间是有限维的。那么 $\mathrm{Rep}_k(G)$

以及范畴 $\mathbf{gr}\ \mathrm{Rep}_k(G)$，即有限维 k 向量空间中有界 $\mathbb{Z}$-分次 G-表示所构成的范畴，采用通常的短正合列概念，这两个范畴都是正合范畴。注意，由于 $k[G]$ 是半单的（根据马施克定理），这两个范畴都是分裂正合的。

定义 5.2（[Sch10，定义 2.1]）。带对偶的正合范畴是一个三元组 $(\mathbf{E}, \vee, \eta)$，其中 $\mathbf{E}$ 是一个正合范畴，$\vee\colon \mathbf{E}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{E}$ 是一个正合函子，且 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{E}} \to \vee^2$ 是一个自然同构，由态射 $\eta_A\colon A \to A^{\vee\vee}$ 组成，对所有 $A \in \mathbf{E}$ 均成立，并满足对 $\mathbf{E}$ 的所有对象 A，$1_{A^\vee} = (\eta_A)^\vee \circ \eta_{A^\vee}$。如果对偶函子 $\vee$ 和双对偶识别 η 由上下文可知，我们也用 $\mathbf{E}$ 代替 $(\mathbf{E}, \vee, \eta)$。

下文中，我们将考虑两个带对偶的正合范畴。

例 5.3。这是例5.1 的延续，这两个例子本质上都是 [Sch10，例 2。2]。

(1) 通过考虑对偶函子 $\vee\colon \mathrm{Rep}_k(G)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Rep}_k(G)$，范畴 $\mathrm{Rep}_k(G)$ 可以成为一个带对偶的分裂正合范畴，该函子定义为 $A \mapsto A^\vee := $ 同态$_k(A, k)$。我们为 $A^\vee$ 赋予如下 G-作用：对于 $g \in G$ 和 $f \in A^\vee$，我们定义 gf 为 $(gf)(a) := f(g^{-1}a)$，其中 $a \in A$。也就是说，我们有对合

$$\iota\colon k[G] \to k[G]; \sum_i \lambda_i g_i \mapsto \sum_i \lambda_i g_i^{-1},$$

并且我们通过 $(\alpha \cdot f)(a) := f(\iota(\alpha) \cdot a)$ 定义 $A^\vee$ 上的左 $k[G]$-模，其中 $\alpha \in k[G]$、$a \in A$ 和 $f\colon A \to k$ 是一个 k-线性映射。求值映射 $\mathrm{ev}\colon A \to A^{\vee\vee}$ 定义了一个自然同构，使得 $(\mathrm{Rep}_k(G), \vee, \mathrm{ev})$ 成为一个带对偶的正合范畴。

注意，$\vee$ 是一个 $\otimes$-函子，并且 η 与张量结构相容；也就是说，我们有 $\eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B$ 在将 $(A \otimes B)^{\vee\vee}$ 与 $A^{\vee\vee} \otimes B^{\vee\vee}$ 认同之后。这是 [Sch10例 22] 的一个特例，其中考虑带有对合 $\iota\colon k[G] \to k[G]$（如上所定义）的。

(2) 我们可以为范畴 $\mathbf{gr}\ \mathrm{Rep}_k(G)$ 配备以下带对偶的分裂正合范畴结构。令 $\vee\colon \mathbf{gr}\ \mathrm{Rep}_k(G)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{gr}\ \mathrm{Rep}_k(G)$ 为函子，它将一个分次 G- 表示 $A^\bullet$ 映至分次 G-表示

$$(A^\bullet)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_k(G)}(A^{-\bullet}, k).$$

此处，$(A^\bullet)^\vee$ 的 i 次部分由 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_k(G)}(A^{-i}, k)$ 给出。我们将映射 $\eta\colon A^\bullet \to (A^\bullet)^{\vee\vee}$ 定义为按次数 i 给出的映射：

$$(-1)^i \mathrm{ev}_{A^i}\colon A^i \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_k(G)}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_k(G)}(A^i, k), k),$$

也就是说，$a \in A^i$ 被映射为如下同态：将 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_k(G)}(A^i, k)$ 映射到 $(-1)^i f(a)$。
注意，$\vee$仍然是一个 $\otimes$-函子，并且 η 保持张量结构。

定义 5.4（[Sch10，定义 2.4]）。带对偶的正合范畴 $(\mathbf{E}, \vee, \eta)$ 中对象 X 上的对称型是一个二元组 (X, φ)，其中 $\varphi\colon X \to X^\vee$ 是 $\mathbf{E}$ 中满足 $\varphi^\vee \eta_X = \varphi$ 的态射。若 φ 是同构，则称该型为非奇异或非退化；否则称为奇异或退化。

设（X，φ）是 $\mathcal{E}$ 中的一个对称型，且 $f\colon Y \to X$ 是一个态射。则（Y，$\varphi|_Y$）连同 $\varphi|_Y = f^\vee \varphi f$ 是 Y 上的一个对称型，称为通过 f 对 φ 的限制。两个对称型之间的对称型映射 $f\colon$（Y，ψ）$\to$（X，φ）是一个态射 $f\colon Y \to X$，它位于 $\mathcal{E}$ 中，并满足 $\psi = \varphi|_Y$。若 f 是一个同构，则映射 f 是等距。$\mathcal{E}$ 中态射的复合定义了对称型之间映射的复合。

定义 5.5（[Sch10，定义 2。4]）。两个对称型（X，φ）和（Y，ψ）的正交和（X，φ）$\perp$（Y，ψ）是对称型（$X \oplus Y$，$\varphi \oplus \psi$）。

定义 5.6。如果 $\mathcal{E}$ 是对称幺半的，$\vee$是一个 $\otimes$-函子，并且 η 保持张量结构，那么两个对称型的乘积（X，φ）$\otimes$（Y，ψ）是（$X \otimes Y$，$\varphi \otimes \psi$）。

如果 (X, φ) 和 (Y, ψ) 是非退化对称型，那么它们的正交和与乘积也都是非退化对称型。如果$\mathcal{E}$ 是本质小的（$\mathrm{Rep}_k(G)$ 和 $\mathrm{grRep}_k(G)$ 就是这种情况），那么非退化对称型的等距类集合在正交和下构成一个幺半群，在正交和与乘积下构成一个半环。

定义 5.7（[Sch10，定义 2。5]）。设（X，φ）是 $\mathcal{E}$ 中的一个非退化对称型。的一个全各向同性子空间是一个 X 膨胀 $i\colon L, \to X$满足 $\varphi|_L = i^\vee \varphi i = 0$ 所诱导的映射 $L \to L^\perp :=\ker(i^\vee \varphi)$ 也是一个膨胀。

X 的一个拉格朗日子空间是一个态射 $i\colon L \to X$，满足

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} X \xrightarrow{i^\vee \varphi} L^\vee \longrightarrow 0$$

这是一个短正合列。也就是说，L 是一个全各向同性子空间，并且满足 $L = L^\perp$。

非退化对称形式（X, φ）若（X, φ）具有拉格朗日子空间，则称其为代谢型。若 L 是$\mathcal{E}$中的任意对象，则

$$H(L) = \left(L \oplus L^\vee, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \eta & 0 \end{pmatrix}\right)$$

这是 L的双曲型非退化对称形式。形式H（L）是代谢型，其拉格朗日子空间为 $L \to L \oplus L^\vee$ 到第一个直和项的包含。注意，对称形式 H（$L \oplus M$）和 H（L）$\perp H$（M）是等距同构的。

例 5.8。这是例5.3的延续。

(1) 设 (V, φ) 是 $\mathrm{Rep}_k(G)$ 中的一个对称型。因此，φ 是一个 G-等变线性映射 $\varphi\colon V \to V^\vee$。这样的线性映射等同于一个双线性型

$$\beta\colon V \otimes V \to k; \beta(v, w) = \varphi(v)(w)$$

并且，G-等变条件转化为：对于所有 v、$w \in V$和 $g \in G$，$\beta(gv,w) = \beta(v, g^{-1}w)$。这等价于对于所有 v、$w \in V$和 $g \in G$，$\beta(gv,gw) = \beta(v,w)$。要求$\varphi^\vee \eta_X = \varphi$转化为条件 $\beta(v,w) = \beta(w,v)$。因此，$\mathrm{Rep}_k(G)$ 上的对称形式等同于满足附加条件的对称双线性型β：$V \otimes V \to k$：对于所有 v、$w \in V$和 $g \in G$，$\beta(gv,gw) = \beta(v,w)$。我们称这样的双线性型为 G-等变对称双线性型。若其底层对称双线性型非退化，则称该型非退化。

(2) 设 $(V^\bullet, \varphi)$ 是 $\mathbf{gr}\,\mathrm{Rep}_k(G)$ 中的一个对称型。因此，φ 的次数 i 部分 φ^i 是一个 G-等变线性映射 $\varphi^i\colon V^i \to (V^{-i})^\vee$。这样的线性映射等同于一个双线性型 $\beta^i\colon V^i \otimes V^{-i} \to k$，而 G-等变条件再次转化为对所有 $v \in V^i$、$w \in V^{-i}$ 和 $g \in G$ 都有条件 $\beta(gv,w) = \beta(v, g^{-1}w)$，这又等价于对所有 $v \in V^i$、$w \in V^{-i}$ 和 $g \in G$ 都有条件 $\beta(gv,gw) = \beta(v,w)$。要求 $\varphi^\vee \eta_{V^\bullet} = \varphi$ 转化为以下条件：这些双线性型

$$\beta^0\colon V^0 \otimes V^0 \to k \quad \text{and} \quad \beta^{2i} \perp \beta^{-2i}\colon (V^{2i} \oplus V^{-2i}) \otimes (V^{2i} \oplus V^{-2i}) \to k$$

对所有 $i \neq 0$ 都是对称的，并且这些双线性型

$$\beta^{2i+1} \perp \beta^{-2i-1}\colon (V^{2i+1} \oplus V^{-2i-1}) \otimes (V^{2i+1} \oplus V^{-2i-1}) \to k$$

对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 都是交错的。型 $(V^\bullet, \varphi)$ 是非退化的，当且仅当对所有 i，$\varphi^i\colon V^i \to (V^{-i})^\vee$ 是一个同构。

我们将满足上述条件的所有 $i \in \mathbb{Z}$ 的 $\beta^\bullet$ k-双线性型 $\beta^i\colon V^i \otimes V^{-i} \to k$ 称为 $\mathbb{Z}$- 分次 G- 等变对称双线性型。如果相应的态射 $\varphi^\bullet\colon V^\bullet \to (V^\bullet)^\vee$ 是同构，则称 $\beta^\bullet$ 非退化。

注记 5.9。例 G-等变对称双线性型的定义 5.8 等价于 G-等变二次型的概念，见[PP23，定义 3。1] 二者通过对称双线性型与二次型之间的对应关系相联系。

记号 5.10。设 $\beta^\bullet$ 是 $V^\bullet$ 上的一个 $\mathbb{Z}$-分次非退化 G-等变对称双线性型。记 $V^{\text{偶}} := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^{2i}$，$V^{\text{奇}} := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^{2i+1}$。将 $V^{\text{偶}}$ 上的非退化对称双线性型 $\perp_{i\in\mathbb{Z}} \beta^{2i}$ 记为 β^{even}，将 V^{odd} 上的非退化交错双线性型 $\perp_{i\in\mathbb{Z}} \beta^{2i+1}$ 记为 β^{odd}。注意，V^{odd} 是偶维的，因为 β^{odd} 非退化且交错。

定义 5.11 ([Sch10，第 7 页及推论 2。10])。带对偶的分裂正合范畴 的 ***Grothendieck-Witt*** 群 $\mathrm{GW}(\mathcal{E})$ 是由 $[X,\varphi]$ E 中非退化对称形式的等距类所成的阿贝尔幺半群$(X,\ \varphi)$ 关于正交和的 Grothendieck 群。

备注 5.12。若$\mathcal{E}$ 是对称幺半的，$\vee$ 是一个 $\otimes$-函子，且 η 与张量结构相容，那么对称形式的乘积会在 GW($\mathcal{E}$) 上诱导出环结构。在这种情况下，我们也称 GW($\mathcal{E}$) 为E 的 *Grothendieck-Witt* 环。

记号 5.13. 对于带对偶的正合范畴 Rep$_k(G)$ 和 gr Rep$_k(G)$，我们固定如下记号：将 GW$^G(k)$ 记作 GW(Rep$_k(G)$)，将 gr GW$^G(k)$ 记作 GW(gr Rep$_k(G)$)。我们称 GW$^G(k)$ 为 G的 -等变格罗滕迪克-维特环。

注 5.14. 利用定义 $\mathrm{GW}^G(k)$ 和定义5.11 所给出的定义，与 G-等变格罗滕迪克-维特环在 [PP23，定义 3 中的定义一致。1]此外，若 G 是平凡群，则$\mathrm{GW}^G(k)$ 与第1k节中介绍的格罗滕迪克-维特环 GW(k) 一致。

注 5.15. 令 $\beta^\bullet$ 为定义在 $V^\bullet$上的 $\mathbb{Z}$-分次非退化 G-等变对称双线性型。由于 $\beta^\bullet$ 非退化，它诱导出一个同构$V^{2i} \cong V^{-2i}$。因此，$\bigoplus_{i\geq 1} V^{2i}$ 是通过从 β中去除所有奇数次数部分和次数为零的部分后构造的 $\mathbb{Z}$-分次非退化G-等变对称双线性型的一个拉格朗日子空间。因此，由 [Sch10, 引理 2.8]可得$\perp_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\ \beta^{2i} \cong H(\bigoplus_{i\geq 1} V^{2i})$，它是双曲的。特别地，我们有$\beta^{\mathrm{even}} = \beta^0 \perp H(\bigoplus_{i\geq 1} V^{2i})$，因此，$\beta^{\mathrm{even}} = \beta^0 + (\sum_{i\geq 1}\dim_k V^{2i})\cdot H \in \mathrm{GW}(k)$。

注记 5.16。设 $\beta^\bullet$ 是 $V^\bullet$ 上的一个 $\mathbb{Z}$-分次 G-等变非退化对称双线性型，并设 $\gamma^\bullet$ 是 $W^\bullet$上的一个 $\mathbb{Z}$-分次 G-等变非退化对称双线性型。那么我们可以将 $(\beta\cdot\gamma)^{\mathrm{even}}$和 $(\beta\cdot\gamma)^{\mathrm{odd}}$明确描述如下：$V\otimes W$ 上的分次给出

$$(V\otimes W)^{\mathrm{even}} = V^{\mathrm{even}}\otimes W^{\mathrm{even}} \oplus V^{\mathrm{odd}}\otimes W^{\mathrm{odd}}$$

and

$$(V\otimes W)^{\mathrm{odd}} = V^{\mathrm{even}}\otimes W^{\mathrm{odd}} \oplus V^{\mathrm{odd}}\otimes W^{\mathrm{even}}.$$

该分解可扩展到 $\beta\cdot\gamma$。也就是说，我们有

$$(\beta\cdot\gamma)^{\mathrm{even}} = \beta^{\mathrm{even}}\otimes\gamma^{\mathrm{even}} \perp \beta^{\mathrm{odd}}\otimes\gamma^{\mathrm{odd}}$$

作为 G-等变对称双线性型，以及

$$(\beta\cdot\gamma)^{\mathrm{odd}} = \beta^{\mathrm{even}}\otimes\gamma^{\mathrm{odd}} \perp \beta^{\mathrm{odd}}\otimes\gamma^{\mathrm{even}}$$

作为 G-等变双线性型。我们通常将这些分解写成 $(\beta\cdot\gamma)^{\mathrm{even}} = \beta^{\mathrm{even}}\cdot\gamma^{\mathrm{even}} + \beta^{\mathrm{odd}}\cdot\gamma^{\mathrm{odd}}$和 $(\beta\cdot\gamma)^{\mathrm{odd}} = \beta^{\mathrm{even}}\cdot\gamma^{\mathrm{odd}} + \beta^{\mathrm{odd}}\cdot\gamma^{\mathrm{even}}$。

现在我们转而定义一个 G-等变二次 Euler 特征。

命题 5.17. 存在一个典范环同态 $\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}\colon \mathrm{gr}\,\mathrm{GW}^G(k) \to \mathrm{GW}^G(k)$，其定义为将 *gr Rep*$_k(G)$ 中的一个 $\mathbb{Z}$-分次非退化 G-等变对称双线性型 $\beta^\bullet$ 在 $V^\bullet$ 上映为

$$\beta^{\mathrm{even}} - [\perp_{i\geq 0} H(V^{2i+1})] \in \mathrm{GW}^G(k).$$

特别地，如果 G 是平凡群，我们有

$$\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta) = \beta^{\mathrm{even}} - \frac{1}{2}\dim_k V^{\mathrm{odd}} \cdot H \in \mathrm{GW}(k).$$

证明。 首先注意，这定义了$\mathrm{GW}^G(k)$中的一个定义良好的元素：因为 $\mathbb{Z}$-分次 G-等变对称双线性型的等距保持次数，所以$_{\mathbb{Z}}$ 的定义不依赖于对称双线性型等距类中所选的代表元。此外，$\bigoplus_{i\geq 0} V^{2i+1}$ 定义了 $\beta^\bullet$的奇数次数部分的一个拉格朗日子空间。进一步地，可以$_{\mathbb{Z}}$ 是典范的，因为 $[\perp_{i\geq 0} H(V^{2i+1})] \in \mathrm{GW}^G(k)$ 中的类不依赖于所选的拉格朗日子空间，见 [Sch10，引理 2.8 (c)。

$\mathbb{Z}$-分次非退化 G-等变对称双线性型上的定义可扩展为群同态 $\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}\colon \mathrm{gr}\,\mathrm{GW}^G(k) \to \mathrm{GW}^G(k)$。事实上，假设我们有 $\mathbb{Z}$- 分次非退化 G- 等变对称双线性型 $\beta^\bullet$，其定义在 $V^\bullet$ 上；以及定义在 $W^\bullet$上的 $\gamma^\bullet$。现在，$(\beta \perp \gamma)^i$ 是由下式给出的 k-双线性映射：$(V^i \oplus W^i) \otimes (V^{-i} \oplus W^{-i}) \to k$，它将$(v_i + w_i) \otimes (v_{-i} + w_{-i})$映到$\beta^i(v_i, v_{-i}) + \gamma(w_i, w_{-i})$，其中 $v_i \in V^i, w_i \in W^i, v_{-i} \in V^{-i}$，且 $w_{-i} \in W^{-i}$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta^\bullet + \gamma^\bullet) &= [\perp_{i\in\mathbb{Z}} \underbrace{(\beta^\bullet + \gamma^\bullet)^{2i}}_{=\beta^{2i}\perp\gamma^{2i}}] - [\perp_{i\geq 0} \underbrace{H(V^{2i+1} \oplus W^{2i+1})}_{=H(V^{2i+1})\perp H(W^{2i+1})}] \\
&= \beta^{\mathrm{even}} + \gamma^{\mathrm{even}} - [\perp_{i\geq 0} H(V^{2i+1})] - [\perp_{i\geq 0} H(W^{2i+1})] \\
&= \mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta^\bullet) + \mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\gamma^\bullet).
\end{aligned}$$

类似地，可以类似地验证，对于 $\mathbb{Z}$-分次的非退化 G-等变对称双线性型 $\beta^\bullet$ 和 $\gamma^\bullet$，有 $\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta^\bullet \cdot \gamma^\bullet) = \mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta^\bullet) \cdot \mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\gamma^\bullet)$，这意味着 $\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}$ 是一个环同态。□

例 5.18。 设 X 是一个维数为 n 、定义在k 上的等维光滑射影概形，并带有一个 G-作用。因此，霍奇上同调群$H^q(X,\Omega^p_{X/k})$具有自然的 G-作用。杯积与迹的复合

$$H^q(X, \Omega^p_{X/k}) \times H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}_{X/k}) \xrightarrow{\cup} H^n(X, \Omega^n_{X/k}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} k$$

定义了一个 $\mathbb{Z}$-分次的 G-等变非退化对称双线性型

$$\left(\bigoplus_{i,j=0}^{\dim_k X} H^i(X, \Omega^j_{X/k})[j-i], \mathrm{Tr} \right)$$

在 $\mathrm{gr}\,\mathrm{GW}^G(k)$ 中。若取 G 为平凡群，则此对称型在 $\mathrm{GW}^G(k) = \mathrm{GW}(k)$ 中的像计算了X 在 k上的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数。

定义 5.19。设 X 是定义在k 上的等维光滑射影概形，并带有一个 G-作用。我们将 G-等变二次欧拉示性数 $\chi_G(X/k)$ 定义为非退化对称形式$\left(\bigoplus_{i,j=0}^{\dim_k X} H^i(X, \Omega^j_{X/k})[j-i], \mathrm{Tr}\right)$ 在 $\mathrm{GW}^G(k)$ 中的像。

若 X 是定义在 k 上的任意光滑射影概形，并带有一个 G-作用，我们将 $X = \coprod_{i=1}^N X_i$ 写成若干等维开闭子概形的不交并，这些子概形包含于 X 且在 G-作用下保持不变。然后，我们将 G-等变二次欧拉示性数 $\chi_G(X/k)$ 定义为 X 在 k 上的 $\chi_G(X/k) = \sum_{i=1}^N \chi_G(X_i/k)$。

命题 5.20。设 k 是一个特征零域，并设 X 是定义在 k 上的光滑射影概形，带有一个 G-作用。则 $\chi_G(X/k)$等于 G-等变 ***de Rham*** 欧拉示性数，该数针对 X 的定义见 *[PP23，定义 3。5]*。

证明。两种欧拉示性数在不交并下均具有可加性，因此我们可以假设 X 是维数为 n的等维簇。我们首先回顾 G 的 X -等变德拉姆欧拉示性数的定义，该定义见 [PP23，定义 3。5]。将 i阶德拉姆上同调记为 X ，$H^i_{\mathrm{dR}}(X)$。定义

$$\beta^i \colon (H^i_{\mathrm{dR}}(X) \oplus H^{2n-i}_{\mathrm{dR}}) \times (H^i_{\mathrm{dR}}(X) \oplus H^{2n-i}_{\mathrm{dR}}) \xrightarrow{\cup} H^{2n}_{\mathrm{dR}}(X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} k$$

