arXiv:2601.05830v1 [physics.atom-ph] 9 Jan 2026

揭示能量分辨阿秒钟的机制

J. N. Wu,[1], * S. Q. Shen,[1], * J. Y. Che,[2] S. Wang,[3], † W. Y. Li,[4], ‡ G. G. Xin,[5] 和 Y. J. Chen[1], §
[1] *College of Physics and Information Technology and Quantum Materials and Devices Key Laboratory of Shaanxi Province's High Education Institution, Shaan'xi Normal University, Xi'an, China*
[2] *College of Physics, Henan Normal University, Xinxiang, China*
[3] *College of Physics and Hebei Key Laboratory of Photophysics Research and Application, Physics Postdoctoral Research Station, Hebei Normal University, Shijiazhuang, China*
[4] *Hebei Key Laboratory of Optoelectronic Information and Geo-detection Technology, School of Mathematics and Science, Hebei GEO University, Shijiazhuang, China*[5] *School of Physics, Northwest University, Xi'an, China*（日期：2026年1月12日）

我们通过数值和解析方法研究强椭圆偏振激光场中原子的阈上电离（ATI）。近期针对氢的基准实验表明，与各个 ATI 环相关的阿秒钟偏移角随能量显著增大，这一特征现象可归因于激光在隧穿出口处诱导的电子非绝热初始速度和位置 [PRL127, 273201 (2021)]。然而，非绝热效应如何影响这一角度的具体机制仍不清楚。在此，我们采用一种强场模型，对复杂的非绝热效应和库仑效应进行解析且定量的解耦，从而清晰地揭示其详细机制。我们表明，由于非绝热效应，低能（高能）环对应的角度分别由激光椭圆的长（短）轴主导，并从 0^o跃变至 90°。这些与激光场相关的刚性效应会受到与系统对称性密切相关的库仑诱导的出口速度的缓和，使偏移角随能量显著而平滑地增大。

隧穿电离 [1–5] 是许多基本强场过程的第一步，例如阈上电离（ATI） [6–10] 和高次谐波产生（HHG） [11–15]。阿秒角向条纹成像，也称为阿秒钟 [16–22], , 是一种先进技术，通过强椭圆偏振激光（EPL）场产生的光电子动量分布（PMD）来探测原子和分子隧穿动力学。通常，阿秒钟测量相对于激光椭圆短轴的最可能电子发射角（也称为偏移角），并将其作为分析隧穿动力学和验证理论模型的特征量 [23–26]。

近期针对最简单原子 H 的基准实验表明，在强短波长椭圆偏振激光场中，光电子动量分布里可以观测到分辨良好的阈上电离环，从而能够利用阿秒钟测量与每个环相关的偏移角 [27]。研究发现，偏移角随能量显著增大，这一特征现象可归因于非绝热效应；该效应与激光在隧穿出口处赋予隧穿电子的初始速度和位置有关。然而，这一现象的详细机制，即非绝热效应如何影响偏移角，仍不清楚。揭示这一机制面临两方面的困难。首先，在实验中，只有在较大的 Keldysh 参数下才能较好地实现能量分辨的阿秒钟 [1], ；此时除隧穿外，还可能涉及多光子跃迁，使情况更加复杂。其次，在理论上，这一现象通常通过强场模型进行分析，其中的库仑修正是通过数值求解牛顿方程来考虑的，因此难以获得直观简明的图像。

为克服这些困难，本文首先主要通过在较小凯尔迪什参数下对含时薛定谔方程（TDSE）进行数值求解来分析这一现象，此时阈上电离环仍能清晰分辨。其次，我们采用一种近期发展的强场模型，从系统对称性的角度对库仑效应进行解析描述，从而能够解析地分离非绝热效应和库仑效应，更容易获得清晰的物理图像。该模型给出了此角度相对于能量的标度律，与实验结果符合良好（见图1）。我们表明，由于非绝热效应，当低能环对应的角度主要由长轴决定时，高能环的角度则由短轴主导，导致此角度从 0° 骤然跃迁至 90°。库仑效应由库仑诱导的出口速度表征，它适度调节场主导角，使该角度显著但逐渐增大。这一机制与通用阿秒钟中的库仑主导机制略有不同。其潜在原因与EPL场的几何结构有关，该结构与ATI环的圆形结构并不匹配（见图2(c)）。

