arXiv:2601.05802v1 [math.PR] 9 Jan 2026

加性布朗片的傅里叶限制

Jonathan M. Fraser 和 Ana E. de Orellana

Abstract. 傅里叶限制问题探讨的是，何时可以将函数的傅里叶变换限制到给定集合上。许多关键例子是光滑的余维 1 流形，不过人们对分形集的兴趣日益浓厚。本文提出一个自然的中间问题：考察 $\mathbb{R}^k$ 中加性布朗片的图像所生成的分形曲面。我们在这一方向上得到了首批非平凡估计，既给出使傅里叶变换在 $q \in [1,2]$ 的取值范围上属于 $L^q(\mathbb{R}^{k+1}) \to L^2(G(W))$ 有界的充分条件，也给出使其属于 $L^q(\mathbb{R}^{k+1}) \to L^p(G(W))$ 有界的必要条件。充分条件是通过傅里叶谱得到的；傅里叶谱是一族介于傅里叶维数与豪斯多夫维数之间的维数。本文的主要技术结果本身也颇具价值，它给出了加性布朗片图像上自然测度的傅里叶谱的精确公式，并将这一结果应用于傅里叶限制问题。对于所有 $k \geqslant 3$，我们的限制估计都强于由著名的 Stein–Tomas 限制定理得到的估计。我们通过两种不同的方式得到了必要条件：一种利用傅里叶谱，另一种利用恰当的 Knapp例子。

Mathematics Subject Classification: 主要分类：42B10, 60J65；次要分类：42B20, 28A75, 28A78, 28A80。*Key words and phrases*: 限制问题、傅里叶限制、傅里叶变换、傅里叶维数、傅里叶谱、布朗运动、随机过程、加性布朗片。

Contents

1. 引言 2
1.1. 傅里叶限制与分形曲面 2
1.2. 布朗曲面的维数理论与 Stein–Tomas 4
1.3. 傅里叶谱与改进的限制估计 5
2. 主要结果 6
3. 定理 2.1 的证明 9
3.1. 傅里叶变换的分解与几乎处处衰减估计 9
3.2. 下界证明 11
3.3. 上界证明 13
4. 一个 Knapp例子 15
4.1. 定理 2.6 的证明 15
参考文献 16

JMF 获 EPSRC开放奖学金 (EP/Z533440/1) 和 Leverhulme Trust 研究项目资助 (RPG-2023-281) 的资助。AEdO 获圣安德鲁斯大学资助。

1. 引言

1.1. **傅里叶限制与分形曲面。** 傅里叶限制问题探讨何时可以将函数的傅里叶变换限制在一个零测集上。该问题的一些具体情形已成为调和分析领域中最著名且历史最悠久的问题之一，其研究可追溯至 Stein 的工作（参见 [Ste70、 Tom75]），并与几何测度论和偏微分方程有着深刻联系。一些最重要的例子包括球面、圆锥面和抛物面等光滑余维1流形。尽管傅里叶限制通常是在光滑流形的背景下讨论的，但针对集合具有分形维数的情形，也已有大量研究。在分形背景下，这一问题最早于 [Moc00],中得到研究，并在随后几年持续发展 [Mit02、 BS11、 Che14]。本文的主要目标之一，是推动对一类自然的（拓扑）余维 1 流形上的限制问题的研究；这类流形并不光滑，而是表现为布朗运动的图像，或更一般地说，布朗片的图像。布朗运动或布朗片的图像可视为分形曲面的典型例子。从某种意义上说，这些例子介于分形与光滑两种情形之间，展现出许多有趣的几何与分析特征，因此是研究傅里叶限制及相关的傅里叶谱导出问题的良好对象。事实上，这类图像目前在傅里叶维数研究中备受关注，参见 [FS18、LL25+、 LT25+]。

现在我们将更详细地介绍傅里叶限制问题和（加法）布朗片。给定一个支撑在 $\mathbb{R}^d$ 中某个勒贝格零测集上的有限博雷尔测度 μ，傅里叶限制问题要问的是，对于哪些 $q' \in [1,2)$，$p' \in [1,\infty]$ 傅里叶变换是 $L^{q'}(\mathbb{R}^d) \to L^{p'}(\mu)$ 有界的。也就是说，限制估计

$$\|\widehat{f}\,\|_{L^{p'}(\mu)} \lesssim \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} \tag{1.1}$$

对所有 $f \in L^{q'}(\mathbb{R}^d)$ 都成立。根据 L^p 对偶性，这等价于问傅里叶延拓估计

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^{q}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^{p}(\mu)} \tag{1.2}$$

对所有 $f \in L^p(\mu)$ 都成立。这里我们使用记号 $A \lesssim B$ 表示存在一个一致常数 c，使得 $A \leqslant cB$。我们还记 $A \approx B$，如果 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$；并用 p' 和 q' 表示 p 的 H¨older 共轭，$q \in [1,\infty]$，其定义为 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$。

如上所述，这个问题的若干具体情形已成为该领域的核心问题。例如，对于球面和抛物面，猜想当1.1时，(

$$\frac{d-1}{p'} \geqslant \frac{d+1}{q} \quad \text{and} \quad q > \frac{2d}{d-1}. \tag{1.3}$$

傅里叶限制猜想是调和分析中许多深刻问题的核心，并且其部分动机来自它在偏微分方程中的应用。例如，抛物面 $f\sigma_{\mathbb{P}}$ 上的延拓算子$\widehat{\ }$是自由薛定谔方程的解，该方程描述了量子力学中自由粒子的波函数如何演化¨

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\pi i\,\Delta u(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}; \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \tag{1.4}$$

$\widehat{\ }$这里 $\sigma_{\mathbb{P}}$ 是抛物面上的曲面测度，且 $f = g$。如果抛物面满足傅里叶延拓估计(1.2)，且对于某个$\widehat{g} \in L^p(\sigma_{\mathbb{P}}$，$p \in [1,\infty]$则 $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$，其中p，$q \in [1,\infty]$ 满足(1.3)。

布朗运动是最重要、研究最广泛且理解最透彻的随机过程之一。它定义为唯一的（随机）映射 $W\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，具有独立增量，

它几乎必然连续，并满足 $W(0) = 0$ 几乎必然成立，且对于 t， $s \in \mathbb{R} t > s$， $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$。自 Levy 的研究以来，人们一直在研究它的分形性质 [Lev53] 和 Taylor [Tay53], ，而它的傅里叶分析性质至少自 Kahane 的研究以来便受到关注[Kah66a、Kah66b]。

可以将布朗运动推广为映射 $W: [0,1]^k \to \mathbb{R}^l$，这通常被称为布朗片或（$k$, l）-布朗片。本文聚焦于 $l = 1$的情形，并采用一种更简单的（k, 1）-布朗片版本，称为加性布朗片。这一简化使过程更易于研究，同时仍与标准的（k, 1）-布朗片相似（关于加性过程的更详细讨论见 [KY02] ）。我们将（k, 1）-加性布朗片 定义为满足以下条件的映射 $W: [0,1]^k \to \mathbb{R}$ 对于 $t \in [0,1]^k$， $t = (t_1, \ldots\ldots, t_k)$ ，

$$W(t) = \sum_{i=1}^{k} W^i(t_i),$$

其中 $W^i: [0,1] \to \mathbb{R}$ 是相互独立的单参数布朗运动。该过程通常被视为非加性情形的良好替代模型，并且在可加情形中成立的许多性质也可以证明在非加性情形中成立。

我们的研究对象是 (k,1)-可加布朗片的图像，其定义如下：

$$G(W) = \{(t, W(t)) : t \in [0,1]^k\},$$

我们将 $G(W)$ 称为加性布朗曲面 （非加性情形下则简称布朗曲面 ）。加性布朗曲面是一个位于 $\mathbb{R}^{k+1}$ 中、拓扑余维为 1 的单连通流形。它带有一种自然的“曲面测度”，即将 $[0,1]^k$ 上的勒贝格测度提升到图像上。也就是说，对于博雷尔 $E \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ，我们在加性布朗片上定义曲面测度 μ 如下：

$$\mu(E) = \mathcal{L}^k\{t \in [0,1]^k : (t, W(t)) \in E\},$$

其中 $\mathcal{L}^k$ 是 k 维勒贝格测度。现在我们的主要问题是： g.