对于 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ 为偶数时，定义

$$\beta^n \colon H^n_{\mathrm{dR}}(X) \times H^n_{\mathrm{dR}}(X) \xrightarrow{\cup} H^{2n}_{\mathrm{dR}}(X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} k.$$

若 n 为奇数，则存在一个拉格朗日子空间 $L \subset H^n_{\mathrm{dR}}(X)$，它对 β 封闭，并在G-作用下保持不变，见 [PP23，引理 3。4]。现在，G 的等变德拉姆欧拉示性数 X 定义为

$$\chi^{\mathrm{dR}}_G(X) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n/2} \beta^{2i} - \sum_{i=1}^{n/2} H(H^{2i-1}_{\mathrm{dR}}(X)) & \text{if } n \text{ even} \\ \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \beta^{2i} - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} H(H^{2i-1}_{\mathrm{dR}}(X)) - H(L) & \text{if } n \text{ odd.} \end{cases}$$

在 $\mathrm{GW}^G(k)$中。此外，Hodge 到 de Rham 谱序列诱导出一个同构 $H^{2d}_{\mathrm{dR}}(X) \cong H^n(X, \Omega^n_{X/k})$，见 [Sta24，Tag 0FW6]。在此同构下，根据 [Sta24，Tag 0FW7] 的证明，我们得到德拉姆上同调中的迹映射与霍奇上同调中的迹映射相对应。

注意到，每个 $k[G]$-模的短正合列都是分裂的。由于 X 是光滑射影的，Hodge 到 de Rham 谱序列在第一页就退化，并且根据 G-作用与 [Del68，定理 5.5(ii)]相容。因此，Hodge 到 de Rham 谱序列所诱导的 $H^*_{\mathrm{dR}}(X)$ 滤子保证存在一个 G-等变同构

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^q(X, \Omega^p_{X/k}).$$

因此，我们得到

$$H(H^i_{\mathrm{dR}}(X)) = \sum_{p+q=i} H(H^q(X, \Omega^p_{X/k})) \in \mathrm{GW}^G(k). \tag{5-B}$$

对于 $i = 1$，……，$n-1$。此外，请注意我们有

$$\beta^{2i} = H(H^i_{\mathrm{dR}}(X)) \in \mathrm{GW}^G(k) \tag{5-C}$$

由 $0 \leq i < n/2$ 庞加莱对偶性，见 [Sta24，标签 0FW7]。

现在，令 $n = 2m$ 为偶数。因此，我们有一个滤子 $F^{n+1} \subset \cdots \subset F^0 = H^n_{\mathrm{dR}}(X)$，使得 $F^i/F^{i+1} = H^i(X, \Omega^{n-i}_{X/k})$ 作为 $k[G]$-模。由于根据 [Sta24，标签 0FM7]，该滤子是可乘的，我们看到 F^{m+1} 是 $H^n_{\mathrm{dR}}(X)$ 的全各向同性子空间（相对于 β^n），并且 $F^m \subset (F^{m+1})^\perp$。此外，利用塞尔对偶进行维数计数可得 $F^m = (F^{m+1})^\perp$。因此，根据[Sch10，引理 2.8(c)]，我们得到

$$\beta^n = \gamma + H(F^{m+1}),$$

其中 γ 是对称双线性型

$$H^m(X, \Omega^m_{X/k}) \times H^m(X, \Omega^m_{X/k}) \xrightarrow{\cup} H^n(X, \Omega^n) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} k.$$

用于得到（5-B）的论证还表明

$$H(F^{m+1}) = \sum_{i=m+1}^{n} H(H^i(X, \Omega^{n-i}_{X/k})).$$

将此与（5-B）和（5-C）结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}
\chi^{\mathrm{dR}}_G(X) &= \sum_{i=0}^{n/2} \beta^{2i} - \sum_{i=1}^{n/2} H(H^{2i-1}_{\mathrm{dR}}(X)) \\
&= \gamma + \sum_{i=m+1}^{n} H(H^i(X, \Omega^{n-i}_{X/k})) + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{p+q=2i} H(H^q(X, \Omega^p_{X/k})) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{p+q=2i-1} H(H^q(X, \Omega^p_{X/k})) \\
&= \chi_G(X/k).
\end{aligned}$$

n 为奇数的情形处理类似。唯一的区别是 γ 不会出现，并且我们将 L 与 $F^{(n+1)/2}$ 等同起来。 □

注 5.21 ([PP23，第 15]页)。存在一个典范环同态$\mathrm{GW}^G(k) \to \mathrm{GW}(k)$ 它通过遗忘群作用给出。此映射将 $\chi_G(X/k)$ 映至$\mathbb{A}^1$-欧拉示性数 $\chi_c(X/k)$ 其定义见第 1节。

注记 5.22. 还有一个典范环同态 φ: GW(k) $\to$ GW^G(k)，它由给二次型赋予平凡的 G-作用诱导。环同态 φ 是注记 5.21 中遗忘群作用的环同态 GW^G(k) $\to$ GW(k) 的右逆。此外， φ 在 GW^G(k) 上诱导出一个 GW(k)-模结构。

类似地，我们有一典范环同态 gr GW^G(k) $\to$ gr GW$^{G/H}$(k)，具有 gr GW(k)-模结构。

命题 5.23. 设 $H \subset G$是一个正规子群。将 G-等变对称双线性型 β 限制到 V 上，并进一步限制到 H-不变元 V^H 上的限制映射 β^H，诱导出一个良定义的 $\mathrm{GW}(k)$-线性映射 $(-)^H$: $\mathrm{GW}^G(k) \to \mathrm{GW}^{G/H}(k)$。我们将此映射记作 $\beta \mapsto \beta^H$。

我们还有一个类似的$\mathrm{gr}\,\mathrm{GW}(k)$-线性映射$(-)^H : \mathrm{gr}\,\mathrm{GW}^G(k) \to \mathrm{gr}\,\mathrm{GW}^{G/H}(k)$。

证明。 设 β 是G-表示 V 上的非退化 G-等变对称双线性型，并将 V 视为一个 H-表示。将 V 写成其等型分量之和$V = \bigoplus_\rho V^\rho$，其中求和遍历 V的不可约H-表示。由于 β 非退化，我们得到诱导线性映射 $V \to V^\vee; v \mapsto \beta(v, -)$是一个 H-等变同构。由于该同构是 H-等变的，它限制为同构 $V^\rho \to (V^\rho)^\vee$，其中 ρ 表示平凡的 H-表示。特别地，将β限制到赋予诱导 G/H-作用的 V^ρ 上（该作用为 β^H）后，仍是一个非退化对称双线性型。也就是说， β^H 是 GW$^{G/H}$(k) 中的一个元素。

由于取 H-不变元是一个加性函子，我们得到，对于所有非退化的 G-等变对称双线性型 β 和γ，均有 $(\beta + \gamma)^H = \beta^H + \gamma^H$ 。因此， β^H 的定义诱导出一个良定义的群同态 $(-)^H$: GW^G(k) $\to$ GW$^{G/H}$(k)。

剩下需要证明 $(-)^H$ 与 GW(k)-模结构相容。为此，注意如果 V 是一个配备平凡G-作用的 k-向量空间，且 W是一个 G-表示，那么我们有 $(V \otimes W)^H = V \otimes W^H = V^H \otimes W^H$。进而可得，对于所有非退化对称双线性型 β 和非退化的 G-等变对称双线性型 γ，均有 $(\beta \cdot \gamma)^H = \beta^H \cdot \gamma^H = \beta \cdot \gamma^H$。这证明 $(-)^H$ 是 GW(k)-线性的。

类似地，对于 $(-)^H$，可得到如下结论：gr GW^G(k) $\to$ gr GW$^{G/H}$(k)。

□

注释 5.24。 映射 $(-)^H$: GW^G(k) $\to$ GW$^{G/H}$(k) 不是环同态。也就是说，$(-)^H$ 不是可乘的：事实上，若 $G = \mathbb{Z}/2$，考虑 G-等变对称双线性型 β: $k \times k \to k$; $(x, y) \mapsto xy$其中我们通过乘以 -1 来作用于 k 。于是有 $\beta^G = 0$ ，并且 $(\beta \cdot \beta)^G = \langle 1 \rangle \neq 0 = \beta^G \cdot \beta^G$。

注释 5.25. 如果 $H \subset G$ 是一个子群，我们可以通过将 G-作用限制为 H 作用，将元素 $\beta \in$ GW^G(k)自然地视为 GW^H(k) 的元素。特别地，对于所有 $\beta \in$ GW^G(k)，我们都可以计算 $\beta^H \in$ GW(k)

将 β 视为 $\mathrm{GW}^H(k)$ 的元素即可。在下文中，计算 $\mathrm{GW}(k)$ 中 β 的 H-不变元时，我们默认将 $\beta \in \mathrm{GW}^G(k)$视为 $\mathrm{GW}^H(k)$ 的元素。

由于这一讨论可推广至 $H \subset G$ 的 $\mathrm{gr}\,\mathrm{GW}^G(k)$ 和 $\mathrm{gr}\,\mathrm{GW}^H(k)$，因此我们也可以在 $\mathrm{gr}\,\mathrm{GW}(k)$ 中取 $\beta^\bullet \in \mathrm{gr}\,\mathrm{GW}^G(k)$ 的 H-不变元。

命题 5.26。 对于 $H \subset G$ 这个正规子群，下图可交换

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}\,\mathrm{GW}^G(k) & \xrightarrow{\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}} & \mathrm{GW}^G(k) \\ \downarrow{\scriptstyle (-)^H} & & \downarrow{\scriptstyle (-)^H} \\ \mathrm{gr}\,\mathrm{GW}^{G/H}(k) & \xrightarrow{\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}} & \mathrm{GW}^{G/H}(k). \end{array}$$

证明。 这可以通过考察 $\mathbb{Z}$-分次的非退化 G-等变对称双线性型来验证，这只是一个直接计算。 □

5.2 性质

等变二次欧拉示性数与第 G 节中引入的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数具有许多形式性质 1。

备注 5.27。 Pajwani 和 Pál [PP23，定理 3。6] 证明了，在特征零下，等变 de Rham 欧拉示性数可以扩张为环同态 $K_0^G(\text{簇}_k) \to \mathrm{GW}^G(k)$ 。这里 $K_0^G(\text{簇}_k)$ 表示带有 G作用的簇的Grothendieck环。我们在此证明的等变二次欧拉示性数的许多性质，在特征零下都可以直接由这一描述推出，因为根据命题 5.20，等变 de Rham 欧拉示性数与等变二次欧拉示性数一致。

注 5.28. Hoyois [Hoy17] 构造了一个针对带有 G-作用的 X 概形的 G-等变稳定同伦范畴 $\mathrm{SH}^G(X)$。根据 [Hoy17，推论 6.13]，
$p_\# 1_X \in$ k k ( ) SH^G( )
对于光滑、射影的 - 概形 p: $X \to$ Spec k，若其带有 G- 作用，则再次是强可对偶的，因此具有范畴欧拉示性数。现在可以利用其单位映射 u: $\mathrm{End}_{\mathrm{SH}^G}(k)(1_k) \to \mathrm{KQ}^{0,0}($ Spec $k, G)$，将其映射到 G-等变厄米K理论谱 $\mathrm{KQ}^{0,0}(\mathrm{Spec}\, k, G)$ 的 (0, 0) 次同伦群。由此可以得到另一个不变量 $u(\chi^{\mathrm{cat}}(p_\# 1_X)) \in \mathrm{KQ}^{0,0}(\mathrm{Spec}\ k, G)$，其符合$G$-等变二次欧拉示性数这一名称。

现在可以尝试将 $\mathrm{KQ}^{0,0}(\mathrm{Spec}\, k, G)$ 与 $\mathrm{GW}^G(k)$ 对应起来，然后尝试在这一框架下重新证明动机高斯-博内定理，也就是说，证明这一构造与定义 G5.19 中的 5.19-等变二次欧拉示性数的构造一致。有了这样的定理，我们或许就能以更优雅的方式，利用动机同伦理论证明本节中的结果。

由于目前尚无 G-等变框架下的动机高斯-博内定理（如备注 5.28所述），我们将直接利用霍奇上同调来证明本节中的性质。为此，我们将首先证明两个关于霍奇上同调的命题，即命题 5.29 和命题 5.30。这些论述为专家所熟知。为了方便读者，我们在此给出证明，因为很难找到关于复数域以外的域上情形的证明。

命题 *5.29.* 设 V 是一个秩为 $r+1$ 的向量丛，它定义在 k 上的光滑射影概形 X 上。假设 G 作用于 X，并等变地作用于 V。这赋予 $H^*(X,\Omega^*_{X/k})$ 一个与自然的 k-代数结构相容的 G-作用，并赋予 $H^*(\mathbb{P}(V),\Omega^*_{\mathbb{P}(V)/k})$ 一个与其自然的 $H^*(X,\Omega^*_{X/k})$-代数结构相容的 G-作用。令 $\xi\in H^1(\mathbb{P}(V),\Omega^1_{\mathbb{P}(V)/k})$ 为 $\mathcal{O}_V(1)$ 的第一陈类。那么，ξ 在诱导的 G-作用下保持不变，该作用定义在 $H^1(\mathbb{P}(V),\Omega^1_{\mathbb{P}(V)/k})$ 上，并且存在一个与相应 G-作用相容的 $H^*(X,\Omega^*_{X/k})$-代数同构，具体为

$$\frac{H^*(X,\Omega^*_X)[\xi]}{(\xi^{r+1}+\sum_{i=1}^r(-1)^i c_i(V)\xi^{r+1-i})}\to H^*(\mathbb{P}(V),\Omega^*_{\mathbb{P}(V)/k})$$

将 $\alpha\cdot\xi^i$（其中 $\alpha\in H^{q-i}(X,\Omega^{p-i})$）映至 $p^*(\alpha)\cup\xi^i$。这里，$p\colon\mathbb{P}(V)\to X$ 是投影，$c_i(V)\in H^i(X,\Omega^i_{X/k})$ 对于 $i=0,\ldots,r$ 是 V 在霍奇上同调中的第 i 个陈类，并且我们将 $\xi\in H^*(X,\Omega^*_X)[\xi]$ 视为双次数 $(1,1)$。

证明。 G在 V上的作用诱导出 G作用 $G\times_k\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(V)$ 在 $\mathbb{P}(V)$上，使投影 $p\colon\mathbb{P}(V)\to X$ 成为一个 G-等变态射，并为典范可逆商层 $\mathcal{O}_V(1)$ 提供一个G-线性化。特别地，对于 $g\in G$，作用映射 $\psi_g\colon\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(V)$ 满足 $\psi_g^*(\mathcal{O}_V(1))=\mathcal{O}_V(1)$，因此，$\psi_g^*(\xi)=\xi$，也就是说，$\xi$ 是 G-不变的。

为证明所需的同构，我们遵循 Rao-Yang-Yang-Yu [Rao+23，第 4 节第 3 步，第 3017]页。令 $p\colon\mathbb{P}(V)\to X$ 表示投影。根据[DK73，第 XI 分册，定理 1，1],映射

$$p^*(-)\cup\xi^i\colon H^{q-i}(X,\Omega^{p-i}_{X/k})\to H^q(\mathbb{P}(V),\Omega^p_{\mathbb{P}(V)/k}),\ \alpha\mapsto p^*(\alpha)\cup\xi^i,$$

诱导出双分次 $H^*(X,\Omega^*_{X/k})$-模之间的一个 G-等变同构

$$\bigoplus_{i=0}^r p^*(-)\cup\xi^i\colon\bigoplus_{i=0}^r H^*(X,\Omega^*_{X/k})\xi^i\to H^*(\mathbb{P}(V),\Omega^*_{\mathbb{P}(V)/k}).$$

此外，这个态射

$$p^*(-)\cup\xi^*\colon H^*(X,\Omega^*_{X/k})[\xi]\to H^*(\mathbb{P}(V),\Omega^*_{\mathbb{P}(V)/k}).$$

将 $\alpha\cdot x^i$ 映射到 $p^*(\alpha)\xi^i$ 是一个双分次环同态。在此，我们给出 ξ 双次数 (1,1)。根据 [Sri93，定理 1 (g) 以及定理 2] 和 [Gro58，

定理 1]，$\sum_{i=0}^{r-1} p^*(-) \cup \xi^i$ 的核是理想

$$\left(\xi^{r+1} + \sum_{i=1}^{r} (-1)^i c_i(V) \xi^{r+1-i}\right).$$

由此得到所需的同构。 □

命题 5.30。设 G 作用于光滑射影概形 X，且设 $Z \subset \tilde{X}$ 是一个在 G-作用下稳定的光滑闭子概形。令 $X := \mathrm{Bl}_Z \tilde{X}$ ~为沿着 Z 对 X 作的爆破，其投影为 $\pi\colon X \to X$；令 $i_E\colon E \to \tilde{X}$ 为例外除子 E 的包含。赋予 E 和 X 由G诱导的作用。则以下序列

$$0 \longrightarrow H^q(X, \Omega^p_{X/k}) \underset{\pi_*}{\overset{\pi^*}{\rightleftarrows}} H^q(\tilde{X}, \Omega^p_{\tilde{X}/k}) \xrightarrow{i_E^*} \frac{H^q(E, \Omega^p_{E/k})}{\pi^* H^q(Z, \Omega^p_{Z/k})} \longrightarrow 0 \tag{5-D}$$

是分裂正合的且 G-等变，并由 π_*分裂。此外，诱导的分裂

$$H^q(\tilde{X}, \Omega^p_{\tilde{X}/k}) \cong H^q(X, \Omega^p_{X/k}) \oplus \frac{H^q(E, \Omega^p_{E/k})}{\pi^* H^q(Z, \Omega^p_{Z/k})}$$

与杯积正交，且与 G-作用相容。这里，π_* 表示由 *Srinivas* *[Sri93, 定理 1].*构造的推前。

证明。序列 (5-D) 是 G-等变的，因为 π 和 i_E 是 G-等变的。注意，由 [Sri93, 定理 1 (d) 和 (f)] 可知，$\pi_*\pi^*$ 是恒等置换；并且由 [Sri93，定理 1 (c)]可知，π_* 是G-等变的。特别地，我们得到 π^* 是分裂单射。Rao-Yang-Yang-Yu [Rao+23 的定理 1.2 及其证明] 证明了当 k 代数闭时，序列 (5-D) 正合。由于到 k 的代数闭包的基变换是忠实平坦的，因此可得序列 (5-D) 在一般的 k上正合。

考虑 $x \in H^q(X, \Omega^p_{X/k})$ 和 $y \in H^{q'}(E, \Omega^{p'}_{E/k})/\pi^* H^{q'}(Z, \Omega^{p'}_{Z/k})$。取 y 的提升 $\tilde{y} \in H^{q'}(\tilde{X}, \Omega^{p'}_{\tilde{X}})$，满足 $\pi_*(\tilde{y}) = 0$。为了证明诱导的分解关于杯积是正交的，我们必须证明$\pi^*(x) \cdot \tilde{y} = 0$。由拉回的乘法性可得 $i_E^*(\pi^*(x) \cdot \tilde{y}) = i_E^*(\pi^*(x)) \cdot i_E^*(\tilde{y}) = 0 \cdot y = 0$，因为 (5-D) 是正合的。此外，由投影公式 Sri93，定理 1 (d)]，我们有 $\pi_*(\pi^*(x) \cdot \tilde{y}) = x \cdot \pi_*(\tilde{y}) = x \cdot 0 = 0$。由于$i_E^*$ 和 π_* 诱导了分解，我们得到 $\pi^*(x) \cdot \tilde{y} = 0$。因此，该分解关于杯积是正交的。

□

命题 5.31. 设 X 和 Y 是定义在 k 上的光滑射影概形，并配备了一个 G-作用。那么我们有

$$\chi_G(X \times Y/k) = \chi_G(X/k) \cdot \chi_G(Y/k).$$

证明. 上述等式两边关于不交并都是双线性的。因此，我们可以假设 X 和 Y 都是等维的。注意，由 Künneth 定理[Sta24, Tag 0BED] 在霍奇上同调上诱导的同构与 G-作用相容。令 $p_X\colon X\times Y\to X$ 和$p_Y\colon X\times Y\to Y$为投影态射。该同构 $p_X^*\omega_{X/k}\otimes p_Y^*\omega_Y\cong\omega_{X\times Y/k}$ 诱导出一个同构

$$H^{\dim X+\dim Y}(X\times Y,\omega_{X\times Y/k})\cong H^{\dim X}(X,\omega_{X/k})\otimes_k H^{\dim Y}(Y,\omega_{Y/k}) \quad (5\text{-E})$$

利用 Künneth 定理。现在我们要计算迹 $\mathrm{Tr}^{X\times Y/k}\colon H^{\dim X+\dim Y}(X\times Y,\omega_{X\times Y/k})\to k$。令 $x\in H^{\dim X}(X,\omega_{X/k})$ 和 $y\in H^{\dim Y}(Y,\omega_{Y/k})$。令$\pi_X\colon X\to\mathrm{Spec}\ k$和 $\pi_Y\colon Y\to\mathrm{Spec}\,k$为结构映射。利用[Sri93，定理 1]，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{X\times Y/k}(p_X^*x\cdot p_Y^*y)&=\pi_{X*}p_{X*}(p_X^*x\cdot p_Y^*y)\\&=\pi_{X*}(x\cdot p_{X*}p_Y^*y)\\&=\pi_{X*}(x\cdot\pi_X^*\pi_{Y*}y)\\&=\pi_{X*}(x)\cdot\pi_{Y*}(y)\\&=\mathrm{Tr}_{X/k}(x)\cdot\mathrm{Tr}_{Y/k}(y).\end{aligned}$$

