arXiv:2601.05797v1 [math.RA] 9 Jan 2026

具有伪次数函数的非结合环中的中心化子

Johan Richter *

2026年1月12日

摘要

本文研究具有特殊类型赋值的非结合代数的核中元素 a 的中心化子。我们证明， a 的中心化子是代数 a 上的有限秩自由模。

关键词： 交换元素、赋值、代数相关性

1 引言

Burchnall 和 Chaundy 在 20 世纪 20 年代和 30 年代的一系列论文中 [3, 4, 5], 研究了常微分算子交换对的性质。以下定理实质上已见于他们的论文。

定理 1.1. 设 $P = \sum_{i=0}^{n} p_i D^i$ 和 $Q = \sum_{j=0}^{m} q_j D^j$ 是两个交换的微分算子，其系数为多项式，且首项系数为常数。那么存在一个非零多项式 $f(s,t)$，它是以 $\mathbb{C}$ 为系数、以两个交换变量为自变量的多项式，使得 $f(P,Q) = 0$。注意， P和 Q 交换这一事实保证了 $f(P,Q)$ 定义良好。

Burchnall 和 Chaundy 的结果在 20 世纪 70 年代被偏微分方程领域的研究者独立地重新发现。事实证明，若干重要方程可以等价地表述为一对微分算子交换的条件。因此，这些微分方程是完全可积的，粗略地说，这意味着它们具有无穷多个守恒律。事实上，Kricherver [9]在研究可积系统时重新发现了定理 1.1。

为了陈述 Burchnall 和 Chaundy 结果的一些推广，我们先回顾一个定义。

定义 1.2. 设 R 是一个环， σ 是 R 的一个自同态， δ 是一个加性函数， $R \to R$，满足

$$\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$$

对所有 a、$b \in R$ 都成立。（这样的 δ 称为 σ-导子。）Ore 扩张$R[x;\sigma,\delta]$ 是多项式环 $R[x]$ ，其乘法定义为

*布莱金厄理工学院，卡尔斯克鲁纳，瑞典 电子邮箱：johan.richter@bth.se

对所有 $r \in R$，均有 $xr = \sigma(r)x + \delta(r)$。$R[x;\sigma,\delta]$ 中的每个元素都可以唯一地写成 $\sum_i a_i x^i$，其中 $a_i \in R$。

如果 $\sigma = \mathrm{id}$ 那么 $R[x;\mathrm{id}_R,\delta]$ 称为一个微分算子环。如果 $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，其中 $a_n \neq 0$，我们称 P 的次数为 n。我们称零元素的次数为 $-\infty$。

Burchnall 和 Chaundy 研究的微分算子环可以取为 Ore 扩张 $T = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})[D;\mathrm{id}\ \delta]$，其中 δ 是通常导子。

在 Amitsur 的一篇论文 [1] 中可以找到以下定理。

定理 1.3。设 K 是一个零特征域，带有导子 δ。令 F 表示常数子域。（这里的常数是指被导子映为零的元素。）构造微分算子环 $S = K[x;\mathrm{id}\ \delta]$，并设 P 是 S 中次数为 $n > 0$ 的一个元素。令 $F[P] = \{\sum_{j=0}^{m} b_j P^j \mid b_j \in F\}$，即系数为常数的 P 上的多项式环。那么，P 的中心化子是 S 的一个交换子环，并且是一个秩至多为 n 的自由 $F[P]$-模。

后来的作者发现了其他一些适用 Amitsur 证明方法的情境。我们提及 Goodearl 和 Carlson 的一篇文章 [6]，，以及 Goodearl 单独撰写的一篇文章 [7]，，它们将 Amitsur 的结果推广到了更广泛的一类环。Bavula [2]、Mazorchouk [10]、Tang [13] 等作者也对该证明进行了推广。作为这些结果的推论，可以得到定理 1.1。

受 Amitsur 启发的论文中，有一篇是 Hellstr¨om 和 Silvestrov[8]撰写的。Hellstr¨om 和 Silvestrov 研究了满足一种他们称为 l-BDHC（即“有界维数齐次中心化子”）条件的分次代数。