问题 1.1。 对于哪些 p， q 延拓估计 (1.2) 对于布朗片上的曲面测度几乎必然成立？

本文对回答这一问题取得了部分进展。我们还可以考虑以下几个不太精确的问题。

问题 1.2。 对于哪些 p， q 延拓估计 （1.2） 几乎必然成立，其中测度由重要的随机过程生成、且支撑在分形流形上，例如（非加性的） （k, l）-布朗片、类似的分数布朗片、莱维过程、高斯自由场等？

尽管这些问题本身都很有意义，但进一步研究它们与（随机）偏微分方程的联系或许也很有趣。仿照薛定谔方程（1.4）的相同步骤，我们可以定义随机算子 T ，使其成为符号为$\widehat{\ \ }$ $W(\xi)$的傅里叶乘子。也就是说， T是满足以下条件的算子： $Tu(\xi, t) = W(\xi)\widehat{u}(\xi, t)$，或者 $Tu(x, t) = \widehat{(W * u)(x, t)}$ （其中 $*$是关于 x 变量的卷积算子）。那么， $u(x, t) = f\mu(x, t)$就是下列方程的解

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\pi i\, Tu(x,t), & (x,t) \in [0,1]^k \times \mathbb{R}; \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1]^k, \end{cases} \tag{1.5}$$

$\widehat{\ }$关于 $f = g$ 以及 μ 加性布朗曲面上的曲面测度。我们在下文定理2.4 中得到的傅里叶限制估计表明，只要 $\widehat{f} \in L^2(\mu)$，几乎必然有

(1.5)的解为 $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$，对任意 $q > 4$，若 $k = 1$；若 $q > \frac{8k+2}{3k}$，则 $k \geqslant 2$。若这些方程存在有用的物理解释，或与文献中已有的偏微分方程存在联系，将会很有意思，但本文不作探讨。

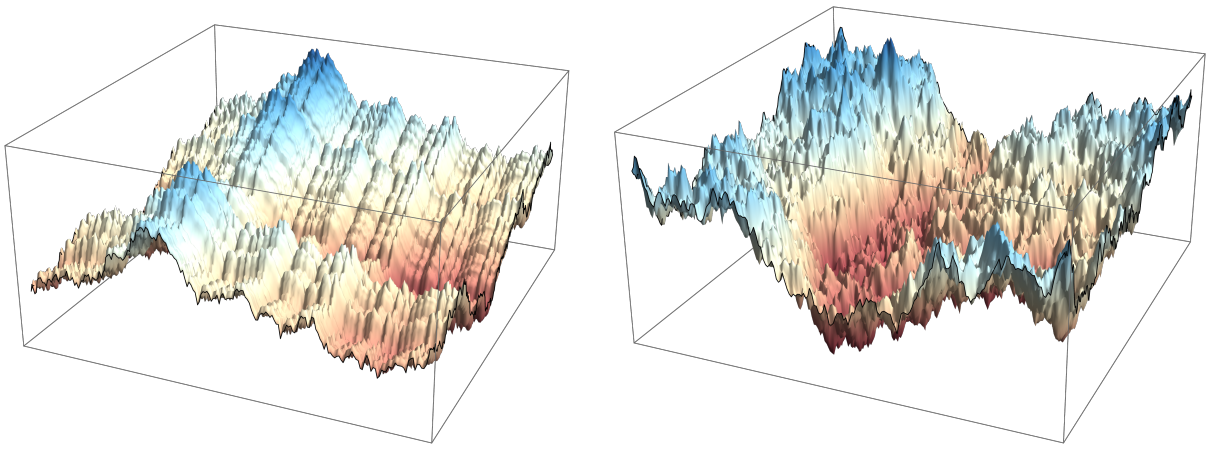

FIGURE 1. 布朗曲面的两种实现 $k = 2$。左：可加情形。右：非可加情形。

1.2. **布朗曲面与 Stein–Tomas 的维数理论**。 标准布朗运动图像的维数理论最早由 [Tay53], 研究，证明了 $\dim_{\mathrm{H}} G(W) = \frac{3}{2}$ 几乎必然成立。该结果由 [Yod75] 推广到（非可加）布朗片，证明 $\dim_{\mathrm{H}} G(W) = k + 1/2$，且该公式在可加情形下同样成立。 [FOS14、FS18]证明，标准布朗运动图像的傅里叶维数等于 1。此处提到的维数结果在以曲面测度取代图像时同样成立，也就是说，曲面的维数可由曲面测度 体现。我们将在下文证明，当 $k = 2$ 时，加性布朗曲面的傅里叶维数也具有这一性质；但对于 $k \geqslant 3$，则不应期待这一性质成立。事实上，人们或许会猜想曲面的傅里叶维数为 k，但我们证明，对于所有 $k \geqslant 2$，曲面测度的傅里叶维数均为 2。

这些布朗图和曲面之所以成为傅里叶限制理论中有趣的例子，其中一个原因是它们是非 Salem 集（它们具有不同的 Hausdorff 维数和傅里叶维数）。这或许令人意外，因为 Kahane [Kah85]证明了许多其他随机定义的集合都是 Salem 集，其中包括布朗像集。事实上，人们通常预期随机测度会表现出傅里叶衰减。这种行为的一个经典例子可以在随机 Cantor 测度的构造中看到 [SS17，SS18]。

Stein–Tomas 定理给出了使延拓估计（1.2）在以下情形成立的充分条件 $p = 2$ 这些条件取决于测度的傅里叶维数和 Frostman 维数 μ。该定理表明，估计

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mu)} \tag{1.6}$$

对所有 $f \in L^2(\mu)$ 均成立，只要 $q > 2 + 4\frac{d - \dim_{\mathrm{Fr}} \mu}{\dim_{\mathrm{F}} \mu}$，其中 $\dim_{\mathrm{F}} \mu$ 是傅里叶维数（见第 1.3节），而 $\dim_{\mathrm{Fr}} \mu$ 是 Frostman 维数

$$\dim_{\mathrm{Fr}} \mu = \sup\{\alpha \in [0, d] : \mu\big(B(x, r)\big) \lesssim r^{\alpha},\ x \in \mathbb{R}^d,\ r > 0\}.$$

因此，鉴于标准布朗运动图像上的曲面测度的傅里叶维数为 1、Frostman 维数为 3/2，我们已经可以得到一些信息。我们得到，估计 (1.6) 对所有 $f \in L^2(\mu)$ 均成立，只要 $q > 4$。

1.3. **傅里叶谱与改进的限制估计**。 傅里叶衰减与豪斯多夫维数的势论方法之间的联系催生了傅里叶谱，其最初定义见 [Fra24]。傅里叶谱是一族维数，对于集合而言，它在傅里叶维数与豪斯多夫维数之间连续插值；对于测度而言，则在傅里叶维数与索博列夫维数之间连续插值。现在我们回顾关键定义，更多背景请参阅 [Fra24、Mat15]。首先回顾博雷尔测度 μ 的傅里叶维数定义如下：

$$\dim_{\mathrm{F}} \mu = \sup\left\{s > 0 : \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^2 |\xi|^s < \infty\right\}$$

其中 $\widehat{\mu}$ 表示 μ的傅里叶变换。特别地，傅里叶维数刻画了傅里叶变换的一致衰减。博雷尔集 X 的傅里叶维数定义为

$$\dim_{\mathrm{F}} X = \sup\left\{s \in [0,d] : \exists \mu \text{ on } X : \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^2 |\xi|^s < \infty\right\}.$$

μ 的索博列夫维数定义为

$$\dim_{\mathrm{S}} \mu = \sup\left\{s > 0 : \int_{\mathbb{R}^d} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^2 |\xi|^{s-d}\, d\xi < \infty\right\}.$$

也就是说，索博列夫维数刻画了平均傅里叶衰减。 X的豪斯多夫维数也可以用平均傅里叶衰减表示如下。事实上，

$$\dim_{\mathrm{H}} X = \sup\left\{s \in [0,d] : \exists \mu \text{ on } X : \int_{\mathbb{R}^d} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^2 |\xi|^{s-d}\, d\xi < \infty\right\}.$$

容易看出，$\dim_{\mathrm{F}} X \leqslant \dim_{\mathrm{H}} X$，且 $\dim_{\mathrm{F}} \mu \leqslant \dim_{\mathrm{S}} \mu$。傅里叶谱是一族维数，它在这些彼此孤立的维数概念之间连续插值。定义 $\theta \in (0,1]$ 的 $(s,\ \theta)$-能量为

$$\mathcal{J}_{s,\theta}(\mu) = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^{\frac{2}{\theta}} |\xi|^{\frac{s}{\theta}-d}\, d\xi\right)^{\theta},$$