更具体地说，我们使用 [Sri93，定理 1 (b) 和 (f)] 来证明第一个和最后一个等式，[Sri93，定理 1 (d)] 来证明第二个和第四个等式，并使用 [Sri93，定理 1 (c)] 来证明第三个等式。因此，我们得到$\mathrm{Tr}^{X\times Y/k}=\mathrm{Tr}^{X/k}\cdot\mathrm{Tr}^{Y/k}$在识别（5-E）下。将 Künneth 同构与此迹识别结合起来，即得所述结论。 □

引理 5.32. 设 V 是定义在连通、光滑、射影 k-概形 X 上的秩为 $r+1$ 的向量丛。设 $\xi\in H^1(\mathbb{P}(V),\Omega^1_{\mathbb{P}(V)/k})$ 为 $O_V(1)$ 的第一陈类，并设 $\alpha\in H^*(X,\Omega^*_{X/k})$。则

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{P}(V)/k}(p^*(\alpha)\cdot\xi^i)=\begin{cases}\mathrm{Tr}_{X/k}(\alpha) & \text{if } i=r,\\ 0 & \text{if } 0\le i\le r-1,\end{cases}$$

其中 $p\colon\ \mathbb{P}(V)\to X$ 表示投影。

证明。设 $\pi\colon X\to\mathrm{Spec}\ k$为结构映射，并设 $n=$维数为 X。根据次数原因，我们可以假设 $\alpha\in H^n(X,\Omega^n_{X/k})$ 且 $i=r$，否则所需等式两边均为零。在这种情况下，我们有

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{P}(V)/k}(p^*(\alpha)\cdot\xi^r)=\pi_*p_*(p^*(\alpha)\cdot\xi^r)=\pi_*(\alpha\cdot p_*(\xi^r))=\mathrm{Tr}_{X/k}(\alpha\cdot p_*(\xi^r)),$$

其中，第一处和最后一处等号用到了 [Sri93，定理 1 (b) 和 (f)]，第二处等号用到了 [Sri93，定理 1 (d)]。因此，我们只需证明$p_*(\xi^r)=1\in H^0(X,\Omega^0_{X/k})$。

我们首先证明 $p_*(\xi^r)=1$ 属于 $\mathrm{CH}^0(X)$。由于 X 不可约，局部化正合列给出：对于每个非空开子概形 $U\subset X$，$\mathrm{CH}^0(X)=\mathrm{CH}^0(U)$。通过限制到某个使 V 平凡化的开集 $U\subset X$，我们

因此可以假设 $V \cong X \times \mathbb{A}^{r+1}$，从而 $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^r_X$。现在，$\xi$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_X}(1)$ 的第一陈类，因此对应于超平面的类。因此，ξ^r 对应于一般位置的 r 个超平面的交集，这是一个重数为一的单个 X 点。因此，我们得到$p_*(\xi^r) = 1 \in \mathrm{CH}^0(X)$。应用 [Sri93、定理 1 (g) 和定理 2], ，我们现在还得到 $p_*(\xi^r) = 1 \in H^0(X, \Omega^0_{X/k})$。 □

命题 5.33。设 V 是光滑、射影k-概形 X上的秩为 $r+1$的向量丛。设 G 作用于 X，并等变地作用于 V。则有

$$\chi_G(\mathbb{P}(V)/k) = \chi_c(\mathbb{P}^r/k) \cdot \chi_G(X/k) \in \mathrm{GW}^G(k).$$

证明。由于等变二次欧拉示性数在不交并下具有可加性，我们可以假设 X 是等维的。我们将利用命题5.29分析霍奇上同调和迹。命题 5.29中的分解给出了一个 $H^*(X,\Omega^*_{X/k})$-模的同构

$$H^*(\mathbb{P}(V), \Omega^*_{\mathbb{P}(V)/k}) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} H^{*-i}(X, \Omega^{*-i}_{X/k})\xi^i = H^*(X, \Omega^*_{X/k}) \otimes H^*(\mathbb{P}^r_k, \Omega^*_{\mathbb{P}^{r-1}_k/k}) \tag{5-F}$$

且与分次相容。这里，右侧的同构由将 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(1)$ 的第一陈类映射到 ξ诱导。此外，如果赋予 $\mathbb{P}^r_k$ 平凡的 G作用，则两个同构都是 G-等变的。我们通过以下方式在（5-F）的右侧赋予一个带 $\mathbb{Z}$分次的 G-等变非退化二次型：β_R 将其定义为 $H^*(X,\Omega^*_{X/k})$ 和 $H^*(\mathbb{P}^r_k, \Omega^*_{\mathbb{P}^r_k/k})$ 上由杯积与迹的复合诱导的二次型的张量积。我们必须证明，β_R 以及（5-F）左侧的杯积与迹的复合（记为 β_L）在 $\mathrm{GW}^G(k)$ 中诱导出同一个元素。

令 $n =$ 维数为 X。根据注记5.15 和塞尔对偶，

$$V_L := \bigoplus_{(p,q)\neq((n+r)/2,(n+r)/2)} H^q(\mathbb{P}(V), \Omega^p_{\mathbb{P}(V)/k})$$

在 $\chi_G(\mathbb{P}(V)/k) = \mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta_L)$ 中的贡献是双曲的，具有拉格朗日子空间

$$L_L := \bigoplus_{\substack{(p,q)\neq((n+r)/2,(n+r)/2)\\ q-p\geq 1 \text{ or } p=q>(n+r)/2}} H^q(\mathbb{P}(V), \Omega^p_{\mathbb{P}(V)/k}).$$

因此，这一贡献完全由 G-表示 L_L决定。由（5-F），L_L 与 G-等变同构于

$$L_R := \bigoplus_{\substack{(p,q)\neq((n+r)/2,(n+r)/2)\\ q-p\geq 1 \text{ or } p=q>(n+r)/2}} (H^*(X, \Omega^*_{X/k}) \otimes H^*(\mathbb{P}^r_k, \Omega^*_{\mathbb{P}^r_k/k}))^{p,q}.$$

设 $x \in (H^*(X, \Omega^*_{X/k}) \otimes H^*(\mathbb{P}^r_k, \Omega^*_{\mathbb{P}^r_k/k}))^{p,q}$ 和 $y \in (H^*(X, \Omega^*_{X/k}) \otimes H^*(\mathbb{P}^r_k, \Omega^*_{\mathbb{P}^r_k/k}))^{p',q'}$，且 $(p', q') \neq (n + r - p, n + r - q)$。因此，我们有 $xy \in (H^*(X, \Omega^*_{X/k}) \otimes H^*(\mathbb{P}^r_k, \Omega^*_{\mathbb{P}^r_k/k}))^{p+p',q+q'}$ 和 $(p + p', q + q') \neq (n + r, n + r)$。由于用于定义 β_R 的迹映射会将所有不属于双次数 $(n + r, n + r)$ 的项映为零，因此我们有 $\beta_R(x, y) = 0$。因此，右侧的 (p, q) 和 (p', q') 双分次部分关于 β_R 正交，只要 $(p', q') \neq (n + r - p, n + r - q)$。特别地，$L_R$ 是

$$V_R := \bigoplus_{(p,q)\neq((n+r)/2,(n+r)/2)} (H^*(X, \Omega^*_{X/k}) \otimes H^*(\mathbb{P}^r_k, \Omega^*_{\mathbb{P}^r_k/k}))^{p,q}$$

到 $\mathsf{can}_{\mathbb{Z}}(\beta_R) \in \mathsf{GW}^G(k)$。因此，$V_R$ 到 $\mathsf{can}_{\mathbb{Z}}(\beta_R)$ 和 V_L 到 $\mathsf{can}_{\mathbb{Z}}(\beta_L)$ 的贡献相同。

因此，只需证明杯积与迹的复合 $\beta_V \in \mathsf{GW}^G(k)$ 在 $H^{(n+r)/2}(\mathbb{P}(V), \Omega^{(n+r)/2}_{\mathbb{P}(V)/k})$ 上，以及 $\beta_X \in \mathsf{GW}^G(k)$ 在 $(H^*(X, \Omega^*_{X/k}) \otimes H^*(\mathbb{P}^r_k, \Omega^*_{\mathbb{P}^{r-1}_k/k}))^{(n+r)/2,(n+r)/2}$ 上诱导 $\mathsf{GW}^G(k)$ 上的同一个形式，其中 $n + r$ 为偶数。

我们先证明 $n = 2m$ 和 $r = 2s$ 为偶数的情形。在这种情况下，5-F 给出的 $H^*(X, \Omega^*_{X/k})$-模同构诱导出一个 G-等变同构

$$H^{r+s}(\mathbb{P}(V), \Omega^{r+s}_{\mathbb{P}(V)/k}) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} H^{m-i}(X, \Omega^{m-i}_{X/k})\xi^{s+i} \oplus H^m(X, \Omega^m_{X/k})\xi^s \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{s} H^{m+i}(X, \Omega^{m+i}_{X/k})\xi^{s-i}}_{=:L}.$$

命题5.29 给出的代数结构表明，子空间 L 是一个 G-不变的全各向同性子空间，其正交补为 $L^\perp = H^m(X, \Omega^m_{X/k}) \oplus L$。事实上，引理 5.32 给出

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{P}(V)/k}(p^*(\alpha) \cdot \xi^i) = \begin{cases} \mathrm{Tr}_{X/k}(\alpha) & \text{if } i = r \\ 0 & \text{if } 0 \leq i \leq r - 1. \end{cases}$$

因此，L 是全各向同性的，并且我们有 $H^m(X, \Omega^m_{X/k}) \oplus L \subset L^\perp$。由于

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{s} H^{m-i}(X, \Omega^{m-i}_{X/k})\xi^{s+i} \right) = \dim L,$$

我们通过维数计数得到 $L^\perp = H^m(X, \Omega^m_{X/k}) \oplus L$。

因此，根据 [Sch10，引理 2.8 (c)] 可得 $\beta_V = \gamma + H(L) \in \mathrm{GW}^G(k)$ 其中 $\gamma \in \mathrm{GW}^G(k)$ 是杯积与迹的复合

$$H^m(X, \Omega^m_{X/k}) \times H^m(X, \Omega^m_{X/k}) \xrightarrow{\cup} H^n(X, \Omega^n_{X/k}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{X/k}} k.$$

类似地，我们得到 $\beta_X = \gamma + H(L) \in \mathsf{GW}^G(k)$，因此 $\beta_X = \beta_V$。

当 n 和 r 均为奇数时，证明类似，唯一的区别是直和项 $H^m(X, \Omega^m_{X/k})$ 不出现，并且 L 是一个拉格朗日子空间。 □

推论 5.34。 设 X 是一个定义在 k 上的光滑射影概形，带有一个 G-作用。设 $Y \subset X$ 是被 G固定的光滑闭子概形。那么我们有

$$\chi_G(\mathbb{P}(N_Y X)/k) = \chi_c(\mathbb{P}(N_Y X)/k) \in \mathrm{GW}^G(k).$$

证明。 由于等变二次欧拉示性数在不交并下具有可加性，我们可以假设 Y 是连通的。因此， $N_Y X$ 是秩固定为 r的向量丛。由于 G 对 Y 的作用是平凡的，我们有 $\chi_G(Y/k)^G = \chi_c(Y/k)$。现在，由命题 5.33 可得

$$\chi_G(\mathbb{P}(N_Y X)/k) = \chi_c(\mathbb{P}^{r-1}/k)\cdot\chi_G(Y/k) = \chi_c(\mathbb{P}^{r-1}/k)\cdot\chi_c(Y/k) = \chi_c(\mathbb{P}(N_Y X)/k).$$

□

命题 5.35。 设 X 是定义在 k 上、带有 G-作用的光滑射影概形。设 $Y \subset X$ 是在 G-作用下稳定的光滑闭子概形。则有

$$\chi_G(\mathrm{Bl}_Y X/k) = \chi_G(X/k) - \chi_G(Y/k) + \chi_G(\mathbb{P}(N_Y X)/k) \in \mathrm{GW}^G(k).$$

证明。 由于等变二次欧拉示性数和爆破的例外除子在不交并下具有可加性，我们可以假设 X 和 Y 是等维的。令 $E \subset \mathrm{Bl}_Y X/k$ 为例外除子，并用以下符号表示爆破方图中的态射

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_E} & \mathrm{Bl}_Y X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & X. \end{array}$$

因此，我们有 $E \cong \mathbb{P}(N_Y X)$ 从而， $\chi_G(E/k) = \chi_G(\mathbb{P}(N_Y X)/k)$。由命题 5.30，我们有

$$\chi_G(\mathrm{Bl}_Y X/k) = \chi_G(X/k) + q,$$

其中 $q \in \mathrm{GW}^G(k)$是由分解中 $H^q(E, \Omega^p_{E/k})/\pi^* H^q(Y, \Omega^p_{Y/k})$部分上的杯积与迹所诱导的 G-等变二次型。因此，尚需证明 $q = \chi_G(E/k) - \chi_G(Y/k)$。

由命题 5.29 中的射影丛公式，对于 $V = N_Y X$ 和$E = \mathbb{P}(V)$，我们有

$$H^*(E, \Omega^*_{E/k}) = \bigoplus_{i=0}^{r} H^{*-i}(Y, \Omega^{*-i}_{Y/k})\xi^i,$$

其中 $r+1$ 表示 Y 在 X 中的余维，而 ξ 表示 $\mathcal{O}_E(1)$ 的第一陈类。由此得到一个同构

$$\frac{H^*(E, \Omega^*_{\mathbb{P}(V)/k})}{\pi^* H^*(Y, \Omega^*_{Y/k})} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} H^{*-i}(Y, \Omega^{*-i}_{Y/k})\xi^i.$$

令 $a \in H^*(Z, \Omega^* Z)$。由于 $i_Y^*\colon H^*(X, \Omega^*_{X/k}) \to H^*(Y, \Omega^*_{Z/k})$ 是满射，我们可以将 a 提升为元素 $\hat{a} \in H^*(X, \Omega^*_{X/k})$，使得 $i_Y^*(\hat{a}) = a$。此外，[Sri93，定理 1 (g)] 给出 $i_E^*(-\hat{\xi}) = \xi$，其中 $\hat{\ } \xi := i_{E*}(1) \in H^1(\mathrm{Bl}_Y X, \Omega^1_{\mathrm{Bl}_Y X/k})$。现在，根据 [Sri93，定理 1 (d)]

$$\begin{aligned} i_E^*(i_{E*}(\pi^*(a)\xi^\nu)) &= i_E^* i_{E*}(\pi^* i_Z^*(\hat{a}) \cdot i_E^*((-\hat{\xi})^\nu)) \\ &= i_E^* i_{E*} i_E^*(\pi^*(a) \cdot (-\hat{\xi})^\nu) \\ &= i_E^*(\pi^*(a) \cdot (-\hat{\xi})^\nu \cdot i_{E*}(1)) \\ &= \pi^*(a)\xi^\nu \cdot i_E^* i_{E*}(1) \\ &= -\pi^*(a)\xi^{\nu+1} \end{aligned}$$

对于 $0 \le \nu \le r-1$。此外，我们有 $\pi_* i_{E*}(\pi^*(a)\xi^\nu) = i_{Z*}(a)\pi_*(\xi^\nu) = 0$ 对于$0 \le \nu < r$ 根据 [Sri93，定理 1 (b) 和 (d)] 以及维数考量。

令 $x = \sum_{i=1}^r a_i \xi^i \in H^*(E, \Omega^*_{E/k})/\pi^* H^*(Z, \Omega^*_{Z/k})$，并记 $x/\xi := \sum_{i=1}^r a_i \xi^{i-1} \in H^*(E, \Omega^*_{E/k})$。上述计算得出

$$-i_E^* i_{E*}(x/\xi) = x.$$

由于赋值 $x \mapsto x/\xi$ 是可加的，因此我们构造出了 i_E^*的一个显式右逆，它诱导出映射 $H^*(E, \Omega^*_{\mathbb{P}(V)/k})/\pi^* H^*(Y, \Omega^*_{Y/k}) \to H^*(\mathrm{Bl}_Y X, \Omega^*_{\mathrm{Bl}_Y X/k})$ 由命题 5.30中的分解给出。

现在，令 $x = \sum_{i=1}^r a_i \xi^i, y = \sum_{i=1}^r b_i \xi^i \in H^*(E, \Omega^*_{E/k})/\pi^* H^*(Z, \Omega^*_{Z/k})$ 并考虑 x/ξ 和 y/ξ 作为上述定义的 $H^*(E, \Omega^*_{E/k})$的元素。因此，根据 [Sri93，定理 1]

$$\begin{aligned} q(x,y) &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{Bl}_Y X/k}((-i_{E*}(x/\xi)) \cdot (-i_{E*}(y/\xi))) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{Bl}_Y X/k}(i_{E*}(x/\xi) \cdot i_{E*}(y/\xi)) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{Bl}_Y X/k}(i_{E*}(x/\xi \cdot i_E^* i_{E*}(y/\xi))) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{Bl}_Y X/k}\, i_{E*}(x/\xi \cdot (-\xi) \cdot y/\xi) \\ &= -\mathrm{Tr}_{E/k}(x/\xi \cdot y/\xi \cdot \xi). \end{aligned}$$

因此，我们需要证明该对称双线性型

$$\bigoplus_{i=0}^{r-1} H^*(Y, \Omega^*_{Y/k})\xi^i \times \bigoplus_{i=0}^{r-1} H^*(Y, \Omega^*_{Y/k})\xi^i \to H^{n+r}(E, \Omega^{n+r}_{E/k}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{E/k}} k$$

先将 $(\sum_{i=0}^{r-1} a_i\xi^i, \sum_{i=0}^{r-1} b_i\xi^i)$ 映射为 $(\sum_{i=0}^{r-1} a_i\xi^i \cdot \sum_{i=0}^{r-1} b_i\xi^i) \cdot (-\xi)$，再施加 $\mathrm{Tr}^{E/k}$，由此定义的对称双线性型在 $\mathrm{GW}^G(k)$ 中诱导出 $\chi_G(E/k) - \chi_G(Z/k)$。这里，我们赋予 $H^q(Y, \Omega^p_{Y/k})\xi^i$ 次数 $q-p$，然后使用典范映射将 $\mathbb{Z}$-分次型映射到 $\mathrm{GW}^G(k)$。

根据命题5.33的证明，在$\mathrm{GW}^G(k)$ 中诱导出的形式与由

$$\bigoplus_{i=0}^{r-1} H^*(Y, \Omega^*_{Y/k})\xi^i \times \bigoplus_{i=0}^{r-1} H^*(Y, \Omega^*_{Y/k})\xi^i \to H^*(Y, \Omega^*_{Y/k})[\xi]/(\xi^{r+1}) \xrightarrow{\varphi_r} k, \quad (5\text{-G})$$

其中，第一个映射将(x,y)映到$x\cdot y\cdot(-\xi)$，并且φ_r是$\mathrm{Tr}^{Y/k}$与到ξ^r的因子的投影的复合。由于投影到ξ^r部分与投影到$xy\xi$的ξ^{r-1}部分相同，因此我们得到xy的$\mathbb{Z}$分次形式（5-G）与该形式一致

$$\bigoplus_{i=0}^{r-1} H^*(Y,\Omega^*_{Y/k})\xi^i \times \bigoplus_{i=0}^{r-1} H^*(Y,\Omega^*_{Y/k})\xi^i \to H^*(Y,\Omega^*_{Y/k})[\xi]/(\xi^r) \xrightarrow{\varphi_{r-1}} k, \quad \text{(5-H)}$$

其中第一个映射将(x,y)映射到xy，而φ_{r-1}是$-\mathrm{Tr}^{Y/k}$与投影到ξ^{r-1}的因子上的投影的复合。再次根据命题5.33的证明，我们得到形式（5-H）诱导出$\langle -1\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{r-1}/k)\cdot\chi_G(Y/k)$。因此，我们有

$$q=\langle -1\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{r-1}/k)\cdot\chi_G(Y/k)=(\chi_c(\mathbb{P}^r/k)-\langle 1\rangle)\cdot\chi_G(Y/k)=\chi_G(E/k)-\chi_G(Y/k)$$

由命题5.33。 □

推论 5.36。设X是一个定义在k上的光滑射影概形，并带有一个G-作用。设$Y\subset X$是一个由G固定的、余维为常数$r+1$的光滑闭子概形。则有

$$\chi_G(\mathrm{Bl}_Y X/k)=\chi_G(X/k)+(\chi_c(\mathbb{P}^r/k)-\langle 1\rangle)\chi_c(Y/k).$$

证明。结合推论5.34和命题5.35。 □

5.3 商的 $\mathbb{A}^n$-欧拉示性数的应用

现在我们将应用G-等变二次欧拉示性数来研究商概形。也就是说，考虑如下设置：设X是定义在k上的光滑射影概形，并且G作用于X。设$Y=X/G$为商，并将商映射记为$\pi\colon X\to Y$。我们希望根据X的G-等变$\mathbb{A}^1$-欧拉示性数以及可能的其他信息，计算Y的$\mathbb{A}^1$-欧拉示性数。

以下引理已经出现在[BV25，引理21]中。由于这是比较欧拉示性数的基本构件之一，为方便读者，现将其证明列于此处。

引理 5.37 ([BV25，引理21])。设$f\colon X\to Y$是一个次数为d的有限态射，介于光滑、射影的n维概形X和Y之间，且定义在k上。则图表

$$\begin{array}{ccc} H^n(X,\Omega^n_{X/k}) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{X/k}} & k. \\ {\scriptstyle f^*}\uparrow & \nearrow_{d\cdot\mathrm{Tr}_{Y/k}} & \\ H^n(Y,\Omega^n_{Y/k}) & & \end{array}$$

可交换。

证明。 考虑由 Srinivas f_* 构造的推前 $H^n(X,\Omega^n_{X/k}) \to H^n(Y,\Omega^n_{Y/k})$，见 [Sri93，定理 1]。相应结构映射的推前与迹映射一致，见 [Sri93，定理 1 (e)]。因此，图表

$$\begin{array}{ccc} H^n(X,\Omega^n_{X/k}) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{X/k}} & k \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & \nearrow_{\mathrm{Tr}_{Y/k}} & \\ H^n(Y,\Omega^n_{Y/k}) & & \end{array}$$