定义 1.4. 设 K 是一个域，ℓ 是一个正整数，S 是一个 $\mathbb{Z}$-分次 K 代数。分次的齐次分量记为 S_m，其中 $m \in \mathbb{Z}$。对于 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $a \in S$，记 $\mathrm{Cen}(n,a)$ 为 S_n 中与 a 交换的元素。若对于所有 $n \in \mathbb{Z}$、非零 $m \in \mathbb{Z}$ 和非零 $a \in S_m$，均有 $\dim_K \mathrm{Cen}(n,a) \leq \ell$，则称 S 具有 *ℓ-BDHC*。

Hellstr¨om 和 Silvestrov 采用了 Amitsur 证明中的思想。不过，他们需要对这些思想进行修改，尤其是为了处理 $\ell > 1$ 的情形。

为了进一步说明他们的结果，我们再介绍一些他们使用的记号。记 π_n 为从 S 到 S_n 的投影，其定义方式显而易见。Hellstr¨om 和 Silvestrov 定义函数 $\bar{\chi}: A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$，如下:

$$\bar{\chi}(a) = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \,|\, \pi_n(a) \neq 0 \,\},$$

并令 $\bar{\chi}(0) = -\infty$。进一步令 $\bar{\pi}(a) = \pi_{\bar{\chi}(a)}(a)$。

现在，我们已经引入了足够的记号，可以陈述相关结果了。下面的结果是他们论文中引理 2.4 的主要内容。

定理 1.5。假设 S 是一个具有 *l-BDHC* 的 K-代数，且 S 中没有零因子。若 $a \in S \setminus S_0$ 满足 $\bar{\chi}(a) = m > 0$，且 $\bar{\pi}(a)$ 在 S 中不可逆，则存在一个有限的 $K[a]$-模基 $\{b_1, \ldots, b_k\}$，它是 a 的中心化子的基。此外 $k \leq ml$。

他们将其称为引理，是因为他们主要关注的是这一结果的以下推论。（其证明方法与本文中的推论 2.9 相同。）

定理 1.6。设 K 是一个域，并假设 K-代数 S 具有 *l-BDHC*，且 S中没有零因子。若 $a \in S \setminus S_0$ 和 $b \in S$ 满足$ab = ba$, $\bar{\chi}(a) > 0$，且 $\bar{\pi}(a)$ 在 S中不可逆，则存在一个以 K 中的元素为系数、含两个交换变量的非零多项式 P，使得$P(a, b) = 0$。

定理 1.6 与定理 1.1 直接类似。

[8] 中的证明基于函数 $\bar{\chi}$ 的某些性质。在 [12] 中，本文作者使用他所谓的伪次数函数来公理化 Hellstr¨om 和 Silvestrov 所需的性质，并推广他们的结果。他成功地在结合情形下证明了本文的定理 2.8，以及若干推论。

本文旨在证明，[12]中的一些结果也可以推广到非结合情形，适用于代数核中的元素。

1.1 记号与约定

我们始终用 K 表示一个域。

若 R 是一个环，则 $R[x_1, x_2, \ldots x_n]$ 表示以 R 为系数、由中心不定元 x_1、x_2、.....、x_n构成的多项式环。

我们假设所有环和代数均为含幺的，但不一定是结合的。我们只研究域上的代数。若 S 是一个 K-代数，且 K 是一个域，则我们以自然方式将 K 嵌入为 S 的子集。

若 S 是一个代数，则 $N_l(S)$ 表示 S 中所有与左侧任意元素结合的元素所成的集合，即所有满足 $a(bc) = (ab)c$ 的 a 所成的集合，其中 b、$c \in S$ 任意。类似地，我们定义 $N_m(S)$ 和 $N_r(S)$。这些子集实际上都是 S 的子代数。我们将核 $N(S)$ 定义为 $N_l(S)$、$N_m(S)$ 和 $N_r(S)$ 的交集。$C(S)$ 表示 S 中与所有元素交换的元素所成的集合。中心 $Z(S)$ 定义为 $C(S) \cap N(S)$。

显然，$K \subseteq Z(S)$。

若 S 是一个环，且 a是 S中的元素，则 a的中心化子记为 $C_S(a)$，它是 S 中与 a交换的所有元素的集合。

2 具有次数函数的代数中的中心化子

我们首先定义伪次数函数在非结合情形下所需具备的性质。

定义 2.1。设 K 为一个域，且 S 为一个 K-代数。若函数 χ从S 到 $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$，并满足以下条件，则称其为伪次数函数：