且当 $\theta = 0$ as

$$\mathcal{J}_{s,0}(\mu) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^2 |\xi|^s.$$

则 μ 在 $\theta \in [0,1]$ 处的傅里叶谱为

$$\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mu = \sup\{s > 0 : \mathcal{J}_{s,\theta}(\mu) < \infty\},$$

且 X 在 $\theta \in [0,1]$ 处的傅里叶谱为

$$\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} X = \sup\{s \in [0,d] : \exists \mu \text{ on } X : \mathcal{J}_{s,\theta}(\mu) < \infty\}.$$

傅里叶谱满足 $\dim_{\mathrm{F}} X = \dim_{\mathrm{F}}^{0} X \leqslant \dim_{\mathrm{F}}^{\theta} X \leqslant \dim_{\mathrm{F}}^{1} X = \dim_{\mathrm{H}} X$，并且在 $\theta \in [0,1]$ 上非递减且连续。对于测度，傅里叶谱是凹函数，在 $(0,1]$ 上连续，并满足 $\dim_{\mathrm{F}} \mu = \dim_{\mathrm{F}}^{0} \mu \leqslant \dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mu \leqslant \dim_{\mathrm{F}}^{1} \mu = \dim_{\mathrm{S}} \mu$。此外，对于紧支撑测度，它在闭区间 $[0,1]$ 上连续。

尽管傅里叶谱问世不久，但它已在分形几何和调和分析中得到多种应用；例如， [Fra24] 将其应用于距离集问题， [FdO24+] 将其应用于正交投影的例外集估计，而 [LL25+、LT25+] 则利用它求得了分数布朗运动图像的傅里叶维数。对我们尤其重要的是它在傅里叶限制问题中的应用，正如 [CFdO24b+]所证明的那样。在那里，我们利用傅里叶谱所包含的额外信息，相较于单独考察傅里叶维数和索博列夫维数，强化了 Stein–Tomas 定理

。这个推广的 Stein–Tomas 型定理指出，对于所有1.6，只要 $f \in L^2(\mu)$，就有式（

$$q > 2 + 2\frac{(d - \dim_{\mathrm{Fr}} \mu)(2-\theta)}{\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mu - \theta \dim_{\mathrm{Fr}} \mu}$$

对于任意 $\theta \in [0,1]$ 使得 $\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mu > d\theta$。这一结果在 $\theta = 0$ 处恢复了 Stein–Tomas 结果，但通过对允许的 θ 进行优化，通常可以得到更强的估计。有鉴于此，本文的策略是推导出加性布朗曲面上曲面测度的傅里叶谱的精确几乎处处公式（见定理 2.1），然后利用这一信息推导出非平凡的傅里叶限制估计（见定理2.4）。我们还考察傅里叶限制的必要条件。首先，我们直接从傅里叶谱得到这些条件（见推论 2.5）；其次，通过构造一个 Knapp 例子（见定理2.7和定理 2.6），该方法也适用于非加性布朗曲面和分数布朗曲面。值得注意的是，这两种方法得到的充分条件相同。

2. Main Results

我们的第一个主要结果给出了加性布朗曲面上曲面测度的傅里叶谱的一个精确的几乎必然公式。$\theta = 0$ 情形给出了傅里叶维数，而这一结果对于 $k \geqslant 2$是新的。对于 $k = 1$，该结论已在 [FS18] 中证明。

定理 2.1。令 μ为加性布朗曲面上的曲面测度。那么，几乎必然地，对所有 $\theta \in [0,1]$,

$$\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mu = \min\left\{k + \tfrac{\theta}{2}, 2 + k\theta\right\}.$$

特别地，当 $k > 2$时，在 $\theta = \frac{k-2}{k-1/2}$处会出现相变；而对于 $k = 1$，2 它是仿射的。

我们将在第 2.1 节3证明定理。前一个定理给出了布朗曲面本身的傅里叶谱的一个下界；该下界在 $\theta = 1$ 处是尖锐的，并且在 $\theta = 0$ 对于$k = 1$时是尖锐的，2. 对于 $k \geqslant 3$，下界并不尖锐，所能给出的只有一般性的上界

$$\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} G(W) \leqslant \min\{k + (k+1)\theta, k + 1/2\}$$

这可由结合 [FOS14]的主要结果（其高维版本） $[0,1]^k$ 可知，任意位于 k 之上的图像的傅里叶维数至多为 [（见10]，定理 6）。此外，还利用了 $\dim_{\mathrm{H}} G(W) = k + 1/2$这一事实，以及[给出的傅里叶谱的一般上界+]。要得到尖锐结果，需要考虑另一种测度，最有可能是将施瓦茨密度提升到图像上。我们在以下推论中记录 $\theta = 0$ 和 $k = 2$ 的情形，因为它本身或许也值得关注。

推论 2.2。当 $k = 2$ 时，加性布朗曲面 $G(W)$ 的傅里叶维数为 维数$_{\mathrm{F}} G(W) = 2$。

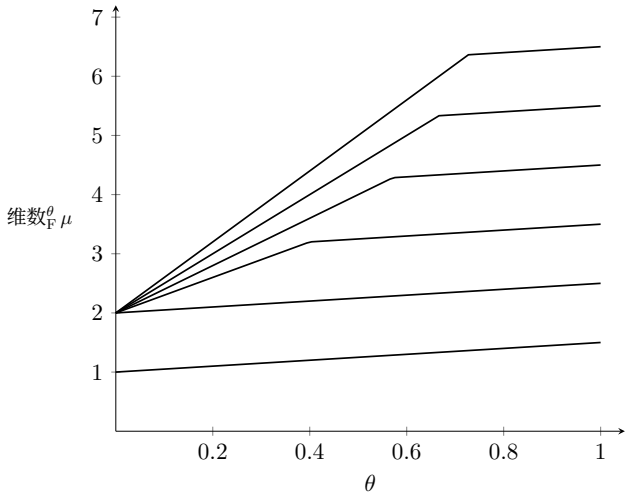

FIGURE 2. 曲面测度的傅里叶谱图 μ 在加性布朗曲面上 $G(W)$ 对于 $k = 1, \ldots, 6$; 参见定理2.1。

我们还指出以下关于加性布朗曲面上曲面测度的 Frostman 维数的结果。要结合 Stein–Tomas 定理及其在 [CFdO24b+]中的推广，得到加性布朗曲面测度的傅里叶限制估计（2.1）。

命题 2.3 (Xiao)。设 μ 为加性布朗曲面上的曲面测度。那么，几乎必然

$$\dim_{\mathrm{Fr}} \mu = k + \frac{1}{2}.$$

证明。首先注意到 [Xia97，命题 32]对加性布朗曲面仍然成立。因此，由 [Xia97，(3.11)] 其中 $\alpha = 1/2$，存在 $C > 0$ 使得对任意 $t \in [0,1]^k$，几乎必然

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mu\big(B((t,W(t)),r)\big)}{r^{k+\frac{1}{2}}(\log\log 1/r)^{\frac{1}{2k}}} \leqslant C,$$

这给出维数$_{\mathrm{Fr}}\,\mu \geqslant k + \frac{1}{2}$。结合维数$_{\mathrm{Fr}}\,\mu \leqslant$ 维数$_{\mathrm{S}}\,\mu$ 以及定理 2.1即可证明该结果。 □

接下来，我们将定理 2.1 与 [CFdO24b+定理 3.1] 结合起来，从而得到关于加性布朗曲面上曲面测度的如下傅里叶限制估计。

定理 2.4。 设 μ 为加性布朗曲面上的曲面测度。若 $q > 4$ 对于$k = 1$，或

$$q > \frac{8k+2}{3k}$$

对于 $k \geqslant 2$，则几乎必然地，对所有 $f \in L^2(\mu)$，

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mu)}. \tag{2.1}$$

等价地，如果 $1 < q < 4/3$ 对于 $k = 1$，或者

$$1 \leqslant q' < \frac{8k+2}{5k+2},$$

对于 $k \geqslant 2$，那么，几乎必然，对所有 $f \in L^{q'}(\mathbb{R}^d)$，

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mu)} \lesssim \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.2}$$