理论模型。为了对能量分辨的角向条纹图进行解析研究，我们采用了一种包含库仑作用的强场模型，称为隧穿响应经典运动（TRCM）模型，该模型近期由 [28–32]提出。该模型

* 这些作者对本文的贡献相同。
† phywangshang@163.com
‡ liwy157@126.com§
chenyjhb@gmail.com

基于强场近似（SFA） [9] 和电子轨迹（或鞍点）理论 [10],，但从系统对称性的角度考虑了近核库仑效应 [32]。在强场近似中，漂移动量 p 与鞍点时间 $t_s = t_0 + it_x$ 之间的映射关系为 p $=$v(t_0) $-$A(t_0)。这里，A(t)是激光电场 E(t)的矢势。速度 v(t_0)通常不为零，被称为隧穿电子在隧穿出口位置 r$_0$(t_0) [33]处的非绝热初始速度。在 TRCM 中，经库仑作用修正后的漂移动量 p′ 可写为

$$\mathbf{p}' = \mathbf{v}(t_0) + \mathbf{v}_i - \mathbf{A}(t_0) \approx \mathbf{v}(t_0) - \mathbf{A}(t_i), \qquad (1)$$

与 $t_i = t_0 + \tau$。这里，$\mathbf{v}_i = -v_i \mathbf{r}_0/r_0$ [34] with $v_i = k\sqrt{|V(\mathbf{r}_0)|}/n_f$ 考虑了隧穿电离过程中系统的库仑相关对称性，而$k = 1.1$ 是一个较小的修正因子 [32]。术语n_f 表示所研究系统的维数，三维（二维）情况下分别为 $n_f = 3$（$n_f = 2$）。术语V(r)表示库仑势，而 $\tau \approx v_i/|\mathbf{E}(t_0)|$ 表示库仑诱导电离时间延迟。通过与实验结果比较，表达式 p′ 的适用性已在 [28–30]中得到验证。

SFA电子轨迹 (p t_0) 的振幅 c(p t_0) 可写为 c(p t_0) $\propto$ E(t_s) $\cdot$ d$_i$[p $+$A(t_s)]$e^{-iS(\mathbf{p},t_s)}$，其中准经典作用量为 S(p t_s) $= \int_{t_s}\{[\mathbf{p} + \mathbf{A}(t')]^2/2 + I_p\}dt' = S_{re}$(p t_s) $+ iS_{im}$(p t_s)，$S_{re} = Re[S(\mathbf{p}\ t_s)]$ 和 $S_{im} = Im[S(\mathbf{p}\ t_s)]$，，偶极矩阵元为 d$_i$(v) $=\langle \mathbf{v}|\mathbf{r}|0\rangle$ [9]。在 TRCM 中，库仑修正轨迹 (p′, t_i) 对应的复振幅 c'(p′, t_i) 可写为c'(p′, t_i) $\propto$ E(t_s) $\cdot$ d$_i$[p $+$A(t_s)]$e^{-i[S_{re}(\mathbf{p}',t_s')+iS_{im}(\mathbf{p}\ t_s)]}$，其中 $t_s' = t_i + it_{x0}$。上述表达式表明，M'(p′) $= |c'(\mathbf{p}', t_i)|^2 = |c(\mathbf{p}\ t_0)|^2 = M$(p)，因此我们可以在 ATI 中对与振幅 M(p) 相关的场相关效应以及与偏移动量 p′ 相关的库仑相关效应进行解析解耦。利用库仑偏移轨迹 (p′, t_i)，通用阿秒钟中与光电子动量分布（PMD）最可能路径（MPR）相关的偏移角可定义为 [28, 29]

$$\tan\theta = p_x'/p_y' \approx [v_x(t_0) - A_x(t_i)]/[v_y(t_0) - A_y(t_i)]. \quad (2)$$

