arXiv:2601.05863v1 [math.DS] 9 Jan 2026

´适用于 Bebutov 移位的一个庞加莱–本迪克松定理及其在切换系统中的应用

JAIRO BOCHI 和 IAN D. MORRIS

Abstract. 我们证明了一个版本的庞加莱–本迪克松定理，该定理适用于二维球面上的某些曲线类，而这些曲线不必是球面上某个流或半流的轨道。利用这一结果，我们将庞加莱–本迪克松定理推广至二维球面和射影平面的紧子集上的连续半流情形；给出某些低维仿射控制系统存在周期轨迹的新充分条件；并为三维齐次常微分方程切换系统的全局一致指数稳定性提出新的判据。特别地，我们证明，周期渐近稳定性蕴含三维实线性切换系统和二维复线性切换系统的全局一致指数稳定性。结合第二作者近期的一项结果，我们解决了 R. Shorten、F. Wirth、O. Mason、K. Wulff 和 C. King 提出的问题，并解决了连续时间下 Lagarias-Wang 有限性猜想的一个自然类比。

Contents

1. 引言与动机 22. 别布托夫´-Bendixson 定理：切换别布托夫移位 52.1. 基本定义与结果 52.2. 平面拓扑初探 92.3. 定理 2.8 的证明 132.4. 定理 2.4 的证明 142.5. 若干问题 163. 应用 173.1. 半流的 Poincaré´-Bendixson 定理 173.2. 切换连续向量场的周期极限轨迹 183.3 三维及以下实维空间中切换齐次系统的稳定性 203.4. 三维及以下实维空间中切换线性系统的稳定性 233.5. 二复维空间中切换线性系统的稳定性 253.6. 切换线性系统极值轨迹的非唯一性 264. 推广与未来研究方向 27参考文献 28

Date：2026年1月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：37B55、37C27、37E35、93C30、93D20；次要分类：34A38、34A60。

1. Introduction and motivation

若 $\Psi_1, \dots, \Psi_N$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的连续向量场，我们将由 $(\Psi_1, \dots, \Psi_N)$ 所定义的微分方程切换系统 的轨迹定义为任意满足如下非自治 Carathéodory 微分方程的绝对连续函数 $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$：

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\Psi_i(x(t)) \tag{1}$$

对勒贝格几乎处处的 $t \geqslant 0$，其中每个 u_i 都是勒贝格可测函数 $[0, \infty) \to [0, 1]$ 并且 $\sum_{i=1}^{N} u_i = 1$ 勒贝格几乎处处成立。切换系统的微分方程是控制数学理论中一个经典且持续受到关注的主题：例如参见 [14, 35, 36, 48, 51]。

在本文中，函数 Ψ_i 通常是齐次的或线性的；在此背景下，我们尤其关注原点的稳定性。下面回顾这一背景下的一些标准定义。我们称由 $(\Psi_1、\dots、\Psi_N)$ 定义的切换系统是全局一致指数稳定的，如果存在C、$\kappa > 0$，使得对于所有 $t \geqslant 0$ 以及每条轨迹 x都有 $\|x(t)\| \leqslant Ce^{-\kappa t}\|x(0)\|$；称其为李雅普诺夫稳定的，如果存在 $C > 0$，使得对于所有 $t \geqslant 0$以及每条轨迹 x都有 $\|x(t)\| \leqslant C\|x(0)\|$；称其为周期渐近稳定的，如果对于所有满足以下条件的轨迹都有 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$：底层切换律 $(u_1、\dots、u_N)$ 在（1）中是常值的或周期的（即存在某个 $p > 0$，使得对于每个 $i = 1、\dots、N$，几乎处处有 $u_i(t+p) = u_i(t)$）。我们将特别关注每个 Ψ_i 都由一个线性映射 A_i给出的情形：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$。促使本文展开研究的核心问题如下：

问题 1.1 ([48, §4.10], 另请参见 [24])。设 $A_1, \dots, A_N\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为线性的。若由 $(A_1, \dots, A_N)$ 定义的切换系统是周期渐近稳定的，它是否也全局一致指数稳定？

这个问题在离散时间情形下有一个广为人知的对应问题，表述如下。令 $M_d(\mathbb{R})$ 表示所有 $d \times d$ 实矩阵构成的向量空间。给定一个元组 $\mathsf{A} = (A_1, \dots, A_N) \in M_d(\mathbb{R})^N$，我们称由 A 定义的离散时间切换系统 的轨迹为满足 $x_{n+1} \equiv A_{i_n}x_n$ 的任意向量序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$，其中某个序列 $(i_n)_{n=1}^{\infty} \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$。类似地，若存在 $C, \kappa > 0$使得对所有 $n \geqslant 1$ 以及所有轨迹 (x_n)，均有 $\|x_n\| \leqslant Ce^{-\kappa n}\|x_1\|$，则称该离散时间切换系统全局一致指数稳定；若对每个由周期切换律 (i_n) 生成的轨迹 (x_n)，都有 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，则称其周期渐近稳定。L. Gurvits 在 [23] 提出了这样的问题：每个周期渐近稳定的离散时间线性切换系统是否都全局一致指数稳定？这个问题还可以表述为以下等价形式。给定 $\mathsf{A} = (A_1, \dots, A_N) \in M_d(\mathbb{R})^N$，定义联合谱半径 为如下量

$$\varrho(\mathsf{A}) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \max_{i_1,\dots,i_n} \|A_{i_n} \cdots A_{i_1}\|^{\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

可以证明（例如参见 [7, 30]），联合谱半径等于上确界

$$\sup_{(i_n)\ \text{periodic}} \lim_{n\to\infty} \|A_{i_n} \cdots A_{i_1}\|^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

如果对于某个 A 满足 $\varrho(\mathsf{A}) > 0$，这个上确界无法取到最大值，那么对于 $\hat{\mathsf{A}} := \varrho(\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}$ 且还满足 $\varrho(\hat{\mathsf{A}}) = 1$的情形也一样。该系统不可能是全局一致指数稳定的，否则我们就会有 $\hat{\varrho}(\mathsf{A}) < 1$；但由于上确界无法取到，它是周期渐近稳定的。因此，当且仅当上确界（3）总能取到时，Gurvits 的问题才有肯定答案。这个上确界总能取到，正是 J.C. Lagarias 和 Y. Wang 各自于 [34]提出的有限性猜想。有限性猜想在一维情形下显然成立，但 Bousch 和 Mairesse 于 2002年证明，在所有更高维数下该猜想均不成立：参见 [10] ，以及随后发表的 [8, 27]。

与有限性猜想类似，问题 1.1 的答案会随维数 d而变化。若 $d = 1$ ，则每个 1×1 矩阵 A_i 都可视为一个实数 a_i。在周期渐近稳定的情况下，具有常值切换律 $(u_1, \dots, u_N)$ 的轨迹显然必须收敛到零，因此每个 a_i 都必须为负；由此很容易推出全局一致指数稳定性，其中 $C = 1$且 $\kappa = \min_i |a_i|$。对于更高维的情形，可以按如下方式处理。事实证明，一般的 d维问题可以化归为这样一个特殊情形：线性映射 $A_1, \dots, A_N$除了 $\{0\}$和 $\mathbb{R}^d$之外没有公共不变子空间，并且 $(A_1, \dots, A_N)$处于稳定性边界，具体而言，对于每个负实数 α ， $(A_1 + \alpha I, \dots, A_N + \alpha I)$ 都是全局一致指数稳定的，但对于任何正数 α都不是。要肯定地解决问题 1.1 的这一核心情形，只需证明具有上述性质组合的系统既非全局渐近稳定，也非周期渐近稳定。对于这类系统，可以证明存在定义在 $\mathbb{R}^d$上的范数 $|||\cdot|||$ ，通常称为 Barabanov 范数，使得 $\mathbb{R}^d$ 中的每一点都是至少一条满足如下性质的解的初始点：沿该解， $|||x(t)|||$ 保持常值（见 [4, 14]）。这立即表明该系统是李雅普诺夫稳定的，但并非全局一致指数稳定；要完成论证，还必须构造一个由周期切换律$(u_1, \dots, u_N)$生成、且不趋于原点的方程 (1) 的解。显然，只要存在一条非单射的非零轨迹 x，便足以保证这种解存在；例如，若 $x(0) = x(T)$ ，只需将底层切换律在区间 $[0, T]$上的取值 $(u_1, \dots, u_N)$周期性重复，就能得到一条新轨迹 $y(t)$，它在 $[0, T]$上与 $x(t)$重合，周期为 T，因此不会趋于零。

因此，要解决的核心问题如下：给定某个未知范数 $|||\cdot|||$ 的单位球面上的每一点，都是系统 (1) 至少一条轨迹的初始条件，且该轨迹始终停留在该单位球面上，证明存在一条非单射轨迹，其取值始终仅落在该单位球面上。在 $d = 2$ 的情形下，这相当直接：$\mathbb{R}^2$ 上某个范数的单位球面是一个拓扑圆，而拓扑圆上的单射轨迹必定收敛到某一点；很容易证明，该点是线性映射 A_1、……、A_N的某个凸组合的不动点。因此，要么存在一条非单射轨迹，沿 Barabanov 范数的单位圆作周期回路；要么存在一条常值轨迹；但无论哪种情况，周期渐近稳定性都不成立，正如所需。这使得问题 1.1 在 $d = 2$的情形下得到了肯定的答案；事实上，这一结果已被多次重新发现、重新分析并加以推广（见 [1, 9, 37, 42, 44, 53]）。这一分析的一个推论——相比之下，直到最近才受到关注——是，问题 1.1 在维数 4 时的答案是否定的。

要证明这一点，首先考虑一对处于稳定性边界上的 2×2矩阵 (A_1, A_2)：该系统有周期轨迹，但没有静止轨迹。可以证明，这样的系统还具有如下性质：每个非零向量都是唯一一条周期轨迹的初始值，而且该轨迹由唯一的周期切换律生成，其周期为 $p > 0$，且与原点的位置无关。由这四个矩阵构成的四维切换系统的轨迹，恰好是张量积 $x(t) \otimes y(t\sqrt{2})$ 的线性组合，其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是切换系统 (A_1, A_2) 的轨迹。若底层切换律的周期不是p 的整数倍，则 $x(t)$ 收敛到零，而 $y(t\sqrt{2})$ 保持有界；但若周期是 p 的整数倍，则 $x(t)$ 保持有界，而 $y(t\sqrt{2})$ 收敛到零。因此，由周期切换律生成的该四维系统的所有轨迹都趋于零，该系统是周期渐近稳定的。另一方面，只需考虑一个张量积 $x(t)\otimes x(t\sqrt{2})$，其中$x(t)$ 是周期的，便可轻易看出这个张量积系统并非全局一致指数稳定。该论证的详细版本见 [38]。这一推理立即表明，问题 1.1 在所有维数 $d \geqslant 4$下的答案都是否定的。

这就留下了问题 1.1 中维数恰好为三的情形。根据经典的 Poincar´e-Bendixson 定理，由平面球面上的唯一可积向量场定义的流的任意轨道，其 ω-极限集必然包含一个静止点或一个周期轨道。基于这一点，我们预期，方程 (1) 的每条取值于 $\mathbb{R}^3$上的巴拉巴诺夫范数单位球面的轨道，同样应当收敛到一条静止轨道或自交轨道。然而，这一结果远远超出了现有文献的研究范围。Hartmann 的经典教材 [28] 处理了由 S^2 上非唯一可积的连续向量场定义的流的情形（特别说明了：从给定点出发的轨道具有非唯一性——正如在我们的语境中所发生的那样——并不是证明此类定理时的根本障碍），而非自治微分包含的 Poincar´e-Bendixson 型结果则见于 [20, 21]等文献。由于巴拉巴诺夫范数的单位球面通常只是一个利普希茨流形，而非可微流形，并且与该球面相切的方向集合通常不是凸集，因此 [20, 21] 中的结果所要求的假设并不满足。另一方面，E. Pyatnitskiy 和 L. Rapoport 在 [44, §X], 中，借助其早期结果 [43, Theorem 3], , 对一种合理的推理思路作了简要勾勒，内容如下。考虑一条取值于巴拉巴诺夫范数单位球面的回归轨迹 $x(t)$，并假设 $x(t)$ 的值域包含于某条预先指定轨迹的 ω-极限集内。如果 $x(t)$ 是非单射的，那么构造一条起源于轨迹 $x(t)$上某处的周期轨道便是平凡的。否则，方程 (1) 在初始状态 $x(0)$ 下的解的所有可能初始方向的集合，恰好是 $\{A_1x(0)、\ldots\ldots、A_Nx(0)\}$的凸包。如果该集合包含原点，那么在 $x(0)$ 处存在一条静止轨道，问题即告解决；否则，根据紧性和凸性，该集合必然被限制在某个经过原点的平面 V 所定义的开半空间内。这意味着，方程 (1) 中每条起点接近 $x(0)$ 的轨道都必须横截于平面 $x(0) + V$运动，并且所有这些轨道都必须进入由该平面定义的两个开半空间中的同一个。

该平面。 $x(0)+V$ 与巴拉巴诺夫范数单位球面的交集因而具有经典 Poincar´e-Bendixson 定理证明中所需的横截面的性质，论证可以大致沿用标准思路进行，只需作出与 [28] 中相同的适度修改，以适应通常情况下可能有多条不同轨道从同一点发出的事实。