证明。 根据 [CFdO24b+，定理 3。1] 和命题 2.3 可得，对所有 $f \in L^2(\mu)$，只要满足以下条件，该结论 (2.1)
便成立

$$q > 2 + \frac{2-\theta}{\dim_{\mathrm{F}}^{\theta}\mu - (k+1/2)\theta}$$

对所有 $\theta \in [0,1]$ 均成立。现在，我们通过改变 θ 来优化这一估计，并发现最优估计唯一地在 $k > 2$ 时的相变 $\theta = \frac{k-2}{k-1/2}$ 处取得，而在 $k = 1$ 时则唯一地于 $\theta = 0$ 处取得，2。 □

注意，当 $k = 1$ 为 2 时，我们得到的傅里叶延拓估计与 Stein–Tomas 定理给出的估计相同，即 $q > 4$ 为 3 时亦然。不过，对于所有 $k \geqslant 3$，我们得到的估计都优于 Stein–Tomas 定理。

接下来，我们考虑反向问题，即寻找傅里叶限制的必要条件。首先，结合定理 2.1 和 [CFdO24b+，定理 3。6]，可得以下结果。

推论 2.5。 设 μ 为加性布朗曲面上的曲面测度。那么，几乎必然地，（1.2）无法成立，只要

$$q < 2 + \frac{1}{k}.$$

等价地，（2.2）无法成立，只要

$$q' > \frac{2k+1}{k+1}.$$

P上界。 由 [CFdO24b+，定理 3。6], 我们得到（1.2）无法成立，只要

$$q < \sup\{2/\theta : \dim_{\mathrm{F}}^{\theta}\mu < (k+1)\theta\},$$

将其与定理 2.1结合即可得到所需的估计。 □

接下来，我们通过构造一个 Knapp例子来推导（1.2）成立所需的一般必要条件。事实上，我们所用的仅仅是：加性布朗片几乎必然局部 α-H¨older，对于任意 $\alpha < 1/2$。这很容易由 $k = 1$情形下的众所周知结果推出。因此，更一般地，我们有以下结果；该结果也适用于非加性布朗片（其中$\alpha < 1/2$）以及具有 $\alpha < H$ 的相应分数布朗曲面，其中 $H \in$ （0，1）为赫斯特参数；此外，它还适用于许多其他随机定义的曲面。

定理 2.6。 设 f： $[0,1]^k \to \mathbb{R}$ 满足：对于某个 $x \in [0,1]^k$， f 在局部上是 α-*H¨older* 连续的，其中 $\alpha > 0$ 在 x处。设 μ 是勒贝格测度在 f的图像上的提升测度。那么 (1.2) 不可能成立，只要

$$p < \frac{kq}{k(q-1)-\alpha}.$$

我们将在第 2.6节证明定理 4。将其应用于加性布朗曲面的曲面测度，我们得到以下结果。

推论 2.7。 设 μ 是加性布朗曲面上的曲面测度。那么，几乎必然，（1.2）在以下情形下不成立

$$p < \frac{2kq}{2k(q-1)-1}. \tag{2.3}$$

等价地，（1.1）在以下情形下不成立

$$p' > \frac{2kq}{2k+1}.$$

设定 $p = 2$在前一个定理中（如 Stein–Tomas 估计）给出的估计与推论2.5中的估计相同。由 [CFdO24b+定理 3 得出的指数6] 是许多流形上猜想的尖锐傅里叶限制端点，这或许暗示这里的正确阈值也是如此。

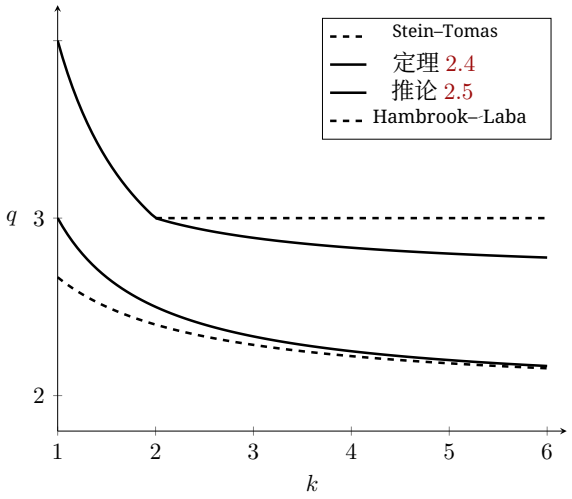

FIGURE 3. 布朗片的傅里叶延拓估计成立与不成立时 q 的取值范围；见定理 2.4 和推论 2.5。所谓“Hambrook–Laba”，指的是 [H-L13] 中指出的这一点：对于 $2 \leqslant q < \frac{2d}{(k+1)\dim_S \mu + k+1/2} = \frac{2}{k+1}$，延拓估计不会成立。这些图应仅适用于定义域中的整数点，但出于美观考虑，我们画出了完整曲线。特别地，利用傅里叶谱界可得实线之间的尖锐阈值，而借助先前的估计可得虚线之间的尖锐阈值。

3. PROOF OF THEOREM 2.1

3.1. **傅里叶变换的分解与几乎处处衰减估计**。设$W\colon\ [0,1]^k \to \mathbb{R}$ 为加性布朗片，

$$W(t) = \sum_{i=1}^{k} W^i(t_i),$$

其中 $W^i\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$ 是相互独立的一参数布朗运动。令 μ 为相应的曲面测度，即将 $[0,1]^k$ 上的勒贝格测度推前至 W 所得的测度，对$E \subset \mathbb{R}^{k+1}$ 定义如下：

$$\mu(E) = \mathcal{L}\{t \in [0,1]^k : (t, W(t)) \in E\}.$$

给定 $\xi \in \mathbb{R}^{k+1}$，其中 $\xi = (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_k, y)$，傅里叶变换可分解为

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(\xi) &= \int_{[0,1]^k} e^{-2\pi i(\xi_1 t_1 + \cdots + \xi_k t_k + yW(t))}\, dt \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi i(\xi_1 t_1 + yW^1(t_1))}\, dt_1 \cdots \int_0^1 e^{-2\pi i(\xi_k t_k + yW^k(t_k))}\, dt_k \\ &= \widehat{\mu_1}(\xi_1, y) \cdots \widehat{\mu_k}(\xi_k, y),\end{aligned}$$

其中对每个 $j = 1, \ldots, k$, μ_j 是 **(1, 1)**-布朗运动图像上的曲面测度。也就是说，每个 μ_j 都是勒贝格测度在 $[0, 1]$ 上的推前，推至布朗运动 W^i的图像上。幸运的是，我们已经有了这些测度的傅里叶变换几乎处处成立的良好估计，见 [FS18]，下面回顾这些估计。

在 [FS18] 中，作者通过将频率空间划分为若干区域来估计 $\widehat{\mu_j}(\xi_j, y)$，划分依据是 (ξ_j, y) 与原点所成的角度。现在我们将以稍微更明确的形式使用这些估计。对于“水平角”（即 $|\xi_j| \geqslant |y|^2$ 的情形），[FS18，引理 3 的证明。4], 以及某个随机的 $T > 0$,

$$\left|\widehat{\mu_j}(\xi_j, y)\right| \leqslant \left| \int_T^1 e^{-2\pi i(\xi_j t_j + yW(t_j))}\, dt_j \right| \lesssim |\xi_j|^{-1},$$

几乎必 然。此外，[FS18，引理 3.6 和引理 3.5]对同一个 $T >$ 0,

$$\left|\widehat{\mu_j}(\xi_j, y)\right| \leqslant \left| \int_0^T e^{-2\pi i(\xi_j t_j + yW(t_j))}\, dt_j \right| \lesssim |y||\xi_j|^{-1},$$