上述定义的角度未考虑ATI环的影响，将用于理解能量分辨阿秒钟中的偏移角。

与实验结果的比较。在图1(a)中，我们首先展示了氢的实验偏移角与 [27] 的比较。实验角度随能量呈现显著的上升趋势。TRCM 的预测结果（蓝色实心三角形）在数值上与实验数据不同，但很好地再现了数据相对于能量的标度律。经过垂直平移的 TRCM 结果（蓝色空心三角形）与这些实验数据吻合良好，说明 TRCM 在此处抓住了基本物理机制。这种定量差异可能是因为实验数据是在

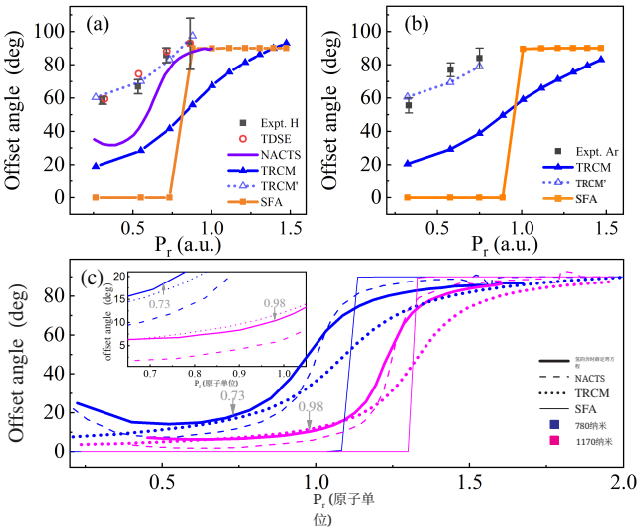

图1. 不同靶和激光参数下，采用不同方法得到的偏移角 θ 随径向动量 p_r 的变化。(a) [27]中H的实验、含时薛定谔方程和模型（NACTS）结果。(b) [35]中Ar的实验结果。(c) [27]中H的含时薛定谔方程和模型结果。每个面板中，除了TRCM，还展示了强场近似的结果。在(a)和(b)中，TRCM结果也进行了垂直平移，以匹配实验数据，并以TRCM'表示。计算中使用的激光参数为：(a)中 $I = 0.9 \times 10^{14}$W/cm^2、$\xi = 0.85$，波长为 $\lambda = 390$纳米；(c)中波长为 $\lambda = 780$ 纳米和 $\lambda = 1170$ 纳米；(b)中$I = 0.9 \times 10^{14}$W/cm^2、$\xi = 0.8$，波长为 $\lambda = 400$ 纳米。

较大的 Keldysh参数 [1] 下获得的，此时电子轨迹理论因而 TRCM 的适用性都不太好。从强场近似结果（橙色实心方块）中可以获得更多认识；该结果也显示出此偏移角急剧上升的趋势，其中小能量时为 $\theta = 0^o$，高能量时为 $\theta = 90^o$。相比之下，实验结果和 TRCM 结果则呈现逐渐上升的趋势。在图1(b)中，我们展示了氩的实验偏移角与 [35] 的比较。在这种情况下，TRCM 仍然再现了实验数据相对于能量的标度律。此外，强场近似结果中也观察到了急剧上升的现象，这表明该现象是强场近似预测所固有的，且主要与激光场的性质有关。

在图1(c)中，我们展示了 [27] 中获得的较长波长情况下，氢原子的三维含时薛定谔方程（TDSE）结果对比。对于这些 Keldysh参数较小的情况 γ，TRCM 对偏移角的预测开始与 TDSE 结果定量吻合，尤其是在 MPR 附近（由竖直箭头标出）光电子动量分布（PMD）具有较大振幅的能量区域。例如，对于 $\lambda = 780$ nm 和 $\gamma = 1.14$，TDSE 与 TRCM 在 $p_r = 0.73$ a.u. 的 MPR 附近相差约 1.5 度。对于 $\lambda = 1170$ nm 和 $\gamma = 0.75$，在 $p_r = 0.98$ a.u. 的 MPR 附近相差约 1.2