由 [Sri93，定理 1 (b)可交换]。由于我们有 $f_*f^* = d\cdot\mathrm{id}$ 由 [Sri93，定理 1 (d) 和 (f)]，即可得到引理的结论。 □

以下命题是专家们熟知的。为方便读者，我们在此给出证明。

命题 5.38。 设 G 是一个阶与 特征 k 互素的群，并且在 X 的一个开稠密子概形上自由作用；再设 Y 是光滑的。则拉回映射 π^*: $H^q(Y,\Omega^p_{Y/k}) \to H^q(X,\Omega^p_{X/k})$ 诱导出一个同构

$$H^q(Y,\Omega^p_{Y/k}) \cong (H^q(X,\Omega^p_{X/k}))^G.$$

由于该同构是典范的，我们将直接记作 $H^q(Y,\Omega^p_{Y/k}) = (H^q(X,\Omega^p_{X/k}))^G$，将这两个群视为相同。

证明。 由于 X 和 Y 是光滑的，商映射 π 是平坦的。因此， $\pi_*\Omega^p_{X/k}$ 是 Y 上的局部自由凝聚层。由于 $|G|$ 与 char k 互素，我们得到 G在 $\pi_*\Omega^p_{X/k}$ 上半单地作用。特别地，$(\pi_*\Omega^p_{X/k})^G$ 是$\pi_*\Omega^p_{X/k}$的一个直和项。

此外，根据 Knighten$\Omega^p_{Y/k} = (\pi_*\Omega^p_{X/k})^G$ Kni73 [，第二章定理 3 之后的推论，因为我们可以在扩张到代数闭包后验证这个等式，而且分歧是温和的，因为], 与 $|G|$ 的特征互素 k。

由于 G-表示 $\pi_*\Omega^p_{X/k}$ 是半单的，我们可以将其分解为各个同型分量

$$\pi_*\Omega^p_{X/k} = \bigoplus_\rho (\pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho$$

其中， ρ 遍历所有不可约特征标。注意，由于 G 对 Y 的作用是平凡的，这个分解是有意义的。

现在，我们有

$$\bigoplus_\rho H^q(Y,\pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho = H^q(Y,\pi_*\Omega^p_{X/k}) = H^q(Y,\bigoplus_\rho(\pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho) = \bigoplus_\rho H^q(Y,(\pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho),$$

其中 $\bigoplus_\rho H^q(Y,\ \pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho$ 再次是按等型分量的分解。设 $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ 为 Y 的一个开仿射覆盖。因此，Čech复形

$\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, -)$ 计算层上同调，因为 Y 再次是射影的，因而是分离的。 $\pi_*\Omega^p_{X/k}$ 的等型分量分解诱导出分解

$$\bigoplus_\rho \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho = \bigoplus_\rho \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, (\pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho)$$

将 $C^\bullet(\mathfrak{U}, \pi_*\Omega^p_{X/k})$ 分解为等型分量，其中 $C^\bullet(\mathfrak{U}, \pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho = \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, (\pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho)$。由于Čech复形计算层上同调，且取等型分量是正合的，因此对每个 ρ，这会导出等式 $H^q(Y,(\pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho) = H^q(Y, \pi_*\Omega^p_{X/k})^\rho$ 。

特别地，这给出 $H^q(Y, \Omega^p_{Y/k}) = H^q(Y,(\pi_*\Omega^p_{X/k})^G) = H^q(Y, \pi_*\Omega^p_{X/k})^G$。映射 π^* 诱导一个 G- 等变同构 $H^q(Y, \pi_*\Omega^p_{X/k}) \cong H^q(X,\Omega^p_{X/k})$，因为 π 是有限的。因此

$$H^q(Y, \Omega^p_{Y/k}) = H^q(Y, \pi_*\Omega^p_{X/k})^G \cong H^q(X, \Omega^p_{X/k})^G. \qquad \square$$

定理 5.39。 设 X 是定义在 k 上的光滑射影概形，且设 G 是一个阶数与 特征 k 互素的群，并作用于 X。设 $Y = X/G$ 是商，且$\pi\colon\ X \to Y$ 是商映射。假设 G 在 X 的一个开稠密子集上自由作用，并假设 Y 光滑。则 $\chi_c(Y/k) = \langle |G| \rangle \cdot \chi_G(X/k)^G$。

证明。 由于等变二次欧拉示性数在取不交并时保持不变，我们可以假设 X 是维数为n的等维对象。考虑二次型

$$\chi(X/k)_{p,q}\colon (H^p(X, \Omega^q_{X/k}) \oplus H^{n-p}(X, \Omega^{n-q}_{X/k})) \times (H^p(X, \Omega^q_{X/k}) \oplus H^{n-p}(X, \Omega^{n-q}_{X/k})) \to k$$

给定为 $\chi(X/k)_{p,q}((a, b),(a', b')) = \mathrm{Tr}^{X/k}(a \cup b' + (-1)^{(p+q)(n+1)} b \cup a')$，其中 $0 \le p < q \le n$ 或 $p = q$ 满足 $0 \le 2p < n$。若 n 为偶数，也考虑二次型

$$\chi(X/k)_{n/2,n/2}\colon H^{n/2}(X, \Omega^{n/2}_{X/k}) \times H^{n/2}(X, \Omega^{n/2}_{X/k}) \xrightarrow{\cup} H^n(X, \Omega^n_{X/k}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{X/k}} k.$$

这些同样带有 G-作用。类似地，定义 $\chi(Y/k)_{p,q}$ 。根据定理 1.7，有

$$\chi_c(Y/k) = \sum_{p,q} (-1)^{q-p} \chi(Y/k)_{p,q}$$

根据定义，有

$$\chi_G(X/k) = \sum_{p,q} (-1)^{q-p} \chi(X/k)_{p,q}. \tag{5-I}$$

映射 π 是次数为 $|G|$ 的有限映射，因为 G 在 X的一个开稠密子概形上自由作用。由命题 5.38， π^* 诱导同构 $H^p(Y, \Omega^q_{Y/k}) \cong H^p(X, \Omega^q_{X/k})^G$，因此由引理 5.37， $\chi(Y/k)_{p,q} = |G| \cdot \chi(X/k)^G_{p,q}$。现在若将 $(-)^G$ 应用于 (5-I)，即可得到所述结论。

$\square$

令 $Z \subset X$ 为 G-作用的不动点轨迹。根据爆破的泛性质， G在 X 上的作用诱导出 $\mathrm{Bl}_Z X$上的 G-作用。因此，$\mathrm{Bl}_Z X/G \to Y = X/G$ 是固有的，并且在 $(X \setminus Z)/G$上是同构。在这种情形的一个特殊情况下，我们可以得到以下结论：

命题 5.40。 设 G 是一个素数阶循环群 $p \neq$ 特征 k，并假设其在例外除子 E 上的诱导 G-作用是平凡的。此外，假设商 $(\mathrm{Bl}_Z X)/G$ 是光滑的，且 Z 在 X 中的余维数 c 为常数。那么， Y 的紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数由下式给出

$$\chi_c(Y/k) = \chi_G(X/k)^G \cdot \langle |G| \rangle + (\langle |G| \rangle - \langle 1 \rangle) \cdot \langle -1 \rangle \cdot \chi_c(\mathbb{P}^{c-2}/k) \cdot \chi_c(Z/k) \in \mathrm{GW}(k).$$

证明。 由于 X、$\mathrm{Bl}_Z X$和$(\mathrm{Bl}_Z X)/G$ 均为光滑射影簇，我们可以利用定理 5.39 比较 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数$\mathrm{Bl}_Z X$ 与$(\mathrm{Bl}_Z X)/G$。

由于 G在 Z 上的作用是平凡的，这是因为 G在 E 上的作用是平凡的，并且 π: $E \to Z$ 是 G-等变的。由推论 5.36，可得

$$\begin{aligned} \chi_G(\mathrm{Bl}_Z X/k) &= \chi_G(X/k) + (\chi_c(\mathbb{P}^{c-1}/k) - \langle 1 \rangle)\chi_c(Z/k) \\ &= \chi_G(X/k) + \langle -1 \rangle \cdot \chi_c(\mathbb{P}^{c-2}/k)\chi_c(Z/k). \end{aligned}$$

现在，定理 5.39给出

$$\begin{aligned} \chi_c(((\mathrm{Bl}_Z X)/G)/k) &= \langle |G| \rangle \cdot \chi_G(((\mathrm{Bl}_Z X)/G)/k)^G \\ &= \langle |G| \rangle \cdot \chi_G(X/k)^G + \langle |G| \rangle \cdot \langle -1 \rangle \cdot \chi_c(\mathbb{P}^{c-2}/k)\chi_c(Z/k). \end{aligned}$$

与 $\mathrm{Bl}_Z X$ 上的情形类似，我们也有，因为 $Z/G = Z$ 和 $E/G = E$

$$\chi_c(((\mathrm{Bl}_Z X)/G)/k) = \chi_c(Y/k) + \langle -1 \rangle \cdot \chi_c(\mathbb{P}^{c-2}/k)\chi_c(Z/k).$$

与上述公式比较，可得此结论。 □

推论 5.41。 在命题*5.40*的记号及假设下，我们有

$$\chi_c(Y/k) = \chi_G(X/k)^G \cdot \langle |G| \rangle + \begin{cases} 0 & \textit{if } \dim Z \textit{ odd or } c \textit{ odd}, \\ (\langle |G| \rangle - \langle 1 \rangle) \cdot \langle -1 \rangle \cdot \chi_c(Z/k) & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

证明。 这由以下观察可得： $(\langle |G| \rangle - \langle 1 \rangle)$ 与双曲型相乘后为零， $\chi_c(\mathbb{P}^{c-2}/k) = \sum_{i=0}^{c-2} \langle (-1)^i \rangle$的显式描述，以及以下观察：当 $\chi_c(Z/k)$ 为奇数时，$\dim Z$ 是双曲型，由推论 1.8可知。 □

推论 5.42。 设 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用于 k上的光滑射影概形 X 。则有

$$\chi_c((X/G)/k) = \langle 2 \rangle \cdot \chi_G(X/k)^G + \begin{cases} 0 & \textit{if } \dim Z \textit{ odd or } c \textit{ odd}, \\ (\langle -2 \rangle - \langle -1 \rangle) \cdot \chi_c(X^G/k) & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

证明。 根据推论 4.7，推论 5.41 的假设在考虑 在 X上的爆破时均得到满足。因此，该结论由推论 5.41得出。 □

6 {style id='1'}显式计算 Sym{/style}^{2}

现在我们将计算连通光滑射影概形 X 在 k 上的 $\mathrm{Sym}^2 X$ 的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数。

*{style id='1'}*命题 *6.1*。*{/style}*设 V 是一个 n 维 k 向量空间，且 β*{style id='7'}*：*{/style}* $V\otimes V\to k$ 是定义在 V 上的非退化对称双线性型。假设 β 与对角形式 $\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha_i\rangle$等距同构。设 $G\subset S_m$ 是一个子群，并考虑非退化对称双线性型

$$\beta^m\colon (V^{\otimes m})\otimes(V^{\otimes m})\to k;(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)\otimes(w_1\otimes\cdots\otimes w_m)\mapsto\beta(v_1,w_1)\cdots\beta(v_m,w_m).$$

则有以下结论：

(1) 令 G 通过置换因子作用于 $V^{\otimes m}$；也就是说，$\sigma\in G$ 通过 $\sigma\cdot v_1\otimes\cdots\otimes v_m=v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(m)}$ 作用于 $v_1\otimes\cdots\otimes v_m\in V^{\otimes m}$。那么 β^m 是一个非退化的 G-等变对称双线性型，并且有

$$(\beta^m)^G=\sum_{G\cdot(i_*)\in\{1,\dots,n\}^m/G}\langle|G\cdot(i_*)|\cdot\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_m}\rangle$$

其中 G 通过置换因子作用于 *{style id='2'1{/style},…,n}*^{m}，*{style id='6'*（*{/style}*i_**{style id='9'} {/style}* 是 *{style id='11'*（*{/style}*$i_1,\dots,i_n$*{style id='15'*）*{/style}* $\in$ *{style id='18'1{/style},…,n}*^{m} 的简写，而 $|G\cdot$ *{style id='23'*（*{/style}*i_**{style id='26'*）*{/style}*$|$ 表示 *{style id='29'*（*{/style}*i_**{style id='32'*）*{/style}* 在 G 作用下的轨道基数。

(2) 令 G 通过置换因子并引入符号的方式作用于 $V^{\otimes m}$；也就是说，$\sigma\in G$ 通过 $\sigma\cdot v_1\otimes\cdots\otimes v_m=\operatorname{sgn}\sigma\cdot v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(m)}$ 作用于 $v_1\otimes\cdots\otimes v_m\in V^{\otimes m}$。那么 β^m 是一个非退化的 G-等变对称双线性型，并且我们有

$$(\beta^m)^G=\sum_{G\cdot(i_*)\in(\{1,\dots,n\}^m/G)'}\langle|G\cdot(i_*)|\cdot\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_m}\rangle$$

其中 G 通过置换因子作用于 $\{1,\dots,n\}^m$，而求和遍历轨道 $G\cdot(i_*)$，其中 $G\cdot(i_*)$ 的某个（或等价地，任意）代表元 (i_*) 的稳定子群包含于 A_m。

证明。条件 (2) 中，存在 $G\cdot(i_*)$ 的一个代表元 (i_*)，使得 (i_*) 的稳定子 $\mathrm{Stab}_G(i_*)$ 包含于 A_m，这一条件不依赖于代表元的选择。若 (i'_*) 是 $G\cdot(i_*)$ 的另一个代表元，则 $\mathrm{Stab}_G(i'_*)$ 和 $\mathrm{Stab}_G(i_*)$ 共轭。由于 A_m 是正规子群，因此 $\mathrm{Stab}_G(i_*)\subset A_m$ 当且仅当 $\mathrm{Stab}_G(i'_*)\subset A_m$。特别地，条件 (2) 仅取决于轨道。

注意，β^m 是非退化的，并且在情形（1）和（2）下是 G-等变的。设 $v_1,\dots,v_n\in V$ 是 V 的一组基，使得

$$\beta(v_i,v_j)=\begin{cases}\alpha_i & \text{if } i=j,\\ 0 & \text{if } i\neq j.\end{cases}$$

因此，$\{v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_m}\mid i_1,\ldots,\ i_m\in\{1,\ \ldots,\ n\}\}$ 是 $V^{\otimes m}$ 的一组基，并且我们有

$$\beta^m(v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_m},v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_m})=\begin{cases}\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_m} & \text{if } (i_1,\ldots,i_m)=(j_1,\ldots,j_m),\\ 0 & \text{if } (i_1,\ldots,i_m)\neq(j_1,\ldots,j_m).\end{cases}\tag{6-A}$$

现在证明（1）。在这种情况下，$(V^{\otimes m})^{\ G}$ 有一组基，由以下元素构成

$$v_{G\cdot(i_*)}=\sum_{(j_1,\ldots,j_m)\in G\cdot(i_*)}v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_m}$$

其中 $G\cdot(i_*)$ 遍历 $\{1,\ldots,n\}^m/G$中的轨道。因此，利用（6-A）可得

$$\begin{aligned}\beta^m(v_{G\cdot(i_*)},v_{G\cdot(i_*)})&=\sum_{(j_1,\ldots,j_m)\in G\cdot(i_*)}\ \sum_{(j_1',\ldots,j_m')\in G\cdot(i_*)}\beta^m(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_m},v_{j_1'}\otimes\cdots\otimes v_{j_m'})\\&=\sum_{(j_1,\ldots,j_m)\in G\cdot(i_*)}\alpha_{j_1}\cdots\alpha_{j_m}\\&=|G\cdot(i_*)|\cdot\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_m}.\end{aligned}$$

最后一个等式成立，是因为群作用只会置换元素$i_1,\ldots,i_m$。由于（6-A）还给出

$$\beta^m(v_{G\cdot(i_*)},v_{G\cdot(j_*)})=0$$

对于 $G\cdot(i_*)\neq G\cdot(j_*)$，我们便得到所要证明的结论。

（2）的证明类似：令 $v=\sum_{(i_*)\in\{1,\ldots,n\}^m}\lambda_{(i_*)}v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_m}\in(V^{\otimes m})^G$。令 $(i_*)\in\{1,\ldots,n\}^m$，并令 $\sigma\in\mathrm{Stab}_{(i_*)}G$。现在，由 $\sigma v=v$ 可知 $\lambda_{(i_*)}=\mathrm{sgn}\ \sigma\cdot\lambda_{(i_*)}$。特别地，若存在 $\sigma\in\mathrm{Stab}_{(i_*)}G$ 使得 $\mathrm{sgn}\ \sigma=-1$，则 $\lambda_{(i_*)}=0$，因为我们假设 k 的特征不为二。因此，我们可以如下描述 $(V^{\otimes m})^G$ 的一组基：令 $(i_*^1)\ldots,(i_*^N)$ 为 $(\{1,\ldots,n\}^m/G)'$ 中轨道的代表元系，其中 $(\{1,\ldots,n\}^m/G)'$ 由 $\{1,\ldots,n\}^m/G$ 中稳定子群包含于 sgn 的核的所有轨道构成。这些元素

$$v_{(i_*^\nu)}=\sum_{\sigma\in G/\,\mathrm{Stab}_{(i_*^\nu)}G}\sigma\cdot v_{i_1^\nu}\otimes\cdots\otimes v_{i_m^\nu}$$

对于 $\nu=1,\ldots,N$构成 $(V^{\otimes m})^G$ 的一组基。由于我们可以像证明 (1) 时那样得到

$$\beta^m(v_{(i_*^\nu)},v_{(i_*^\nu)})=|G\cdot(i_*^\nu)|\cdot\alpha_{i_1^\nu}\cdots\alpha_{i_m^\nu}$$

and

$$\beta^m(v_{(i_*^\nu)},v_{(i_*^{\nu'})})=0$$

对于 $\nu\neq\nu'$，我们得出该结论。 □

引理 6.2。设 $V^\bullet$ 是一个有界的有限维 $\mathbb{Z}$-分次 k-向量空间，并设 $\beta\colon\ V^\bullet\times V^\bullet\to k$ 是 $V^\bullet$ 上的 $\mathbb{Z}$- 分次非退化对称双线性型。令 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过 $a\otimes b\mapsto (-1)^{\nu\nu'}b\otimes a$ 作用于 $V^\bullet\otimes V^\bullet$，其中 $a\in V^\nu$ 和 $b\in V^{\nu'}$，并假设 β^{even} 与 $\sum_{i=1}^n\langle\alpha_i\rangle$ 等距同构。则有

$$(\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta^2))^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}=n\langle 1\rangle+\sum_{1\le i<j\le n}\langle 2\alpha_i\alpha_j\rangle+m\langle -2\rangle+(m^2-(n+1)m)\cdot H\in \mathrm{GW}(k),$$

其中 维数 $V_{\text{奇数}}=2m$。

证明。注意到 $\mathsf{can}_{\mathbb{Z}}\,\beta=\sum_{i=1}^n\langle\alpha_i\rangle\ -mH$，且 $\mathsf{dim}\,V_{\text{偶数}}=$秩 $\beta^{\mathrm{even}}=n$。此外，我们可以找到 $v_1^{\mathrm{odd}},\dots,v_{2m}^{\mathrm{odd}}$的对角化基，其中 $V_{\text{奇数}}\,\mathsf{for}\beta^{\mathrm{odd}}$ 的对角元素为 $\alpha_i'=(-1)^i$。

根据注记 5.16，$(\beta^2)^{\mathrm{even}}=((\beta^{\mathrm{even}})^2+(\beta^{\mathrm{odd}})^2)$ 和 $(\beta^2)^{\mathrm{odd}}=(\beta^{\mathrm{even}}\beta^{\mathrm{odd}}+\beta^{\mathrm{odd}}\beta^{\mathrm{even}})$ 是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-等变双线性型。群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过置换因子作用于 $(\beta^{\mathrm{even}})^2$ 和 $\beta^{\mathrm{even}}\beta^{\mathrm{odd}}+\beta^{\mathrm{odd}}\beta^{\mathrm{even}}$，并通过带符号的因子置换作用于 $(\beta^{\mathrm{odd}})^2$。因此，我们可以使用命题 6.1 计算 $((\beta^2)^{\mathrm{even}})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$，得到

$$\begin{aligned}((\beta^2)^{\mathrm{even}})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}&=((\beta^{\mathrm{even}})^2)^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}+((\beta^{\mathrm{odd}})^2)^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\\&=n\langle 1\rangle+\sum_{1\le i<j\le n}\langle 2\alpha_i\alpha_j\rangle+\sum_{1\le i<j\le 2m}\langle 2(-1)^{i+j}\rangle\\&=n\langle 1\rangle+\sum_{1\le i<j\le n}\langle 2\alpha_i\alpha_j\rangle+m\langle -2\rangle+(m^2-m)H.\end{aligned}$$

因此，我们只需计算 $((\beta^2)^{\mathrm{odd}})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$。设 $v_1^{\mathrm{even}},\dots,v_n^{\mathrm{even}}$ 是 $V_{\text{偶}}$ 的一组基，设 $v_1^{\mathrm{odd}},\dots,v_{2m}^{\mathrm{odd}}$ 是 $V_{\text{奇}}$ 的一组基。现在，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过将 $v_i^{\mathrm{even}}\otimes v_j^{\mathrm{odd}}$ 映到 $v_j^{\mathrm{odd}}\otimes v_i^{\mathrm{even}}$、将 $v_j^{\mathrm{odd}}\otimes v_i^{\mathrm{even}}$ 映到 $v_i^{\mathrm{even}}\otimes v_j^{\mathrm{odd}}$，作用于 $V_{\text{偶}}\otimes V^{\mathrm{odd}}\oplus V^{\mathrm{odd}}\otimes V^{\mathrm{even}}$。因此，$((V\otimes V)^{\mathrm{odd}})^{\mathbb{Z}/2}$ 的一组基由以下元素给出

$$w_{ij}:=v_i^{\mathrm{even}}\otimes v_j^{\mathrm{odd}}+v_j^{\mathrm{odd}}\otimes v_i^{\mathrm{even}}$$