- $\chi(a) = -\infty$ 当且仅当 $a = 0$,
- $\chi(ab) = \chi(a) + \chi(b)$ 对所有 a，$b \in S$,
- $\chi(a + b) \leq$最大值$(\chi(a)\ \chi(b))$,

这本质上是赋值概念的一个特例。下面的引理显然成立。

引理 2.2. 设 K 是一个域， S 是一个 K-代数。若 χ 是 S 上的伪次数函数，则

- $\chi(1) = \chi(-1) = 0$
- 若 $b \in S^\times \cap N_m(S) \cap N_r(S)$ 则 $\chi(b^{-1}) = -\chi(b)$

我们还需要一个可以替代 l-BDHC 的条件。下面给出其表述。

定义 2.3. 设 K 是一个域，其特征不等于2， S 是一个带有伪次数函数 χ的 K-代数，且 ℓ 是一个正整数。若子代数 $B \subset A$满足条件 $D(\ell)$ ，则称其满足条件；若 $\chi(b) \geq 0$ 对所有非零的$b \in B$都成立，并且每当有 $\ell + 1$ 个元素 b_1、...、$b_{l+1} \in B$被 χ映射到同一个整数时，都存在 α_1、...、 $\alpha_{\ell+1} \in K$，它们不全为零，使得$\chi\left(\sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i b_i\right) < \chi(b_1)$。

注 2.4. 请注意，要求 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1}$ 经 χ 映射后得到相同的整数，这排除了它们等于0的可能性。

注 *2.5.* 假设 S 是一个 K-代数，且 $a \in N_l(S) \cap N_m(S)$ 满足条件 $D(\ell)$，其中 $C_S(a)$ 对某个 ℓ 成立。若 α 是非零标量，则 $\chi(\alpha^{-1}) = -\chi(\alpha)$。由于 $\chi(\alpha)$ 和 $\chi(\alpha^{-1})$ 都是非负的，因此可得 $\chi(\alpha) = 0$。

引理 2.6. 设 K 是一个域。假设 S 是一个 K-代数，且 χ 是定义在 S 上的伪次数函数，它将所有非零标量映射为零。那么，若 $a, b \in S$ 满足 $\chi(b) < \chi(a)$，则恒等式

$$\chi(a + b) = \chi(a) \tag{1}$$

成立。

证明。 一方面，我们得到 $\chi(a + b) \leq \max(\chi(a), \chi(b)) = \chi(a)$。另一方面， $\chi(a) = \chi(a + b - b) \leq \max(\chi(a + b), \chi(b))$。由于 $\chi(b) < \chi(a)$，因此必有 $\chi(a) \leq \chi(a + b)$。

□

现在我们来证明定理 1.5 的一个类似结论，这只需假设存在某个伪次数函数，并满足条件 $D(\ell)$。

注 2.7。 若 $a \in N_l(S) \cup N_m(S) \cup N_r(S)$ 则由 a 生成的代数是结合的。

定理 2.8。 设 K 是一个域，且 S 是一个 K-代数。假设 S 具有一个伪次数函数 χ。

设 $a \in N(S)$，其中 $m = \chi(a) > 0$，且 $C_S(a)$ 对某个正整数 ℓ 满足条件 $D(\ell)$。由 a 生成的代数（记作 $K[a]$）同构于 K 上的一元多项式环。此外，$C_S(a)$ 是一个秩至多为 ℓm 的自由左 $K[a]$-模。

证明。首先注意到，当 $a \in N(S)$ 时， $C_S(a)$ 是一个代数。

由于 $a \in N(S)$， $K[a]$ 是一个结合的交换代数。由于$\chi(a) > 0$，可知 $K[a]$ 同构于一个多项式环。容易验证， $C_S(a)$ 在$K[a]$中元素从左侧进行乘法运算下是闭合的。

构造一个序列 b_1， b_2，……，令 $b_1 = 1$，并选择 $b_{k+1} \in C_S(a)$，使得在 b_{k+1} 不属于 $K[a]$-线性张成的限制下， $\chi(b_{k+1})$ 取极小值。我们将在证明的后面部分说明，这样的序列至多包含 lm个元素。