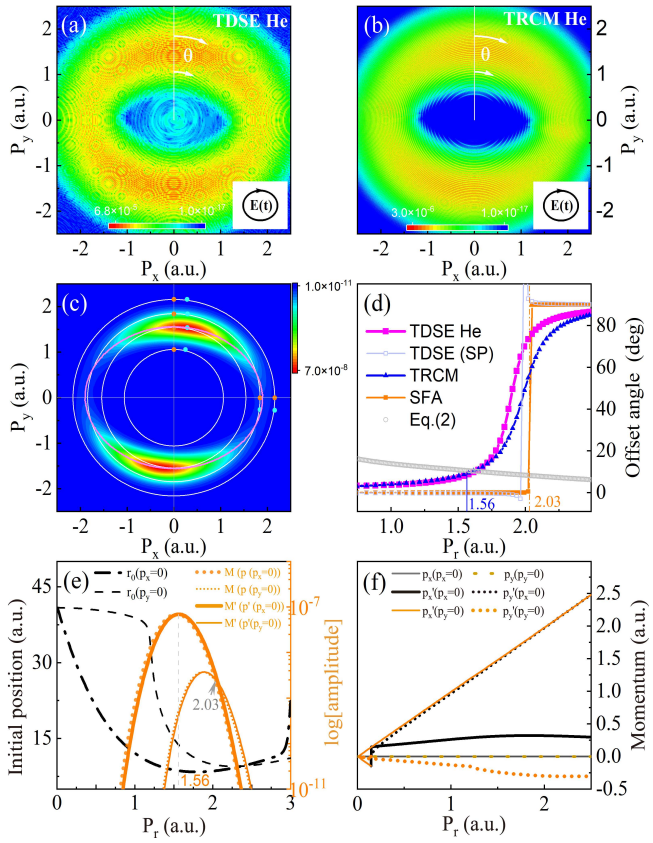

图2. 能量分辨阿秒时钟机制示意图。(a) 和 (b) 分别为氦原子的含时薛定谔方程和 TRCM 光电子动量分布。插图展示了 EPL 场的螺旋度和偏振椭圆的方向。 θ 表示偏移角。(c) 电离几何结构示意图。颜色表示 (a) 中含时薛定谔方程得到的非相干光电子动量分布。白色同心圆表示强场近似预测的部分 ATI 环。橙色实心点表示环中沿 $p_{x(y)}=0$ 轴的一些典型动量 p，记作 p($p_{x(y)}=0$)。浅蓝色实心点表示式 (1) 中对应的库仑位移动量 p′($p_{x(y)}=0$)。粉色点表示从 (b) 中 TRCM 的非相干光电子动量分布提取的 LMPR，并呈现椭圆结构。(d) 根据 (a) 和 (b) 中的光电子动量分布得到的偏移角 θ 随径向动量 p_r的变化。此处还展示了强场近似和含时薛定谔方程在短程势 (SP) 下的光电子动量分布所对应的偏移角。灰色点线表示根据式 (2) 得到的库仑位移动量 p′($p_x=0$)对应的结果。(e) 强场近似对动量 p($p_{x(y)}=0$)对应的初始位置 r_0(p) 和振幅 M(p) 的预测。此处还展示了 TRCM 对 p′(′)对应的振幅 M'(p′) 的预测。(f) p($p_{x(y)}=0$) 和 p′($p_{x(y)}=0$) 的比较。激光参数为 $I=5\times10^{14}$ W/cm^2、 $\lambda=800$ nm 和 $\xi=0.85$。