几乎必然。这个估计来自 Itˆo 微积分。最后，第三个估计来自“垂直角”（也就是说，$|\xi_j| \leqslant |y|^2$）的情形。在这种情况下，[FS18，引理 3.10 和引理 3.7] 给出几乎必然

$$\left|\widehat{\mu_j}(\xi_j, y)\right| \lesssim |y|^{-1}\sqrt{\log|y|}.$$

这个估计借鉴了 Kahane 关于布朗像集的工作。因此，将这些估计结合起来，我们得到几乎必然

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\mu_j}(\xi_j, y)\right| &\lesssim \min\left\{ \max\left\{|y||\xi_j|^{-1}, |\xi_j|^{-1}\right\}, |y|^{-1}\sqrt{\log|y|}, 1\right\} \\ &= \begin{cases} |y||\xi_j|^{-1}, & \text{if } 1 \leqslant |y| \leqslant |y|^2 \leqslant |\xi_j|; \\ |\xi_j|^{-1}, & \text{if } |y| \leqslant 1 \leqslant |\xi_j|; \\ |y|^{-1}\sqrt{\log|y|}, & \text{if } \max\{|\xi_j|, 1\} \leqslant |y|^2; \\ 1, & \text{if } \max\{|\xi_j|, |y|\} \leqslant 1. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.1}$$

上述隐含常数是随机的，但这对后续论证已经足够。(3.1) 中的几乎必然界足以证明几乎必然的一致界

$$\left|\widehat{\mu_j}(\xi)\right| \lesssim |\xi|^{-1/2}\sqrt{\log|\xi|} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^2)$$

这给出了 [FS18] 的主要结果：布朗运动图像的傅里叶维数以及该图像上曲面测度的傅里叶维数均为 1。然而，从(3.1)可以看出，这种“最差情形”的衰减率相对少见，而且更好的衰减

$$\left|\widehat{\mu_j}(\xi)\right| \lesssim |\xi|^{-1} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^2)$$

这种情况大多数时候都会发生。傅里叶谱利用了这一点，并量化了平均傅里叶衰减的良好程度。

3.2. 下界证明。固定 $\theta \in (0,1]$。不妨设 $k \geqslant 2$，因为 $k=1$ 的情形可由 [FS18] 的结果以及测度的傅里叶谱具有凹性这一事实处理（因此仿射下界可直接得到）。我们需要证明，对于适当的 s，能量 $\mathcal{J}_{s,\theta}(\mu)$ 是有限的。为此，我们将能量积分划分为下文定义的 6 个区域。由对称性，不妨限于 ξ 的所有坐标均为正的情形，并假设 $0 < \xi_k < \xi_{k-1} < \cdots < \xi_2 < \xi_1$。此外，为方便起见，不失一般性地假设 y 和 y^2 均不同于所有的 ξ_j 以及 1。另一种情形发生在一个零测集上，因此可以从积分中省略。进一步地，我们假设 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k, y)$ 的至少一个坐标严格大于 1；这是可以做到的，因为将积分限制在原点的某个邻域内时，积分总是有限的。这意味着我们假设 $\max\{\xi_1, y\} > 1$。因此，在 (3.1) 的第三种情形中（即当 $\max\{|\xi_j|, 1\} < y^2$ 时），可能有 $1 < y < \xi_j < y^2$、$1 < \xi_j < y < y^2$ 或 $\xi_j < 1 < y < y^2$。

由此，我们只需针对 1、y 和 y^2 相对于列表 ξ_j 的每种可能位置，分别处理不同情形。也就是说，对于 $j_1, j_2, j_3 \in \{0, \ldots, k+1\}$，我们考虑由以下条件给出的区域：

$$0 < \xi_k < \cdots < \xi_{j_3} < 1 < \xi_{j_3-1} < \cdots < \xi_{j_2} < y < \xi_{j_2-1} < \cdots < \xi_{j_1} < y^2 < \xi_{j_1-1} < \cdots < \xi_1,$$

and

$$0 < \xi_k < \cdots < \xi_{j_3} < y^2 < \xi_{j_3-1} < \cdots < \xi_{j_2} < y < \xi_{j_2-1} < \cdots < \xi_{j_1} < 1 < \xi_{j_1-1} < \cdots < \xi_1.$$

这里需要考虑两种情形，以涵盖 $1 < y < y^2$ 和 $y^2 < y < 1$ 的两种可能排列。接下来还有许多情形需要考察，每种情形都对应于限制在某个特定区域上的能量积分。对于每个积分，我们都需要确定使其有限的 s 条件。随后，傅里叶谱的下界将是所有这些下界中的最小值；也就是说，我们要求所有积分同时有限。幸运的是，通过线性论证，我们可以大幅减少需要考虑的情形数。事实上，很容易看出（这一点在下文中会显而易见），每种情形下得到的傅里叶谱下界关于变量 j_1，j_2 和 j_3 都是线性的。因此，由于区间上的线性函数在边界处取得极值，起主导作用的下界将由以下边界情形给出：

对于 $y > 1$:

情形 1. $j_1 = 0,\ j_2 = 0,\ j_3 = 1$:

$$0 < \xi_k < \cdots < \xi_1 < 1 < y < y^2.$$

情形 2. $j_1 = 0,\ j_2 = 1,\ j_3 = k+1$:

$$1 < \xi_k < \cdots < \xi_1 < y < y^2.$$

情形 3. $j_1 = 1,\ j_2 = k+1,\ j_3 = k+1$:

$$1 < y < \xi_k < \cdots < \xi_1 < y^2.$$

情形 4. $j_1 = k+1,\ j_2 = k+1,\ j_3 = k+1$:

$$1 < y < y^2 < \xi_k < \cdots < \xi_1.$$

对于满足 $y < 1$ 的情形，回想一下我们假设 $\xi_1 > 1$。因此，我们只考虑：**情形 5.** $j_1 = 2,\ j_2 = 2,\ j_3 = 2$:

$$0 < \xi_k < \cdots < \xi_2 < y^2 < y < 1 < \xi_1.$$

情形 6. $j_1 = k+1,\ j_2 = k+1,\ j_3 = k+1$:

$$y^2 < y < 1 < \xi_k < \cdots < \xi_1.$$

我们先证明下界。我们将如下拆分 $(s,\ \theta)$-能量

$$\mathcal{J}_{s,\theta}(\mu)^{\frac{1}{\theta}} \approx \int_{|\xi|>1} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^{\frac{2}{\theta}} |\xi|^{\frac{s}{\theta}-k-1}\, d\xi \approx \sum_{\ell=1}^{6} \int_{\xi \text{ in Case } \ell} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^{2} |\xi|^{\frac{s}{\theta}-k-1}\, d\xi =: \sum_{\ell=1}^{6} J_{s,\theta}^{\ell}(\mu),$$

并证明对于 $s < \min\left\{k+\frac{\theta}{2}, 2+k\theta\right\}$，所有积分 $J_{s,\theta}^{1}(\mu) \cdots J_{s,\theta}^{6}(\mu)$ 均有限，其中 $J_{s,\theta}^{\ell}(\mu)$ 表示限制在上述情形 ℓ 所定义区域上的能量积分。

情形 *1*：$0 < \xi_k < \cdots < \xi_1 < 1 < y < y^2$. 我们将利用以下事实：对于 $j = 1, \ldots, k$, $\left|\widehat{\mu_j}(\xi_j, y)\right| \lesssim y^{-1}\sqrt{}$ 几乎必然为 $\log\ y$，且 $|\xi| \approx y$。于是，几乎必然，

$$\begin{aligned} J_{s,\theta}^{1}(\mu) &\lesssim \int_{y=1}^{\infty} y^{\frac{s}{\theta}-k-1} \int_{\xi_1=0}^{1} y^{-\frac{2}{\theta}} (\log y)^{\frac{1}{\theta}} \int_{\xi_2=0}^{\xi_1} y^{-\frac{2}{\theta}} (\log y)^{\frac{1}{\theta}} \cdots \int_{\xi_k=0}^{\xi_{k-1}} y^{-\frac{2}{\theta}} (\log y)^{\frac{1}{\theta}}\, d\xi_k \cdots d\xi_2\, d\xi_1\, dy \\ &\lesssim \int_{y=1}^{\infty} y^{\frac{s-2k}{\theta}-k-1} (\log y)^{\frac{k}{\theta}}\, dy < \infty, \end{aligned}$$