我们首先断言

$$\chi\left(\sum_{i=1}^{k} \phi_i b_i\right) = \max_{i \le k}(\chi(\phi_i) + \chi(b_i)), \tag{2}$$

对于任意 $\phi_1, \ldots \phi_k \in K[a]$。我们通过对 $n = \max_{i \le k}(\chi(\phi_i) + \chi(b_i))$ 进行归纳法来证明这一点。显然，(2) 式左端从不大于右端。当 $n = -\infty$ 时，等式 (2) 显然成立。若 $n = 0$，则由于对于所有非零 $b \in C_S(a)$， $\chi(b) \ge 0$，等式 (2) 成立；而 $\sum_{i=1}^{k} \phi_i b_i = 0$ 将意味着所有 $\phi_i = 0$，这是由 b_i的选取所致。对于 $C_S(a)$ 中所有非零 b， $\chi(b) \ge 0$ 还意味着， $-\infty$ 与 0 之间的 n 值均不可能出现。

对于归纳步骤，假设当右侧严格小于 n时，(2)成立。为了验证它对 n 也成立，我们不妨假设 $\chi(\phi_k) + \chi(b_k) = n$，因为若对于某个项 $\phi_j b_j$有 $\chi(\phi_j b_j) < n$，根据引理 2.6，我们可以将其删去，而不影响(2)的任一侧。若 $\phi_k \in K$，则根据注 2.5， $\chi(\phi_k) = 0$，因此 $\chi(b_k) = n$。由 b_k 的选取可知， $\chi(\sum_{i=1}^{k} \phi_i b_i) \ge n$，否则就会选取$\sum_{i=1}^{k} \phi_i b_i$，而不是 b_k。若 $\phi_k \notin K$，则 $\chi(b_k) < n$，因此对于 $i = 1$、 $\ldots k$，有 $\chi(b_i) < n$。设r_1、……、 $r_k \in K$ 以及 ξ_1、……、 $\xi_k \in K[a]$ 满足对于 $i = 1$、……、 k，有 $\phi_i = a\xi_i + r_i$。我们有 $\chi(\sum_{i=1}^{k} r_i b_i) < n$，因此根据引理 2.6，结合 $a \in N(S)$这一事实以及关于 χ 的假设，可得

$$\chi\left(\sum_{i=1}^{k} \phi_i b_i\right) = \chi\left(\sum_{i=1}^{k} a\xi_i b_i + \sum_{i=1}^{k} r_i b_i\right) = \chi\left(a\sum_{i=1}^{k} \xi_i b_i\right) = m + \chi\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i b_i\right).$$

我们还得到 $\max_{i \le k}(\chi(\phi_i) + \chi(b_i)) = m + \max_{i \le k}(\chi(\xi_i) + \chi(b_i))$。根据归纳假设

$$\chi\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i b_i\right) = \max_{i \le k}(\chi(\xi_i) + \chi(b_i)),$$

由此完成归纳步骤。

现在证明，如果 $\chi(b_i) = \chi(b_j)$ 对某个 $i \le j$ 成立，那么 $j - i < l$. 假设b_i，……，b_{i+l}都经由 χ映射为同一个整数 q。那么存在α_i，……， $\alpha_{i+l} \in K$，它们不全为零，使得

$$\chi\left(\sum_{p=i}^{i+l} \alpha_p b_p\right) < q,$$

由条件 $D(\ell)$ 得出。这与 (2) 矛盾。

只需证明序列 (b_i) 至多包含 ℓm 个元素。我们将证明，每个剩余类 ($\bmod m$) 至多包含 ℓ 个元素。反设存在元素 $c_1, \ldots, c_{\ell+1}$，它们属于序列 (b_i)，且都满足 $\chi(c_i) \equiv \nu \pmod m$。令 $k = \max_{1 \le i \le l+1} (\chi(c_i))$，并定义 $\gamma_i = a^{k-\chi(c_i)}$ 。。则对所有 $i \in \{1, \ldots, \ell+1\}$，都有 $\chi(\gamma_i c_i) = k$，这意味着存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell+1} \in K$，使得