在本文中，我们将对问题 1.1 的三维情形采取一种更一般且更为基础的方法，即在拓扑空间 S^2 上的连续曲线层面开展研究；这些曲线配备了适当的重现性和切换概念。除了对三维中的问题 1.1 给出肯定回答——从而完成对 Lagarias-Wang 有限性猜想这一自然的连续时间类比的解决——这还将使我们能够考察更一般的齐次切换系统的周期渐近稳定性，并建立新的 Poincar´e-Bendixson 型结果，适用于不具备可微正则性、且定义在球面或射影平面的子集上的半流，而这些子集不一定是拓扑流形。在 §2 中，我们将陈述并证明一类 Bebutov 移位的 Poincar´e-Bendixson 定理，这些移位取值于S^2，并且允许在不同轨道之间进行切换。在 §3 中，我们将介绍这一结果的各种应用，其中包括但不限于对三维中问题 1.1 的肯定解决。本文最后简要讨论我们论证可能的推广。

2. A Poincaré-Bendixson Theorem for switched Bebutov shifts

2.1. 主要定义和结果。 我们将切换微分方程的轨道视为 S^2 上的曲线，这种处理方式抽象自微分方程本身，通过将其表示为 Bebutov移位，定义如下：

定义 2.1。 设 Z 是一个紧致可度量拓扑空间。 Z值 *Bebutov*移位 定义为从半直线$[0,\ \infty)$ 到 Z 的连续函数集合 $\mathfrak{X}$，并满足以下两个性质：

(i) 紧性： 集合 $\mathfrak{X}$关于 $C([0,\ \infty),\ Z)$上的紧开拓扑是紧的。(ii) 移位不变性： 对于任意 $\phi\in\mathfrak{X}$ 和 $\tau\geqslant 0$，由$(\sigma^\tau\phi)(t)\coloneqq\phi(\tau+t)$ 定义的函数 $\sigma^\tau\phi$ 属于 $\mathfrak{X}$。

由于 Z是可度量的， $C([0,\ \infty),\ Z)$ 上的紧开拓扑与紧集上一致收敛的拓扑重合（例如参见 [39, 第 285]页）。

注 *2.2*。这类动力系统的研究源于 Bebutov 和 Kakutani 的工作 [5, 32]，他们探讨了将任意连续时间动力系统嵌入 $C(\mathbb{R}、\ [0、\ 1])$的问题。通过将定义域 $[0、\ \infty)$ 替换为另一个拓扑半群 S，可以在更广泛的意义上定义 Bebutov 移位；事实上，这一定义涵盖了符号动力系统的标准情形，即赋予 $C(\mathbb{Z}、\ \{1、\ .....、\ N\})$ 或 $C(\mathbb{N}、\ \{1、\ .....、\ N\})$紧开拓扑。本文将只研究半群 $S=[0、\ \infty)$。</output>

我们将简单地称 $\mathfrak{X}$ 为一个*Bebutov*移位，如果它是某个紧致可度量拓扑空间 Z 上取值于 Z 的 Bebutov移位。如果 $\mathfrak{X}$ 是一个 Bebutov移位，那么

以下事实的验证是直接的：$(\sigma^t)_{t\geqslant 0}$ 在 $\mathfrak{X}$ 上定义了一个连续半流；此外，在空间 Z 上固定任意一个度量后，$\mathfrak{X}$ 的元素构成一个一致等度连续族的函数，特别地，其中每个函数都是一致连续的。

一般而言，取值于二维球面的 Bebutov移位不一定包含任何周期函数或常值函数：例如，形如

$$t \mapsto \Big(\sin(t+\alpha)\cos(\sqrt{2}(t+\beta)), \sin(t+\alpha)\sin(\sqrt{2}(t+\beta)), \cos(t+\alpha)\Big) \in S^2 \tag{4}$$

当 α时，$\beta \in \mathbb{R}$ 显然是一个不含周期或常值元素的 Bebutov移位。然而，该系统的轨道显然不是单射的，因此，如果这些曲线是方程（1）的轨道，那么只需重复其中一个函数在非单射性的最小区间上所经过的路径，就可以轻松构造出一条周期轨迹。为了能够进行此类构造，我们因此需要考虑配备了切换概念的 Bebutov移位。

定义 2.3。若 Bebutov移位 $\mathfrak{X}$ 满足以下附加公理，则称其为切换贝布托夫移位：

(iii) 切换：若 $\phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{X}$ 满足 $\phi_1(\tau) = \phi_2(\tau)$，其中 $\tau > 0$，则由 $\psi(t) = \phi_1(t)$ 定义的函数 $\psi \in C([0,\infty), Z)$ 对所有 $t \in [0,\tau]$ 均成立，且 $\psi(t) = \phi_2(\tau)$ 对所有 $t \in [\tau,\infty)$ 均成立，该函数是 $\mathfrak{X}$中的一个元素。

我们注意到，若 $\mathfrak{X}$ 是一个取值于 Z 的 Bebutov移位，且 Z' 是Z的闭子集，那么集合 $\mathfrak{X}' \coloneqq \{\phi \in \mathfrak{X}: \ \phi(t) \in Z' \text{ 对所有 } t \geqslant 0\}$ 均是一个取值于 Z' 的 Bebutov移位（尽管它可能为空）；若 $\mathfrak{X}$ 是一个切换贝布托夫移位，那么 $\mathfrak{X}'$也是如此。我们将在§3 中验证，$\mathbb{R}^d$ 的紧子区域内切换微分方程的轨道构成切换贝布托夫移位；任意紧致度量空间上的流和半流的轨道也同样如此。

本文确立的结果将是以下适用于取值在二维球面或射影平面中的切换贝布托夫移位的 Poincar´e-Bendixson 定理的推论：

定理 2.4。设 Z 是一个紧致拓扑空间，且同胚于 S^2 或 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, 的某个子集；设 $\mathfrak{X}$ 是一个取值于 Z的切换贝布托夫移位。若 $\phi \in \mathfrak{X}$关于 $\mathfrak{X}$上的移位半流是复现的，则存在一个 $\chi \in \mathfrak{X}$，它是预周期的，且满足 $\chi(0) = \phi(0)$。若进一步假设 ϕ 是单射，则可取 χ 为常值的。

显然，定理 2.4 蕴含这样的切换贝布托夫移位 $\mathfrak{X}$ 包含一个周期的或常值的元素，因为根据伯克霍夫复现定理，紧豪斯多夫空间上的连续半流必有一个极小集，因而存在一个复现点。我们对这一观察作如下更强的表述：

推论 2.5。设 Z 是一个紧致拓扑空间，且同胚于 S^2 或 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, 的某个子集；设 $\mathfrak{X}$ 是一个取值于 Z的切换贝布托夫移位，并设 $\phi \in \mathfrak{X}$。那么存在一个周期函数 $\chi \in \mathfrak{X}$，其取值被限制在 ϕ的 ω-极限集内，

$$\omega(\phi) \coloneqq \bigcap_{T\geqslant 0} \overline{\phi([T,\infty))}. \tag{5}$$

证明。 集合 $\mathfrak{X}' \coloneqq \{\psi \in \mathfrak{X}\colon\ \psi(t) \in \omega(\phi)$ 对于所有 $t \geqslant 0\}$ 都是一个切换贝布托夫移位，并且非空，因为它包含 $\sigma^t\phi$ 在极限$t \to \infty$时的所有聚点。特别地，根据伯克霍夫复现定理，它包含一个复现元；根据定理 2.4，它包含一个周期元。 □

注 2.6。定理 2.4 与 V.V. Filippov 的某些结果颇为相似，这些结果见 [21]。具体而言，在 [21, §16.4] Filippov 在自治空间这一类对象的背景下，得到了一个版本的 Poincar´e-Bendixson 定理；这类对象大致对应于 switched Bebutov 系统 $\mathfrak{X}$，其元素的定义域为 $\mathbb{R}$，并且还具有以下性质：$\{\phi(t)\colon\ \phi \in \mathfrak{X},\ t \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^d$的开子集。（后一假设使得可以将同伦应用于轨道分析，这是 Filippov 证明中的一种关键方法。）Filippov 的结果本身并不适用于本文所考虑的任何问题，因为我们的应用通常都不同时满足这两个附加假设。例如，对于 $\mathbb{R}^3$ 上的 switched 线性微分方程的 Barabanov 范数，一般存在无法从 $[0、\ \infty)$ 延拓至 $\mathbb{R}$的 Barabanov 范数单位球面上的轨道：见 [11,命题 5]。

注 2.7。下面这个更为微妙的例子表明，即使进一步假设 $\mathfrak{X}$ 的所有元素都是单射，也不能从定理 2.4 的假设中删去切换性质。存在一个光滑微分同胚 $f\colon\ S^2 \to S^2$，它有四个双曲排斥不动点 $p_1, \ldots, p_4$，使得集合 $\Lambda \coloneqq \bigcap_{n\geqslant 0} f^n(S^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_4\})$ 是一个具有一维稳定丛的双曲吸引子，因此由不稳定流形层状化；这些流形是光滑浸入的 $\mathbb{R}$ 的副本。这个集合 Λ 称为 Plykin 吸引子。构造细节见 [33, §17.2] 和 [17]；第二篇参考文献还附有插图。定义 $\mathfrak{X}$ 为所有光滑的单位速度参数化曲线 $\phi\colon\ [0,\infty) \to S^2$ 的集合，其像包含于 Λ：于是 $\mathfrak{X}$ 是一个 Bebutov 移位，并且完全由单射曲线组成，但没有周期轨道； $\mathfrak{X}$ 上的移位半流甚至是极小的，即每条轨道都稠密。Λ 的每个路径连通分支都由 $\mathfrak{X}$ 中的某个元素沿两个方向遍历，但行进方向相反的轨道可能无法拼接，因为 $\mathfrak{X}$ 的定义不允许轨道瞬时反转行进方向。因此， $\mathfrak{X}$ 不满足定义 2.3 中的切换性质，因而不是切换贝布托夫移位。开集 $S^2 \setminus \Lambda$ 有三个连通分支，它们具有共同的拓扑边界，从而构成沃达湖；参见 [17]。

为证明定理 2.4，我们采用以下策略。若 ϕ 是非单射的，那么通过谨慎但直观上简单地应用定义 2.1 和 2.3 的公理，我们可以沿着非单射性的最小区间周期性重复 ϕ 的轨迹，从而构造出所需的函数 χ。如果切换贝布托夫移位 $\mathfrak{X}$ 存在这样的轨道：它们可以在 $\phi(0)$的任意小邻域内停留任意长的时间，那么一个简单的紧性论证便表明，取值为常值 $\phi(0)$ 的函数属于 $\mathfrak{X}$，于是结论得证。定理 2.4 中第三种也是最困难的情形是： ϕ 是单射的，并且存在δ、$T > 0$，使得对于任何持续时间至少为 T的区间， $\phi(t)$ 都无法始终停留在 $\phi(0)$的 δ-邻域内。在这种情形下，我们将证明存在区间 $[t_1、\ t_2]$ 和 $[t_3、\ t_4]$，使得 ϕ 在区间 $[t_1、\ t_2]$内沿 $B_\delta(\phi(0))$ 描出一条弧，随后在

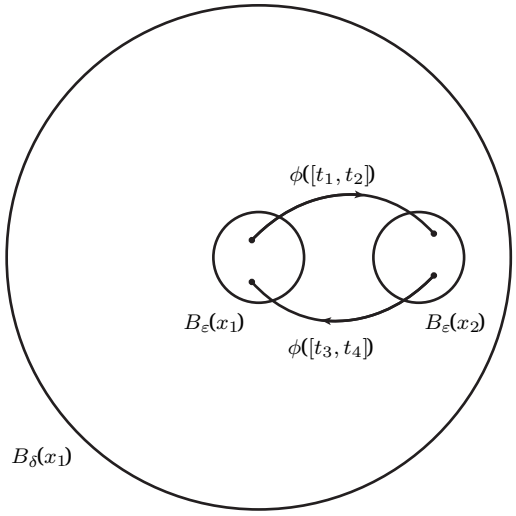

FIGURE 1. 定理 2.8产生的两段轨迹。

区间 $[t_3, t_4]$内，在 $\phi(0)$ 中描出另一条类似的小弧；第二条弧的端点与第一条弧的端点可以任意接近，但顺序相反。 δ 的定义性质意味着两个区间的长度都不可能超过 T，因此通过取极限，我们可以找到 ϕ_1、 $\phi_2 \in \mathfrak{X}$以及点 x_1、 $x_2 \in Z$ ，使得 ϕ_1 沿长度不超过 T的区间从 x_1 描出一条弧至 x_2 ，而 ϕ_2 沿长度不超过 T的区间从 x_2 描出一条弧至 x_1。根据定义 2.3，我们可以推得 $\mathfrak{X}$ 中存在一条轨迹，在 x_1 与 x_2 之间周期性振荡，并始终处于以 $\phi(0)$为中心的开 δ球内；但由于 $\delta > 0$ 可以任意取小，通过取极限$\delta \to 0$ 可知，常值轨迹 $\phi(0)$ 终究属于 $\mathfrak{X}$ ，这与我们处于第三种情形的假设相矛盾。这部分论证背后的构造体现在下面的命题中（见图 1）：

定理 2.8。 设 $\phi\colon [0,\infty) \to S^2$ 连续且为单射，并假设$(\sigma^t\phi)_{t\geqslant 0}$ 在 $C([0,\infty), S^2)$上的紧开拓扑下收敛到 ϕ，其中 $t \to \infty$。那么，对每个 $\delta > 0$ ，以下结论成立：存在不同的点$x_1, x_2 \in S^2$，使得对所有 $\varepsilon > 0$，我们都可以选取区间 $[t_1, t_2]$ 以及 $[t_3, t_4]$，满足

$$d(\phi(t_1), x_1) < \varepsilon, \quad d(\phi(t_2), x_2) < \varepsilon, \quad d(\phi(t_3), x_2) < \varepsilon, \quad d(\phi(t_4), x_1) < \varepsilon, \tag{6}$$

and

$$\max_{t\in[t_1,t_2]\cup[t_3,t_4]} d(\phi(t), x_1) < \delta. \tag{7}$$

此外，对于 $T \geqslant 0$的任意给定值，我们都可以取 $x_1 \coloneqq \phi(T)$ 。

注 2.9。 在证明中可以看到，一旦选定了 $\delta > 0$ ，我们还可以取 $x_2 \coloneqq \phi(T')$，其中 $T' > T$ 可以任意接近 T。由回归可轻易推出，若有需要，区间 $[t_3, t_4]$ 可以选得与 $[t_1, t_2]$ 不相交。