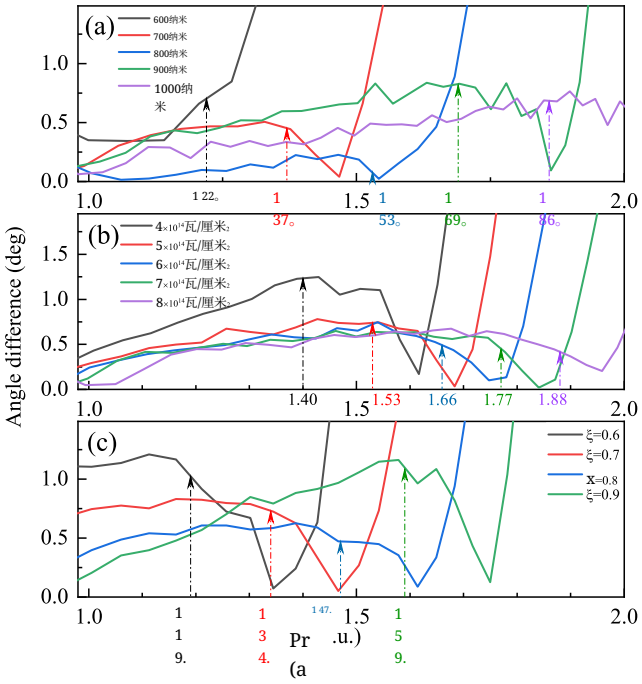

图3. 对于氦，含时薛定谔方程与 TRCM 得出的偏移角 θ 的绝对差值随径向动量 p_r 的变化，结果是在不同激光参数下获得的。(a) $I=$ 5×10^{14} W/cm^2，$\xi=0.85$ 不同的 λ。(b) $\lambda=800$ nm，$\xi=0.85$ 不同的 I。(c) $I=5\times10^{14}$W/cm^2，$\lambda=800$ nm，不同的 ξ。(a-c) 中的竖直箭头标出了 TRCM 对各条曲线预测的 MPR 位置。

度。TDSE 与 TRCM 的主要差异出现在角度曲线变化非常迅速的能量区域。这可能是由于在该区域，激光椭圆长轴和短轴对电离的贡献之间存在激烈的竞争机制，使得定量描述较为困难，正如将在下文讨论。

潜在机制。基于图1中的比较，下面我们讨论潜在机制。由于对于短波长和长波长，角度随能量增加的趋势相似，并且TRCM在长波长下表现更好，所以下文我们重点讨论长波长的情况。为了探索更广泛的参数区域，我们还对氦原子进行了二维含时薛定谔方程模拟。相关计算细节见 [29]。在图2(a)和图2(b)中，我们展示了在 $\gamma=0.64$处通过含时薛定谔方程和TRCM获得的氦的光电子动量分布。可以观察到，在这种情况下，阈上电离环在这里仍然可以分辨出来。特别是，在 $1a.u.<p_r<1.74a.u.$ 区域附近，这些环具有较大的振幅（另见图2(c)）。利用 [27], 中介绍的积分和傅里叶变换数值方法，我们可以获得含时薛定谔方程和TRCM结果中每个环的偏移角，如图2(d)所示。为了阐明潜在机制，在图2(c)中，我们展示了含时薛定谔方程的非相干光电子动量分布，以及来自TRCM光电子动量分布的局部最可能路径（LMPR） [36] ；该路径穿过含时薛定谔方程整个光电子动量分布中相对明亮的部分，并呈现出椭圆结构（粉色点）。这里还展示了某些阈上电离环（圆环）的强场近似预测，以及环中一些可能的局部最可能动量（$p_x=0$， p_y）或（p_x， $p_y=0$）（橙色实心点），这些动量记为p($p_{x(y)}=0$)。

根据公式（1），当考虑库仑效应时，这些动量p($p_{x(y)}=0$)会位移到其他动量p′($p_{x(y)}=0$)，并用浅蓝色实心点表示。然而，由于EPL场的性质，这种位移沿椭圆轨道发生，如LMPR（粉色点）的椭圆结构所示。因此，位移动量通常会在一定程度上偏离相应的原始阈上电离环。这意味着，在包含库仑效应的光电子动量分布的每个阈上电离环中找到的局部最可能动量p_c通常并不是p′($p_{x(y)}=0$)的库仑位移动量。然而，在对应于光电子动量分布最明亮部分的MPR附近，该分布具有较大的振幅。在这种情况下，从阈上电离环中找到的动量p_c可能接近库仑位移动量。这些分析得到了图2(d)所示角度结果的支持。确实，在 $p_r=1.56$a.u.的MPR附近的能量区域内，从TRCM光电子动量分布中获得的能量分辨角度与含时薛定谔方程的结果非常接近，差异小于1度（另见图3）。相比之下，公式（2）对库仑位移动量p′($p_{x(y)}=0$)的预测（灰色空心圆）在大多数能量区域内都明显偏离从阈上电离环获得的数据。然而，在接近 $p_r=1.56$a.u.的MPR的能量区域内，公式（2）的预测值与这些环相关数据较为接近。我们的模拟中其他激光参数下也存在这一现象，这表明，MPR附近的环分辨偏移角可用于通过公式（2）直接推断时间延迟信息。