$$\chi\left(\sum_{p=1}^{\ell+1} \alpha_i(\gamma_i c_i)\right) < k.$$

但这再次与 (2) 矛盾。

□

我们还可以证明一个关于交换元素对的代数相关性的结果。

推论 *2.9.* 设 S K是带有伪次数函数 χ 的 K-代数。设$a \in N(S)$ 满足：对于某个 $\ell > 0$， $C_S(a)$ 满足条件 $D(\ell)$。设$b \in C_S(a) \cap N_l(S)$。那么存在一个非零多项式 $P(s,t) \in K[s,t]$，使得 $P(a,b) = 0$。（注意， $P(a,b)$ 是良定义的。）

证明。 由于 $b \in N_l(S)$，可知对每个正整数k， b^k 都有良好定义。由于 $C_S(a)$ 作为左 $K[a]$-模具有有限秩，元素 b， b^2，... 不可能全都在 $K[a]$ 上线性无关。因此存在 $f_1(x) \ldots, f_k(x) \in K[x]$，且不全为零，使得 $\sum_{i=0}^{k} f_i(a)b^i = 0$。于是，$P(s, t) = \sum_{i=0}^{k} f_i(s)t^i = 0$ 是一个具有所需性质的多项式。

□

当 $C_S(a)$满足条件 $D(1)$ 时，我们可以进一步说明一些情况。

定理 2.10。 设 K 为一个域，并设 S 是一个 K-代数。设 S 具有伪次数函数 χ。如果 $a \in N(S)$ 满足 $\chi(a) = m > 0$，且 $C_S(a)$满足条件 $D(1)$，那么 $C_S(a)$ 作为 $K[a]$-模具有有限基，其基数整除 m。

证明。 根据定理 2.8，显然存在 H 的一个子集以及元素 $(b_i)_{i \in H}$，使得 b_i 构成 $C_S(a)$的一组基。由定理 2.8 的证明同样显然可知，当 $i \neq j$时， $\chi(b_i) \neq \chi(b_j)$。不妨设对所有 $i \in H$，都有 $\chi(b_i) = i$。我们可以用一种自然的方式将 H 映射到 $\mathbb{Z}_m$ 中。记其像为 G。我们希望证明 G是一个子群，为此只需证明它对加法封闭。

假设 $g, h \in G$。存在 $i, j \in H$，满足 $i \equiv g$(模 m) 和 $j \equiv h$(模 m)。对于某个 $\{\sigma_k\}$，我们可以写成 $b_i b_j = \sum_{k \in H} \phi_k b_k$。因此

$$g + h \equiv i + j = \chi(b_i b_j) = \max(\chi(\phi_k) + \chi(b_k)) \equiv \chi(b_r) = r \pmod m$$

对于某个 $r \in H$。

由于 G 是 $\mathbb{Z}_m$ 的子群，显然 G 的基数（也就是 H 的基数）必定整除 m。

□

示例

我们先介绍本节将使用的一些记号。设 $\mathbb{O}$ 为八元数。令 $R = \mathbb{O}[y]$，设 σ 为 R 的一个 $\mathbb{R}$-代数自同态，满足 $s = \deg_y(\sigma(y)) > 1$；再设 δ 为一个 $\mathbb{R}$-线性映射，满足对所有 $r,\ s \in R$，都有 $\delta(rs) = \sigma(r)\delta(s) + \delta(r)s$。于是可以构造非结合 Ore 扩张 $S = R[x; \sigma,\ \delta]$。

引理 2.11. 如果 $a \in S$ 是一个具有实系数的正次数元素，那么 a 属于 $N(S)$。

证明。显然，$\mathbb{R} \subseteq N(S)$。由 [11, 命题 3.4] 可知$X \in N(S)$。因此 $a \in N(S)$，因为 $N(S)$ 是 S的一个子环。

□

定理 2.12. 如果 $a \in S$ 是一个具有实系数的正次数元素，那么 $C_S(a)$ 是一个有限秩自由 $\mathbb{R}[a]$-模。

证明。我们将应用定理 2.10。为此，我们需要一个伪次数函数。

关于 x，S 中元素的次数概念显然是良定义的。记元素 b的次数为 $\chi(b)$。容易看出，χ满足成为伪次数函数的所有要求。接下来证明 $C_S(a)$满足条件 $D(8)$。显然，对于所有非零的 $b \in C_S(a)$，$\chi(b) \geq 0$。