定理 2.8 显然不成立，若 S^2 被更一般的流形取代；例如，若 ϕ 改为允许是一条直线轨迹 $\phi(t) \coloneqq (t,\ \alpha t)$ 在环面 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上具有无理斜率 α。

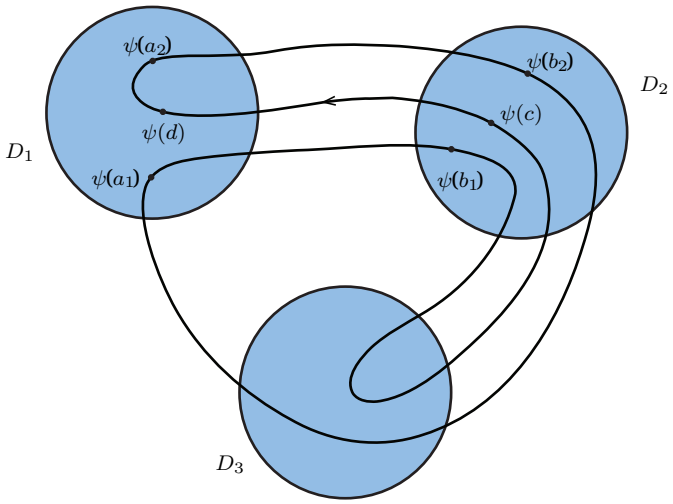

FIGURE 2. 命题 2.10情形下的一个例子。存在两条弧，它们从 D_1 出发，在 D_2 结束，且不经过 D_3 ，这保证了存在一条反向完成相同路径且也不经过 D_3的弧。

令 S^1 表示赋予定向的单位圆。若 a 和 b 是 S^1中的两个不同点，区间 $[a, b]$ 表示 S^1 上任意一条从 a 到 b的正向简单曲线的像。定理2.8 的证明最终将依赖于以下拓扑事实：

命题 2.10。设 D_1、D_2、$D_3 \subset S^2$ 是两两不相交的拓扑闭圆盘，且 $\psi\colon\ S^1 \to S^2$ 是一条 ***Jordan*** 曲线。若存在两个不相交的区间$[a_1$、$b_1]$、$[a_2$、$b_2] \subset S^1$，满足 $\psi(a_i) \in$ 内部 D_1、$\psi(b_i) \in$内部 D_2以及 $\psi([a_i$、$b_i]) \cap D_3 = \varnothing$，则存在一个区间 $[c$、$d] \subset S^1$，满足 $\psi(c) \in$内部D_2、$\psi(d) \in$内部D_1以及 $\psi([c$、$d]) \cap D_3 = \varnothing$。

注记 2.11。要证明命题 2.10，只需证明将 $\mathbb{R}^2$ 全都替换为 S^2后同一命题成立，因为可以在一个不属于 $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \psi(S^1)$的点处对球面挖去一点，从而由这个平面版本推得该命题的恰当表述。因此，我们对命题 2.10的证明将假设圆盘 D_1、D_2、D_3以及曲线 $\psi(S^1)$属于平面而非球面。图2展示了该命题版本的一个实例。

本节余下内容安排如下：命题 2.10的证明见 §2.2。接下来，我们将由此推导出主要结论：

$$\text{Proposition 2.10} \xrightarrow{\S 2.3} \text{Theorem 2.8} \xrightarrow{\S 2.4} \text{Theorem 2.4}$$

2.2. 平面拓扑初探。

2.2.1. 概述。 假设我们给定了光滑曲面上的有限族光滑闭曲线，它们处于一般位置，即任意两条曲线横截相交，且不存在三重交点。沿着每条曲线行进（根据

某种选定的定向），并记录沿途遇到的其他曲线，我们便得到一些组合数据，即一族循环词。曲面的拓扑学在某种程度上约束着这些数据。例如，若球面上有四条光滑曲线，其中三条围成互不相交的圆盘，那么命题 2.10 便对第四条曲线与其他三条曲线的交叉方式施加了非平凡的限制。我们未能在文献中找到关于哪些交叉模式可能出现的一般性信息（尽管一些作者曾研究过类似的问题，例如 [40, 31]）。

因此，我们直接证明命题2.10，即备注2.11中提到的平面版本。尽管我们的论证直观上很简单，但为了使其严谨，采用图论的语言会比较方便。使用“多边形的”平面图也很方便，下面我们将对其进行定义。

2.2.2. 平面图预备知识。 平面图 是嵌入于平面中的有限图 $G \subset \mathbb{R}^2$，其每条边都表示为一条分段仿射简单曲线，称为弧。每条弧连接两个不同的顶点（其端点），任意两条弧要么不相交，要么仅在一个顶点处相交。平面图的面 G 是开集 $\mathbb{R}^2 \smallsetminus G$的连通分支。每个平面图都有唯一的无界面。若平面图 G' 的每个顶点都是平面图 G 的顶点，且 G' 的每条弧都是 G的一条弧，则称 G' 是 G 的子图 。此时， G 的每个面都包含于 G'的唯一一个面中。

下面的命题汇集了三条有用的性质，分别对应于 [19]中的引理 4.2.2、命题 4.2.6 和定理 4.2.9。回忆一下，圈是每个顶点的度都为 2 的图。

命题 2.12。设 $G \subset \mathbb{R}^2$ 是一个连通平面图，其所有顶点的度都至少为2。那么：

(i) G 的每个面的边界都是一个圈子图。*(ii)* G 的每条弧恰好是 G两个面的边界的一部分。*(iii)* 若 G 有 n 个顶点和 m 条弧，则它有 $m-n+2$ 个面（欧拉公式）。

弧上的定向由指定一个端点作为 $I \subset \mathbb{R}^2$ 尾端、另一个端点作为首端来确定。有向弧的正向参数化 I 是一个单射分段仿射映射 γ，它从区间 $[a$映到 $b] \subset \mathbb{R}$ 上 I，满足 $\gamma(a)$ 是 I 的尾端，而 $\gamma(b)$ 是 I的首端。弧的定向可用于区分命题2.12的第(ii) 部分所给出的两个面，如下所示：

命题 2.13。 设 G 是一个连通平面图，其所有顶点的度都至少为 2。设 I 是 G的一条弧，并为其赋予定向。则存在唯一一个面 F 属于 G，其闭包包含 I，且满足以下性质：对于任意分段仿射参数化 $\gamma\colon\ [a,b] \to I$，只要 $\gamma(a)$ 是 I的尾端，对于每个速度 $\gamma'(t)$ 存在的参数 $t \in (a,b)$，以及每个充分接近 $\gamma(t)$的点 q，其中 q 属于 F，有序向量对 $\big(\gamma'(t), q-\gamma(t)\big)$ 均为正向定向[1]。

证明。 给定这样一个参数化 γ 由命题2.12(ii) 可直接推出，存在一个面 F使得对于所有 $\big(\gamma'(t), q-\gamma(t)\big)$ 足够接近 $q \in F$ 时，至少对某个 $\gamma(t)$取值，配对 t均为正向定向。该面具有以下

[1]我们称向量 $v_i = (x_i,\ y_i) \in \mathbb{R}^2$ 的有序向量对 $(v_1,\ v_2)$ 为 *positively oriented*，若 $x_1y_2 - x_2y_1 > 0$。

相同性质对所有可微时刻 $t \in [a, b]$ 以及所有参数化均成立，这可由一个简单的连通性论证得出。□

在命题 2.13的情形下，我们称 F 如上所述，是 G 相对于定向弧 I左侧的面。

圈平面图 C 的一个定向是指为每条弧选择一个定向，使得每个顶点都是一条弧的尾端和另一条弧的首端。显然， C 恰好有两种定向：确定其中一条弧的定向后，其他弧的定向也随之确定。

命题 2.14。设 G 是一个连通平面图，其所有顶点的度都至少为2。设 F 是 G的一个面， $C = \partial F$ 是其边界圈。则 C存在唯一的定向，使得 F 位于 C每条弧的左侧。

证明。任意选择 C中的一条弧 I 。由命题 2.13和命题 2.12(ii)易得， I 的两种定向中恰有一种使 F 位于 I的左侧，并且显然，这一定向可唯一延拓到整个C。现在只需证明，在此定向下， F 位于 C 的每条弧的左侧。利用连通性易于验证：若 J_1 和 J_2 是关于此定向的 C 中相邻的弧，且 F 位于J_1的左侧，则 F 也位于 J_2 的左侧。对 C的各条弧作归纳即可得到结论。□

在命题 2.14的情形下，我们称面 F 位于有向圈 的左侧 C。如果 G 本身是一个圈，那么它只有两个面，其中一个位于该圈的左侧。

以下性质是我们定义的直接推论：

命题 2.15。设 G 是一个连通平面图，其所有顶点的度数均至少为2。设 G' 是 G 的一个子图，且具有相同性质。设 I 是 G' 的一条有向弧（因此也是 G的一条有向弧）。设 F （分别为 F'）是 G （分别为 G'）中位于 I左侧的面。那么 $F \subseteq F'$。

最后，我们陈述以下引理，其证明是直接的：

引理 2.16。设 C 是一条有向圈，其顶点标记为1 和2，且每种标记至少出现一次。那么 C 必定包含一条尾端标记为1 、首端标记为2的弧，以及另一条尾端标记为2 、首端标记为1的弧。

2.2.3. 一个关键引理。 以下结果构成了命题 2.10 的证明框架：

引理 2.17. 设 G 是由四个圈子图 Γ_1、 Γ_2、 Γ_3 和 Θ 的并构成的平面图。假设这些 Γ_i 的有界面的闭包两两不相交，并且 Θ 的每个顶点也是某个 Γ_i 的顶点。固定圈 Θ 的一个定向。如果 Θ 包含两条不同的弧，其尾端位于 Γ_1 ，首端位于 Γ_2，那么它也包含一条弧，其尾端位于 Γ_2 ，首端位于 Γ_1。

证明。令 D_i 表示圈子图 Γ_i的有界面，其中 $i = 1$，2，3。令E 表示有向圈 Θ 左侧的面（可能是无界面）。令I 和 J 为 Θ 的两条不同弧，它们的尾端位于 Γ_1 ，首端位于 Γ_2。

考虑平面图 $G' \coloneqq \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup I \cup J$。那么 G' 是连通的，且弧的数量比顶点多两个；此外，每个顶点的度不是 2 就是 3。因此，根据欧拉公式（命题iii）的第2.12部分）， G' 有四个面。其中两个

是 D_1 和 D_2，它们是边界上既不包含 I 也不包含 J 的面。第三个面包含 D_3，第四个面则与 D_3 不相交。令 F' 为这个第四个面。

考虑边界 $\partial F'$，根据命题 2.12(i)，它是 G' 中的一个圈。我们将这个圈定向，使面 F' 位于其左侧（回顾命题 2.14）。$\partial F'$ 中恰有两条弧不包含在 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 中，即 I 和 J。由引理 2.16 可知，这两条弧中恰有一条相对于 $\partial F'$ 上的定向，其尾端位于 Γ_1。必要时重新命名后，不妨设 I 是具有此性质的弧。这意味着，圈 Θ 和 $\partial F'$ 在公共弧 I 上的定向一致，而在另一条公共弧 J 上的定向相反。因此，面 F'（图 G' 的面）和面 E（图 Θ 的面）都位于 I 的左侧。

由于 G 是若干圈的并，因此每个顶点的度至少为 2。令 F 为 G 中位于弧 I 左侧的面，其中所依据的定向是 I 与 Θ 和 ∂F 共同采用的定向。由于 Θ 和 G' 都是 G 的子图，命题 2.15 给出：

$$F \subseteq E \cap F' . \tag{8}$$

我们对圈 ∂F 进行定向，使得 F 位于其左侧。该圈包含在 F' 的闭包中，而后者与 D_3 不相交。回想一下，每个 G 的顶点都是某个 Γ_i 的顶点，因此我们可以看出，∂F 的每个顶点都是 Γ_1 或 Γ_2 的顶点。此外，有向圈 ∂F 包含有向弧 I，其尾端位于 Γ_1，首端位于 Γ_2。引理 2.16 表明，∂F 必定包含一条有向弧 K，其尾端位于 Γ_2，首端位于 Γ_1。

Let $\tilde{E}$ 是 Θ 中位于有向弧 K 左侧的面。由于 F 是 G 中位于同一条弧左侧的面，命题 2.15 给出：

$$F \subseteq \tilde{E} . \tag{9}$$

因此，(8) 蕴含 $E \cap \tilde{E} \neq \varnothing$。由于 E 和 $\tilde{E}$ 是同一个图 Θ 的面，它们必定重合：$E = \tilde{E}$。这证明了 E 位于 K 的左侧。也就是说，弧 K 上的定向与 Θ 上的定向相容。我们找到了 Θ 的一条弧，其尾端位于 Γ_2，首端位于 Γ_1，证明至此完成。□

2.2.4. 多边形近似。使用 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 作为单位圆的模型很方便。若连续闭曲线 $\psi\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ 是分段仿射的，则称其为多边形的。

引理 2.18。 若 $\psi\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ 是一条 *Jordan* 曲线，那么对每个 $\delta > 0$，都存在一条多边形 *Jordan* 曲线 $\hat{\psi}\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$，使得 $\sup_{t \in S^1} \|\psi(t) - \hat{\psi}(t)\| < \delta$。