对于 $i=1,\dots,n$ 和 $j=1,\dots,2m$。特别地，$\mathsf{dim}((V\otimes V)^{\mathrm{odd}})^{\mathbb{Z}/2}=2nm$。因此，$((\beta^2)^{\mathrm{odd}})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ 对 $(\mathsf{can}_{\mathbb{Z}}(\beta^2))^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ 在 $\mathsf{GW}(k)$ 中贡献 $-\frac{1}{2}\,\mathsf{dim}((V\otimes V)^{\mathrm{odd}})^{\mathbb{Z}/2}\cdot H=-nmH$。□

定理 6.3。设 X 是定义在 k 上的连通光滑射影概形。将 X 的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数表示为 $\chi_c(X/k)=\beta-mH$，其中 $\beta=\sum_{i=1}^n\langle\alpha_i\rangle$ 且 $m\ge 0$。那么，若 $\dim X$ 为奇数，则在 $\mathrm{GW}(k)$ 中有

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k)=n\langle 2\rangle+\sum_{1\le i<j\le n}\langle\alpha_i\alpha_j\rangle+m\langle -1\rangle+(m^2-(n+1)m)\cdot H.\quad\text{(6-B)}$$

如果维数 X 为偶数，则有

$$\begin{aligned}\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k)=n\langle 2\rangle+\sum_{1\le i<j\le n}\langle\alpha_i\alpha_j\rangle+m\langle -1\rangle+(m^2-(n+1)m)\cdot H\\+(\langle -2\rangle-\langle -1\rangle)\cdot\chi_c(X/k)\end{aligned}\quad\text{(6-C)}$$

在$\mathrm{GW}(k)$中。

证明。 首先注意，公式（6-B）和（6-C）与在定理陈述中 m 的表示中选取 χ_c（X/k） 的方式无关。事实上，由于（6-B）和（6-C）仅相差直和项 （$\langle -2\rangle - \langle -1\rangle$） $\cdot \chi_c$（X/k），因此只需证明（6-B）与之无关。如果将上述表示改写为

$$\chi_c(X/k) = \beta - mH = (\beta + H) - (m+1)H,$$

公式（6-B）变为

$$\begin{aligned}
&(n+2)\langle 2\rangle + \sum_{1\le i<j\le n}\langle \alpha_i\alpha_j\rangle + \underbrace{\sum_{i=0}^{n}\langle \alpha_i\rangle + \sum_{i=0}^{n}\langle -\alpha_i\rangle}_{=nH} + \langle -1\rangle + (m+1)\langle -1\rangle \\
&\quad + ((m+1)^2 - (n+3)(m+1))\cdot H \\
&= n\langle 2\rangle + \sum_{1\le i<j\le n}\langle \alpha_i\alpha_j\rangle + m\langle -1\rangle + nH + \underbrace{2\langle 2\rangle + 2\langle -1\rangle}_{=2H} \\
&\quad + (m^2 + 2m + 1 - (n+1)m - n - 2m - 3)H \\
&= n\langle 2\rangle + \sum_{1\le i<j\le n}\langle \alpha_i\alpha_j\rangle + m\langle -1\rangle + (m^2 - (n+1)m)\cdot H.
\end{aligned}$$

我们希望使用推论 5.42 来计算 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数$\mathrm{Sym}^2 X$，也就是说，我们必须计算 χ_c（$X \times X/k$）$^{\mathbb{Z}/2}$。

公式（6-B）和（6-C）在改变定理陈述中 m 的表示中的 χ_c（X/k） 时保持不变。因此，根据例 5.18 ，我们可以假设 β 是霍奇上同调上迹形式的偶部

$$\left(\bigoplus_{i,j=0}^{\dim_k X} H^i(X, \Omega^j_{X/k})[j-i], \mathrm{Tr}\right) \tag{6-D}$$

例5.18 以及（6-D）的奇部与 mH等距同构。利用 $\chi_c(X/k)$的这一显式表示，引理6.2 给出了$\chi_c(X \times X/k)^{\mathbb{Z}/2}$的显式描述。注意到对角线在 $X \times X$ 中的余维等于 X 的维数，且当 X 为奇数维时，其 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数是双曲的，利用推论 5.42 即可得到结论。 □

推论 6.4. 设 X 是定义在 k 上的奇数维连通光滑射影概形，其 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数为 $\chi_c(X/k) = mH$ ，其中 $m \in \mathbb{Z}$为某个值。那么我们有

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k) = \begin{cases} m\langle 1\rangle + m^2 H & \text{if } m \ge 0, \\ -m\langle -1\rangle + (m^2+m)\cdot H & \text{if } m < 0. \end{cases}$$

证明。 首先注意，对于每个奇数维光滑射影概形，我们都可以写成 $\chi_c(X/k)$ $= mH$ 。由推论 1.8，将 mH 代入定理 6-B 的公式（6.3 ），并注意到 $\langle 1\rangle$ $+$ $\langle 1\rangle$ $=\langle 2\rangle + \langle 2\rangle$，即可得出推论。 □

7 Sym^3 的显式计算

假设在本节中 char $k \neq 2,3$，并且在本节中令 X 为一个定义在 k 上的 n 维连通光滑拟射影概形。当我们转而实际计算 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数时，还将额外假设 X 是射影的。

现在，我们希望以与 $\mathrm{Sym}^2 X$ 情形类似的方式，计算 $\mathrm{Sym}^3 X$ 的紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数。也就是说，我们赋予X^3 S_3 置换因子的作用，并将 X 的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数与 $\mathrm{Sym}^3 X = X^3/S_3$ 的紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数联系起来。

为了找到一列爆破，使其 S_3-商光滑，我们从一个中间步骤开始：考虑子群 $A_3 \subset S_3$ ，它由所有符号为1的置换组成。这些置换是恒等置换和两个循环置换，因此$A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。首先，我们找到一列对 X^3 进行的爆破，使最终爆破 Y 的 A_3-商光滑。 A_3-商带有 $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$诱导的作用。然后，我们将爆破 Y/A_3 ，使其 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-商根据推论4.7光滑。接着，我们将其与Sym $^3 X = X^3/S_3$ 联系起来，以便计算其紧支撑$\mathbb{A}^1$-欧拉示性数。

我们可以用三种不同的方式将商 X^3/A_3 上的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$作用提升到 X^3 ：可以置换前两个因子、后两个因子，或第一个与第三个因子。我们将固定第 i个因子并置换另外两个因子的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$作用记为 τ_i，其中 $i = 1,2,3$。令 $\Delta_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 \mid x_j = x_k \text{ for } j \neq i \neq k\} \subset X^3$ 为其中一条大对角线。因此，我们有 $\Delta_i = (X^3)^{\tau_i}$。

考虑沿对角线 $\Delta \subset X^3$对 X^3 进行的爆破$\mathrm{Bl}_\Delta X^3 \to X^3$ ，并将其例外除子记为 $E_\Delta \subset \mathrm{Bl}_\Delta X^3$。此外，将沿 Δ 对 Δ_i 进行的爆破记为 Δ_i'。闭浸入 $\Delta_i \hookrightarrow X^3$ 可提升为闭浸入 $\Delta_i' \hookrightarrow \mathrm{Bl}_\Delta X^3$ ，其中 Δ_i' 被识别为$\mathrm{Bl}_\Delta X^3$中 Δ_i 的严格变换。

下文中，对于某个概形 Y 上秩为 $n+1$ 的向量丛 V，我们将形如 $\mathbb{P}_Y(V) \to Y$ 的射影空间丛称为 Y 上的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{P}^n$ -丛。

引理 7.1. 设 $R = k[T]/(T^2+T+1)$。则诱导的 A_3-作用在 $\mathrm{Bl}_\Delta X^3$ 上的不动点轨迹 Z 是 $\Delta \times \mathrm{Spec}\, R$ 上的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛。此外， $Z \subset E_\Delta$ 和 τ_i 通过置换 R 中的 T^2+T+1 的根作用于 Z 。进一步地， Z/τ_i 是 Δ 上的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛。

证明。 由 $Z \subset E_\Delta$ 可知， $X^3 \setminus \Delta \cong \mathrm{Bl}_\Delta X^3 \setminus E_\Delta$ 上不存在 A_3-不动点。因此，我们只需考察包含在 E_Δ 中的不动点； E_Δ 与 X^3 中 Δ 的法丛 $N_\Delta X^3$ 的射影化等变同构。因此，我们需要计算作用在 $N_\Delta X^3$ 上的特征子空间。

令 $i\colon \Delta \to X^3$ 为闭浸入。通过逐纤维对角嵌入，我们得到一个等变同构 $N_\Delta X^3 = i^* T(X^3)/T\Delta \cong (TX)^3/TX$

TX 到 TX^3中。包含前两个直和项可得一个同构 $TX^2 \cong TX^3/TX$，其中 A_3-作用限制为由分块矩阵给出的作用

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix};$$

这里，我们选择循环置换 (1 2 3) 作为 A_3 的生成元。该矩阵的特征多项式为 ($T^2 + T + 1$)^n。因此，对于每个闭点 $x \in \Delta$，都有一个 n 维特征子空间，它由 R 上 $T\,\mathrm{id} - A$ 的零点轨迹定义。这些特征子空间组成了 $V \to \Delta \times \mathrm{Spec}\, R$ 上秩为 n 的向量丛。向量丛 $V \to \Delta \times \mathrm{Spec}\ R$ 自然是拉回 $p_1^* N_\Delta X^3$ 的子向量丛，其中 p_1: $\Delta \times \mathrm{Spec}\ R \to \Delta$ 是到第一个因子的投影。$T^2 + T + 1$ 的两个根是 1 的两个非平凡三次根 ζ 和 ζ^2，它们属于 $\bar{k}$，因此，对于每个 $x \in \Delta$，$N_\Delta X^3 \otimes_k \bar{k}$ 中的两个特征子空间仅在 0 处相交。因此，投影 $p_{1*}(V) \subset N_\Delta X^3$ 是 $N_\Delta X^3$ 的一个子丛，其在 $x \in \Delta$ 上的纤维是两个 n 维特征子空间的并，且它们仅在 0 处相交。如果 ζ 已经属于 $k(x)$，那么这些特征子空间分别是 x 上的 k 线性子空间；否则，这两个特征子空间是 x, ζ 上的 k 线性子空间，且在 $k(x)$ 上互为共轭。无论哪种情况，由 p_1: $\Delta \times \mathrm{Spec}\ R \to \Delta$ 诱导的映射 $\tilde{p}_1$: $\mathbb{P}_{\Delta \times \mathrm{Spec}\, R}(V) \to \mathbb{P}_\Delta(N_\Delta X^3)$ 都是闭浸入。此外，$\tilde{p}_1$ 将 $V(\ \mathbb{P}_{\Delta \times \mathrm{Spec}\, R})$ 与 $\mathbb{P}_\Delta(N_\Delta X^3)$ 的例外除子 E_Δ 下的 A_3-不动点轨迹对应起来。因此，Z 是 $\Delta \times \mathrm{Spec}\, R$ 上的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛。

为了得到关于 τ_i 作用的陈述，请注意以下事实：对于每个闭点 $x \in \Delta$，τ_i 作用会置换两个 n 维特征子空间，因为由 τ_i 共轭会将 (1 2 3) 变为其逆 (3 2 1)。这相当于置换 R 中 $T^2 + T + 1$ 的根，也就是陈述中所描述的作用。

□

引理 *7.2.* 设 X 是定义在 k 上的光滑拟射影概形。设 $Bl_Z\, Bl_\Delta\, X^3$ 和 $E'_\Delta = Bl_Z\, E_\Delta$ 分别是 $Bl_\Delta\, X^3$ 和 E_Δ 中 Z 的爆破。那么，$Bl_Z\, Bl_\Delta\, X^3$ 和 E'_Δ 的例外除子 E_Z 和 $E_Z \cap E'_\Delta$ 分别等于 $Bl_Z\, Bl_\Delta\, X^3$ 和 E'_Δ 的 A_3-不动点。特别地，根据定理 *4.5*，$(Bl_Z\, Bl_\Delta\, X^3)/A_3$ 和 E'_Δ/A_3 是光滑的。

证明。由于 Z 是 A_3对 $\mathrm{Bl}_\Delta\, X^3$ 和 E'_Δ的作用的不动点轨迹，我们有 $E_Z \subset \mathrm{Bl}_Z \mathrm{Bl}_\Delta\, X^3$ $E_Z \cap E'_\Delta \subset (E'_\Delta)^{A_3}$。又由于我们还知道 $E_Z \cap E'_\Delta \subset E_Z$，因此只需证明 E_Z 在 A_3作用下不变。

我们先对 $X = \mathbb{A}^n$证明该命题。注意，只需在忠实平坦基变换后证明该命题，因此可以假设 k 是代数闭的。令 $\zeta \in k$ 为本原三次单位根。通过对 $(\mathbb{A}^n)^3$, 上的作用进行对角化，我们可以将 $(\mathbb{A}^n)^3$ 上的 A_3作用改写为：循环置换 $\sigma =$ (1 2 3) 在 $(x,\ y,\ z) \in (\mathbb{A}^n)^3$ 上的作用为 $(x,\ \zeta y,\ \zeta^2 z)$。

考虑在 $(\mathbb{A}^n)^2$ 中对 0 进行爆破 $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2$，并通过 $\sigma \cdot (x, y) = (\zeta x, \zeta^2 y)$ 对 $(\mathbb{A}^n)^2$ 施加作用，其中 $(x, y) \in (\mathbb{A}^n)^2$。令 $Z' \subset \mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2$ 为诱导的 A_3-作用的不动点轨迹。因此，$Z' \subset E_0$ 其中 $E_0 \subset \mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2$ 是例外除子。为了证明 $\mathbb{A}^n$ 的引理，只需证明

A_3-作用在 Z' 中$\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2$ 爆破所得例外除子上是平凡的，这由 [Sta24,标记 0805]。

根据 [Har77, Chapter II, Example 7.12.1], , 我们可以将爆破 $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2$表示为 $\mathbb{P}_A^{2n-1} = \mathrm{Proj}\ A[Y_1,\dots,Y_{2n}]$ 中 $\{x_iy_j - x_jy_i \mid i,j = 1,\dots,2n\}$ 的零点集，其中 $A = k[x_1,\dots,x_{2n}]$。考虑某个 $i \in \{1,\dots,2n\}$ 对应的特征开子集 $D(Y_i)$。因此，$\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2 \cap D(Y_i)$ 同构于以下对象的谱

$$\frac{A[y_1,\dots,\hat{y}_i,\dots,y_{2n}]}{(x_j - x_iy_j \mid j = 1,\dots 2m; j \neq i)} = k[x_i, y_1,\dots,\hat{y}_i,\dots,y_{2n}],$$

其中，$\hat{}y_i$ 表示省略变量 y_i。

现在，令 $1 \leq i \leq n$。$\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2$，上 $D(Y_i)$ 的关系 $x_j - x_iy_j$ 表明，对于 $1 \leq j \leq n$，有 $\sigma y_j = y_j$；对于 $n+1 \leq j \leq 2n$，有 $\sigma y_j = \zeta y_j$。因此，$Z' \cap D(Y_i)$ 是理想 $I = (x_i, y_{n+1},\dots,y_{2n})$ 的零点集。由于 σ 通过与 ζ 相乘作用于 I 的所有生成元，我们得到 σ 通过与 ζ 相乘作用于 I/I^2。后者同构于 $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2$ 中 $Z' \cap D(Y_i)$ 的法丛 $(N_{Z'}\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2)|_{D(Y_i)}$。因此，$A_3$ 通过标量乘法作用于 $(N_{Z'}\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2)|_{D(Y_i)}$，从而在 $\mathbb{P}(N_{Z'}\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2)|_{D(Y_i)}$ 上平凡作用。

可以类似地证明，A_3 对 $\mathbb{P}(N_{Z'}\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2)|_{D(Y_i)}$ 的作用对 $i = n+1,\dots,2n$ 是平凡的。由于 $D(Y_i)$ 覆盖 $\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2$, , 我们得到 A_3 对 $\mathbb{P}(N_{Z'}\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2)$ 的作用是平凡的；后者是 $\mathrm{Bl}_{Z'}\mathrm{Bl}_0(\mathbb{A}^n)^2$, 的例外除子。这就完成了关于 $\mathbb{A}^n$ 的证明。

现在，令 X 为 k 上任意一个光滑、连通的拟射影概形。只需证明 A_3 在局部对 E_Z 的作用是平凡的。由于 E_Z 位于 $\mathrm{Bl}_Z \mathrm{Bl}_\Delta X^3 \to X^3$ 在 Δ 上的纤维中，因此只需证明以下结论：对每个 $x \in X$，都存在一个扎里斯基开邻域 $U \subset X$，使得该引理对 U 成立。事实上，若令 $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z \mathrm{Bl}_\Delta X^3 \to \mathrm{Bl}_\Delta X^3 \to X^3$ 为投影映射，并且 $x \in E_Z$，那么这样的邻域 U 对 $y \in X$ 满足 $\pi(x) = (y,y,y)$，这表明 A_3 对 x 的开邻域 $\pi^{-1}(U^3) \cap E_Z$ 的作用是平凡的。

设 $x \in X$ 为一点。由于 X 光滑，存在一个开子概形 $U \subset X$ 以及一个 étale 映射 $\varphi\colon U \to \mathbb{A}^n$。因此我们得到一个 A_3- 等变 étale 态射 $\psi\colon U^3 \to (\mathbb{A}^n)^3$。对于每一点 $x' \in U$，我们有 $(N_\Delta U^3)_{(x',x',x')} = (N_{\varphi^{-1}(\Delta)}U^3)_{(x',x',x')}$。将其限制到包含对角线 $\Delta \subset U^3$ 的一个 A_3-稳定开邻域 $V \subset U^3$ 后，我们便得到一个 A_3-等变同构 $Z \to (\mathrm{Bl}_{\psi^{-1}(\Delta)}V)^{A_3}$。通过类似的论证，我们得到 E_Z 与 $\mathrm{Bl}_Z \mathrm{Bl}_{\varphi^{-1}(\Delta)}V$ 的例外除子 A_3-等变同构。由于我们已经知道 $\mathbb{A}^n$ 的引理，因此也知道 U 的引理，因为吹起与平坦基变换可交换，参见 [Sta24，Tag 0805]。□

引理 7.3。令 $F_i = (\mathrm{Bl}_\Delta X^3)^{\tau_i}$。则 $E_i := E_\Delta \cap F_i = (E_\Delta)^{\tau_i}$ 由两个互不相交的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛构成，它们定义在 Δ 上。此外，A_3-作用置换了 F_i，并且对于 $i \neq j$ 和 $Z \cap F_i = \emptyset$，有 $F_i \cap F_j = \emptyset$。~最后，E_i 的两个分支之一是 $\Delta_i' \cap E_\Delta$；令 E_i 表示另一个 ~ 分支，则 F_i 是 Δ_i' 与 E_i 的不交并。

证明。由于 $\mathrm{Bl}_\Delta X^3 \setminus E_\Delta \cong X^3 \setminus \Delta$ 和 $\Delta_i \cap \Delta_j = \Delta$ 对于 $i \neq j$，只需在 E_Δ 中证明该断言。为此，我们使用引理 7.1 中的结论，即 $TX^2 \cong$

$TX^3/T\Delta$ 通过包含映射进入前两个因子。现在，τ_1、τ_2 和 τ_3 通过分块矩阵作用

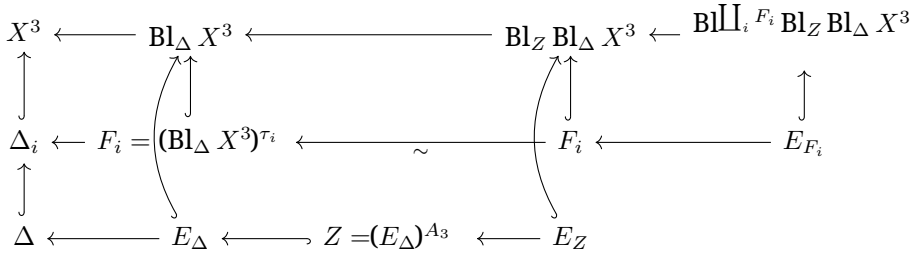
$$\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

分别。这些作用具有以下特征子空间：

特征值	1	-1
$i=1$	$\{(v,0) \mid v \in TX\}$	$\{(v,2v) \mid v \in TX\}$
$i=2$	$\{(0,v) \mid v \in TX\}$	$\{(2v,v) \mid v \in TX\}$
$i=3$	$\{(v,\ v) \mid v \in TX\}$	$\{(v,-v) \mid v \in TX\}$

对于 $i=1,\ 2,\ 3$，特征值为 1 的特征子空间的射影化是 Δ_i' 的例外除子，而 $\tilde{}$ 对应的特征值 -1 的特征子空间的射影化是 E_i。由于这些特征子空间两两交集均为零，且它们与定义 Z 的子空间的交集也为零（如引理 7.1 的证明中所述），因此得证。 □

现在我们有如下图示：



(7-A)

这里，E_Z 是 $\mathrm{Bl}_Z \mathrm{Bl}_\Delta X^3$ 的例外除子，而 E_{F_i} 是 F_i 在映射 $\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i} \mathrm{Bl}_Z \mathrm{Bl}_\Delta X^3 \to \mathrm{Bl}_Z \mathrm{Bl}_\Delta X^3$ 下的原像。特别地，$E_{F_i} \cong \mathbb{P}(N_{F_i} \mathrm{Bl}_Z \mathrm{Bl}_\Delta X^3)$，且 $\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i} \mathrm{Bl}_Z \mathrm{Bl}_\Delta X^3$ 的例外除子是 $\coprod_i E_{F_i}$。此外，我们将考虑爆破 $\mathrm{Bl}_{\coprod_i E_i} E_\Delta$，其中 $E_i = F_i \cap E_\Delta$。记 E_i 在投影 $\mathrm{Bl}_{\coprod E_i} E_\Delta \to E_\Delta$ 下的原像为 E_{E_i}。特别地，$E_{E_i} = \mathbb{P}(N_{E_i} E_\Delta)$，且 $\mathrm{Bl}_{\coprod E_i} E_\Delta$ 的例外除子是 $\coprod_i E_{E_i}$。