在图2(d)中，我们还展示了采用短程势的含时薛定谔方程计算结果。短程势曲线与强场近似结果非常接近，在 $p_r=2.03$a.u.附近，角度从 0° 跃变至 90° 。这些无库仑曲线的典型特征总体上与包含库仑效应的曲线相似，但后者较为平滑。因此，我们得出结论：角度随能量增加的趋势源自EPL场的性质，而库仑效应会使这一趋势变得平缓。

为分析场的影响，我们在图2(e)中展示了强场近似预测的典型动量 p($p_{x(y)}=0$) 对应的振幅和初始位置，这些动量分别对应零度（90度）偏移角。这些动量的初始位置 r_0(p) $\equiv$ $r_0(t_0)$ 均随能量先减小后增大。沿 $p_x=0$ 和 $p_y=0$ 轴，这些动量的最大振幅 M(p) 基本对应其最小出口位置 r_0(p)。 $p_x=0$ 的最大振幅出现在径向动量为 $p_r=1.56$ a.u. 时，而 $p_y=0$的振幅（对应于 $\theta=90^o$）在 $p_r=2.03$a.u. 时变得大于 $p_x=0$ （$\theta=0^o$）的振幅。库仑动量偏移后的动量 p′($p_{x(y)}=0$) 所对应的 TRCM 振幅预测 M'(p′) 与强场近似预测略有偏差。 $p_r=1.56$a.u. 和 $p_r=2.03$a.u. 这两个临界参数解释了图2(d)中所讨论曲线的重要特征。最后，作为直接比较，我们在图2(f)中绘出了式（1）的典型动量 p($p_{x(y)}=0$) 及其库仑偏移后的动量 p′($p_{x(y)}=0$)。$p_{y(x)}$($p_{x(y)}=0$) 的结果（此处未示出）与 $p'_{y(x)}$($p_{x(y)}=0$) 的结果相似。这些结果进一步直观展示了库仑效应以及图2(d)中相关理论曲线的来源。

进一步比较。为验证上述讨论，我们进一步比较了宽广的激光强度、波长和椭圆率参数范围内，氦原子的含时薛定谔方程与TRCM预测结果之间的绝对差异。从图3(a)至图3(c)可以看出，在彩色竖直箭头所示的MPR附近，差异通常小于或接近1度。只有在图3(b)中强度相对较低的 $I=4\times10^{14}$W/cm^2 情形下，差异约为1.25度，这表明TRCM适用于宽广参数范围内的能量分辨阿秒钟。

结论。总而言之，我们通过数值和解析方法研究了近期提出的能量分辨阿秒钟，该方法旨在同时实现高时间分辨率和高能量分辨率。采用近期发展出的含库仑强场模型，可以解析地、定量地解耦复杂的非绝热效应和库仑效应，从而使潜在机制变得清晰可及。我们证明，能量分辨阿秒钟中角度随能量增加这一典型现象，可归因于EPL场的这两个分量对隧穿的竞争性贡献，以及近核库仑势对电子隧穿动力学的柔性调制。由于该模型在较小Keldysh参数下能够给出定量结果，并在较大Keldysh参数下适用标度律，因此它为定量研究ATI以及其他由隧穿触发的强场过程（如HHG）提供了一种有前景的解析方法。能量分辨阿秒钟与该方法的结合，也为解析地、定量地研究非绝热效应和库仑效应对更复杂体系（如取向排列的对称分子和极性分子）隧穿动力学的影响提供了可能性。