此引理源于 Jordan [29, §40，第 588–589]页。其他证明见 [52, 引理 2] 和 [26, 引理 9]。

2.2.5. 命题 *2.10*的推导。现在我们使用引理 2.17 和2.18 证明命题2.10 在备注 2.11中所述的平面类比，由此可直接得出该命题的恰当表述。

设 Γ_1 和 Γ_2 是 $\mathbb{R}^2$ 中的多边形闭曲线，它们围成有界面 F_1和 F_2，满足 $\psi(a_1), \psi(a_2) \in F_1, \psi(b_1), \psi(b_2) \in F_2$，并且对 $i = 1, 2$，有 $F_i \subseteq \operatorname{int} D_i$。设 Γ_3 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条多边形闭曲线，它围成有界面 $F_3 \supset D_3$，其闭包与 $\psi([a_1, b_1]) \cup \psi([a_2, b_2]) \cup D_1 \cup D_2$不相交。选取 $\delta > 0$，使得当 $i = 1, 2$ 时，以 Γ_i 中任意一点为中心的闭 δ-球都包含于 $\operatorname{int} D_i$，或者

当 $i = 3$时，位于 $\mathbb{R}^2 \setminus D_3$ 中。利用引理 2.18，我们选取一条（参数化的）折线路径 $\hat{\psi}\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$，使其与 ψ的距离处处小于 δ。如有必要，对 $\hat{}\ \psi$ 作扰动，以便假设其像 $\Theta \coloneqq \hat{\psi}(S^1)$ 与每条多边形闭曲线 Γ_i的交集都是有限集。将集合 $G \coloneqq \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Theta$ 赋予平面图结构，规定 $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \cap \Theta$ 中的每一点都是顶点，并在各个 Γ_i中添加额外顶点（但不在 Θ中添加），以消除端点集相同的弧。对于每个 $i = 1, 2$，集合 $\psi([a_i, b_i])$ 中都含有一条尾端位于 Γ_1 且首端位于 Γ_2的弧。这两条弧互不相同，因此可以应用引理 2.17，推出 Θ 中存在一条尾端位于 Γ_2 且首端位于 Γ_1的弧。这表明存在区间 $[c, d] \subset S^1$，使得 $\hat{}\ \psi(c) \in \Gamma_2$, $\hat{}\ \psi(d) \in \Gamma_1\hat{}\ \hat{}$ 且 $\psi([c, d]) \cap F_3 = \varnothing$。根据 δ和 ψ的定义，这意味着 $\psi(c) \in \operatorname{int} D_2$,$\psi(d) \in \operatorname{int} D_1$且 $\psi([c, d]) \cap D_3 = \varnothing$，正如所需。命题 2.10 的证明至此完成。

2.3. 定理 2.8 的证明。我们将在特殊情形 $T = 0$ 下证明定理 2.8；一般结论可通过用 ϕ 替换 $\sigma^T\phi$ 得出。我们在 S^2 上赋予角度度量 d。定义 $x_1 \coloneqq \phi(0) \in S^2$，并且不失一般性地假设 $\delta > 0$ 足够小，使得 $D_3 \coloneqq S^2 \setminus B_\delta(x_1)$ 是一个拓扑圆盘。取一个足够小的实数 $T_3 > 0$，使得 $\phi([0, T_3])$ 包含于开球 $B_\delta(x_1)$ 中，并定义 $x_2 \coloneqq \phi(T_3)$。显然， x_1 和 x_2 是不同的。不失一般性，我们假设 $\varepsilon \in (0, \delta/2)$ 足够小，使得以 x_1 和 x_2 为中心的闭 ε- 球是以 x_1 为中心的开 δ- 球的互不相交子集，并分别将这些球记为 D_1 和 D_2。显然， D_1、 D_2 和 D_3 是 S^2 中两两不相交的拓扑圆盘。令 T_2 为满足 $\phi(t) \in \partial D_1$ 的最新时刻 $t \in (0, T_3)$。由于 ϕ 在紧开拓扑下是复现的，我们可以选取 $\tau > 0$，使得

$$\sup_{t\in[0,T_3]} d(\phi(t), \phi(t+\tau)) < \varepsilon, \qquad \sup_{t\in[0,T_3]} d(\phi(t+\tau), x_1) < \delta. \tag{10}$$

定义 $T_4 \coloneqq \tau$和 $T_5 \coloneqq T_3 + \tau$，并注意到 $\phi(T_4) \in \operatorname{int} D_1$, $\phi(T_5) \in \operatorname{int}(D_2)$and $\phi([T_4, T_5]) \cap D_3 = \varnothing$。由于 $x_1 \notin \phi([T_2, T_5])$，我们可以将 $\kappa \in (0, \varepsilon)$ 取得足够小，使得 $B_\kappa(x_1)$ 与 $\phi([T_2, T_5])$不相交。现在定义 T_1 为满足 $t \in (0, T_2)$ 的最晚时刻 $d(\phi(t), x_1) = \kappa$，并令 T_6为 $t > T_5$满足 $d(\phi(t), x_1) = \kappa$的最早时刻；根据回归性，这一时刻必定存在。定义$\psi\colon [0, T_6] \to S^2$，对所有 $t \in [T_1, T_6]$令其取值为 $\psi(t) = \phi(t)$，并令 ψ在 $[0, T_1]$ 上的取值为一条沿着 $\partial B_\kappa(x_1)$ 的单射路径，该路径始于 $\phi(T_6)$，终于 $\phi(T_1)$。由构造可知，对所有 $t \in (T_1, T_6)$均有 $d(\phi(t), x_1) \neq \kappa$，因此如此定义的函数 ψ是单射、连续的，并且满足 $\psi(0) = \psi(T_6)$ 和 $\psi([T_4, T_5]) \cap D_3 = \varnothing$。

现在，我们通过将 0 与 T_6 认同，将 $[0, T_6]$ 与 S^1 认同，并以显然的方式将 ψ 视为连续单射 $S^1 \to S^2$。由命题 2.10 可知，存在一个区间 $[a, b] \subset S^1$，使得 $\psi(a) \in \operatorname{int} D_2$, $\psi(b) \in \operatorname{int} D_1$ 且 $\psi([a, b]) \cap D_3 = \varnothing$。由于对所有 $t \in [0, T_1]$ 都有 $\psi(t) \in \operatorname{int} D_1$，因此不可能有 $a \in [0, T_1]$；又由于在 T_6 的某个小邻域内，对所有 t 都有 $\phi(t) \in \operatorname{int} D_1$，必要时将 $[a, b]$ 的右端点向左移动，我们不妨假设 b 也不属于 $[0, T_1]$。于是 $[a, b] \subset (T_1, T_6)$，特别地，对所有 $t \in [a, b]$ 都有 $\psi(t) = \phi(t)$。性质 $\psi(a) \in \operatorname{int} D_2$, $\psi(b) \in \operatorname{int} D_1$ 和 $\psi([a, b]) \cap D_3 = \varnothing$ 直接表明

$$d(\psi(a), x_2) < \varepsilon, \qquad d(\psi(b), x_1) < \varepsilon, \qquad \sup_{t\in[a,b]} d(\psi(t), x_1) < \delta \tag{11}$$

因此，将 ψ 换成 ϕ 后，同样的不等式仍然成立。取 $t_1 \coloneqq 0, t_2 \coloneqq T_3, t_3 \coloneqq a, t_4 \coloneqq b$ 即可证明该定理。

2.4. **定理 2.4 的证明。** 虽然定理 2.8是证明定理 2.4的主要要素，但我们还需要做一些额外准备。以下两个简单引理适用于取值于任意紧致可度量空间 Z的切换贝布托夫移位，并弥补定义 2.1–2.3中所列公理的不足。第一个引理给出了在无限多个轨道序列之间进行切换的一种形式：

引理 2.19。 设 $\mathfrak{X}$ 是一个取值于 Z 的切换贝布托夫移位。设 $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathfrak{X}$中的一个序列。假设存在一个严格递增且无界的实数序列$(\tau_n)_{n=0}^{\infty}$，满足 $\tau_0 = 0$，使得

$$\psi_n(\tau_n) = \psi_{n+1}(\tau_n) \quad \textit{for each } n. \tag{12}$$

令 $\xi\colon\ [0,\infty) \to Z$为一个函数，它在区间 $[\tau_{n-1}, \tau_n]$上与 ψ_n一致，对每个 $n \geqslant 1$均如此。于是 $\xi \in \mathfrak{X}$。

证明。 根据定义 2.3 中的切换公理进行归纳应用可知，对于每个 $n \geqslant 1$，都存在 $\xi_n \in \mathfrak{X}$，使其在 $[0$上与 ξ 重合，$\tau_n]$ 并在 $[\tau_n$上与 ψ_{n+1} 重合，$\infty)$。注意，ξ_n 在紧开拓扑下趋于 ξ。定义 2.1 中的紧致性公理现在保证 $\xi \in \mathfrak{X}$。 □

定义 2.3 中的移位不变性只允许我们将函数向左平移，而不能向右平移。在回归这一假设下，下一个引理解决了这一困难。

引理 2.20。 设 $\mathfrak{X}$ 是一个取值于 Z的切换贝布托夫移位，且 $\phi \in \mathfrak{X}$ 相对于移位半流 $(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$是回归的。那么对于任意 $s \geqslant 0$，都存在$\psi \in \mathfrak{X}$ 使得 $\sigma^s\psi = \phi$。

证明。 根据假设，存在一个趋于无穷大的递增序列 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$，使得 $\sigma^{t_k}\phi$ 在紧开拓扑下收敛于 ϕ。取一个子序列后，我们可以假设 $t_1 \geqslant s$，且 $\sigma^{t_k - s}\phi$ 收敛于某个 $\psi \in \mathcal{X}$。于是 $\sigma^s\psi = \phi$。 □

现在开始证明定理 2.4。首先考虑非单射轨迹 ϕ的情形。在这种情况下，关于 Z 的拓扑假设是多余的。

定理 *2.4* 在非单射情形下的证明。 设 ϕ 是 Bebutov移位 $\mathfrak{X}$的复现且非单射轨迹。令 $T \geqslant 0$ 和 $L > 0$ 满足$\phi(T) = \phi(T + L)$。令 $\psi_1 \coloneqq \phi$。对每个 $n \geqslant 2$，利用引理 2.20 可找到 $\psi_n \in \mathfrak{X}$使得 $\sigma^{(n-1)L}\psi_n = \phi$。令 $\tau_n \coloneqq T + nL$ 对于 $n \geqslant 1$。于是，引理 12中的条件（2.19）得以满足。应用该引理可得到一个预周期的$\chi \in \mathfrak{X}$，使得 $\chi(0) = \phi(0)$。 □

我们首先完成定理2.4在 Z 与球面的某个子集同胚的情形下的证明，然后运用提升论证，推导出 Z 与射影平面的某个子集同胚时的情形。在这些论证中，显然只需假设 Z 恰好等于球面或射影平面的某个紧子集。

球面子集情形下定理2.4 的证明。设 $\mathfrak{X}$ 是一个取值于紧集 $Z \subseteq S^2$的切换贝布托夫移位，并在整个证明过程中固定一个复现元 $\phi \in \mathfrak{X}$ 。非单射 ϕ 的情形已经处理过，因此假设 ϕ是单射。我们的目标是证明，取值恒为 $\phi(0)$ 的常值函数是 $\mathfrak{X}$的一个元素。我们用反证法：假设常值函数 $x_1 \coloneqq \phi(0)$ 不属于 $\mathfrak{X}$。由于 $\mathfrak{X}$ 关于紧开拓扑是紧的，因此存在数 $r > 0$ 和 $\delta > 0$ ，使得：

$$\text{for all } \psi \in \mathfrak{X}, \quad \max_{t\in[0,r]} d(\psi(t), x_1) > \delta\,. \tag{13}$$

我们首先断言，对于每个 $a \geqslant 0$，都存在 $\psi \in \mathfrak{X}$ 和 $p \in (0,\ r)$ 使得

$$\psi(a) = \psi(a+p) = x_1 \quad \text{and} \quad \max_{t\in[a,a+p]} d(\psi(t), x_1) \leqslant \delta\,. \tag{14}$$

事实上，令 $x_1 \coloneqq \phi(0)$ 和 $x_2 \in S^2$ 为定理 2.8应用于函数 ϕ 和实数 δ时给出的不同点。根据定理 2.8，对于每个 $n \geqslant 1$，存在 $[0,\ \infty)$ 的子区间 $[t_{1,\,n},\ t_{2,\,n}]$和 $[t_{3,\,n},\ t_{4,\,n}]$，使得

$$d(\phi(t_{1,n}), x_1) < \frac{1}{n}, \qquad d(\phi(t_{2,n}), x_2) < \frac{1}{n}\,, \tag{15}$$

$$d(\phi(t_{3,n}), x_2) < \frac{1}{n}, \qquad d(\phi(t_{4,n}), x_1) < \frac{1}{n}\,, \tag{16}$$

and

$$\max_{t\in[t_{1,n},t_{2,n}]\cup[t_{3,n},t_{4,n}]} d(\phi(t), x_1) < \delta\,, \tag{17}$$

并且利用 ϕ 的回归性质，不失一般性地假设，对于每个 $n \geqslant 1$，都有 $t_{1,\,n} \geqslant a$和 $t_{3,\,n} \geqslant a + r$ 。性质（13）意味着，对于每个 $n \geqslant 1$，都有 $t_{4,\,n} - t_{3,\,n} < r$ 和$t_{2,\,n} - t_{1,\,n} < r$ 。将 ϕ 平移 $t_{1,\,n} - a$ 后可知，对于每个$n \geqslant 1$ ，我们都能找到 $\psi'_n \in \mathfrak{X}$ ，使得

$$d\left(\psi'_n(a), x_1\right) < \frac{1}{n}, \qquad \min_{t\in[a,a+r]} d\left(\psi'_n(t), x_2\right) < \frac{1}{n}\,. \tag{18}$$

