arXiv:2601.05843v1 [cs.LO] 9 Jan 2026

关键词：粗糙集代数、离散对偶、表示定理、分配格、正则双 Stone 代数、布尔代数、模态逻辑 **S5**

1 引言

本文将阐述离散对偶在知识图景中的位置，并介绍它在粗糙集领域中的一些实例。当代知识领域可分为两大类，即科学与人文学科。科学包括数学、物理学等领域；人文学科则包括文学、心理学等。科学领域中的每个学科都有自己的方法论。科学领域各学科的方法论可以追溯到启蒙时代的开端。在其论著《style id='1'>Discourse de la

• **代数表示定理**

每个 $L \in$ Alg都可嵌入其典范结构的复代数Cm(Cs(L)。

2 单子代数

我们从粗糙集中得到的第一类代数，直接源于 Pawlak 的信息近似概念。让我们回顾一下近似空间X，θ的近似算子的定义，其中 θ是 X上的等价关系。如果 $Y \subseteq X$，则

Y_θ：$\overline{=}\{x \in Y$：$(\exists y \in Y)x\ \theta\ y\}$，$Y$的上近似，（Up）$Y_\theta$：$=\{x \in Y$：$(\forall y \in Y)[\underline{x}\ \theta\ y \Rightarrow y \in Y]\}$，$Y$的下近似。（Low）

如果理解了 θ，我们将省略下标。由于 θ是一个等价关系，我们可以将X，θ视为模态逻辑**S5**的 Kripke 框架，其可及关系为

引理 2.1。 设$\langle B, f\rangle$ 是一个单子代数。那么，

$$a \leq f^{\partial}(f(a)), \tag{2.4}$$

$$f(a) \leq b \iff a \leq f^{\partial}(b), \tag{2.5}$$

$$a \cdot f(b) = \mathbf{0} \iff f(a) \cdot b = \mathbf{0}, \tag{2.6}$$

$$f(a \cdot f(b)) = f(a) \cdot f(b), \tag{2.7}$$

欧几里得公理 ***5***，f 和 f^{∂} 互为伴随。f 是自共轭的，柱体公理。

3 充分性代数

虽然给定近似空间 X，θ 后，集合的上近似和下近似是单子代数的自然语义解释，但我们将引入另一种可从近似空间自然得到的算子。设 R 是 X 上的一个二元关系，并定义映射 $[[R]]\colon 2^X \to 2^X$，使得

$$[[R]](Y) := \{x : (\forall y)[y \in Y \Rightarrow x\ R\ y]\} = \{x : Y \subseteq R(x)\}. \tag{3.1}$$

现在我们得到了有界分配格与有序框架之间的离散对偶性：

1. 每个 *RDSA* 都可以嵌入其典范结构的复代数中。*2.* 每个 *RDSA* 框架都可以嵌入其复代数的典范结构中。

一个粗关系框架是一个结构 $\mathbf{X} = X, \leq, R, f, I$，其中 $\leq$ 是 X 上的偏序，X 是长度至多为二的链的不交并；R 是 X 上的三元关系，$f: X \to X$ 是一个函数，且 $\emptyset \neq I \subseteq X$。若 $x \in X$，我们用 x^- 表示 x 下方的极小元素，用 x^- 表示 x 上方的极大元素；注意 $x \in \{x^-, x^-\}$。

1. 粗糙关系代数的典范框架是一个粗糙关系框架。*2.* 粗糙关系框架的复代数是一个粗糙关系代数。*3. Stone* 嵌入 $h: L \to \mathsf{Cm}\mathsf{Cs}(L)$ 定义为 $h(a) := \{F \in Prim(L) : a \in F\}$ 是粗糙关系代数的一个嵌入。*4.* 映射 $k: X \to \mathsf{Cs}\mathsf{Cm}(X)$ 定义为 $k(x) = \{A \in L_X : x \in A\}$ 是一个框架嵌入。

8 总结与展望

本文概述了离散对偶，讨论的代数类和框架类是依据双重标准选定的。所选取的

9 参考文献

[1] Banerjee, M. 和 Chakraborty, M. K.（2004）。粗糙集代数。载于 Pal, S. K.、Polkowski, L. 和 Skowron, A. 编，《粗糙神经计算：用词语进行计算的技术》，第 157–184 页。Springer Verlag，柏林，海德堡。