现在我们转而计算 $\mathrm{Sym}^3 X$ 的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数；因此从现在起，假设 X 是光滑且射影的。我们可以在以下命题中概述计算所涉及的各个概形之间的联系。

命题 7.4。上述概形具有如下关系，其中所有射影丛都是扎里斯基局部平凡的：

(1) $\Delta_i' \cap \Delta_j' = \emptyset$ *for* $i \neq j$,

(2) $F_i \cap F_j = \emptyset$ 当 $i \neq j$ 时,

(3) $Z \cap F_i = \emptyset$,

(4) E_Δ 是一个覆盖 Δ的 $\mathbb{P}^{2n-1}$-丛,

(5) Z 是一个覆盖 $\Delta \times \operatorname{Spec} R$ 的 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛, (6) Z/τ_i 是一个覆盖 Δ的 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛, (7) F_i 是 Δ_i' 与一个覆盖 Δ的 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛的不交并，记作 $\tilde{E}_i$, (8) E_{F_i} 是一个覆盖 Δ_i' 的 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛与一个覆盖E_i的 $\mathbb{P}^n$-丛的不交并, (9) $\Delta_i' \cap E_\Delta$ 是一个覆盖 Δ 的 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛, (10) E_i 是两个覆盖 Δ 的 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛的不交并, (11) A_3-作用置换 E_i, 且 τ_i 在 E_i 上的作用是平凡的, (12) A_3在 E_Z 和 Z 上的作用是平凡的，而 τ_i在 E_Z 和 Z 上的作用是自由的, (13) E_{E_i} 是一个覆盖 E_i的 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛, (14) τ_i在 E_{F_i} 和 E_{E_i} 上的作用是平凡的。(15) E_Z 是一个覆盖 Z 的 $\mathbb{P}^n$-丛, (16) E_Z/τ_i 是一个覆盖 Z/τ_i的 $\mathbb{P}^n$-丛, (17) $E_Z \cap E'_\Delta$ 是一个覆盖 Z 的 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛，其中 $E'_\Delta = \operatorname{Bl}_Z E_\Delta$, 以及(18) $(E_Z \cap E'_\Delta)/\tau_i$ 是一个覆盖 Z/τ_i 的 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛；以及以下 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数 (a) $\chi_c(\Delta/k) = \chi_c(X/k) \in \mathrm{GW}(k)$, (b) $\chi_c(\Delta_i/k) = \chi_c(X/k)^2 \in \mathrm{GW}(k)$, (c) $\chi_{S_3}(Z/k) = \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_{S_3}(\operatorname{Spec} R/k)\chi_c(X/k) \in \mathrm{GW}^{S_3}(k)$, (d) $\chi_{S_3}(Z/k)^{\tau_i} = 2 \cdot \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k) \in \mathrm{GW}(k)$, (e) $\chi_{S_3}(E_Z/k) = \chi_c(\mathbb{P}^n/k)\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_{S_3}(\operatorname{Spec} R/k)\chi_c(X/k) = {}^n\langle n+1\rangle\, 2 \quad \chi_{S_3}(\operatorname{Spec} R/k)\chi_c(X/k)$, (f) $\chi_{S_3}(E_Z/k)^{\tau_i} = 2 \cdot \chi_c(\mathbb{P}^n/k)\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k) = {}^n\langle n+1\rangle\, 2 \cdot \chi_c(X/k) \cdot H \in \mathrm{GW}(k)$, (g) $\chi_{S_3}(E_Z \cap E'_\Delta/k) = \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\, {}^2\chi_{S_3}(\operatorname{Spec} R/k)\chi_c(X/k) \in \mathrm{GW}^{S_3}(k)$, (h) $\chi_{S_3}(E_Z \cap E'_\Delta/k)^{\tau_i} = 2 \cdot \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\, {}^2\chi_c(X/k) \in \mathrm{GW}(k)$,

(i) $\chi_{S_3}(E_\Delta/k) = \chi_c(\mathbb{P}^{2n-1}/k)\cdot\chi_c(X/k) = n\cdot\chi_c(X/k)\cdot H \in \mathrm{GW}^{S_3}(k)$,

(j) $\chi_{\tau_i}(E_i/k) = 2\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k) \in \mathrm{GW}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(k)$,

(k) $\chi_{\tau_i}(E_{E_i}/k) = \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(E_i/k) = 2\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)^2\chi_c(X/k) \in \mathrm{GW}^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(k)$,

(l) $\chi_c(\Delta_i'/k) = (\chi_c(X/k)+\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)-\langle 1\rangle)\chi_c(X/k) \in \mathrm{GW}(k)$,

(m) $\chi_c(F_i/k) = \chi_c(X/k)^2 - \chi_c(X/k) + 2\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\cdot\chi_c(X/k) = (\chi_c(X/k) - \langle 1\rangle + 2\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\cdot\chi_c(X/k)$ *in* $\mathrm{GW}(k)$, *and*

(n) $\chi_c(E_{F_i}/k) = (\langle(-1)^n\rangle - \langle 1\rangle + \chi_c(X/k) + 2\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k) = \langle(-1)^n\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k) + \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(F_i/k) \in \mathrm{GW}(k)$.

证明。性质 (1) – (3)、(7)、(10) 和 (11) 是引理 7.3 的重述。性质 (4)、(8)、(9)、(13) 和 (17) 根据各自的定义以及爆破的一般性质成立。性质 (5)、(6)、(15) 和 (16) 是引理 7.1 的推论。性质 (12) 是引理 7.2 和引理 7.3 的推论。性质 (18) 是性质 (12) 的推论。性质 14 由引理 4.6 得出。根据引理 7.1 的证明，利用希尔伯特第 90 定理下降相关的向量丛，可得性质 16 中的 $\mathbb{P}^n$-丛和性质 18 中的 $\mathbb{P}^{n-1}$-丛是扎里斯基局部平凡的。

对于性质（a）和（b），注意到$\Delta \cong X$ 以及$\Delta_i \cong X^2$。

对于性质（c）–（n），我们使用命题5.33 和推论 5.34。对于性质（d）、（f）和（h），我们还使用定理 5.39，通过商的欧拉示性数计算它。对于性质（l），我们还使用命题 5.35。 □

引理 7.5。我们有

$$\chi_c((E_\Delta/S_3)/k) = n\cdot\chi_c(X/k)\cdot H \in \mathrm{GW}(k).$$

证明。 考虑以下爆破图

$$\begin{array}{ccccc} E_\Delta & \longleftarrow & E'_\Delta = \mathrm{Bl}_Z E_\Delta & \longleftarrow & E''_\Delta = \mathrm{Bl}_{\coprod_i E_i} E'_\Delta \\ \cup\mathrm{I} & & \cup\mathrm{I} & & \cup\mathrm{I} \\ Z & \longleftarrow & E_Z \cap E'_\Delta ; \coprod_i E_i & \longleftarrow & \coprod_i E_{E_i} \end{array}$$

其中第二行描述了异常除子。关于 S_3 作用取商时，我们得到相同的抽象爆破序列。因此，我们得到

$$\begin{aligned} \chi_c((E_\Delta/S_3)/k) &= \chi_c((E'_\Delta/S_3)/k) - \chi_c((E_Z\cap E'_\Delta/S_3)/k) + \chi_c((Z/S_3)/k) \\ &= \chi_c((E''_\Delta/S_3)/k) - \chi_c(((\coprod_i E_{E_i})/S_3)/k) + \chi_c(((\coprod_i E_i)/S_3)/k) \\ &\quad - \chi_c((E_Z\cap E'_\Delta/S_3)/k) + \chi_c((Z/S_3)/k) \end{aligned}$$

根据命题 7.4 (11)， A_3作用于 $(\coprod_i E_i)$ 时只置换 E_i，因此我们有 $(\coprod_i E_i)/S_3 = E_i/\tau_i = E_i$，因为 τ_i作用于 E_i 是平凡的。类似地，根据命题 $(\coprod_i E_{E_i})/S_3 = E_{E_i}$ 7.4 (14)。

由于根据命题 7.4 (12)， A_3 对 $E_Z \cap E'_\Delta$ 的作用是平凡的，而 τ_i 的作用是自由的，因此我们得到$(E_Z \cap E'_\Delta)/S_3 = (E_Z \cap E'_\Delta)/\tau_i$，且商是光滑且射影的。因此，由定理 5.39 可得 $\chi_c(((E_Z \cap E'_\Delta)/S_3)/k) = \chi_c(((E_Z \cap E'_\Delta)/\tau_i)/k) = \chi_{\tau_i}(E_Z \cap E'_\Delta/k)^{\tau_i} \cdot 2$。根据命题 7.4 (h)，我们有 $\chi_{\tau_i}(E_Z \cap E'_\Delta/k)^{\tau_i} = 2 \cdot \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)^2\chi_c(X/k)$，因此， $\chi_c(((E_Z \cap E'_\Delta)/S_3)/k) = \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)^2\chi_c(X/k)$。同理，我们得到 $\chi_c((Z/S_3)/k) = \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)$ 。

因此，利用命题 7.4 (j) 和 (k)

$$\begin{aligned}\chi_c((E_\Delta/S_3)/k) &= \chi_c((E''_\Delta/S_3)/k) - \chi_c(E_{E_i}/k) + \chi_c(E_i/k)\\ &\quad - \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)^2\chi_c(X/k) + \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)\\ &= \chi_c((E''_\Delta/S_3)/k) + (\langle 1\rangle - \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(E_i/k)\\ &\quad + (\langle 1\rangle - \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)\\ &= \chi_c((E''_\Delta/S_3)/k) + 3(\langle 1\rangle - \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k).\end{aligned} \tag{7-B}$$

我们知道 $E''_\Delta/S_3 = (\mathrm{Bl}_{E_i}(E'_\Delta/A_3))/\tau_i$。此外，根据命题 7.4 (14) 的结论， τ_i 在E_{E_i} 上的作用是平凡的，并且 E'_Δ/A_3 和$\mathrm{Bl}_{E_i}(E'_\Delta/A_3)$ 都是光滑的。因此，利用定理5.39

$$\begin{aligned}\chi_c((E''_\Delta/S_3)/k) &= \chi_c(((\mathrm{Bl}_{E_i}(E'_\Delta/A_3))/\tau_i)/k)\\ &= \langle 2\rangle\chi_{\tau_i}((\mathrm{Bl}_{E_i}(E'_\Delta/A_3))/k)^{\tau_i}\\ &= \langle 2\rangle(\chi_{\tau_i}((E'_\Delta/A_3)/k) - \chi_{\tau_i}(E_i/k) + \chi_{\tau_i}(E_{E_i}/k))^{\tau_i}\\ &= \langle 6\rangle\chi_{S_3}(E'_\Delta/k)^{S_3} - \langle 2\rangle\cdot(\chi_{\tau_i}(E_i/k) - \chi_{\tau_i}(E_{E_i}/k))^{\tau_i}.\end{aligned} \tag{7-C}$$

这里我们还用到了以下事实：$\mathrm{Bl}_{E_i}(E'_\Delta/A_3)$的例外除子同构于$E_{E_i}$，因为该 A_3 作用只置换 E_i，以及命题 5.35中的爆破公式。根据构造， τ_i-作用在 E_i 上是平凡的，而且 τ_i-作用在 E_{E_i} 上也是平凡的。因此，

$$\chi_{\tau_i}(E_i/k)^{\tau_i} = \chi_c(E_i/k) = 2\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k) \tag{7-D}$$

and

$$\chi_{\tau_i}(E_{E_i}/k)^{\tau_i} = \chi_c(E_{E_i}/k) = 2\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)^2\chi_c(X/k). \tag{7-E}$$

现在，我们有

$$\chi_{S_3}(E'_\Delta/k) = \chi_{S_3}(E_\Delta/k) - \chi_{S_3}(Z/k) + \chi_{S_3}(E_Z \cap E'_\Delta/k)$$

根据命题 5.35。根据构造和命题 7.4 (12)， A_3-作用在 Z 和 $E_Z \cap E'_\Delta$ 上的作用是平凡的。因此，我们得到 $\chi_{S_3}(Z/k)^{S_3} = \chi_{S_3}(Z/k)^{\tau_i} =$

$\langle 2\rangle\cdot\ \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)$ 和 $\chi_{S_3}(E_Z\cap E'_\Delta/k)^{S_3}=\chi_{S_3}(E_Z\cap E'_\Delta/k)^{\tau_i}=\langle 2\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)$ $^2\chi_c(X/k)$利用命题 7.4。

推论 5.34 给出 $\chi_{S_3}(E_\Delta/k)^{S_3}=\chi_c(E_\Delta/k)\ =n\cdot\chi_c(X/k)\cdot H$。综合以上结果，得到

$$\begin{aligned}\chi_{S_3}(E'_\Delta/k)^{S_3}&=(\chi_{S_3}(E_\Delta/k)-\chi_{S_3}(Z/k)+\chi_{S_3}(E_Z\cap E'_\Delta/k))^{S_3}\\&=n\cdot\chi_c(X/k)\cdot H-\langle 2\rangle\cdot(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k).\end{aligned}\tag{7-F}$$

因此，得到

$$\begin{aligned}\chi_c((E_\Delta/S_3)/k)&=\chi_c((E''_\Delta/S_3)/k)+3(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)\\&=\langle 6\rangle\chi_{S_3}(E'_\Delta/k)^{S_3}-\langle 2\rangle\cdot(\chi_{\tau_i}(E_i/k)-\chi_{\tau_i}(E_{E_i}/k))^{\tau_i}\\&\quad+3(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)\\&=\langle 6\rangle\cdot(n\cdot\chi_c(X/k)\cdot H-\langle 2\rangle\cdot(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k))\\&\quad-2\cdot\langle 2\rangle\cdot(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)\\&\quad+3(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)\\&=n\cdot\chi_c(X/k)\cdot H\\&\quad+(\langle 1\rangle-\langle 3\rangle)\cdot(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)\\&\quad+2(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)\cdot(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k),\end{aligned}$$

其中，第一个等式用到（7-B）；第二个等式用到（7-C）；第三个等式用到（7-D）、（7-E）和（7-F）。由于 $(\langle 1\rangle\ -\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)$是双曲的，额外的直和项均消失，因此得到 $\chi_c((E_\Delta/S_3)/k)\ =n\cdot\chi_c(X/k)\cdot\ H$ 如所求。 □

引理 7.6。我们有

$$\chi_{S_3}(\mathrm{Bl}_Z\,\mathrm{Bl}_\Delta\,X^3/k)^{S_3}=\chi_{S_3}(X^3/k)^{S_3}-\left(\langle 1\rangle+\langle 2\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)-\frac{n(n+3)}{2}\cdot H\right)\cdot\chi_c(X/k)$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

证明。 由命题 5.35，我们有

$$\begin{aligned}\chi_{S_3}(\mathrm{Bl}_Z\,\mathrm{Bl}_\Delta\,X^3/k)&=\chi_{S_3}(\mathrm{Bl}_\Delta\,X^3/k)-\chi_{S_3}(Z/k)+\chi_{S_3}(E_Z/k)\\&=\chi_{S_3}(X^3/k)-\chi_{S_3}(\Delta/k)+\chi_{S_3}(E_\Delta/k)-\chi_{S_3}(Z/k)+\chi_{S_3}(E_Z/k).\end{aligned}$$

由于取不变元是可加的，我们可以分别考虑每一项。由于 S_3 在 Δ 上的作用是平凡的，因此有 $\chi_{S_3}(\Delta/k)^{S_3}=\chi_c(\Delta/k)=\chi_c(X/k)$。由推论 5.34，可得 $\chi_{S_3}(E_\Delta/k)^{S_3}=\chi_c(E_\Delta/k)\ =n\cdot$ $\chi_c(X/k)\cdot H$。

命题 7.4 (12) 得出， A_3 对 Z 和 E_Z 的作用是平凡的。因此，我们只需考虑 τ_i 的作用。为此，我们在命题7.4 中计算了 $\chi_{S_3}(Z/k)^{\tau_i}\ =\ \langle 2\rangle\cdot\ \chi_c($ $\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)$ 和 $\chi_{S_3}(E_Z/k)^{\tau_i}\ =\ {}^{n}{}_{(n+1)}\ {}_2\ \cdot\chi_c(X/k)\cdot\ H$。

综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}\chi_{S_3}(\mathrm{Bl}_Z\,\mathrm{Bl}_\Delta\,X^3/k)^{S_3} &= \chi_{S_3}(X^3/k)^{S_3} - \chi_{S_3}(\Delta/k)^{S_3} + \chi_{S_3}(E_\Delta/k)^{S_3}\\ &\quad - \chi_{S_3}(Z/k)^{S_3} + \chi_{S_3}(E_Z/k)^{S_3}\\ &= \chi_{S_3}(X^3/k)^{S_3} - \chi_c(X/k) + n\cdot\chi_c(X/k)\cdot H\\ &\quad - \langle 2\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k) + \frac{n(n+1)}{2}\cdot\chi_c(X/k)\cdot H\\ &= \chi_{S_3}(X^3/k)^{S_3} - \left(\langle 1\rangle + \langle 2\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k) - \frac{n(n+3)}{2}\cdot H\right)\cdot\chi_c(X/k).\end{aligned}$$

□

引理 7.7。我们有

$$\begin{aligned}\chi_c\left(\mathrm{Sym}^3 X/k\right) &= \chi_c\left(\left(\left(\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i}\mathrm{Bl}_Z\,\mathrm{Bl}_\Delta\,X^3\right)/S_3\right)/k\right)\\ &\quad + \left(\langle 1\rangle + (\langle 1\rangle - \langle(-1)^n\rangle)\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k) - \frac{n(n+3)}{2}\cdot H\right)\cdot\chi_c(X/k)\\ &\quad + (\langle 1\rangle - \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(F_i/k)\end{aligned}$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

证明。 对商掉7-A之后的爆破序列 (S_3-作用进行考察。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) &= \chi_c(((\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/S_3)/k) + \chi_c((\Delta/S_3)/k) - \chi_c((E_\Delta/S_3)/k)\\ &= \chi_c(((\mathrm{Bl}_Z\,\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/S_3)/k) + \chi_c((Z/S_3)/k) - \chi_c((E_Z/S_3)/k)\\ &\quad + \chi_c((\Delta/S_3)/k) - \chi_c((E_\Delta/S_3)/k)\\ &= \chi_c(((\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i}\mathrm{Bl}_Z\,\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/S_3)/k) + \chi_c((\coprod_i F_i/S_3)/k) - \chi_c((\coprod_i E_{F_i}/S_3)/k)\\ &\quad + \chi_c((Z/S_3)/k) - \chi_c((E_Z/S_3)/k) + \chi_c((\Delta/S_3)/k) - \chi_c((E_\Delta/S_3)/k).\end{aligned}$$

该 A_3-作用仅置换 F_i，而 τ_i-作用在 F_i 上是平凡的。因此，我们有 $(\coprod_i F_i)/S_3 = F_i/\tau_i = F_i$，类似地 $(\coprod_i E_{F_i})/S_3 = E_{F_i}$。因此，命题 7.4 给出

$$\chi_c((\coprod_i F_i/S_3)/k) - \chi_c((\coprod_i E_{F_i}/S_3)/k) = (\langle 1\rangle - \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k) - \langle(-1)^n\rangle\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k).$$

A_3-作用在 Z 和 E_Z 上是平凡的，而 τ_i-作用在 Z 和 E_Z 上没有不动点。因此，根据定理 4.5，按 A_3-作用和 τ_i-作用取商后得到的空间是光滑的。因此，根据定理 5.39 和命题 7.4，我们有 $\chi_c((Z/S_3)/k) = 2\cdot\chi_{\tau_i}(Z/k)^{\tau_i} = \chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)$ 和 $\chi_c((E_Z/S_3)/k) = {}^n(_{n+1})\overline{2\cdot\chi_c}(X/k)\cdot H$ 。

.....的作用 S_3 在 Δ上是平凡的，因此 $\chi_c((\Delta/S_3)/k) = \chi_c(X/k)$。综合以上结果，利用引理 7.5

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) = \chi_c(((\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i}\mathrm{Bl}_Z\,\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/S_3)/k)$$

$$
\begin{aligned}
&+\chi_c((\coprod_i F_i/S_3)/k)-\chi_c((\coprod_i E_{F_i}/S_3)/k)\\
&+\chi_c((Z/S_3)/k)-\chi_c((E_Z/S_3)/k)\\
&+\chi_c((\Delta/S_3)/k)-\chi_c((E_\Delta/S_3)/k)\\
=&\,\chi_c(((\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i}\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/S_3)/k)\\
&-\langle(-1)^n\rangle\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)+(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k)\\
&+\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)-\frac{n(n+1)}{2}\cdot\chi_c(X/k)\cdot H\\
&+\chi_c(X/k)-n\cdot\chi_c(X/k)\cdot H\\
=&\,\chi_c(((\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i}\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/S_3)/k)\\
&+\left(\langle 1\rangle+(\langle 1\rangle-\langle(-1)^n\rangle)\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)-\frac{n(n+3)}{2}\cdot H\right)\cdot\chi_c(X/k)\\
&+(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k)
\end{aligned}
$$

正如所需。 □

定理 7.8. 我们有

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k)=\langle 6\rangle\cdot\chi_{S_3}(X^3/k)^{S_3}+(\langle 1\rangle-\langle 6\rangle)\cdot\chi_c(X/k)+(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)(\chi_c(X/k)-\langle 1\rangle)\chi_c(X/k)$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