取 $(\psi'_n)_{n=1}^{\infty}$ 的一个聚点 $\psi' \in \mathfrak{X}$ ，并注意到对于某个 $t' \in [0, r]$，有 $\psi'(a) = x_1$ 和 $\psi'(a + t') = x_2$ ；此外，对于所有 $t \in [a, a + t']$，都有 $\psi'(t) \in B_\delta(x_1)$。显然， $t' \neq 0$ ，因为点 x_1 和 x_2 是不同的。将 ϕ 平移 $t_{3,n} - a - t'$ 后，同样地，对于每个 $n \geqslant 1$ ，我们都能找到满足下述条件的 $\psi''_n \in \mathfrak{X}$

$$d\left(\psi''_n(a + t'), x_2\right) < \frac{1}{n}, \qquad \min_{t\in[a+t',a+t'+r]} d\left(\psi''_n(t), x_1\right) < \frac{1}{n} \tag{19}$$

并取一个满足 $\psi''(a+t') = x_2$、对于某个 $t'' \in (0$ 有 $\psi''(a+t'+t'') = x_1 r]$，且对于所有 $t \in [a+t'$ 有 $\psi''(t) \in B_\delta(x_1)$ $a+t'+t'']$的聚点 $\psi'' \in \mathfrak{X}$。根据切换公理，与 ψ' 在 $[0$ $a+t']$ 上一致、且与 ψ'' 在 $[a+t' \infty)$ 上一致的函数 ψ 属于 $\mathfrak{X}$。令 $p \coloneqq t' + t''$，则显然 ψ 满足性质 **(14)**——注意，由 **(13)** 可知 $p < r$ 。第一个断言至此得证。

我们的第二个断言是，存在一个序列 $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ ，它属于 $\mathfrak{X}$ ，并且严格 y 递增且无界的序列 $(\tau_n)_{n=0}^{\infty}$ ，其中 $\tau_0 = 0$ ，使得对于每个 n,

$$\xi_n(\tau_n) = \xi_n(\tau_{n+1}) = x_1 \quad \text{and} \quad \max_{t\in[\tau_n,\tau_{n+1}]} d(\xi_n(t), x_1) \leqslant \delta\,. \tag{20}$$

事实上，对于每个整数 $k \geqslant 1$，令 $a_k \coloneqq kr$，并利用前面的断言找到 $\psi_k \in \mathfrak{X}$ 和 $p_k \in (0,\ r)$，使得

$$\psi_k(a_k) = \psi_k(a_k + p_k) = x_1 \quad \text{and} \quad \max_{t\in[a_k, a_k+p_k]} d(\psi_k(t), x_1) \leqslant \delta\,. \tag{21}$$

令 $\ell_k \coloneqq \lfloor r/p_k \rfloor$；这是一个正整数。注意到 $r/2 < \ell_k p_k \leqslant r$。现在根据以下规则定义一个实数序列 $(\tau_n)_{n=0}^{\infty}$： $\tau_0 = 0$ 以及

$$\tau_{n+1} - \tau_n = p_k \quad \text{if} \quad \ell_1 + \cdots + \ell_{k-1} < n \leqslant \ell_1 + \cdots + \ell_k\,. \tag{22}$$

那么序列 (τ_n) 严格递增。由于 $\tau_{\ell_1+\cdots+\ell_k} = \ell_1 p_1 + \cdots + \ell_k p_k \geqslant kr/2$, 序列 (τ_n) 也是无界的。接下来，对于每个整数 $n \geqslant 1$，固定 $k \geqslant 0$使得 $\ell_1 + \cdots + \ell_{k-1} < n \leqslant \ell_1 + \cdots + \ell_k$。由于 $\tau_n \leqslant \ell_1 p_1 + \cdots + \ell_k p_k \leqslant kr = a_k$，我们可以定义 $\xi_n \coloneqq \sigma^{a_k - \tau_n}\psi_k \in \mathfrak{X}$。特别地，$\xi_n(\tau_n + t) = \psi_k(a_k + t)$ 对于每个$t \geqslant 0$。现在，（20）直接由性质（21）推出，从而证明第二个断言。

最后，我们应用多重切换引理 2.19将所有线段连接起来 $\xi_n|_{[\tau_n,\ \tau_{n+1}]}$，从而得到一条路径 $\xi\colon\ [0,\ \infty) \to Z$位于 $\mathfrak{X}$中，并从 $\xi(0) = x_1$出发，且完全包含在 δ 的闭 x_1-邻域内。这条路径的存在与性质（13）矛盾。至此， Z 同胚于 S^2的一个紧子集时的证明就完成了。□

射影平面子集情形下定理 2.4 的证明。设 $\mathfrak{X}$ 是一个取值于紧集 $Z \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^2$，中的切换 Bebutov 移位，令 $\pi\colon\ S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 为标准二重覆盖映射，并定义 $\Pi\colon\ C([0,\infty), S^2) \to C([0,\infty), \mathbb{R}\mathrm{P}^2)$，其定义为 $\hat{}\,\hat{}\Pi(\psi) \coloneqq \pi \circ \psi$。直接验证并应用路径提升引理可知， Π 是一个二重覆盖映射，因此它是真映射，故 $\hat{}\mathfrak{X} \coloneqq \Pi^{-1}\mathfrak{X} \subseteq C([0,\infty), S^2)$ 是紧的。显然，$\hat{}\ \mathfrak{X}$ 是移位不变的；再简单应用路径提升引理可知， $\mathfrak{X}$ 继承了 $\mathfrak{X}$ 的切换性质，因此 $\mathfrak{X}$ 是一个切换 Bebutov 移位。给定一个复现元 $\phi \in \mathfrak{X}$，任意选取 $\hat{}\,\phi \in \Pi^{-1}\phi$。我们断言 $\hat{}\,\phi$ 是复现的。事实上，若 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ 趋于无穷且满足 $\lim_{n\to\infty} \sigma^{t_n}\phi = \phi$，则由紧性可知，它有一个子序列$(t_{n_k})_{k=1}^{\infty}$，使得 $(\sigma^{t_{n_k}}\hat{}\phi)$ 收敛。该子序列的极限必然投影到 ϕ，因此要么等于 ϕ 本身，要么等于函数 $-\phi$；该函数的取值处处与 ϕ 的取值对跖。前一种情况下，断言立即得证；后一种情况下，由 $-\phi \in \omega(\phi)$ 可知 $\phi \in \omega(-\phi) \subseteq \omega(\phi)$，断言也就得证。将定理 2.4 已证明的第一种情形应用于 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\phi$，可得一个预周期函数 $\hat{}\chi \in \mathfrak{X}$，使得 $\hat{}\,\chi(0) = \phi(0)$。显然， $\chi \coloneqq \Pi(\hat{}\chi)$ 是预周期的，并满足所需的 $\chi(0) = \phi(0)$。若进一步假设 ϕ 是单射，$\hat{}$ 则显然 ϕ 也是单射，因此 $\hat{}\chi$ 是常值的， χ 也同样如此。定理 2.4 的证明至此完成。□

2.5. **一些问题**。 我们对定理 2.4 的动机源于下一节将讨论的应用。然而，该定理本身也很有趣，并且自然会产生一些问题。例如，定理 χ 中的前周期元素 *2.4* 是否总能选为周期的?

为了将对 Bebutov 移位的研究拓展到切换性质之外，研究所有极小 Bebutov 移位 $\mathfrak{X}$ 在 $C([0,\ \infty),\ S^2)$ (或在 $C(\mathbb{R},\ S^2)$) 中那些 自避的（即完全由单射轨道组成）类别，将是很有意义的。备注2.7中给出了一些此类移位的例子。通过引入分岔，可以构造出稍微复杂一些的例子。考虑到动力系统中的传统分类问题 [22], 我们提出

以下问题：在球面上，所有自避的极小 *Bebutov* 移位是否都可以在拓扑共轭意义下分类?

3. Applications

3.1. **半流的 Poincar´e-Bendixson 定理**。 关于推广原始 Poincar´e-Bendixson 定理的文献十分丰富， [6, 41] 这一主题也是综述论文 [16]的研究对象。然而，下面的论述在若干方面似乎仍属新颖：

定理 3.1. 设 Z 是一个拓扑空间，同胚于 S^2 或 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, 的某个紧子集，并设 Φ: $Z \times [0,\infty) \to Z$ 是一个连续半流。若 $z \in Z$ 相对于 Φ 是复现的，则它要么是不动点，要么是周期轨道。

注 3.2. Poincar´e-Bendixson 定理最早的一些推广（例如 A.J. Schwartz 在 [46], 中的定理，该定理研究了任意紧二维流形上的这一问题）是在可微流的背景下进行的；这些流源自一个底层向量场，而该向量场本身至少被假设为 C^1。在一般连续流的背景下，有若干结果讨论了将 Z 替换为 S^2的开子集的情形：例如，P. Seibert 和 P. Tulley[2] 在 [47]中的定理研究了 $\mathbb{R}^2$开子集上的流；O. H´ajek 在 [25] 中的研究则适用于定义在满足若尔当曲线定理适当类似版本的二维流形上的流。在半流的背景下，K. Ciesielski 在 [15]中证明了定理 3.1 的特殊情形，即 Z 等于 $\mathbb{R}^2$ 或 S^2 的情形。另一方面，除平面之外，关于 S^2 真子集上的半流这一情形，似乎直到本研究才有人探讨；更广泛而言，据我们所知，先前没有研究涉及定义在 S^2 或 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 的空内部子集上的流或半流。

定理 3.1 的证明。对于每个 $z \in Z$，定义函数 $\phi_z \in C([0,\infty), Z)$，使得对所有 $t \geqslant 0$, $\phi_z(t) \coloneqq \Phi^t z$。令 $\mathfrak{X} \coloneqq \{\phi_z \colon z \in Z\} \subseteq C([0,\infty), Z)$，并定义$\Pi$: $Z \to \mathfrak{X}$，使得 $\Pi(z) \coloneqq \phi_z$。显然， Π 是双射。我们断言， Π 也连续。事实上，要证明这一点，只需证明：若 (z_n) 是 Z 中的一个序列，且收敛到极限 z，则在紧开拓扑下 $\lim_{n\to\infty} \phi_{z_n} = \phi_z$；但若 $T \geqslant 0$ 任意，则Φ 在 $Z \times [0$上的一致连续性保证了 $\phi_{z_n} \to \phi$ 在 $[0$上一致收敛到 $T]$。由于 T是任意的，所需的收敛性便得证。由 Π的连续性，我们立即推出 $\mathfrak{X}$ 是紧的；显然， $\mathfrak{X}$ 也关于移位半流$(\sigma^\tau)_{\tau\geqslant 0}$不变，因为对每个 $z \in Z$和 $\tau \geqslant 0$，都有 $\sigma^\tau \phi_z = \phi_{\Phi^\tau z} \in \mathfrak{X}$。若 $\phi_{z_1}, \phi_{z_2} \in \mathfrak{X}$满足$\phi_{z_1}(\tau) = \phi_{z_2}(\tau)$，其中某个 $\tau \geqslant 0$，则函数 $\phi \in C([0,\infty), Z)$定义为对所有 $t \leqslant \tau$，$\phi(t) \coloneqq \phi_{z_1}(t)$，并且对所有 $t \geqslant \tau$， $\phi(t) \coloneqq \phi_{z_2}(t)$，它等于 ϕ_{z_1}，特别地属于 $\mathfrak{X}$。特别地，我们已经证明 $\mathfrak{X}$ 是一个切换贝布托夫移位。由于 Π 是紧豪斯多夫空间之间的连续双射，因此它是同胚，并且显然对每个 $t \geqslant 0$，都有 $\Pi \circ \Phi^t = \sigma^t \circ \Pi$。特别是

[2]尽管 Seibert 和 Tulley 的结果所依据的精确假设并未明确说明，但他们的论证依赖于这样一个事实：流的回归轨迹上的每一点都必须有一个拓扑圆盘邻域，而且这些拓扑圆盘在流作用下的像和原像本身也必须是拓扑圆盘。特别是，流必须定义在所研究的回归轨迹的某个开邻域上，并且不能假定它仅为半流。

$(\Phi^t)_{t\geqslant 0}$ 上的半流 Z 与 $\mathfrak{X}$上的移位半流 $(\sigma^t)_{t\geqslant 0}$拓扑共轭。

现在假设 $z \in Z$ 是复现的；那么根据拓扑共轭， $\phi_z \in \mathfrak{X}$ 相对于 $\mathfrak{X}$ 上的移位半流也是复现的。由定理 2.4 可知，存在一个预周期函数 $\chi = \phi_w \in \mathfrak{X}$ 使得 $\phi_w(0) = \phi_z(0)$；但这意味着 $z = w$，因此 $\phi_z = \phi_w$，进而 ϕ_z 相对于 $\mathfrak{X}$ 上的移位半流是预周期的。由拓扑共轭可知 z 是预周期的。由于预周期的复现点必定是周期点，证明完成。□

3.2. **切换连续向量场的周期极限轨道**。我们接下来给出定理 2.4 的一个推论，它是 Poincar´e-Bendixson 定理在二维球面和射影平面上的切换连续向量场情形的一个版本。尽管这无疑是本文所述应用中最不重要的一项，我们还是顺带提及它，因为它可以直接由一项技术性结果推导出来；在证明接下来的、更重要的结果时，我们也将用到该结果。