条件是 $s < 2k + k\theta$。

情形 *2*：$1 < \xi_k < \cdots < \xi_1 < y < y^2$. 对于 $j = 1, \ldots, k$, $\left|\widehat{\mu_j}(\xi_j, y)\right| \lesssim y^{-1}\sqrt{}$ 几乎必然为 $\log\ y$，且 $|\xi| \approx y$。因此，几乎必然，

$$\begin{aligned} J_{s,\theta}^{2}(\mu) &\lesssim \int_{y=1}^{\infty} y^{\frac{s}{\theta}-k-1} \int_{\xi_1=1}^{y} y^{-\frac{2}{\theta}} (\log y)^{\frac{1}{\theta}} \int_{\xi_2=1}^{\xi_1} y^{-\frac{2}{\theta}} (\log y)^{\frac{1}{\theta}} \cdots \int_{\xi_k=1}^{\xi_{k-1}} y^{-\frac{2}{\theta}} (\log y)^{\frac{1}{\theta}}\, d\xi_k \cdots d\xi_2\, d\xi_1\, dy \\ &\approx \int_{y=1}^{\infty} y^{\frac{s-2k}{\theta}-1} (\log y)^{\frac{k}{\theta}}\, dy < \infty, \end{aligned}$$

所提供的 $s < 2k$。

情形 *3*：$1 < y < \xi_k < \cdots < \xi_1 < y^2$。在这种情形下，对于 $j = 1$、.....、k，$\left|\widehat{\mu_j}(\xi_j,\ y)\right| \lesssim y^{-1}\sqrt{}\log\ y$ 几乎必然成立，且 $|\xi| \approx \xi_1$。由于 $J_{\theta,\ \theta}(\mu) < \infty$，根据测度的傅里叶谱的凹性，我们可以放心地假设 $s > \theta$。于是，几乎必然有

$$\begin{aligned} J_{s,\theta}^{3}(\mu) &\lesssim \int_{y=1}^{\infty} y^{-\frac{2k}{\theta}} (\log y)^{\frac{k}{\theta}} \int_{\xi_1=y}^{y^2} \xi_1^{\frac{s}{\theta}-k-1} \int_{\xi_2=y}^{\xi_1} \cdots \int_{\xi_k=y}^{\xi_{k-1}} d\xi_k \cdots d\xi_2\, d\xi_1\, dy \\ &\approx \int_{y=1}^{\infty} y^{-\frac{2k}{\theta}} (\log y)^{\frac{k}{\theta}} \int_{\xi_1=y}^{y^2} \xi_1^{\frac{s}{\theta}-2}\, d\xi_1\, dy \\ &\lesssim \int_{y=1}^{\infty} y^{\frac{2s-2k}{\theta}-2} (\log y)^{\frac{k}{\theta}}\, dy < \infty, \end{aligned}$$

在 $s < k + \frac{\theta}{2}$ 的条件下。

情形 *4*: $1 < y < y^2 < \xi_k < \cdots < \xi_1$。现在对于 $j = 1, \ldots\ldots, k$, $\left|\widehat{\mu_j}(\xi_j, y)\right| \lesssim y\xi_j^{-1}$几乎必然，且$|\xi| \approx \xi_1$。那么，几乎必然，

$$\begin{aligned} J^4_{s,\theta}(\mu) &\lesssim \int_{\xi_1=1}^{\infty} \xi_1^{\frac{s-2}{\theta}-k-1} \int_{\xi_2=1}^{\xi_1} \xi_2^{-\frac{2}{\theta}} \cdots \int_{\xi_k=1}^{\xi_{k-1}} \xi_k^{-\frac{2}{\theta}} \int_{y=1}^{\xi_k^{1/2}} y^{\frac{2k}{\theta}}\, dy\, d\xi_k \cdots d\xi_2\, d\xi_1 \\ &\approx \int_{\xi_1=1}^{\infty} \xi_1^{\frac{s-2}{\theta}-k-1} \int_{\xi_2=1}^{\xi_1} \xi_2^{-\frac{2}{\theta}} \cdots \int_{\xi_k=1}^{\xi_{k-1}} \xi_k^{-\frac{2}{\theta}+\frac{k}{\theta}+\frac{1}{2}}\, d\xi_k \cdots d\xi_2\, d\xi_1 \\ &\approx \int_{\xi_1=1}^{\infty} \xi_1^{\frac{s-2}{\theta}-k-1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)(k-1)+\frac{k}{\theta}+\frac{1}{2}}\, d\xi_1 \\ &= \int_{\xi_1=1}^{\infty} \xi_1^{\frac{s-k}{\theta}-\frac{3}{2}}\, d\xi_1 < \infty, \end{aligned}$$

在 $s < k + \frac{\theta}{2}$ 成立时。

情形 *5:* $0 < \xi_k < \cdots < \xi_2 < y^2 < y < 1 < \xi_1$。在这种情况下，我们将使用界 $\left|\widehat{\mu_j}(\xi_j, y)\right| \lesssim 1$, 对于 $i = 2, \ldots, k$ 以及 $\left|\widehat{\mu_1}(\xi_1, y)\right| \lesssim |\xi|^{-1}$，这些界几乎必然成立，且 $|\xi| \approx \xi_1$。因此，几乎必然有

$$J^5_{s,\theta}(\mu) \lesssim \int_{\xi_1=1}^{\infty} \xi_1^{\frac{s-2}{\theta}-k-1} \int_{y=0}^{1} \int_{\xi_2=0}^{y^2} \cdots \int_{\xi_k=0}^{\xi_{k-1}} d\xi_k \cdots d\xi_2\, dy\, d\xi_1 = \int_{\xi_1=1}^{\infty} \xi_1^{\frac{s-2}{\theta}-k-1} < \infty,$$

在 $s < 2 + k\theta$ 成立时。

情形 *6:* $0 < y^2 < y < 1 < \xi_k < \cdots < \xi_1$。对于 $j = 1, \ldots, k$, $\left|\widehat{\mu_j}(\xi_j, y)\right| \lesssim |\xi_j|^{-1}$ 几乎必然成立，且$|\xi| \approx \xi_1$。由此可得，几乎必然有

$$\begin{aligned} J^6_{s,\theta}(\mu) &\lesssim \int_{\xi_1=1}^{\infty} \xi_1^{\frac{s-2}{\theta}-k-1} \int_{\xi_2=1}^{\xi_1} \xi_2^{-\frac{2}{\theta}} \cdots \int_{\xi_k=1}^{\xi_{k-1}} \xi_k^{-\frac{2}{\theta}} \int_{y=0}^{1} dy\, d\xi_k \cdots d\xi_2\, d\xi_1 \\ &\approx \int_{\xi_1=1}^{\infty} \xi_1^{\frac{s-2}{\theta}-k-1}\, d\xi_1 < \infty, \end{aligned}$$

已给出 $s < 2 + k\theta$。

s 的最小上界出现在情形 3、4、5 和 6 中。因此，几乎必然有，

$$\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mu \geqslant \min\left\{k + \tfrac{\theta}{2}, 2 + k\theta\right\},$$

从而完成了下界证明。

3.3. **上界证明**。首先注意到，将 μ投影到前 k 个坐标上所得的是 k维勒贝格测度 $\mathcal{L}^k$。因此，根据 [FdO24+、命题 4.2] 和 [Fra24+、命题 6.1]

$$\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mu \leqslant \dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mathcal{L}^k + \theta = \big(2 + (k-1)\theta\big) + \theta = 2 + k\theta, \tag{3.2}$$

这就证明了第一个上界。

现在我们转向第二个上界。先验地，这应该涉及寻找 μ的傅里叶变换的衰减率的下界，至少沿着某些序列如此。该信息并未由 [FS18] 提供，而且获取它在技术上可能颇具挑战性。幸运的是，我们找到了一种替代方法，其基础是证明通常能量（$\theta = 1$）在 $s > k + 1/2$ 取值时的无穷性 $\mathbb{R}^d$ 来自 $\mathbb{R}^d$ 中体积相对较小的一个区域。随后，我们通过詹森不等式将这一信息转移到所使用的能量上。我们相信，这种方法将来会对其他问题有所帮助。

令 $k + \frac{1}{2} < s < 2 + k$，此时，下界证明中考虑的所有能量积分均为有限值，除了可能的 $J^3_{s,1}(\mu)$ 和 $J^4_{s,1}(\mu)$。将 s 与

上述证明中各情形得到的界进行比较即可看出这一点。由于 $\dim_{\mathrm{S}}\mu \leqslant \dim_{\mathrm{H}} G(W) = k+1/2$，我们知道

$$\mathcal{J}_{s,1}(\mu) = \infty.$$

因此，

$$\infty = \mathcal{J}_{s,1}(\mu)^{\frac{1}{\theta}} \approx (J^1_{s,1}(\mu) + \cdots + J^6_{s,1}(\mu))^{\frac{1}{\theta}} \approx (J^3_{s,1}(\mu) + J^4_{s,1}(\mu))^{\frac{1}{\theta}}.$$