令 b 为 S 中与 a 交换的非零元素，使得 $\chi(b) = n$。假设 $\chi(a) = m$。通过比较 ab 和 ba 的最高阶系数，我们得到

$$a_m \sigma^m(b_n) = b_n \sigma^n(a_m), \tag{3}$$

其中 a_m 和 b_n 分别表示 a 和 b 的最高阶系数。（回想一下，它们是关于 y 的多项式。）比较等式 (3) 两边关于 y 的次数，我们得到

$$\deg_y(a_m) + s^m \deg_y(b_n) = \deg_y(b_n) + s^n \deg_y(a_m),$$

这唯一确定了 b_n 的次数。因此，(3) 的解属于 $\mathbb{O}[y]$ 的一个八维 $\mathbb{R}$ 子空间。由此可知，条件 $D(8)$ 得以满足。

现在，我们已经验证了应用定理 2.8 所需的所有假设。

□

引理 2.13。令 δ 为 $R = \mathbb{O}[y]$ 上的通常导数，并令 $T = R[x; \mathrm{id}\ \delta]$。若 a 是 T 中关于 x 次数为正次数且系数属于 $\mathbb{R}[y]$ 的元素，则 $a \in N(T)$。

证明。显然，$\mathbb{R} \subset N(T)$ 且 $x \in N(T)$，由 [11, 命题 3.4] 可得。若能证明 $y \in N(T)$，则可推出 $a \in N(T)$，因为 $N(T)$ 是一个环。计算中我们将使用以下事实：$y \in N(R)$，以及 $x \in N(T)$。

我们首先证明 $y \in N_l(T)$。只需证明，对于任意的 $b, c \in R$，$(y, bx^m, cx^n) = 0$。由于 $x^n \in N_r(T)$，容易看出 $(y, bx^m, cx^n) = (y, bx^m, c)x^n$，因此只需证明 $(y, bx^m, c) = 0$。但是

$$(y, bx^m, c) = (y, b, x^m c) = (y, b, \sum_{i=0}^{m} \delta^{m-i}(c)x^i) = \sum_{i=0}^{m} (y, b, \delta^{m-i}(c))x^i = 0.$$

现在我们证明 $y \in N_m(T)$。设 b, c 是 R 中任意的元素。只需证明 $(bx^m, y, cx^n) = 0$；如前所述，这意味着只需证明 $(bx^m, y, c) = 0$。

我们约定，当 n 为负时，$\delta^n = 0$。我们看到

$$(bx^m)(yc) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} b\delta^{m-i}(yc).$$

And

$$(bx^m y)c = \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} b\delta^{m-i}(y)x^i\right) c = (byx^m + mbx^{m-1})c =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (by)\delta^{m-i}(c)x^i\right) + m\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} b\delta^{m-1-i}(c)x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} b(y\delta^{m-i}(c) + (m-i)\delta^{m-1-i}(c))x^i.$$

由广义莱布尼茨法则可得 $(bx^m)(yc) = (bx^m y)c$。

还需证明 $y \in N_r(T)$；为此，只需证明对于任意 $b,\ c \in R$，$(bx^m,\ cx^n,\ y) = 0$。由于 $x^n \in N(T)$，可知 $(bx^m,\ cx^n,\ y) = (bx^m,\ c,\ x^n y)$。并且

$$(bx^m, c, x^n y) = (bx^m, c, yx^n) + (bx^m, c, nx^{n-1}) = (bx^m, c, y)x^n + (bx^m, c, n)x^{n-1}$$

由于 $(bx^m, c, n) = 0$，只需证明 $(bx^m, c, y) = 0$。但由于$x^m \in N(T)$，可得 $(bx^m, c, y) = (b, x^m c, y) = (b, \sum_{i=0}^{m} \delta^{m-i}(c)x^i, y)$。因此，我们可以进一步将问题归结为证明对于任意$b, d \in R$，$(b, dx^i, y) = 0$；又由于 $(b, dx^i, y) = (b, d, x^i y) = (b, d, y)x^i + (b, d, i)x^{i-1}$，这显然成立。