定理 3.3。设 M 为 S^2 或 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$，，令 $Z \subseteq M$ 为紧的，并且对于 $i = 1, \dots, N$，令 $\Psi_i \colon Z \to TM$ 为连续函数，使得对每个 $z \in Z$ 都有 $\Psi_i(z) \in T_z M$。假设存在绝对连续函数$x \colon [0,\infty) \to Z$，其满足对某些勒贝格可测函数 $u_1, \dots, u_N \colon [0,\infty) \to [0,1]$，几乎处处有 $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t)\Psi_i(x(t))$，且 $\sum_{i=1}^N u_i(t) = 1$ 几乎处处成立。那么存在周期可测函数 $v_1, \dots, v_N \colon [0,\infty) \to [0,1]$，使得 $\sum_{i=1}^N v_i(t) = 1$ 几乎处处成立；并且存在一个周期绝对连续函数 y，其从$[0,\infty)$映射到 x 的 ω-极限集，且 $\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^N v_i(t)\Psi_i(y(t))$ 几乎处处成立。

注记 3.4。定理 $N = 1$ 的未切换情形 3.3 在文献中很少在没有进一步假设（例如向量场具有唯一可积性）的情况下被陈述，但根据 [28, §VIII.4]中的结果，可以毫不费力地推导出来。

命题 3.5。设 $Z \subset \mathbb{R}^d$ 为紧的，且 $\Psi_1, \dots, \Psi_N \colon Z \to \mathbb{R}^d$ 为连续函数。设 $\mathfrak{X}_Z$ 表示所有满足如下 *Carath´eodory* 型微分方程的绝对连续函数 $x \colon [0,\infty) \to Z$组成的集合：

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\Psi_i(x(t)) \ \ a.e. \tag{23}$$

其中 $u_1, \dots, u_N \colon [0,\infty) \to [0,1]$ 为勒贝格可测函数，且满足 $\sum_{i=1}^N u_i(t) = 1$ 几乎处处成立。那么 $\mathfrak{X}_Z$ 是切换贝布托夫移位。

证明。若 $\mathfrak{X}_Z$ 为空，则结论显然成立，因此设其非空。定义 2.1 的移位不变性公理是初等的：若 $x \in \mathfrak{X}_Z$ 满足 (23)，则对每个 $\tau \geqslant 0$，由 $(\sigma^\tau x)(t) \coloneqq x(t+\tau)$ 定义的函数 $\sigma^\tau x \colon [0,\infty) \to Z$ 也满足同一个方程，其中函数 v_1、……、$v_N \colon [0,\infty) \to [0,1]$ 由 $v_i(t) \coloneqq u_i(t+\tau)$ 定义，以替代函数 u_1、……、u_N。定义 2.3 的切换公理同样显然：给定 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathfrak{X}_Z$，使得 $x^{(1)}(\tau) = x^{(2)}(\tau)$ 对某个 $\tau \geqslant 0$ 成立，设 $\dot{x}^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^N u_i^{(1)}(t)\Psi_i(x(t))$ 且 $\dot{x}^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^N u_i^{(2)}(t)\Psi_i(x(t))$ 几乎处处成立，其中对 $j = 1, 2$，有 $\sum_{i=1}^N u_i^{(j)}(t) = 1$ 几乎处处成立。定义 $x(t) \coloneqq x^{(1)}(t)$（$0 \leqslant t \leqslant \tau$ 时）以及 $x(t) \coloneqq x^{(2)}(t)$（$t \geqslant \tau$ 时）；对于每个 $i = 1$、……、N，定义 $u_i(t) \coloneqq u_i^{(1)}(t)$（$0 \leqslant t \leqslant \tau$ 时）以及 $u_i(t) \coloneqq u_i^{(2)}(t)$（$t \geqslant \tau$ 时），并注意到 (23) 得到满足，因此 $x \in \mathfrak{X}_Z$，如所要求。

剩下需要证明的是，在紧开拓扑下， $\mathfrak{x}_Z$ 作为 $C([0,\infty),Z)$ 的子空间是紧的。由于后者可度量化，只需证明序列紧性。定义 $K \coloneqq \max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{v\in Z}\|\Psi_i(v)\|$，并注意到对每个 $x\in\mathfrak{x}_Z$ 和 $t_2\geqslant t_1\geqslant 0$，我们有

$$\|x(t_2)-x(t_1)\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2}\dot{x}(s)ds\right\| \leqslant K|t_2-t_1| \tag{24}$$

这意味着 $\mathfrak{x}_Z$ 是一致等度连续的。根据 Arzel`a-Ascoli 定理，要证明序列紧性，我们必须证明 $\mathfrak{x}_Z$ 在 $C([0,\ \infty),\ Z)$中也是闭的。为此，假设 $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是 $\mathfrak{x}_Z$中的一个元素序列，且收敛到极限 $x\in C([0,\ \infty),\ Z)$，我们来证明$x\in\mathfrak{x}_Z$。

对每个 $n\geqslant 1$，令 $u_1^{(n)},\dots,u_N^{(n)}\colon [0,\infty)\to[0,1]$ 为可测函数，使得方程 $\dot{x}^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^N u_i^{(n)}(t)\Psi_i(x^{(n)}(t))$ 和 $\sum_{i=1}^N u_i^{(n)}(t)=1$ 对每个 $n\geqslant 1$几乎处处成立。我们回顾一下， $L^\infty([0,\infty))$ 上的弱-*拓扑定义为使映射 $u\mapsto\int_0^\infty u(t)f(t)dt$ 对每个 $f\in L^1([0,\infty)$都连续的最细拓扑；我们还回顾，关于 $L^\infty([0,\infty))$ 上的弱-*拓扑，可测函数集合 $[0,\infty)\to[0,1]$ 是紧且可度量化的（例如参见 [45, 定理 3.15 和 3.16]）。利用该拓扑下可测函数集合 $[0,\infty)\to[0,1]$ 的序列紧性，并在必要时取子序列，我们假设每个 $(u_i^{(n)})_{n=1}^\infty$ 都随 $n\to\infty$ 在弱-*拓扑下收敛到一个可测函数 $u_i\colon [0,\infty)\to[0,1]$。通过对区间的特征函数积分并利用弱-*收敛，显然方程 $\sum_{i=1}^N u_i(t)=1$ 几乎处处成立。

为证明 $x\in\mathfrak{x}_Z$，我们将证明 $\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^N u_i(t)\Psi_i(x(t))$ 几乎处处成立。根据勒贝格微分定理，只需证明对于每个 $T>0$,

$$\int_0^T\dot{x}(t)dt=\int_0^T\sum_{i=1}^N u_i(t)\Psi_i(x(t))dt. \tag{25}$$

固定 $T>0$。对于每个 $n\geqslant 1$，我们可以写作

$$\int_0^T\dot{x}(t)dt-\int_0^T\sum_{i=1}^N u_i(t)\Psi_i(x(t))dt \tag{26}$$

$$=\int_0^T\dot{x}(t)dt-\int_0^T\dot{x}^{(n)}(t)dt \tag{27}$$

$$+\int_0^T\dot{x}^{(n)}(t)dt-\int_0^T\sum_{i=1}^N u_i^{(n)}(t)\Psi_i(x^{(n)}(t))dt \tag{28}$$

$$+\int_0^T\sum_{i=1}^N u_i^{(n)}(t)\left(\Psi_i\big(x^{(n)}(t)\big)-\Psi_i(x(t))\right)dt \tag{29}$$

$$+\int_0^T\sum_{i=1}^N\left(u_i^{(n)}(t)-u_i(t)\right)\Psi_i\left(x(t)\right)dt\,. \tag{30}$$

表达式 (27) 化简为 $x(T)-x^{(n)}(T)-x(0)+x^{(n)}(0)$ 显然，当 $n\to\infty$ 时趋于零，因为 $x^{(n)}\to x$ 在 $\mathfrak{x}_Z$中，而项 (28) 根据 $x^{(n)}$的定义等于零。由于每个 Ψ_i 在 Z上一致连续，并且 $x^{(n)}\to x$

在 $[0$上一致$T]$，我们有 $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,\ T]}\|\Psi_i(x^{(n)}(t))-\Psi_i(x(t))\|=0$ 对每个 $i=1,\ \ldots\ldots,\ N$ 因此，量 (29) 当 $n\to\infty$ 时趋于零。此外，借助于每个 $u_i^{(n)}$ 弱-* 收敛到相应的 u_i，量 (30) 也趋于零。通过选取 n 足够大，我们便可使差值 (26) 的上界任意小。由此可知，对每个 $T>0$，($\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^N u_i(t)\Psi_i(x(t))$) 几乎处处成立，因此 $x\in\mathfrak{X}_Z$，如所需。命题得证。□

定理 3.3 的证明。假设 $M=S^2$。如果 x 的 ω-极限集是整个 S^2，那么特别地 $Z=S^2$。根据庞加莱-霍普夫定理，一个众所周知的推论是，定义在 S^2 上的连续向量场必定在某点取零，因此，特别是每个 Ψ_i 都必定在 S^2 中某处有一个不动点，因而存在一个常值解 y，其常值显然属于 x 的 ω-极限集。现在反过来假设 x 的 ω-极限集是 S^2 的真子集。在这种情况下，对每个 $T\geqslant 0$，定义 $Z_T\coloneqq\{x(t)\colon\ t\geqslant T\}$，并注意到对于所有充分大的 T——例如对所有 $T\geqslant T_0$——集合 Z_T 都包含在 S^2 中某个特定闭圆盘的补集中，而这个补集必然与 $\mathbb{R}^2$ 微分同胚。根据命题 3.5 和伯克霍夫复现定理，非空紧集 $\mathfrak{X}_{\bigcap_{T\geqslant T_0}Z_T}=\bigcap_{T\geqslant T_0}\mathfrak{X}_{Z_T}$ 含有一个相对于移位半流的复现点，因此根据定理 2.4，该集合含有一条周期轨迹 y。这就完成了 Z 是 S^2 的子集时的论证。

若 $M=\mathbb{R}\mathrm{P}^2$，则我们改用提升论证。令 $\pi\colon\ S^2\to\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 表示标准二重覆盖映射，并令 $\hat{}Z\coloneqq\pi^{-1}Z$。根据路径提升引理$\hat{}$，轨迹 $x\colon\ [0,\infty)\to Z$ 可提升为连续函数 $\hat{}x\colon\ [0,\infty)\to Z$，不难看出该函数是 Lipschitz 连续的，并满足所需形式的微分方程。现在，我们可以应用第一种情形，推得 $\hat{}x$ 的 ω-极限集中存在一条周期轨迹；该轨迹经 π 投影后，便是 x 的 ω-极限集中的所需轨迹。□

3.3. **至多三维实空间中切换齐次系统的稳定性**。若 $\Psi_1,\ldots,\Psi_N\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 是连续齐次函数，则可以完全按照引言中针对切换线性系统所述的方式，为相应的切换齐次系统定义全局一致指数稳定性、李雅普诺夫稳定性和周期渐近稳定性。以下结果以诸如 [2, 3, 18, 49]. 这类研究为背景，揭示了这些稳定性概念之间一种新的联系。

定理 3.6。设 $1\leqslant d\leqslant 3$ 且 $\Psi_1,\ldots,\Psi_N\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 是齐次且一致 *Lipschitz* 连续的。如果由 $\Psi_1,\ldots,\Psi_N$ 定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的切换系统是李雅普诺夫稳定且周期渐近稳定的，那么它就是全局一致指数稳定的。

在四维及更高维度中，相应的推论不成立：例子见 [38]。

定理3.6 的证明结合了定理2.4和命题3.5，以及下面给出的两个附加结果。这两个结果都适用于任意维数；事实上，在定理3.6的证明中，使用假设 $d\leqslant 3$ 的唯一环节是引用定理2.4时。在本小节中，当 $\Psi_1,\ \ldots\ldots,\ \Psi_N$ 均已明确时，我们使用记号 $\mathfrak{X}_Z$ 表示

由 $(\Psi_1, \ldots\ldots, \Psi_N)$ 定义的切换系统的所有轨道集合，这些轨道的取值仅属于集合 $Z \subseteq \mathbb{R}^d$。

下述 Fenichel 型引理是 [3, 定理 2], 的一个特例，该定理由 [49]中给出的结果推导而来。实际应用中，我们只需要考虑由 $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$ 定义的切换系统为李雅普诺夫稳定的情形。在这种情况下，任何累积于原点的轨迹必然收敛于原点。该形式的引理也见于未发表的手稿 [2]。

引理 3.7。设 $\Psi_1, \ldots, \Psi_N \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是齐次且一致 *Lipschitz* 连续的。若由 $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$定义的 $\mathbb{R}^d$ 上的切换系统的每条轨迹都累积于原点，则该系统全局一致指数稳定。

命题 3.8。设 $\Psi_1, \ldots, \Psi_N \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是齐次且一致 *Lipschitz* 连续的，并假设由 $\Psi_1, \ldots, \Psi_N$定义的 $\mathbb{R}^d$ 上的切换系统是李雅普诺夫稳定的。设 $Z \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 是一个紧集，满足 $\mathfrak{X}_Z \neq \varnothing$，且不存在具有相同性质的真子集。则 Z 通过映射 $v \mapsto v/\|v\|$与 S^{d-1} 的某个子集同胚。

证明。 我们将证明， Z与每条正射线 $\{\lambda v \colon \lambda \in [0, \infty)\}$ 至多相交于一点。这意味着由 $\pi(v) \coloneqq \|v\|^{-1} v$ 定义的连续函数 $\pi \colon Z \to S^{d-1}$ 必为单射，因此（由 Z的紧性）π 是到其像上的同胚。利用李雅普诺夫稳定性，取常值的 $C > 0$，使得对每条轨迹 x，$\sup_{t \geqslant 0} \|x(t)\| \leqslant C\|x(0)\|$。反设 Z 与某条正射线相交于两点，则存在 $v \in Z$ 和 $\lambda > 1$，使得 $\lambda v \in Z$。在整个证明中，我们固定这样的 v 和λ，并固定一个足够大的 $n \geqslant 1$，使得 $\lambda^n > 2C$。为导出矛盾，我们将构造一条轨迹 z 和一个时刻 $T > 0$，使得 $\|z(T)\| \geqslant (\lambda^n/2)\|z(0)\| > C\|z(0)\|$。构造这条轨迹时，我们先找出从 v 出发并随后逼近 λv的轨迹线段，再将这些轨迹的切换律片段拼接起来，推导出生成 z的切换律。论证的第二部分较为复杂，因为需要沿时间反向推演：从 z的切换律最后一段开始，按逆序归纳构造更早的片段，并通过逆向归纳验证z 所需的性质。