现在我们将稍微调整情形 3 和情形 4 的区域，以证明实际上相关的估计来自情形 4。

令 $0 < \varepsilon_1 < \frac{3}{k+1}$ 和 $k + \frac{1}{2} < s < \frac{2k-1}{2-\varepsilon_1} + 1 < 2 + k$。我们将阈值从 y^2 改为 $y^{2-\varepsilon_1}$，并考虑以下两个新情形：

情形 3*： $1 < y < \xi_k < \cdots < \xi_1 < y^{2-\varepsilon_1}$。
情形 4*： $1 < y < y^{2-\varepsilon_1} < \xi_k < \cdots < \xi_1$。

我们将证明，对于所选取的 s，$J^{3^*}_{s\,1}$，(μ)是有限的。由(3.1)可知，对于$j = 1, \ldots, k$，$\big|\widehat{\mu_j}(\xi_j,\ y)\big| \lesssim y^{-1}\sqrt{\log y}$几乎必然成立，且$|\xi| \approx \xi_1$。因此，

$$\begin{aligned} J^{3^*}_{s,1}(\mu) &\lesssim \int_{y=1}^{\infty} y^{-2k}(\log y)^k \int_{\xi_1=y}^{y^{2-\varepsilon_1}} \xi_1^{s-k-1} \int_{\xi_2=y}^{\xi_1} \cdots \int_{\xi_k=y}^{\xi_{k-1}} d\xi_k \cdots d\xi_2\, d\xi_1\, dy \\ &\approx \int_{y=1}^{\infty} y^{-2k}(\log y)^k \int_{\xi_1=y}^{y^{2-\varepsilon_1}} \xi_1^{s-2}\, d\xi_1\, dy \\ &\lesssim \int_{y=1}^{\infty} y^{-2k+(2-\varepsilon_1)(s-1)}(\log y)^k\, dy < \infty \end{aligned}$$

因为 $\varepsilon_1 > 0$ 且$s < \frac{2k-1}{2-\varepsilon_1} + 1$。由于$\mathcal{J}_{s,\ 1}(\mu) = \infty$，我们推出$J^{4^*}_{s\,1,\ }(\mu) = \infty$。注意，在3*和4*之间还存在中间情形，例如

$$1 < y < \xi_k < \cdots < \xi_2 < y^{2-\varepsilon_1} < \xi_1$$

而且，为了证明$\mathcal{J}_{s,\ 1}(\mu)$的无穷性仅来自情形4*，也有必要证明所有这些情形都是有限的。然而，通过运用下界证明中使用的线性论证（或直接计算），我们可以证明中间情形是有限的。

注意，对任意 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$，

$$\begin{aligned} \int_{\xi \text{ in Case } 4^*} |\xi|^{-\left(k+\frac{1}{2-\varepsilon_2}\right)} d\xi &\approx \int_{\xi_1=1}^{\infty} \int_{\xi_2=1}^{\xi_1} \cdots \int_{\xi_k=1}^{\xi_{k-1}} \int_{y=1}^{\xi_k^{\frac{1}{2-\varepsilon_1}}} \xi_1^{-\left(k+\frac{1}{2-\varepsilon_2}\right)} dy\, d\xi_k \cdots d\xi_2\, d\xi_1 \\ &\approx \int_{\xi_1=1}^{\infty} \xi_1^{-1+\frac{1}{2-\varepsilon_1}-\frac{1}{2-\varepsilon_2}}\, d\xi_1 < \infty. \end{aligned}$$

据此，令 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$，并令 $c > 0$ 满足测度 $dm(\xi) = c|\xi|^{-\left(k+\frac{1}{2-\varepsilon_2}\right)} d\xi$ 是由情形 4^* 给出的区域上的概率测度。那么，根据詹森不等式，

$$\begin{aligned}
J_{s,1}^{4^*}(\mu)^{\frac{1}{\theta}} &= \left(\int_{\xi \text{ in Case } 4^*} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^2 |\xi|^{s-k-1}\, d\xi \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\approx \left(\int_{\xi \text{ in Case } 4^*} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^2 |\xi|^{s-1+\frac{1}{2-\varepsilon_2}}\, dm(\xi) \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\leqslant \int_{\xi \text{ in Case } 4^*} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^{\frac{2}{\theta}} |\xi|^{\frac{s-1+1/(2-\varepsilon_2)}{\theta}}\, dm(\xi) \\
&\approx \int_{\xi \text{ in Case } 4^*} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^{\frac{2}{\theta}} |\xi|^{\frac{s-1+1/(2-\varepsilon_2)}{\theta}} |\xi|^{-\left(k+\frac{1}{2-\varepsilon_2}\right)}\, d\xi \\
&= \int_{\xi \text{ in Case } 4^*} \left|\widehat{\mu}(\xi)\right|^{\frac{2}{\theta}} |\xi|^{\frac{s-1+\theta+(1-\theta)/(2-\varepsilon_2)}{\theta} - k - 1}\, d\xi \\
&\leqslant \mathcal{J}_{s-1+\theta+\frac{1-\theta}{2-\varepsilon_2},\theta}(\mu)^{\frac{1}{\theta}}.
\end{aligned}$$

由于 $J_{s\,1,}^{4^*}(\mu) = \infty$ 对于 $s > k + \frac{1}{2}$ 这意味着，$\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mu \leqslant k - \frac{1}{2} + \theta + \frac{1-\theta}{2-\varepsilon_2}$ 令 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \to 0$ 得到 $\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mu \leqslant k + \frac{\theta}{2}$ 正如我们所要证明的。将此与 (3.2) 结合起来，即可得到所需的几乎必然上界

$$\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} \mu \leqslant \min\left\{k + \tfrac{\theta}{2}, 2 + k\theta\right\}$$

对所有 $\theta \in [0,1]$ 均成立。

4. A Knapp example

回顾一下，Knapp例子（例如参见 [Mat15、Dem20]）给出了球面满足限制估计的一个必要条件。其背后的思想是捕捉该集合的一部分，使其产生较差的傅里叶限制估计；对于球面，这可以通过选取一个较小的“帽状区域”来实现，该区域在球面相对平坦的部分包含大量测度。回顾一下，真正平坦的集合没有傅里叶衰减，因此不可能有傅里叶限制估计，所以大致平坦的部分自然构成了限制估计在某些阈值以下成立的障碍。在研究光滑流形时，类似的 Knapp例子也适用。对于布朗曲面，我们要寻找包含大量质量的相对平坦部分，但将通过竖直矩形来实现，并且只依赖于布朗运动的 H¨older 指数。现在我们构造这个例子并证明定理 2.6。

4.1. **定理 2.6的证明。** 固定 $s \in [0,1]^k$ 和 $\alpha > 0$，使得 f 在 α-H¨older 连续于 s。于是存在 $0 < \delta = \delta(s,\alpha) < 1$，使得对所有 $t \in [0,1]^k$ 满足 $|s-t| < \delta$，

$$|f(s) - f(t)| \lesssim |s-t|^{\alpha}.$$

注意，$\{(t,\ f(t)) : |s-t| < \delta\}$ 因此包含在一个边长为 $\approx \delta \times \cdots \times \delta \times \delta^{\alpha}$ 的长方体 R 中。令 $g = 1_R$，根据定义，R 的 μ 质量为 $\approx \delta^k$（定义域中一个 δ 立方体的勒贝格测度）。于是

$$\|g\|_{L^p(\mu)} = \mu(R)^{\frac{1}{p}} \approx \delta^{\frac{k}{p}}.$$

设 R^* 为 R的对偶矩形，即以原点为中心、边与 R 的边平行且边长为 $\approx \delta^{-1} \times \cdots \times \delta^{-1} \times \delta^{-\alpha}$ 的矩形。对 $|e^{2\pi i \xi \cdot (s, f(s))}| = 1$ 进行乘法，

$\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\|\widehat{g\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_R e^{-2\pi i \xi \cdot (x-(s,f(s)))} \, d\mu(x) \right|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}}.$$