□

定理 2.14。令 δ 为 $R = \mathbb{O}[y]$上的通常导数，并设 $T = R[x; \mathrm{id}\ \delta]$。若 a 是 T 中的一个元素，相对于 x 具有正次数，且满足 $\mathbb{R}[y]$，则 $C_T(a)$ 是一个有限秩的自由 $\mathbb{R}[a]$-模。

证明。我们将应用定理 2.10，并将相对于 x 的次数作为伪次数函数。我们知道 $a \in N(T)$。

我们要证明 $C_T(a)$满足条件 $D(8)$。显然，$C_T(a)$不含任何非零的负次数元素。

设 b 是 T 中的一个非零元素，它与 a对易，且满足 $\chi(b) = n$。假设 $\chi(a) = m$。令 a_m 和 b_n 分别表示 a 和 b的最高阶系数（相对于x），a_{m-1} 和 b_{n-1} 的最高阶系数也类似定义。通过令 ab和 ba的次高阶系数相等，并利用 a 的系数属于 $Z(R)$这一事实，我们得到

$$ma_m\delta(b_n) = nb_n\delta(a_m). \tag{4}$$

现在令 $\deg_y(a_m) = \alpha$ 和 $\deg_y(b_m) = \beta$。设 a_m中的首项系数为 r，b_n 中的首项系数为 s。由 (4) 可得

$$mr\beta s = ns\alpha r \Leftrightarrow$$
$$m\beta sr = n\alpha sr \Leftrightarrow$$
$$m\beta = n\alpha$$

（由于 m、 n、 α、 β和 r都属于 $Z(\mathbb{O})$，因此很容易看出上述计算是合理的。）由于 $m \neq 0$ 方程 $m\beta = n\alpha$ 唯一确定了β，所以 (4) 的所有解都属于$\mathbb{O}[y]$的一个八维 $\mathbb{R}$-子空间，并且条件 $D(8)$ 得到满足。

□

参考文献

[1] S. A. Amitsur，《交换线性微分算子》，《太平洋数学杂志》8 (1958), 1–10。[2] V. V. Bavula，Weyl 代数的 Dixmier 问题 6（一般类型问题），《代数通讯》34 (2006), 第 4 期，1381–1406。[3] J.L. Burchnall 和 T.W. Chaundy，《交换常微分算子》，《伦敦数学会会刊》(3) 21 (1923), 420–440。[4] ，《交换常微分算子》，《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑：数学、物理与工程科学》118(780) (1928), 557–583。[5] ，《交换常微分算子》II：恒等式 $P^n = Q^m$，《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑：数学、物理与工程科学》134(824) (1931), 471–485。[6] R. C. Carlson 和 K. R. Goodearl，《常微分算子的交换子》，《微分方程杂志》35 (1980), 第 3 期，339–365。[7] K. R. Goodearl，《微分、伪微分及分数阶微分算子环中的中心化子》，《落基山数学杂志》13 (1983), 第 4 期，573–618。[8] L. Hellstr¨om 和 S. Silvestrov，《非交换环及带扭结交织的代数中的幂等遍历映射与元素的可交换性》，《代数杂志》314 (2007), 第 1 期，17–41。[9] I. M. Kriˇcever，《非线性方程理论中的代数几何方法》，《数学科学进展》32 (1977), 第 6 期 (198), 183–208, 287。[10] Volodymyr Mazorchuk，《关于 q-变形海森堡代数中的中心化子的注记》，《AMA 蒙彼利埃代数公告》(2001), 论文 2，6 页（电子版）。.[11] Oinert J. Nystedt, P. 和 J. Richter，《非结合 Ore 扩张》，《以色列数学杂志》224 (2018), 263–292。[12] J. Richter，《中心化子与伪次数函数》，《工程数学 II：网络、数据分类与优化的代数、随机与分析结构》，施普林格数学与统计学会议录，第 179 卷，施普林格，2016 年，第 65–73 页。[13] Xin Tang，《某些斜多项式环的极大交换子代数》，可访问 http://faculty.uncfsu.edu/xtang/maxsubalgebras.pdf，2005。