首先，为了构造，我们声称存在一条轨迹 $x \in \mathfrak{X}_Z$，使得 $x(0) = v$ 且 $\inf_{t \to \infty} \|x(t) - \lambda v\| = 0$。事实上，任取 $y \in \mathfrak{X}_Z$。若 $Z' \coloneqq \{y(t) \colon t \in [0, \infty)\} \subseteq Z$ 不等于 Z，那么它就是 Z 的一个非空紧真子集，并且具有 $\mathfrak{X}_{Z'}$ 非空这一性质；根据定义，这是不可能的。因此 $Z' = Z$，从而必然有 $\lim_{k \to \infty} y(t_k) = v$，其中某个时间序列为 $(t_k)_{k=1}^{\infty}$。取 $x \in \mathfrak{X}_Z$ 为$(\sigma^{t_k} y)_{k=1}^{\infty}$ 在 $k \to \infty$ 时的一个聚点，并注意到 $x(0) = v$。用与之前类似的推理可知，对每个 $T \geqslant 0$，集合 $\{x(t) \colon t \in [T, \infty)\}$ 必须等于 Z，否则就与 Z 的定义矛盾；于是对每个 $T \geqslant 0$，都有 $\lambda v \in \{x(t) \colon t \in [T, \infty)\}$，这就证明了该断言。

定义 $\delta \coloneqq \lambda^n \|v\|/2n > 0$ 并选择 $K > 0$，使得对于所有 $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^d$，$\max_{1 \leqslant i \leqslant N} \|\Psi_i(w_1) - \Psi_i(w_2)\| \leqslant K\|w_1 - w_2\|$。令 $x \in \mathfrak{X}_Z$ 为前述断言给出的轨迹，并令 $u_1, \ldots, u_N \colon [0, \infty) \to [0, 1]$ 为生成轨迹 x的可测切换律。选择时间 $t_n > 0$ 使得 $\|x(t_n) - \lambda v\| < \lambda^{1-n}\delta$，然后归纳地选择时间 $t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots\ldots, t_2, t_1 > 0$，使得

$$\|x(t_k) - \lambda v\| < \lambda^{1-k} e^{-K \sum_{j=k+1}^{n} t_j}\, \delta \tag{31}$$

对于每个 $k = 1, \dots, n$。记 $T_k \coloneqq \sum_{j=1}^{k} t_j$。现在令 $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N \colon [0, \infty) \to [0, 1]$为可测函数，使得对于几乎处处的 $s \in [0, t_k]$ 有 $\hat{u}_i(T_{k-1} + s) = u_i(s)$，对于每个 $k = 1, \dots, n$均成立，并且 $\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i = 1$ 几乎处处成立。令 z 为与切换律 $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$及初始条件 $z(0) = v$相对应的轨迹。我们声称，对于每个 $k = 1, \dots, n$,

$$\|z(T_k) - \lambda^k v\| \leqslant e^{K t_k} \|z(T_{k-1}) - \lambda^{k-1} v\| + e^{-K \sum_{j=k+1}^{n} t_j} \delta. \tag{32}$$

情形 $k = 1$ 可由（31）以及 $z(t_1) = x(t_1)$这一事实直接得到，因此不妨设 k 属于范围 2，……，n。对于每个 $\tau \in [0, t_k]$,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^\tau \left(\dot{z}(T_{k-1} + s) - \lambda^{k-1} \dot{x}(s) \right) ds \right\| \\ &\qquad = \left\| \int_0^\tau \sum_{i=1}^{N} u_i(s) \left(\Psi_i(z(T_{k-1} + s)) - \Psi_i\left(\lambda^{k-1} x(s)\right) \right) ds \right\| \\ &\qquad \leqslant K \int_0^\tau \|z(T_{k-1} + s) - \lambda^{k-1} x(s)\| \, ds \end{aligned} \tag{33}$$

其中我们使用了 Ψ_1，……，Ψ_N 的齐次性。特别地，我们有

$$\begin{aligned} \|z(T_{k-1} + \tau) - \lambda^{k-1} x(\tau)\| &\leqslant \|z(T_{k-1}) - \lambda^{k-1} x(0)\| \\ &\quad + K \int_0^\tau \|z(T_{k-1} + s) - \lambda^{k-1} x(s)\| \, ds \end{aligned} \tag{34}$$

对于所有 $\tau \in [0, t_k]$。由 Gr¨onwall 不等式可得

$$\|z(T_k) - \lambda^{k-1} x(t_k)\| \leqslant e^{K t_k} \|z(T_{k-1}) - \lambda^{k-1} x(0)\| \tag{35}$$

于是，所声称的不等式（32）结合 $x(0) = v$ 以及不等式（31）即可得到。不等式

$$\|z(T_n) - \lambda^n v\| \leqslant e^{K \sum_{j=k}^{n} t_j} \|z(T_{k-1}) - \lambda^{k-1} v\| + (n + 1 - k)\delta \tag{36}$$

对于所有 $k = 1$，……，n 可由（32）通过从 $k = n$开始的反向归纳得到。在情形 $k = 1$ 下，右侧第一项为零，从而得到

$$\|z(T_n) - \lambda^n v\| \leqslant n\delta = \frac{1}{2} \|\lambda^n v\| \tag{37}$$

因此

$$\|z(T_n)\| \geqslant \frac{\lambda^n \|v\|}{2} > C\|v\| = C \|z(0)\| \tag{38}$$

这与 C 的定义矛盾。由此可得，Z 不可能在两个不同点与同一条正射线相交，结论得证。□

定理 *3.6* 的证明。设 $d \leqslant 3$，并假设在 $\mathbb{R}^d$ 上由 $\Psi_1, \dots, \Psi_N$ 定义的切换系统是李雅普诺夫稳定的，但 并非全局一致指数稳定。为证明该定理，我们将说明此系统不是周期渐近稳定的。

由引理 3.7 可知，存在一条轨迹 x 不向原点聚积；根据李雅普诺夫稳定性，这条轨迹也是有界的。定义 $Y \coloneqq \{x(t) \colon \ t \geqslant 0\}$ 并注意到 Y 是 $\mathbb{R}^d \smallsetminus \{0\}$ 的一个紧子集，且满足 $\mathfrak{X}_Y$ 非空。令 $\mathscr{Z}$ 表示所有满足 $Z \subseteq Y$ 非空这一性质的非空紧集 $\mathfrak{X}_Z$。显然，$\mathscr{Z}$ 非空，因为它包含元素 Y。

我们断言，Z 关于包含关系有一个极小元。根据佐恩引理，只需证明：若 $(Z_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 Z 中一个关于包含关系全序的元素族，则存在 $Z_0 \in$Z，且它是每个 Z_α的子集。给定这样一个元素族 $(Z_\alpha)_{\alpha\in A}$，定义 $Z_0 \coloneqq \bigcap_{\alpha\in A} Z_\alpha \subseteq Y$；根据一般拓扑学的标准结论，它是紧的且非空。然后$\mathfrak{X}_{Z_0} = \mathfrak{X}_{\bigcap_{\alpha\in A} Z_\alpha} = \bigcap_{\alpha\in A} \mathfrak{X}_{Z_\alpha} \neq \varnothing$，这是将同一原理应用于非空紧集的全序族 $(\mathfrak{X}_{Z_\alpha})_{\alpha\in A}$所得，其中每个集合都是紧集 $\mathfrak{X}_Y$的闭子集。特别地， Z_0 就是 Z 中所需的元素，因此佐恩引理适用，断言得证。

现在令 $Z \subseteq Y \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 如该断言所给出，并注意到根据命题3.8，集合 Z 与 $S^{d-1} \subseteq S^2$的一个子集同胚。根据命题3.5，集合 $\mathfrak{X}_Z$ 是一个切换贝布托夫移位，并且根据伯克霍夫复现定理，存在 $\mathfrak{X}_Z$ 中的一个元素，该元素相对于 $(\sigma^\tau)_{\tau\geqslant 0}$在 $\mathfrak{X}_Z$ 上的移位半流是复现的，因此根据定理2.4，存在一条周期轨迹 $x \in \mathfrak{X}_Z$。显然，存在一个切换律能够生成非零周期轨迹 x 意味着存在一个周期的切换律生成同一条轨迹。由此可知，由 Ψ_1，……， Ψ_N定义的切换系统不是周期渐近稳定的，证明完毕。□

3.4. **实维数不超过三维的线性切换系统的稳定性**。现在，我们可以无条件地证明，对于实维数不超过三维的实线性切换系统，周期渐近稳定性意味着全局一致指数稳定性，从而去除了 Chitour、Gaye 和 Mason 定理中的一项技术性假设（参见 [11]），并对该维数范围内的1.1 问题作出肯定回答。若系统是李雅普诺夫稳定的，这一推论可直接由定理 3.6得出，因此证明主要分析李雅普诺夫稳定性不成立的情形。在这方面，我们将借助 Chitour、Mason 和 Sigalotti 早先关于边际不稳定切换系统的研究 [12]。

若 $\mathsf{A} = (A_1, \ldots, A_N)$是一个由 $d\times d$实矩阵构成的元组，我们将相应的一致指数增长率定义为

$$\Lambda(\mathsf{A}) \coloneqq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sup_{x(0)\neq 0} \log\left(\frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|}\right) \tag{39}$$

其中，上确界取遍由 x 定义的线性切换系统的所有非零轨道 A。由于次可加性，极限必然存在；详细分析参见例如 [14, §1.3。2]该量 $e^{\Lambda(A)}$ 是联合谱半径的连续时间类比（2）。

定理 3.9。 设 $\mathsf{A} = (A_1, \ldots, A_N)$ 是一组 $d \times d$ 实矩阵，其中$1 \leqslant d \leqslant 3$。如果由 A 定义的线性切换系统是周期渐近稳定的，那么它就是全局一致指数稳定的。

证明。 不失一般性，我们假设 $d = 3$，因为低维情形很容易嵌入三维情形。为证明该定理，我们假设切换系统不是全局一致指数稳定的，目标是推导出它不可能是周期渐近稳定的。显然，如果一致指数增长率 $\Lambda(\mathsf{A})$ 为负，那么由 A 定义的切换系统就是全局一致指数稳定的，因此在我们的假设下$\Lambda(\mathsf{A})$ 必然非负。

首先假设 $\Lambda(\mathsf{A})$ 恰为零。如果由A定义的切换系统是李雅普诺夫稳定的，那么由定理3.6即可得出结论，因此我们假设该系统不是李雅普诺夫稳定的。在这种情况下，由 A 定义的切换系统是边界不稳定的，其含义见 Z. Sun 的文章 [50]。根据 Chitour、Mason 和 Sigalotti 的一般定理 [12, 定理 2] 这意味着以下三种可能性之一成立：

情形 *1*。 存在一个可逆的 3×3 实矩阵 X，使得对于每个$i = 1, \ldots\ldots, N$，我们都可以写成

$$A_i = X \begin{pmatrix} B_i & v_i \\ 0 & c_i \end{pmatrix} X^{-1} \tag{40}$$

其中，B_i 是一个实 2×2 矩阵，v_i 是一个实 2×1 矩阵，而 c_i 是一个实 1×1 矩阵。此外，如果我们定义 $\mathsf{B} = (B_1, \ldots\ldots, B_N)$ 和 $\mathsf{C} = (c_1, \ldots\ldots, c_N)$，那么$\Lambda(\mathsf{B}) = \Lambda(\mathsf{C}) = 0$，且由 B 定义的线性切换系统是李雅普诺夫稳定的。在此情形下，注意到由于 $c_1, \ldots\ldots, c_N$的一维性，极限 $\Lambda(\mathsf{C})$ 很容易看出恰好等于实数 $c_1, \ldots\ldots, c_N$的最大值。由于这个最大值为零，因此可知矩阵 $X^{-1}A_iX$ 中的一个矩阵的底行全为零，从而相应的矩阵 A_i 具有一个零特征值。因此，存在一个常值切换律，能够生成由 A 定义的线性切换系统的一条非零平稳轨迹，并且该系统不是周期渐近稳定的。

情形 *2*。 存在可逆的 3×3 实矩阵 X，使得对于每个$i = 1, \ldots, N$，我们都可以写成

$$A_i = X \begin{pmatrix} b_i & v_i^{\mathsf{T}} \\ 0 & C_i \end{pmatrix} X^{-1} \tag{41}$$

其中，b_i 是一个实 1×1 矩阵，v_i^{T}是一个实 1×2 矩阵，C_i 是一个实 2×2矩阵。此外，若定义 $\mathsf{B} = (B_1, \ldots, B_N)$ 和 $\mathsf{C} = (c_1, \ldots, c_N)$，则 $\Lambda(\mathsf{B}) =\Lambda(\mathsf{C}) = 0$，且由 C 定义的线性切换系统是李雅普诺夫稳定的。与前一种情形类似，$b_1, \ldots, b_N$的一维性意味着实数 b_i 中必有一个等于 $\Lambda(\mathsf{B})$，因此矩阵 $X^{-1}A_iX$ 中必有一个含零列，从而存在一个常值切换律，能生成一条非零平稳轨迹，因此该系统不是周期渐近稳定的。

情形 *3*. 存在一个可逆的 3×3 实矩阵 X，使得对于每个$i = 1, \ldots, N$，我们都可以写成

$$A_i = X \begin{pmatrix} b_i & u_i & v_i \\ 0 & c_i & w_i \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} X^{-1} \tag{42}$$