本工作得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12574376、12404330、12304303、12174239）的资助。

[1] L. V. Keldysh，《强电磁波场中的电离》，苏联《物理学快报》20，1307（1965）。[2] F. H. M. Faisal，《原子对激光光子的多重吸收》，《物理学杂志B》6，L89（1973）。[3] H. R. Reiss，强电磁场对弱束缚系统的影响，《物理评论A》22，1786（1980）。[4] M. V. Ammosov、N. B. Delone 和 V. P. Krainov，在交

变电磁场中复杂原子和原子离子的隧穿电离，苏联《物理学快报》64，1191（1986）。[5] X. M. Tong、Z. X. Zhao 和 C. D. Lin，分子隧穿电离理论，《物理评论A》66，033402（2002）。[6] P. Agostini、F. Fabre、G. Mainfray、G. Petite 和 N. K. Rahman，氩原子六光子电离后的自由-自由跃迁，Physical Review Letters 42，1127（1979）。[7] B. Yang、K. J. Schafer、B. Walker、K. C. Kulander、P. Agostini 和 L. F. DiMauro，高阶阈上电离中的强度依赖散射环，Physical Review Letters 71，3770（1993）。[8] G. G. Paulus、W. Becker、W. Nicklich 和 H. Walther，阈上电离中的再散射效应：一个经典模型，《物理学杂志B》27，L703（1994）。[9] M. Lewenstein、K. C. Kulander、K. J. Schafer 和 P. H. Bucksbaum，阈上电离中的环：准经典分析，《物理评论A》51，1495（1995）。[10] W. Becker、F. Grasbon、R. Kopold、D. B. Milo˘sevi´c、G. G. Paulus 和 H. Walther，阈上电离：从经典特征到量子效应，《原子、分子与光物理进展》48，35（2002）。[11] A. McPherson、G. Gibson、H. Jara、U. Johann、T. S. Luk、I. A. McIntyre、K. Boyer 和 C. K. Rhodes，稀有气体中真空紫外辐射多光子产生的研究，《美国光学学会杂志B》4，595（1987）。[12] M. Ferray、A. L'Huillier、X. F. Li、L. A. Lompre、G. Mainfray 和 C. Manus，稀有气体中1064纳米辐射的多次谐波转换，《物理学杂志B》21，L31（1988）。[13] P. B. Corkum，强场多光子电离的等离子体视角，Physical Review Letters 71，1994（1993）。[14] M. Lewenstein、Ph. Balcou、M. Yu. Ivanov、A. L'Huillier 和 P. B. Corkum，低频激光场产生高次谐波的理论，《物理评论A》49，2117（1994）。[15] F. Krausz 和 M. Ivanov，阿秒物理，《现代物理评论》81，163（2009）。[16] P. Eckle、A. N. Pfeiffer、C. Cirelli、A. Staudte、R. D¨orner、H. G. Muller、M. Buttiker 和 U. Keller，氦中的阿秒电离与隧穿延迟时间测量，《科学》322，1525（2008）。[17] A. N. Pfeiffer、C. Cirelli、M. Smolarski、D. Dimitrovski、M. Abu-samha、L. B. Madsen 和 U. Keller，阿秒钟揭示原子中激光诱导隧穿电流流动的自然坐标，Nature Physics 8，76-80（2012）。[18] A. S. Landsman、C. Hofmann、A. N. Pfeiffer、C. Cirelli 和 U. Keller，探测任意椭圆率激光下隧穿电离中库仑效应的统一方法，Physical Review Letters 111，263001（2013）。[19] N. Camus、E. Yakaboylu、L. Fechner、M. Klaiber、M. Laux、Y. Mi、K. Z. Hatsagortsyan、T. Pfeifer、C. H. Keitel 和 R. Moshammer，量子隧穿时间的实验证据，Physical Review Letters 119，023201（2017）。[20] W. Quan、V. V. Serov、M. Z. Wei、M. Zhao、Y. Zhou、Y. L. Wang、X. Y. Lai、A. S. Kheifets 和 X. J. Liu，利用全离子碎片探测进行阿秒分子角条纹测量，Physical Review Letters 123，223204（2019）。