若 $\xi \in R^*/100$ 且 $x \in R$，则 $\mathrm{Re}\,(e^{-2\pi i \xi \cdot (x-(s,f(s)))}) \approx 1$ 且 $\mathrm{Im}\,(e^{-2\pi i \xi \cdot (x-(s,f(s)))}) \leqslant 1/10$。由于任意复数的模都不小于其实部，

$$\begin{aligned}
\|\widehat{g\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} &\gtrsim \left(\int_{R^*/100} \left| \int_R e^{-2\pi i \xi \cdot (x-(s,f(s)))} \, d\mu(x) \right|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\gtrsim \left(\int_{R^*/100} |\mu(R)|^q \, d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\gtrsim \delta^k |R^*|^{\frac{1}{q}} \\
&\approx \delta^{\frac{k(q-1)-\alpha}{q}}
\end{aligned}$$

因此，若我们假设（1.2）成立，结合上述估计可得

$$\delta^{\frac{k(q-1)-\alpha}{q}} \lesssim \|\widehat{g\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^p(\mu)} \lesssim \delta^{\frac{k}{p}}$$

因此

$$p \geqslant \frac{kq}{k(q-1)-\alpha},$$

如所要求。

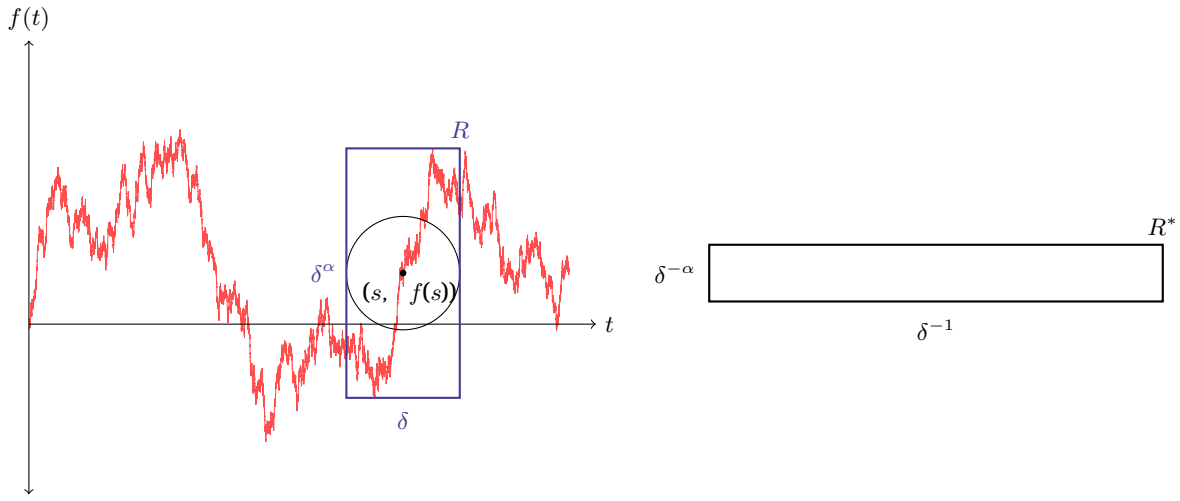

FIGURE 4. H¨older函数 f的Knapp例子，其中 g 是以（s, $f(s)$） $\in G(f)$为中心、边长为$\approx \delta \times \cdots \times \delta \times \delta^\alpha$的矩形 R的特征函数。右侧是 R的对偶矩形 R^*。

REFERENCES

[BS11] J.-G. Bak 和 A. Seeger. Stein–Tomas 定理的拓展. 《数学研究快报》,18(4), 第 767–781 页 (2011).

[CFdO24a+] M. Carnovale、J. M. Fraser 和 A. E. de Orellana. 通过傅里叶系数获得傅里叶谱。《美国数学会会刊》（即将发表），预印本：arXiv:2403.12603 （2024）。

[CFdO24b+] M. Carnovale、J. M. Fraser 和 A. E. de Orellana. L^2 傅里叶谱的限制估计。预印本：arXiv:2412.14896 (2024).[Che14] X. Chen. 基于卷积幂的傅里叶限制定理。Proc. Amer. Math. Soc., 142(11), pp. 3897–3901 (2014).[Dem20] C. Demeter. 傅里叶限制、解耦与应用。Cambridge Univer- sity Press, (2020).[Fra24] J. M. Fraser. 傅里叶谱与和集型问题, Math. Ann., 390 , 3891–3930, (2024).[Fra24+] J. M. Fraser. 乘积测度的傅里叶衰减。预印本：arXiv:2405.05878 (2024).[FdO24+] J. M. Fraser 和 A. E. de Orellana. 一种用于正交投影例外集估计的傅里叶分析方法。Indiana U. Math. J. (即将发表)，预印本：arXiv:2404.11179 (2024).[FOS14] J. M. Fraser, T. Orponen 和 T. Sahlsten. 关于图的傅里叶分析性质。Int. Math. Res. Not. IMRN, pp. 2730–2745, (2014).[FS18] J. M. Fraser 和 T. Sahlsten. 关于布朗图的傅里叶分析结构。Anal. PDE, 11(1), pp. 2730–2745, (2014).[H-L13] K. Hambrook 和 I. Laba. Mockenhaupt 限制定理的尖锐性。Geom. Funct. Anal., 23, pp. 1262–1277 (2013).[Kah66a] J.-P. Kahane. 完美集的布朗像，C. R. Acad. Sci. Paris, 263, (1966), 613–615.[Kah66b] J.-P. Kahane. 高斯傅里叶级数的完美集像，C. R. Acad. Sci. Paris, 263, (1966), 678–681.[Kah85] J.-P. Kahane. 一些随机函数级数，第2版 (Cambridge University Press, 1985).[KY02] D. Khoshnevisan 和 Y. Xiao. 可加 Lévy 过程的水平集。Ann. Probab., 30(1), pp. 62–100 (2002).[Lev53] P. Lévy. 布朗运动曲线的豪斯多夫测度。Giorn. Ist. Ital. Attuari, 16, pp. 1–37 (1953).[LL25]M. Liang 和 C. Lin. 可加布朗片的局部时与独立布朗片的交叉局部时。Mathematics 13(9), 1425 (2025).[LL25+] C.-K Lai 和 C. Y. Lee. 分数布朗运动图像的傅里叶维数，具有 $H \geqslant 1/2$。预印本：arXiv:2502.09032 (2025).[LT25+] C. Y. Lee 和 S. Tindel. 关于分数布朗图的傅里叶维数。预印本：arXiv:2510.09818 (2025).[Mat15] P. Mattila. 傅里叶分析与豪斯多夫维数，Cambridge Studies in Ad- vanced Mathematics, Cambridge University Press, (2015).[Mit02] T. Mitsis. 一般测度的 Stein–Tomas 限制定理。Publ. Math. Debrecen, 60, pp. 89–99 (2002).[Moc00] G. Mockenhaupt. Salem 集与傅里叶变换的限制性质。Geom. Funct. Anal., 10, pp. 1579–1587 (2000).[SS17]P. Shmerkin 和 V. Suomala. 一类随机 Cantor 测度及其应用。载于 Recent developments in fractals and related fields, Trends Math., pp. 233-260. Birkh¨auser/Springer, Cham, 2017.

[SS18] P. Shmerkin 和 V. Suomala.空间独立鞅、交集与应用. Mem. Amer. Math. Soc., 251(1195):v+102, (2018).[Ste70] E.M. Stein. 奇异积分与函数的可微性.Princeton University Press, (1970).[Tay53] S. J. Taylor. 布朗路径在 n维空间中的 α维豪斯多夫测度。*Math. Proc. Cambridge Philos. Soc*, 49(1), pp. 31–39 (1953).[Tom75] P. A. Tomas. 傅里叶变换的限制定理。*Bull. Amer. Math.Soc.*, **81**, pp. 705–714 (1975).[Yod75] L. Yoder. d维空间中 N参数布朗运动的图像和取值域的豪斯多夫维数。*Ann. Probab.* 3(1), pp. 169–171 (1975).[Xia95] Y. Xiao. 高斯向量场与指标-α 稳定场的维数结果。*Ann. Probab.*23(1), pp. 273–291 (1995).[Xia97] Y. Xiao. 分数布朗运动图像的豪斯多夫测度。*Math.Proc. Cambridge Philos. Soc.*122(3), pp. 565–76 (1997).

J. M. Fraser，圣安德鲁斯大学，苏格兰
Email address：jmf32@st-andrews.ac.uk

A. E. de Orellana，圣安德鲁斯大学，苏格兰
Email address：aedo1@st-andrews.ac.uk