证明。 根据引理7.7，我们知道

$$
\begin{aligned}
\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k)=&\,\chi_c((\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i}\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/S_3)\\
&+\left(\langle 1\rangle+(\langle 1\rangle-\langle(-1)^n\rangle)\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)-\frac{n(n+3)}{2}\cdot H\right)\cdot\chi_c(X/k)\\
&+(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k).
\end{aligned}
$$

注意，根据定理 4.5，$(\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i}\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/S_3=(\mathrm{Bl}_{F_i}((\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/A_3))/\tau_i$ 是光滑的，并且 A_3 在 $(\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)$ 上的作用以及 τ_i 在 $\mathrm{Bl}_{F_i}((\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/A_3)$ 上的作用，在不动点轨迹的补集上都是自由的。因此，根据定理 5.39 和命题 5.35，我们有

$$
\begin{aligned}
\chi_c(((\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i}\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/S_3)/k)&=\langle 2\rangle\cdot\chi_{\tau_i}((\mathrm{Bl}_{F_i}((\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/A_3))/k)^{\tau_i}\\
&=\langle 2\rangle\cdot(\chi_{\tau_i}(((\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/A_3)/k)-\chi_{\tau_i}(F_i/k)+\chi_{\tau_i}(E_{F_i}/k))^{\tau_i}.
\end{aligned}
$$

τ_i在 F_i 和 E_{F_i} 上的作用是平凡的，因此我们有 $\chi_{\tau_i}(F_i/k)^{\tau_i}=\chi_c(F_i/k)$ 和 $\chi_{\tau_i}(E_{F_i}/k)^{\tau_i}=\chi_c(E_{F_i}/k)=\langle(-1)^n\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)+\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(F_i/k)$。此外，商 $(\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/A_3$ 是光滑的，因此我们再次利用定理 5.39 得到

$$\chi_{\tau_i}(((\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/A_3)/k)=\langle 3\rangle\cdot\chi_{S_3}((\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/k)^{A_3}.$$

综合这些陈述，我们得到

$$\begin{aligned}\chi_c(((\mathrm{Bl}_{\coprod_i F_i}\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/S_3)/k) &= \langle 6\rangle\cdot\chi_{S_3}((\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/k)^{S_3}\\ &\quad+\langle 2\rangle\cdot\langle(-1)^n\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)\\ &\quad-\langle 2\rangle(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k).\end{aligned}$$

因此，利用引理 7.6 以及如下观察：秩为零的形式乘以双曲型形式所得为零，我们得到

$$\begin{aligned}\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) &= \langle 6\rangle\cdot\chi_{S_3}((\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/k)^{S_3}+\langle 2\rangle\cdot\langle(-1)^n\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)\\ &\quad+\left(\langle 1\rangle+(\langle 1\rangle-\langle(-1)^n\rangle)\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)-\frac{n(n+3)}{2}\cdot H\right)\cdot\chi_c(X/k)\\ &\quad+(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k)\\ &= \langle 6\rangle\cdot\chi_{S_3}((\mathrm{Bl}_Z\mathrm{Bl}_\Delta X^3)/k)^{S_3}\\ &\quad+\left(\langle 1\rangle+(\langle 1\rangle+(\langle 2\rangle-\langle 1\rangle)\cdot\langle(-1)^n\rangle)\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)-\frac{n(n+3)}{2}\cdot H\right)\cdot\chi_c(X/k)\\ &\quad+(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k)\\ &= \langle 6\rangle\cdot\left(\chi_{S_3}(X^3/k)^{S_3}-\left(\langle 1\rangle+\langle 2\rangle\cdot\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)-\frac{n(n+3)}{2}\cdot H\right)\cdot\chi_c(X/k)\right)\\ &\quad+\left(\langle 1\rangle+(\langle 1\rangle+(\langle 2\rangle-\langle 1\rangle)\cdot\langle(-1)^n\rangle)\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)-\frac{n(n+3)}{2}\cdot H\right)\cdot\chi_c(X/k)\\ &\quad+(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k)\\ &= \langle 6\rangle\cdot\chi_{S_3}(X^3/k)^{S_3}\\ &\quad+(\langle 1\rangle-\langle 6\rangle)(\langle 1\rangle-\frac{n(n+3)}{2}\cdot H)\cdot\chi_c(X/k)\\ &\quad+(\langle 1\rangle-\langle 3\rangle)\cdot\underbrace{\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)}_{\text{hyperbolic}}\\ &\quad+(\langle 2\rangle-\langle 1\rangle)\cdot\langle(-1)^n\rangle\underbrace{\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)\chi_c(X/k)}_{\text{hyperbolic}}\\ &\quad+(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k)\\ &= \langle 6\rangle\cdot\chi_{S_3}(X^3/k)^{S_3}+(\langle 1\rangle-\langle 6\rangle)\cdot\chi_c(X/k)\\ &\quad+(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k).\end{aligned}$$

根据命题 7.4，我们有

$$(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k)=(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))(\chi_c(X/k)-\langle 1\rangle+2\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(X/k).$$

由于出于维数的原因，$\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k)$ 和 $\chi_c(X/k)$ 中至少有一个是双曲型的，而与 $\langle 1\rangle-\langle 2\rangle$ 相乘会消去双曲型，因此我们得到

$$(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)(\langle 1\rangle-\chi_c(\mathbb{P}^{n-1}/k))\chi_c(F_i/k)=(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)(\chi_c(X/k)-\langle 1\rangle)\chi_c(X/k).$$

将此结果与我们已经完成的 $\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k)$ 计算结合起来，即得到陈述中的公式。 □

引理 7.9。 在命题 *6.1 (1)* 的记号和假设下，对于 $G = S_3$，有

$$(\beta^3)^{S_3} = (\langle 1\rangle + (n-1)\langle 3\rangle)\beta + \sum_{1\le i<j<k\le n} \langle 6a_ia_ja_k\rangle.$$

证明。 展开命题6.1 (1) 中的公式。因此，我们需要对 $\{1,\dots,n\}^3$ 中元素在 S_3 作用下的轨道进行分类。这些元素$(1,1,1)\dots,(n,n,n)$ 在该作用下是不变的。

表示轨道大小为三的轨道的元素为 (i,j,j)，其中$i\neq j\in\{1,\dots,n\}$。表示轨道大小为六的轨道的代表元为 (i,j,k)，其中 $1\le i<j<k\le n$。由于这涵盖了 $\{1,\dots,n\}^3$, 中的所有元素，因此不存在轨道大小为二的元素。于是，注意到 $\alpha_i\alpha_j^2 = \alpha_i$ 且 $\alpha_i^3 = \alpha_i$ 后，我们由命题 6.1 (1) 得到所需公式。 □

引理 7.10。 设 $V^\bullet$ 是 $\mathbb{Z}$-分次的有限维 k上向量空间。设$\beta^\bullet$ 是 $V^\bullet$上的 $\mathbb{Z}$-分次非退化对称双线性型。 S_3 通过置换因子作用于β^3 。那么有

$$(\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta^3))^{S_3} = ((\beta^{\mathrm{even}})^3)^{S_3} + l\langle -6\rangle\beta^{\mathrm{even}} + ml(l-1)H - \left(m+\binom{m}{2}\right)lH - \frac{1}{2}\binom{2l}{3}H$$

在 GW(k)中，其中 $l = \frac{1}{2}$维数$_k V_{\text{为奇数时}} =: \frac{1}{2}$秩 β^{odd}，而 $m =$维数$_k V_{\text{为偶数时}}$ =秩 β^{even}。

证明。 注意，由于 β^{odd} 是交错的，它对应于 $lH\in GW(k)$。我们有

$$\begin{aligned} V^{\otimes 3} &= (V^{\mathrm{even}}\oplus V^{\mathrm{odd}})^{\otimes 3} \\ &= \underbrace{(V^{\mathrm{even}})^{\otimes 3}\oplus V^{\mathrm{even}}\otimes V^{\mathrm{odd}}\otimes V^{\mathrm{odd}}\oplus V^{\mathrm{odd}}\otimes V^{\mathrm{even}}\otimes V^{\mathrm{odd}}\oplus V^{\mathrm{odd}}\otimes V^{\mathrm{odd}}\otimes V^{\mathrm{even}}}_{=(V^{\otimes 3})^{\mathrm{even}}} \\ &\quad \oplus \underbrace{V^{\mathrm{even}}\otimes V^{\mathrm{even}}\otimes V^{\mathrm{odd}}\oplus V^{\mathrm{even}}\otimes V^{\mathrm{odd}}\otimes V^{\mathrm{even}}\oplus V^{\mathrm{odd}}\otimes V^{\mathrm{even}}\otimes V^{\mathrm{even}}\oplus (V^{\mathrm{odd}})^{\otimes 3}}_{=(V^{\otimes 3})^{\mathrm{odd}}}. \end{aligned}$$

S_3-作用分解为在 $(V^{\mathrm{even}})^{\otimes 3}$ 上的作用，

$$\begin{aligned} V_1 &= V^{\mathrm{even}}\otimes V_{\text{奇}}\otimes V_{\text{奇}}\oplus V_{\text{奇}}\otimes V_{\text{偶}}\otimes V_{\text{奇}}\oplus V_{\text{奇}}\otimes V_{\text{奇}}\otimes V_{\text{偶}}, \\ V_2 &= V^{\mathrm{even}}\otimes V_{\text{偶}}\otimes V_{\text{奇}}\oplus V_{\text{偶}}\otimes V_{\text{奇}}\otimes V_{\text{偶}}\oplus V_{\text{奇}}\otimes V_{\text{偶}}\otimes V_{\text{偶}}, \end{aligned}$$

以及 $(V^{\mathrm{odd}})^{\otimes 3}$。因此，

$$(V^{\otimes 3})^{S_3} = \underbrace{((V^{\mathrm{even}})^{\otimes 3})^{S_3}\oplus V_1^{S_3}}_{=((V^{\otimes 3})^{\mathrm{even}})^{S_3}} \oplus \underbrace{V_2^{S_3}\oplus((V^{\mathrm{odd}})^{\otimes 3})^{S_3}}_{((V^{\otimes 3})^{\mathrm{odd}})^{S_3}}.$$

直和项 $\left(\left(V^{\mathrm{even}}\right)^{\otimes 3}\right)^{S_3}$ 对 $\left(\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}\left(\beta^3\right)\right)^{S_3}$贡献了 $+\left(\left(\beta^{\mathrm{even}}\right)^3\right)^{S_3}$。

考虑循环置换 $\sigma=(1\,2\,3)\in S_3$。设 w_1^{odd}、……、w_N^{odd} 是 $\left(\left(V^{\mathrm{odd}}\right)^{\otimes 2}\right)^{S_2}$ 的一组基，其中 S_2 通过带符号交换因子作用于 $(V_{\text{奇}})^{\otimes 2}$；再设 v_1^{even}、……、v_m^{even} 是 $V_{\text{偶}}$ 的一组基。因此，

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{2}\sigma^{\nu}\cdot v_i^{\mathrm{even}}\otimes w_j^{\mathrm{odd}}\mid i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,N\right\}$$

是 $V_1^{S_3}$ 的一组基。类似地，若 w_1^{even}、……、$w_{N'}^{\mathrm{even}}$ 是 $\left(\left(V_{\text{偶}}\right)^{\otimes 2}\right)^{S_2}$ 的一组基，其中 S_2 通过不带符号交换因子作用于 $\left(V^{\mathrm{even}}\right)^{\otimes 2}$，且 v_1^{odd}、……、v_{2l}^{odd} 是 $V_{\text{奇}}$ 的一组基，则

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{2}\sigma^{\nu}\cdot v_i^{\mathrm{odd}}\otimes w_j^{\mathrm{even}}\mid i=1,\ldots,2l;j=1,\ldots,N'\right\}$$

是 $V_2^{S_3}$ 的一组基。特别地，由命题 6.1 (1)，可得

$$\dim V_2^{S_3}=2l\cdot\dim\left(\left(V^{\mathrm{even}}\right)^{\otimes 2}\right)^{S_2}=2l\left(m+\binom{m}{2}\right).$$

因此，$\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta^3)$ 对 $V_2^{S_3}$ 的限制对 $\left(\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta^3)\right)^{S_3}$ 的贡献为 $-l\left(m+\binom{m}{2}\right)H$。此外，我们有

$$\beta^3\left(\sum_{\nu=0}^{2}\sigma^{\nu}v_i^{\mathrm{even}}\otimes w_j^{\mathrm{odd}},\sum_{\nu=0}^{2}\sigma v_i^{\mathrm{even}}\otimes w_j^{\mathrm{odd}}\right)=3\beta^{\mathrm{even}}(v_i^{\mathrm{even}},v_i^{\mathrm{even}})\cdot(\beta^{\mathrm{odd}})^2(w_j^{\mathrm{odd}},w_j^{\mathrm{odd}}).$$

因此，利用引理 6.2 将 β^{odd} 视为定义在 $0\oplus V^{\mathrm{odd}}$上的二次型，我们得到$V_1^{S_3}$对……有贡献

$$\langle 3\rangle\beta^{\mathrm{even}}(l\langle -2\rangle+l(l-1)H)=l\langle -6\rangle\beta^{\mathrm{even}}+ml(l-1)H$$

到$\left(\mathrm{can}_{\mathbb{Z}}(\beta^3)\right)^{S_3}$。

因此，我们只需计算$\left(\left(V^{-}\right)^{\otimes 3}\right)^{S_3}$的维数。命题 6.1 (2)以及引理 7.9 的证明给出 $\dim\left(\left(V_{\text{奇}}\right)^{\otimes 3}\right)^{S_3}=\binom{2l}{3}$，因此，这个直和项对 $-\frac{1}{2}\binom{2l}{3}$ 到 $(\beta^3)^{S_3}$有贡献。合并这些贡献后，我们便得到所需的公式。

□

定理 7.11. 设 X 是定义在 k上的连通光滑射影概形。将 X 的 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数表示为 $\chi_c(X/k)=\sum_{i=1}^{m}\langle\alpha_i\rangle-lH\in\mathrm{GW}(k)$，使得 $l=\frac{1}{2}\cdot\sum_{p-q\text{ 奇}}$ 维数$_k\,H^q(X,\Omega^p_{X/k})$，并写作 $\overline{\beta}=\sum_{i=1}^{m}\langle\alpha_i\rangle$。那么

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^3X/k)=\langle 6\rangle\cdot\left(\left(\langle 1\rangle+(m-1)\langle 3\rangle\right)\beta+\sum_{1\le i<j<k\le m}\langle 6\alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle\right.$$
$$\left.+\,l\langle -6\rangle\beta+ml(l-1)H-\left(m+\binom{m}{2}\right)lH-\frac{1}{2}\binom{2l}{3}H\right)$$

$$+(\langle 1\rangle-\langle 6\rangle)\cdot\chi_c(X/k)+(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)(\chi_c(X/k)-\langle 1\rangle)\chi_c(X/k)$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

证明。 例5.18 得出 β 是霍奇上同调上迹形式的偶部

$$\left(\bigoplus_{i,j=0}^{\dim_k X} H^i(X,\Omega^j_{X/k})[j-i],\mathrm{Tr}\right) \tag{7-G}$$

由例 5.18 以及（7-G）的奇部等距同构于 lH。结合定理 7.8、引理 7.9和引理 7.10，即可得到该定理。 □

注7.12。 我们将在定理 8.6 中通过显式计算 $a_3^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$ 并将结果与定理 7.11中的公式进行比较，看到 $\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k)=a_3^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$。由于定理 7.11中的$a_3^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$与 $l\geq 0$ 的选择无关，因此我们得到，假设 $l=\frac{1}{2}\cdot\sum_{p-q\,\text{奇}}\dim_k H^q(X,\Omega^p_{X/k})$ 可以替换为假设 $l\geq 0$ 是一个整数。

8 与幂结构预测的比较

现在我们将比较根据 $\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k)$ 和 $\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k)$定理6.3和定理7.11 计算得到的结果与 Pajwani-Pál 的幂结构预测a_*^{PP} 进行比较。

命题 8.1。设 $\beta=\langle\alpha_1\rangle+\cdots+\langle\alpha_m\rangle\in\mathrm{GW}(k)$ 是一个二次型。那么

$$a_2^{\mathrm{PP}}(\beta)=m\cdot\langle 2\rangle+\sum_{0\leq i<j\leq m}\langle\alpha_i\alpha_j\rangle+(\langle -2\rangle-\langle -1\rangle)\beta\in\mathrm{GW}(k).$$

证明. 我们有 $a_0^{\mathrm{PP}}(\alpha_i)=1$，$a_1^{\mathrm{PP}}(\alpha_i)=\alpha_i$，以及 $a_2^{\mathrm{PP}}(\alpha_i)=\alpha_i^2+2+\alpha_i-1-2\alpha_i$。因此，由引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}
a_2^{\mathrm{PP}}(\beta)&=\sum_{i_1+\cdots+i_m=2}a_{i_1}^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_1\rangle)\cdots a_{i_m}^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_m\rangle)\\
&=\sum_{i=1}^{m}(\langle\alpha_i^2\rangle+\langle 2\rangle+\langle\alpha_i\rangle-\langle 1\rangle-\langle 2\alpha_i\rangle)+\sum_{1\leq i<j\leq m}\langle\alpha_i\alpha_j\rangle\\
&=\sum_{1\leq i<j\leq m}\langle\alpha_i\alpha_j\rangle+\underbrace{\beta-\langle 2\rangle\cdot\beta}_{=(\langle -2\rangle-\langle -1\rangle)\beta}+m\cdot\langle 2\rangle\\
&=m\cdot\langle 2\rangle+\sum_{0\leq i<j\leq m}\langle\alpha_i\alpha_j\rangle+(\langle -2\rangle-\langle -1\rangle)\beta.
\end{aligned}$$ □

命题 8.2. 设 $\beta = \langle\alpha_1\rangle + \cdots + \langle\alpha_n\rangle - mH \in \mathrm{GW}(k)$ 其中 $m \geq 0$ 是一个虚拟二次型。则

$$a_2^{\mathrm{PP}}(\beta) = n\langle 2\rangle \sum_{0\leq i<j\leq n} \langle\alpha_i\alpha_j\rangle + m\langle -1\rangle + (m^2-(n+1)m)H + (\langle -2\rangle - \langle -1\rangle)\beta \in \mathrm{GW}(k).$$

证明。 注意 $(\langle -2\rangle - \langle -1\rangle)\cdot H = 0$。对于 $\beta' = \langle\alpha_1\rangle + \cdots + \langle\alpha_n\rangle$，由命题 8.1

$$a_2^{\mathrm{PP}}(\beta') = n\langle 2\rangle + \sum_{0\leq i<j\leq n} \langle\alpha_i\alpha_j\rangle + (\langle -2\rangle - \langle -1\rangle)\cdot\beta$$

现在，我们有 $a_2^{\mathrm{PP}}(-mH) = m\langle -1\rangle + (m^2-m)H$ 对于 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 由 [BV25，引理 23], 因此,

$$\begin{aligned} a_2^{\mathrm{PP}}(\beta) &= a_2^{\mathrm{PP}}(\beta') + \underbrace{a_1^{\mathrm{PP}}(-mH)a_1^{\mathrm{PP}}(\beta')}_{=-nmH} + a_2^{\mathrm{PP}}(-mH) \\ &= n\langle 2\rangle + \sum_{0\leq i<j\leq n} \langle\alpha_i\alpha_j\rangle + (\langle -2\rangle - \langle -1\rangle)\cdot\beta - nmH + m\langle -1\rangle + (m^2-m)H \\ &= n\langle 2\rangle + \sum_{0\leq i<j\leq n} \langle\alpha_i\alpha_j\rangle + m\langle -1\rangle + (m^2-(n+1)m)H + (\langle -2\rangle - \langle -1\rangle) \end{aligned}$$

定理 8.3。 对于 A^n 上的光滑射影概形 X （不一定连通），我们有

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k) = a_2^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

证明。 设 $X = \coprod_{i=1}^N X_i$ 是由连通分支组成的分解，且 X_i 连通。由于 a_*^{Sym} 和 a_*^{PP} 是幂结构，我们有

$$\mathrm{Sym}^2 X = \sum_{i_1+\cdots+i_N=2} \mathrm{Sym}^{i_1} X_1 \cdots \mathrm{Sym}^{i_N}(X_N)$$

在 $K_0^{\mathrm{uh}}(\mathsf{Var}_k)$ 中，并且

$$a_2^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k)) = \sum_{i_1+\cdots+i_N=2} a_{i_1}^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X_1/k))\cdots a_{i_N}^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X_N/k))$$

在$\mathrm{GW}(k)$中。由于我们已经知道 $\chi_c(\mathrm{Sym}^i X/k) = a_i^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$ 对于 $i = 0,\ 1$，因此我们可以假设 X 是连通的。现在，将定理6.3 中的公式与命题8.2 中的公式进行比较，并注意到 $\chi_c(X/k)$ 是双曲的，如果 X 是奇数维的。 □

引理 8.4. 对于二次型 $\beta = \sum_{i=1}^n \langle\alpha_i\rangle \in \mathrm{GW}(k)$，我们有

$$a_3^{\mathrm{PP}}(\beta) = n\cdot\langle 2\rangle\cdot\beta + (\langle 1\rangle - \langle 2\rangle)\cdot\beta^2 + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \langle\alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle \in \mathrm{GW}(k).$$