[2] Białynicki-Birula, A. 和 Rasiowa, H.（1957）。关于拟布尔代数的表示。波兰科学院通报，第三辑。，5：259–261，XXII。MR87628。[3] Comer, S. D.（1993）。关于信息系统、粗糙集与代数逻辑之间联系的研究。载于逻辑与计算机科学中的代数方法（华沙，*1991*），Banach 中心出版物第 28 卷，117–124 页。波兰科学院数学研究所，华沙。MR1446277。[4] Davis, C.（1954）。模态算子、等价关系与射影代数。美国数学杂志，76：747–762。MR64718。[5] Descartes, R.（1637）。《谈谈方法：正确运用理性，在科学中寻求真理》。Ian Maire 出版社，莱顿（Leyde）。法文原版。[6] Descartes, R. 和 Veitch, J.（1912）。《谈谈方法》《第一哲学沉思集》《哲学原理》。麦克米伦公司，伦敦。A. D. Lindsay 作序。[7] Düntsch, I.（1994）。粗糙关系代数。基础信息学，21(4)：321–331。MR1322578。[8] Düntsch, I.（1997）。粗糙集逻辑。理论计算机科学，179(1-2)：427–436。MR1454599。[9] Düntsch, I.、Gruszczyński, R. 和 Menchón, P.（2023）。介于关系代数。《符号逻辑杂志》，1–25 页。剑桥大学出版社在线发表，2023年11月15日。

[10] Düntsch, I.、Gruszczyński, R. 和 Menchón, P.（2026）。带二元算子的混合逻辑。《符号逻辑杂志》。即将出版。[11] Düntsch, I. 和 Orłowska, E.（2000）。超越模态：充分性与混合代数。载于 Orłowska, E. 和 Szałas, A. 编，计算机科学应用中的关系方法，277–299 页，海德堡。Physica 出版社。[12] Düntsch, I. 和 Orłowska, E.（2004）。由信息系统产生的布尔代数。纯粹与应用逻辑年刊，127(1-3)：77–98。MR2071169。[13] Düntsch, I. 和 Orłowska, E.（2011）。双 Stone 代数的离散对偶。逻辑学研究，99(1-3)：127–142。MR2836437。[14] Düntsch, I. 和 Orłowska, E.（2013）。粗糙关系代数的离散对偶。基础信息学，127(1-4)：35–47。MR3134947。[15] Düntsch, I.、Orłowska, E. 和 Tinchev, T.（2017）。混合代数及其逻辑。非经典逻辑应用杂志，27(3-4)：304–320。MR3779213。[16] Düntsch, I. 和 Winter, M.（2006）。重新审视粗糙关系代数。基础信息学，74(2-3)：283–300。MR2284196。[17] Gargov, G.、Passy, S. 和 Tinchev, T.（1987）。布尔推测的模态环境（初步报告）。载于数理逻辑及其应用（*Druzhba，1986*），253–263 页。Plenum，纽约。MR0945200。[18] Goranko, V.（1988）。带有必然性和充分性的模态语言中的可定义性。保加利亚科学院学报，41(4)：9–11。MR0948060。[19] Halmos, P. R.（1956）。代数逻辑。一元布尔代数。数学汇编，12：217–249。MR78304。[20] Humberstone, I. L.（1983）。不可达世界。圣母大学形式逻辑杂志，24(3)：346–352。MR0703499。[21] Iwiński, T. B.（1987）。粗糙集的代数方法。波兰科学院数学通报，35(9-10)：673–683。MR937747。[22] Jónsson, B. 和 Tarski, A.（1951）。带算子的布尔代数。一。美国数学杂志，73：891–939。MR44502。[23] Katriňák, T.（1973）。分配双 p-代数的结构。正则性与同余。《普适代数》，3：238–246。MR332598。

[38] Tarski, A. (1941). 关系演算。《符号逻辑杂志》, 6:73–89. MR5280.[39] van Benthem, J. (1979). 极小道义逻辑。波兰科学院哲学与社会学研究所《逻辑分册通报》, 8(1):36–42. MR0534740.[40] van Benthem, J. (1984). 对应理论。In Gabbay, D. and Guenthner, F., editors, 《哲学逻辑手册：第三卷》, 第325–408页。Reidel, 多德雷赫特。[41] Varlet, J. (1972). 一种类型为＜2211000>的正则簇。《普适代数》, 2:218–223. MR325477.[42] Varlet, J. C. (1968). 三值Łukasiewicz代数。《列日皇家科学学会通报》, 37:399–408. MR237388.[43] Varlet, J. C. (1969). 关于三值Łukasiewicz代数的考察。《列日皇家科学学会通报》, 38:462–469. MR260631.