[21] U. S. Sainadh, H. Xu, X. Wang, A. Atia-Tul-Noor, W. C. Wallace, N. Douguet, A. Bray, I. Ivanov, K. Bartschat, A. Kheifets, R. T. Sang, and I. V. Litvinyuk，《氢原子中的阿秒角向条纹成像与隧穿时间》，Nature（伦敦）568，75–77（2019）。[22] M. Han, P. Ge, J. Wang, Z. Guo, Y. Fang, X. Ma, X. Yu, Y. Deng, H. J. W¨orner, Q. Gong, and Y. Liu，《利用相位之相位阿秒钟完整表征亚库仑势垒隧穿》，Nature Photonics 15，765（2021）。[23] R. Boge, C. Cirelli, A. S. Landsman, S. Heuser, A. Lud- wig, J. Maurer, M. Weger, L. Gallmann, and U. Keller，《探测强场隧穿电离中的非绝热效应》，Physical Review Letters 111，103003（2013）。[24] L. Torlina, F. Morales, J. Kaushal, I. Ivanov, A. Kheifets, A. Zielinski, A. Scrinzi, H. G. Muller, S. Sukiasyan, M. Ivanov, and O. Smirnova，《阐释隧穿时间的阿秒钟测量》，Nature Physics 11，503（2015）。[25] M. Klaiber, K. Z. Hatsagortsyan, and C. H. Keitel，《多光子电离中的隧穿动力学与阿秒钟校准》，Physical Review Letters 114，083001（2015）。[26] A. W. Bray, S. Eckart, and A. S. Kheifets，《阿秒钟的 Keldysh–Rutherford 模型》，Physical Review Letters 121，123201（2018）。[27] D. Trabert, N. Anders, S. Brennecke, M. S. Sch¨offler, T. Jahnke, L. Ph. H. Schmidt, M. Kunitski, M. Lein, R. D¨orner, S. Eckart，《氢原子的非绝热强场电离》，Physical Review Letters 127，273201（2021）。[28] J. Y. Che, C. Chen, W. Y. Li, S. Wang, X. J. Xie, J. Y. Huang, Y. G. Peng, G. G. Xin, and Y. J. Chen，《光电子发射在量子—经典边界处的响应时间》，arXiv:2111.08491。[29] J. Y. Che, J. Y. Huang, F. B. Zhang, C. Chen, G. G. Xin, and Y. J. Chen，《激光椭圆率在阿秒钟中的作用》，《物理评论A》107，043109（2023）。[30] J. Y. Che, C. Chen, W. Y. Li, W. Li, and Y. J. Chen，《原子强场电离响应时间研究进展》，《物理学报》72，193301（2023）。[31] S. Q. Shen, Z. Y. Chen, S. Wang , J. Y. Che, and Y. J. Chen，《拉伸氢原子的强场电离中的库仑效应》，《物理评论A》110，033106（2024）。[32] Z. Y. Chen, S. Q. Shen, Y. P. Li, Z. Q. Yang, J. Y. Che, and Y. J. Chen，《原子和分子的激光诱导隧穿电离中的库仑相关对称性》，《物理评论A》111，053118（2025）。[32] T. M. Yan, S. V. Popruzhenko, M. J. J. Vrakking, and D. Bauer，《量子轨道揭示强场电离中的低能结构》，《物理评论A》105，253002 2010( )。[33] S. P. Goreslavski, G. G. Paulus, S. V. Popruzhenko, and N. I. Shvetsov-Shilovski，《阈上电离中的库仑不对称性》，《物理评论A》93，233002（2004）。[34] W. Xie, Z. Li, M. Li, Y. Liu, Y. Liu, C. Cao, K. Guo, K. Liu, Y. Zhou, and P. Lu，《阈上电离中阿秒时间延迟的观测》，Physical Review Letters 133，183201（2024）。[35] C. Chen, X. X. Ji, W. Y. Li, X. Han, and Y. J. Chen，《强场二维隧穿电离中的局域最概然路径与经典—量子对应》，《物理评论A》104，013106（2021）。