证明。 引理2.3得出

$$
\begin{aligned}
a_3^{\mathrm{PP}}(\beta) &= a_3^{\mathrm{PP}}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha_i\rangle\right)\\
&= \sum_{i_1+\cdots+i_n=3} a_{i_1}^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_1\rangle)\cdots a_{i_n}^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_n\rangle)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_3^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_i\rangle) + \sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i\neq j}} \underbrace{a_1^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_i\rangle)}_{=\langle\alpha_i\rangle} a_2^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_j\rangle)\\
&\quad + \sum_{0\le i<j<k\le n} \underbrace{a_1^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_i\rangle)a_1^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_j\rangle)a_1^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_k\rangle)}_{=\langle\alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_3^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_i\rangle)}_{=\langle\alpha_i^3\rangle+\langle 2\rangle+\langle\alpha_i\rangle-\langle 1\rangle-\langle 2\alpha_i\rangle} + \sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i\neq j}} \langle\alpha_i\rangle\cdot \underbrace{a_2^{\mathrm{PP}}(\langle\alpha_j\rangle)}_{=\langle\alpha_j^2\rangle+\langle 2\rangle+\langle\alpha_j\rangle-\langle 1\rangle-\langle 2\alpha_j\rangle}\\
&\quad + \sum_{0\le i<j<k\le n}\langle\alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\underbrace{2\langle 1\rangle}_{=2\langle 2\rangle} - \langle 2\rangle)\langle\alpha_i\rangle + n\cdot(\langle 2\rangle-\langle 1\rangle) + \sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i\neq j}}\langle\alpha_i\rangle\cdot(\langle 2\rangle+\langle\alpha_j\rangle-\langle 2\alpha_j\rangle)\\
&\quad + \sum_{0\le i<j<k\le n}\langle\alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle\\
&= \langle 2\rangle\cdot\beta + n(\langle 2\rangle-\langle 1\rangle) + \underbrace{\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i\neq j}}\langle 2\alpha_i\rangle}_{=(n-1)\cdot\langle 2\rangle\cdot\beta} + \underbrace{\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i\neq j}}(\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)\langle\alpha_i\alpha_j\rangle}_{=(\langle 2\rangle-\langle 1\rangle)(n\langle 1\rangle-\beta^2)}\\
&\quad + \sum_{0\le i<j<k\le n}\langle\alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle\\
&= n\cdot\langle 2\rangle\cdot\beta + n\cdot\underbrace{2(\langle 2\rangle-\langle 1\rangle)}_{=0} + (\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)\beta^2 + \sum_{0\le i<j<k\le n}\langle\alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle\\
&= n\cdot\langle 2\rangle\cdot\beta + (\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)\cdot\beta^2 + \sum_{0\le i<j<k\le n}\langle\alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle. \qquad \square
\end{aligned}
$$

引理 8.5. 对于二次型 $\beta=\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha_i\rangle\in \mathrm{GW}(k)$ 和 $l\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$，我们有

$$
\begin{aligned}
a_3^{\mathrm{PP}}(\beta-lH) &= (n\cdot\langle 2\rangle - l\cdot\langle 1\rangle)\cdot\beta + (\langle 1\rangle-\langle 2\rangle)\cdot\beta^2 + \sum_{1\le i<j<k\le n}\langle\alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle\\
&\quad -\left(nl(1-l)+l\binom{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\binom{2l}{3}\right)H.
\end{aligned}
$$

证明。我们有

$$a_3^{\mathrm{PP}}(\beta - lH) = a_3^{\mathrm{PP}}(\beta) + a_2^{\mathrm{PP}}(\beta) \cdot a_1^{\mathrm{PP}}(-lH) + a_1^{\mathrm{PP}}(\beta) \cdot a_2^{\mathrm{PP}}(-lH) + a_3^{\mathrm{PP}}(-lH).$$

根据引理 8.4，我们有

$$a_3^{\mathrm{PP}}(\beta) = n \cdot \langle 2\rangle \cdot \beta + (\langle 1\rangle - \langle 2\rangle) \cdot \beta^2 + \sum_{1\le i<j<k\le n} \langle \alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle.$$

此外，我们有 $a_1^{\mathrm{PP}}(-lH) = -lH$ 以及 $a_1^{\mathrm{PP}}(\beta) = \beta$。根据 [BV25，引理 23],给出

$$a_2^{\mathrm{PP}}(-lH) = l(l-1)\langle 1\rangle + l^2\langle -1\rangle = l^2H - l\langle 1\rangle$$

and

$$\begin{aligned}
a_3^{\mathrm{PP}}(-lH) &= (-1)^3 \cdot \sum_{i=0}^{3} \binom{l}{i}\binom{l}{3-i}\langle (-1)^i\rangle \\
&= -\binom{l}{0}\binom{l}{3}\langle 1\rangle - \binom{l}{1}\binom{l}{2}\langle -1\rangle - \binom{l}{2}\binom{l}{1}\langle 1\rangle - \binom{l}{3}\binom{l}{0}\langle -1\rangle \\
&= -\left(\binom{l}{3} + l\binom{l}{2}\right) H \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\binom{2l}{3}\cdot H.
\end{aligned}$$

根据命题8.1，我们有

$$a_2^{\mathrm{PP}}(\beta) = n\langle 2\rangle + \sum_{1\le i<j\le n} \langle \alpha_i\alpha_j\rangle + (\langle -2\rangle - \langle -1\rangle)\cdot\beta.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
a_3^{\mathrm{PP}}(\beta - lH) &= a_3^{\mathrm{PP}}(\beta) + a_2^{\mathrm{PP}}(\beta) \cdot a_1^{\mathrm{PP}}(-lH) + a_1^{\mathrm{PP}}(\beta) \cdot a_2^{\mathrm{PP}}(-lH) + a_3^{\mathrm{PP}}(-lH) \\
&= n \cdot \langle 2\rangle \cdot \beta + (\langle 1\rangle - \langle 2\rangle) \cdot \beta^2 + \sum_{1\le i<j<k\le n} \langle \alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle \\
&\quad - (n\langle 2\rangle + \sum_{1\le i<j\le n} \langle \alpha_i\alpha_j\rangle + (\langle -2\rangle - \langle -1\rangle)\cdot\beta)\cdot lH \\
&\quad + \beta\cdot(l^2H - l\langle 1\rangle) - \frac{1}{2}\cdot\binom{2l}{3}\cdot H \\
&= n \cdot \langle 2\rangle \cdot \beta + (\langle 1\rangle - \langle 2\rangle) \cdot \beta^2 + \sum_{1\le i<j<k\le n} \langle \alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle \\
&\quad - \left(n + \binom{n}{2}\right)\cdot lH + nl^2H - l\beta - \frac{1}{2}\cdot\binom{2l}{3}\cdot H \\
&= (n\cdot\langle 2\rangle - l\cdot\langle 1\rangle)\cdot\beta + (\langle 1\rangle - \langle 2\rangle)\cdot\beta^2 + \sum_{1\le i<j<k\le n} \langle \alpha_i\alpha_j\alpha_k\rangle \\
&\quad - \left(nl(1-l) + l\binom{n}{2} + \frac{1}{2}\cdot\binom{2l}{3}\right) H.
\end{aligned}$$

□

定理 8.6. 设 X 是一个不一定连通的光滑射影概形，其上定义在 k 上。假设 特征 $k \neq 2,3$。那么我们有

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) = a_3^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。

证明。 令 $X = \coprod_{i=1}^N X_i$ with X_i 连通是一个连通分支分解。由于 a_*^{Sym} 和 a_*^{PP} 是幂结构，我们有

$$\mathrm{Sym}^3 X = \sum_{i_1+\cdots+i_N=3} \mathrm{Sym}^{i_1} X_1 \cdots \mathrm{Sym}^{i_N}(X_N)$$

在 $K_0^{\mathrm{vh}}(\mathrm{Var}_k)$ 中，并且

$$a_3^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k)) = \sum_{i_1+\cdots+i_N=3} a_{i_1}^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X_1/k)) \cdots a_{i_N}^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X_N/k))$$

在 $\mathrm{GW}(k)$ 中。因为我们已经知道 $\chi_c(\mathrm{Sym}^i X/k) = a_i^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k))$ 对于 i =0、1、2 根据定理 8.3，因此我们可以假设 X 是连通的。

记 $\chi_c(X/k) = \sum_{i=1}^m \langle \alpha_i \rangle - lH \in \mathrm{GW}(k)$ 其中 l 如定理 7.11 中所述，并且$\beta = \sum_{i=1}^m \langle \alpha_i \rangle$。根据定理 7.11，我们有

$$\begin{aligned}
\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) = \langle 6 \rangle \cdot \Bigg(& (\langle 1 \rangle + (m-1)\langle 3 \rangle)\beta + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} \langle 6\alpha_i\alpha_j\alpha_k \rangle \\
& + l\langle -6 \rangle \beta + ml(l-1)H - \left(m + \binom{m}{2} \right) lH - \frac{1}{2}\binom{2l}{3} H \Bigg) \\
& + (\langle 1 \rangle - \langle 6 \rangle) \cdot \chi_c(X/k) + (\langle 1 \rangle - \langle 2 \rangle)(\chi_c(X/k) - \langle 1 \rangle)\chi_c(X/k) \\
= & (m\langle 2 \rangle + l\langle -1 \rangle)\beta + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} \langle \alpha_i\alpha_j\alpha_k \rangle + (\langle 1 \rangle - \langle 2 \rangle)\beta^2 \\
& + \left(ml(l-2) - l\binom{m}{2} - \frac{1}{2}\binom{2l}{3} \right) H.
\end{aligned}$$

将其与引理 8.5比较，可得

$$\begin{aligned}
\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) - a_3^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k)) &= l\langle -1 \rangle \beta - mlH + l\beta \\
&= l(\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle)\beta - mlH = 0.
\end{aligned}$$

因此， $\chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) = a_3^{\mathrm{PP}}(\chi_c(x/k))$。 □

下面的命题直接由 [PP25的引理 2 的证明得出。9]为方便读者，我们在此给出证明。

命题 8.7。设 a_* 是环 R 上的幂结构，设 a'_* 是环 R' 上的幂结构。设 φ: $R \to R'$ 是一个环同态，并且 r、 $s \in R$ 和 $n \geq 0$。如果对所有 $0 \leq i \leq n$ 都有 $\varphi(a_i(r)) = a'_i(\varphi(r))$ 且 $\varphi(a_i(s)) = a'_i(\varphi(s))$，那么对所有 $0 \leq i \leq n$ 都有 $\varphi(a_i(-r)) = a'_i(\varphi(-r))$ 且 $\varphi(a_i(r+s)) = a'_i(\varphi(r+s))$。

证明。 关于 $r+s$ 的陈述直接由和分解 $a_i(r+s) = \sum_{\nu=0}^{i} a_\nu(r)a_{i-\nu}(s)$ 得出。因此，只需证明关于 $-r$ 的陈述。

我们对 n 进行归纳证明。对于 $n=0$，无需证明，因为 $\varphi(a_0(-r)) = \varphi(1) = 1 = a'_0(\varphi(-r))$。

设 $n \geq 1$。由归纳假设，我们得到 $i \leq n-1$ 的相容性。因此，只需证明 $\varphi(a_n(-r)) = a'_n(\varphi(-r))$。现在，我们有 $0 = a_n(r-r) = \sum_{i=0}^{n} a_i(r)a_{n-i}(-r)$，因而 $a_n(-r) = -\sum_{i=1}^{n} a_i(r)a_{n-i}(-r)$。这意味着

$$\varphi(a_n(-r)) = -\sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i(r))\varphi(a_{n-i}(-r)) = -\sum_{i=1}^{n} a'_i(\varphi(r))a'_{n-i}(\varphi(-r)) = a'_n(\varphi(-r)),$$

其中第二个等式用到了归纳假设。 □

推论 8.8。 设 a_* 是环 R 上的一个幂结构，a'_* 是环 R' 上的一个幂结构。设 $\varphi\colon R \to R'$ 是一个环同态，且 $n \geq 0$。设 $S \subset R$ 是一个生成 R 作为群的子集。若对所有 $0 \leq i \leq n$ 和所有 $r \in S$，都有 $\varphi(a_i(r)) = a'_i(\varphi(r))$，则对所有 $0 \leq i \leq n$ 和 $r \in R$，都有 $\varphi(a_i(r)) = a'_i(\varphi(r))$。

证明。 设 $r \in R$。根据命题8.7，我们可以假设 $S = -S$。由于 S生成 R 作为一个群，我们可以找到 $s_i \in S$ 使得 $r = \sum_{i=1}^{m} s_i$。再次根据命题 8.7，我们有

$$a'_n(\varphi(r)) = a'_n\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi(s_i)\right) = \varphi\left(a_n\left(\sum_{i=1}^{m} s_i\right)\right) = \varphi(a_n(r)).$$ □

定理 8.9。 设 X 是定义在 k 上的簇，且假设 k 的特征为零。那么我们有

$$\chi_c(\mathrm{Sym}^2 X/k) = a_2^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k)) \quad \textit{and} \quad \chi_c(\mathrm{Sym}^3 X/k) = a_3^{\mathrm{PP}}(\chi_c(X/k)).$$

证明。 结合比特纳定理 [Bit04，定理 3。1] 与定理8.3、定理 8.6和推论8.8。 □

参考文献

[Arc+22] Niny Arcila-Maya、Candace Bethea、Morgan Opie、Kirsten Wickelgren 和 Inna Zakharevich。《紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数与霍赫希尔德复形》。载于：*Topology and its Applications* 316 (2022)。Women in Topology III，论文编号 108108。[BM24] Dori Bejleri 和 Stephen McKean。《零动机欧拉示性数的对称幂》。2024。arXiv: 2406.19506 [math.AG]。[Bit04] Franziska Bittner。《特征为零的簇的泛欧拉示性数》。载于：*Compositio Mathematica* 140.4 (2004)，第 1011–1032 页。[BV25] Lukas F. Bröring 和 Anna M. Viergever。《曲线对称幂的二次欧拉示性数》。载于：*manuscripta math.* 176.26 (2025)。

[CNS18] Antoine Chambert-Loir、Johannes Nicaise 和 Julien Sebag。动机积分。第325卷。Progress in Mathematics。Birkhäuser/Springer，纽约，2018，第xx+526页。[DJK21] Frédéric Déglise、Fangzhou Jin 和 Adeel Khan。《动机同伦理论中的基本类》。载于：欧洲数学学会杂志23.12 (2021)。[Del68] Pierre Deligne。《Lefschetz定理与谱序列的退化判据》。载于：高等科学研究所数学出版物35 (1968)，第259–278页。[DK73] Pierre Deligne 和 Nicholas Katz 编。《代数几何中的单值群》第二卷。第340卷。数学讲义。Bois-Marie代数几何研讨班1967–1969（SGA 7 II）。Springer-Verlag，柏林—纽约，1973，第x+438页。[Dem70] Michel Demazure。《Cremona群的最大秩代数子群》。载于：Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 3 (1970)，第507–588页。[DP80] Albrecht Dold 和 Dieter Puppe。《对偶、迹与传递》。载于：国际几何拓扑会议论文集（华沙，1978）。K. Borsuk 和 A. Kirkor 编。1980。[Eli+14] E. Javier Elizondo、Paulo Lima-Filho、Frank Sottile 和 Zach Teitler。《算术托里克簇》。载于：Math. Nachr. 287.2-3 (2014)，第216–241页。[Ful93] William Fulton。托里克簇导论。第131卷。《数学年刊研究》。William H. Roever几何讲座。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1993，第xii+157页。[Gro58] Alexander Grothendieck。《陈类理论》。载于：法国数学会通报86 (1958)，第137–154页。[Gro61] Alexander Grothendieck。《代数几何基础。II. 若干态射类的初等整体研究》。载于：高等科学研究所数学出版物8 (1961)，共222页。[GLM04] Sabir Gusein–Zade、Ignacio Luengo 和 Alejandro Melle-Hernández。《簇的 Grothendieck 环上的幂结构》。载于：数学研究快报11 (2004)，第49–57页。[GLM06] Sabir Gusein–Zade、Ignacio Luengo 和 Alejandro Melle-Hernández。《簇的Grothendieck环上的幂结构与点的Hilbert概形的生成级数》。载于：密歇根数学杂志54.2 (2006)，第353–359页。[Har77] Robin Hartshorne。代数几何。第52卷。数学研究生教材。Springer-Verlag，纽约—海德堡，1977。[Hoy14] Marc Hoyois。《Grothendieck–Lefschetz–Verdier迹公式的二次精化》。载于：代数与几何拓扑14 (2014)，第3603–3658页。[Hoy17] Marc Hoyois。《等变动机同伦理论中的六种运算》。载于：数学进展305 (2017)，第197–279页。[Kap00] Mikhail Kapranov。S对偶理论中的椭圆曲线与Kac-Moody群的Eisenstein级数。2000。arXiv: math/0001005 [math.AG]。

[Kni73] Carol M. Knighten。《代数簇商上的微分》。载于：美国数学会汇刊 177 (1973)，第 65–89 页。[Lev20] Marc Levine。《计数几何中二次型的若干方面》。载于：数学文献 25 (2020)，第 2179–2239 页。[LPS24] Marc Levine、Simon Pepin Lehalleur 和 Vasudevan Srinivas。《齐次与加权齐次超曲面的欧拉示性数》。载于：数学进展 441 (2024)，论文编号 109556。[LR20] Marc Levine 和 Arpon Raksit。《动机高斯-博内公式》。载于：代数与数论 14.7 (2020)，第 1801–1851 页。[Lev+19] Marc Levine、Yaping Yang、Gufang Zhao 和 Joël Riou。《代数椭圆上同调理论与翻转 I》。载于：数学年刊 375.3-4 (2019)，第 1823–1855 页。[Lun73] Domingo Luna。《étale 截面》。载于《论代数群》。第 101 卷。《法国数学会通报》增刊。法国数学会，巴黎，1973，第 81–105 页。[Mat80] Hideyuki Matsumura。《交换代数》。第二版。第 56 卷。数学讲义系列。Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, MA，1980，第 xv+313 页。[McG05] Séan McGarraghy。《对称双线性型的对称幂》。载于：代数学报 12.1 (2005)，第 41–57 页。[MH73] John Milnor 和 Dale Husemoller。《对称双线性型》。第 73 卷。数学及其边界领域成果，第 2 系列。Springer Berlin, Heidelberg，1973。[Moo14] Ben Moonen。《阿贝尔簇》一书的草稿。见：https://www.math.ru.nl/~bmoonen/research.html 2014 。草稿文本。。[Mor02] Fabien Morel。《$\mathbb{A}^1$-同伦理论导论》。2002 年 7 月 8–19 日在国际理论物理中心（的里雅斯特）举办的代数K理论及其应用暑期学校上的讲座。2002。[Mor12] Fabien Morel。《域上的 $\mathbb{A}^1$-代数拓扑》。数学讲义 2052。Springer Verlag，2012。[MV99] Fabien Morel 和 Vladimir Voevodsky。《概形的^1-同伦理论》。载于：高等科学研究所数学出版物 90 (1999)，第 45–143 页。[Mus11] Mircea Mustaţă。《代数几何中的ζ函数》。见：https://websites.umich.edu/~mmustata/zeta_book.pdf 2011 。讲义。。[PP23] Jesse Pajwani 和 Ambrus Pál。《算术 Yau-Zaslow 公式》。2023。arXiv: 2210.15788v2 [math.AG]。[PP25] Jesse Pajwani 和 Ambrus Pál。《Grothendieck-Witt 环上的幂结构与动机欧拉示性数》。载于：K理论年刊 10.2 (2025)，第 123–152 页。[PRV24] Jesse Pajwani、Herman Rohrbach 和 Anna M. Viergever。胞腔簇对称幂的紧支撑 $\mathbb{A}^1$-欧拉示性数。2024。arXiv: 2404.08486 [math.AG]。[PW18] Ivan Panin 和 Charles Walter。《关于动机交换环谱 BO》。载于：代数与分析 30.6 (2018)，第 43–96 页。

[QSS79] Heinz-Georg Quebbemann、Winfried Scharlau 和 Manfred Schulte。《加性范畴与阿贝尔范畴中的二次型和厄米型》。载于：J. Algebra 59.2 (1979)，第 264–289 页。[Qui73] Daniel Quillen。《高阶代数 KK理论 I》。载于《代数 KK理论 I：高阶 KK理论》（1972 年在华盛顿州西雅图巴特尔纪念研究所举行的会议论文集）。第 341 卷。数学讲义。Springer，柏林—纽约，1973，第 85–147 页。[Rao+23] Sheng Rao、Song Yang、Xiangdong Yang 和 Xun Yu。《沿子簇爆破上的霍奇上同调》。载于：《数学新闻》296.7 (2023)，第 3003–3025 页。[Sai94] Takeshi Saito。《雅可比和海克特征、德拉姆判别式与 ℓ-进上同调的行列式》。载于：Journal of Algebraic Geometry 3.3 (1994)，第 411–434 页。[Sch85] Winfried Scharlau。《二次型与厄米型》。第 270 卷。数学科学基础丛书 [数学科学基础]。Springer-Verlag，1985。[Sch10] Marco Schlichting。《正合范畴的厄米K理论》。载于：Journal of K-Theory. K-Theory and its Applications in Algebra, Geometry, Analysis & Topology 5.1 (2010)，第 105–165 页。[Ser88] Jean-Pierre Serre。《代数群与类域》。第 117 卷。数学研究生教材。法文译本。Springer-Verlag，纽约，1988。[Sri93] Vaseduvan Srinivas。《霍奇上同调的吉森映射与循环类》。载于：《印度科学院院刊》（数学科学）103.3 (1993)，第 209–247 页。[Sta24] Stacks项目作者。《Stacks项目》。https://stacks.math.columbia.edu 2024。。[VA 10] VA。（https://mathoverflow.net/users/1784/va）。为什么环面簇的欧拉示性数等于定义多面体的顶点数？MathOverflow。10 2010 https://mathoverflow.net/q/24179 th May。网址：。[Vie95] Eckart Viehweg。《极化流形的拟射影模空间》。第 30 卷。数学及其边界领域成果（第 3 系列） [数学成果及相关领域（第 3 系列）]。Springer-Verlag，柏林，1995。[Voe98] Vladimir Voevodsky。《$\mathbb{A}^1$-同伦理论》。载于《国际数学家大会论文集》第一卷（柏林，1998）。1998，第 579–604 页。[Wit37] Ernst Witt。《任意域上二次型理论》。载于：Journal für die reine und angewandte Mathematik 176 (1937)，第 31–44 页。

Louisa F. Bröring 杜伊斯堡-埃森大学数学系，Thea-Leymann-Str. 9，45127 埃森，德国 电子邮箱：louisa.broering@uni-due.de

关键词：动机同伦理论、精化枚举几何、其他域 数学主题分类：14G27、14N10、14F42