其中 b_i、c_i、d_i、u_i、v_i、w_i 均为实数，我们将其视为一个 1×1实矩阵。此外，如果定义 $\mathsf{B} = (b_1、\ldots\ldots、b_N)$、$\mathsf{C} = (c_1、\ldots\ldots、c_N)$ 和 $\mathsf{D} =(d_1、\ldots\ldots、d_N)$，那么 $\Lambda(\mathsf{B})$、$\Lambda(\mathsf{C})$ 和 $\Lambda(\mathsf{D})$ 中至少有两个为零。与前面的情形相同，这三个极限中有一个等于零这一事实意味着存在 i，使得 b_i、c_i 或 d_i 中有一个为零。因此，相应的矩阵$X^{-1}A_iX$ 是具有一个零对角元的上三角矩阵，于是再次存在一个常值切换律，能够生成一条非零平稳轨迹，因此该系统不是周期渐近稳定的。

总结上述分析，我们已经证明，如果 $\Lambda(\mathsf{A}) = 0$ 且由 A 生成的线性切换系统是李雅普诺夫稳定的，那么根据定理 3.6，它不是周期渐近稳定的；但如果 $\Lambda(\mathsf{A}) = 0$ 且该系统 不是 李雅普诺夫稳定的，那么根据 [12, 定理 2] 以及上述逐情形分析，它具有一条平稳轨迹，并且同样不是周期渐近稳定的。

剩下需要考虑的情形是 $\Lambda(\mathsf{A}) > 0$。在这种情形下，考虑由 $A_i \coloneqq A_i - \Lambda(\mathsf{A}) \cdot I$ 对 $i = 1, \ldots\ldots, N$定义的线性切换系统 $\mathsf{A} = (A_1, \ldots\ldots, A_N)$。容易验证，$\hat{x}$ 是由 A 定义的系统的一条轨迹，当且仅当它具有形式$\hat{x}(t) \equiv e^{-t\Lambda(\mathsf{A})}x(t)$ ，其中 x 是由 A 定义的系统的一条轨迹，并且该轨迹由相同的切换律 $(u_1, \ldots\ldots, u_N)$生成。由此可直接得出$\hat{\ }\hat{\ }\Lambda(\mathsf{A}) = 0$。将前述分析应用于 A，可得由$\hat{\ }$A定义的系统存在一条周期或平稳轨迹$\hat{x}(t)$ ，该轨迹由周期或平稳切换律 $(u_1, \ldots\ldots, u_N)$生成。因此，相同的切换律 $(u_1, \ldots\ldots, u_N)$ 会生成由 A 定义的切换系统的一条轨迹 $x(t) = e^{t\Lambda(\mathsf{A})}\hat{x}(t)$，并且该轨迹以指数速度趋于无穷大。特别地，A 不具备周期渐近稳定性。我们已经证明，如果 A 不是全局一致指数稳定的，那么它就不具备周期渐近稳定性，定理得证。□

3.5. 二维复维数下切换线性系统的稳定性。本文的技术还可证明，对于某些复线性切换系统，周期稳定性蕴含全局一致指数稳定性；此时系统的维数为二：

定理3.10。设$\mathsf{A} = (A_1, \ldots, A_N)$ 是由 2×2 复矩阵构成的一个元组。若由A 定义的线性切换系统是周期渐近稳定的，则它是全局一致指数稳定的。

证明。与定理3.9的证明类似，我们假设A 并非全局一致指数稳定，目的是证明它也不是周期渐近稳定的。由于假设A 并非全局一致指数稳定，因此有 $\Lambda(\mathsf{A}) \geqslant 0$。不失一般性，我们假设一致指数增长率 $\Lambda(\mathsf{A})$ 为零，因为增长率为正的情形可完全按照定理3.9的证明由增长率为零的情形推出。如果任何 A_i 的特征值实部非负，那么显然存在一个常值切换律，使得其生成的轨迹不趋于零；此时周期渐近稳定性不成立。证明余下部分中，我们转而假设每个 A_i 的每个特征值实部均为负。

如果任意非零真 $\mathbb{C}$-线性子空间 $\mathbb{C}^2$ 都被每个 A_i同时保持不变，那么通过同时基变换，我们可以设每个 A_i 都是上三角矩阵。进一步通过对角基变换，我们可以设每个 A_i 的每个非对角线元素的绝对值都任意小；当这些非对角线元素相对于对角元的实部足够小时，欧几里得范数是A的严格李雅普诺夫函数。这意味着 A是全局一致指数稳定的，这与我们先前的假设矛盾。由此我们得出，矩阵 A_i 不可能具有非平凡的公共不变子空间。这意味着，我们可以通过完全沿用 A 在 $\mathbb{C}^2$ 中的论证、但使用复向量空间而非实向量空间，来构造一个巴拉巴诺夫范数。令 Z 表示该巴拉巴诺夫范数的单位球面。通过将

$\mathbb{C}^2$ 与 $\mathbb{R}^4$ 以及 A 与 $M_4(\mathbb{R})^N$中的一个元素对应起来，命题 3.5 表明，由 A 定义的切换线性系统的所有 Z-值轨迹的集合 $\mathfrak{X}_Z$ 是一个切换 Bebutov移位。根据巴拉巴诺夫范数的定义性质，集合 $\mathfrak{X}_Z$非空。现在令 $\pi\colon\ \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 为连续映射，它将 $\mathbb{C}^2$ 中的每个非零向量映射到其生成的一维 $\mathbb{C}$-线性子空间，并考虑 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-值的切换 Bebutov移位 $\{\pi \circ x\colon\ x \in \mathfrak{X}_Z\}$。由于复射影直线 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 与 S^2同胚，根据定理 2.4，存在线性切换系统的一条轨迹 $x\colon\ [0、\infty) \to Z$，该系统由 A 定义，并且具有 $\pi \circ x$ 为周期的性质；不失一般性，我们可以假设生成该轨迹的切换律也是周期的。轨迹x 不会在零点聚积，因为其值域包含在巴拉巴诺夫范数的单位球面内；但它由周期切换律生成，因此不满足周期渐近稳定性。□

3.6. **切换线性系统极值轨迹的不唯一性**。
我们以一项结果作为本文的收尾，该结果强烈表明，为了证明定理 3.9并回答问题 1.1的三维情形，除了研究球面或射影平面上的某种多值流或分支流之外，基本别无选择（正如本文通过使用 Bebutov移位所做的那样）。更具体地说，引言中概述的策略是研究位于巴拉巴诺夫范数单位球面上的线性切换系统轨道；一般而言，这一策略无法归结为对该范数单位球面上普通半流的分析。

若一致指数增长率 $\Lambda(A)$ （定义见（39））为零，且 A 是李雅普诺夫稳定的，那么 A 的巴拉巴诺夫范数恰好是一个范数 $|||\cdot|||$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上满足以下性质：每个单位向量都是至少一条轨迹的原点，且该轨迹在所有时间内都保持在 $|||\cdot|||$ 的单位球面上。我们称这样的轨迹为相对于巴拉巴诺夫范数 的极值轨迹 $|||\cdot|||$。如果 $\mathbb{R}^d$ 唯一同时被每个 A_1、……、A_N保持的线性子空间只有平凡子空间 $\{0\}$ 和$\mathbb{R}^d$，那么巴拉巴诺夫范数的存在性可以得到保证（例如参见 [4, 14]）；然而，这并非巴拉巴诺夫范数存在的必要条件（参见 [13]）。本节的结果如下：

定理 3.11。 设 $\mathsf{A} = (A_1, \dots, A_N)$ 是一组满足$\Lambda(\mathsf{A}) = 0$ 的 $d \times d$ 实矩阵，并且存在一个 *Barabanov* 范数 $|||\cdot|||$。此外，假设 d 是奇数，且矩阵 $A_1, \dots, A_N$ 的任意凸组合都是非奇异的。那么，由 A 定义的线性切换系统存在两条不同的轨道，它们相对于 $|||\cdot|||$ 是极值轨道，并且具有相同的初始状态。

为了证明定理 3.11 我们需要以下简单的拓扑学结果：

引理 3.12。 设 $(\Phi^t)_{t\geqslant 0}$ 是拓扑空间 Z 上的一个半流，其中该空间与一个偶数维球面 S^{2n}同胚。那么 (Φ^t) 存在一个不动点。

证明。 不妨设 $Z = S^{2n}$。众所周知（例如参见 [39, 第 367]页），从 S^{2n} 到其自身的连续函数要么有一个不动点，要么将某个点 $x \in S^{2n}$ 映射到它的对跖点 $-x$。由于 (Φ^t) 是一个半流，我们有 $\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in S^{2n}} \|x - \Phi^{2^{-k}} x\| = 0$，因此特别地，若 k 充分大，则对每个 $x \in S^{2n}$，都有 $\Phi^{2^{-k}} x \neq -x$ 。对每个充分大的 k ，紧集

$X_k \coloneqq \{x \in S^{2n} : \Phi^{2^{-k}} x = x\}$ 因而非空。嵌套交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$因此非空，其元素都是该半流的不动点。□

定理 3.11 的证明。令 $Z \subset \mathbb{R}^d$ 表示 $|||\cdot|||$ 的单位球面。由于 $|||\cdot|||$ 是一个 Barabanov 范数， Z 中的每个点都是至少一条轨迹的原点，该轨迹的取值仅属于 Z。反设 Z 中的每个点都是这样一条轨迹的原点，且该轨迹唯一。令 $\mathfrak{X}_Z$ 表示所有取值仅属于 Z 的轨迹所构成的集合，并注意到根据命题 3.5 $\mathfrak{X}_Z$ 是一个切换贝布托夫移位。由 $x \mapsto \|x(0)\|^{-1}x(0)$ 定义的函数 $\mathfrak{X}_Z \to S^{d-1}$ 显然连续，并且根据假设是双射。因此它是一个同胚。根据引理 3.12， $\mathfrak{X}_Z$ 上的移位半流 $(\sigma^t)_{t\geqslant 0}$ 存在一个不动点 x，并且对某些可测函数 u_1、……、u_N，该轨迹几乎处处满足 $0 = \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)A_i x(t)$：$[0、\ \infty) \to$[0、1]，使得 $\sum_{i=1}^{N} u_i(t) = 1$ 几乎处处成立。特别地，矩阵 A_1、……、A_N 存在一个凸组合，其核中包含 $x(0)$，这就产生了矛盾。□

4. Generalisations and directions for future work

在本文中，我们仅考虑任意切换的情形，其中 u_i 切换律的各个分量是勒贝格可测函数 $[0,\ \infty) \to$[0,1]。然而，将问题1.1 解释为这些切换律的弱-*闭子类（例如具有固定最小驻留时间的分段常值函数类）时，该问题同样有意义。在此背景下，每个 u_i 则是一个函-数 $[0,\ \infty) \to \{0,\ 1\}$；我们仍有$\sum_{i=1}^{N} u_i = 1$ 几乎处处成立；并且向量 $(u_1(t),\ \ldots\ldots,\ u_N(t))$在长度为 δ的每个区间内至多取两个不同的值，其中最小驻留时间 $\delta > 0$ 是任意常值。在此背景下，切换律的片段不能任意拼接，因为这通常会违反驻留时间约束，因此轨道不一定满足定义2.3中的切换公理。虽然前述证明中的一些内容经过轻微修改后可以适用于这种情形（例如命题3.8），但许多其他关键步骤会失效，例如命题3.5 以及定理3.6的最后几步。目前，对于在具有最小驻留时间的分段常值切换律背景下，问题1.1对三维线性切换系统是否有肯定答案，我们尚未提出猜想；对于在四维及更高维中，同一问题的否定答案是否仍然成立，我们也没有提出猜想。

为简化论述，我们在第3 节中将研究范围限定为由有限个状态而非状态的紧凸集定义的切换系统。不过，这些结果无需进行实质性修改即可推广到这一更一般的情形。

虽然我们已在定理3.9 中证明，三维中的每个边界稳定线性切换系统都有一条周期轨迹，但我们目前还不了解其底层切换律的结构。这与二维情形形成对比：在二维情形中，周期切换律的结构已得到非常精确的刻画；此时，切换律要么是常值的（这种情况下，某个切换状态的凸组合不可逆），要么只取极值$u_i(t) \in \{0,\ 1\}$ 且只在区间上取这些值。因此，我们提出以下非常一般的问题：

问题4.1。 设$\mathsf{A} = (A_1, \ldots, A_N) \in M_d(\mathbb{R})^N$关于巴拉巴诺夫范数 $|||\cdot|||$是边际稳定的。假设不存在元组$\mathsf{B} = (B_1, \ldots, B_M) \in M_d(\mathbb{R})^M$，使其凸包严格包含于$\mathsf{A}$ 的凸包中，同时又是边际

稳定的。是否存在一条轨迹 $x(t)$，沿其 $|||x(t)|||$ 为常值的，且其底层切换律 $u = (u_1, \dots, u_n)$ 几乎处处仅取值于 $\{0,1\}^N$?

例如， [42, 44] 的结果表明，这个问题在维数 2 时答案为肯定；而在维数 1 时，答案显然为肯定。

关于 Bebutov移位及第2节内容的相关问题，请参见§2.5。

致谢。本研究部分得到了 Leverhulme Trust 研究项目资助 RPG-2024-380 的支持。I.D. Morris 感谢宾夕法尼亚州立大学在本项目启动期间给予的热情接待。作者还感谢 Vaughn Climenhaga 和 Federico Rodriguez Hertz 的有益交流。

References

[1] Agrachev, A. and Motta M. *Regul.* , , 线性 *Chaotic Dyn. 30* 2025 481 503 ↑3
切换系统的李雅普诺夫指数。 ( ), – . ( ) [2] Angeli, D. 关于任意切换齐次系统稳定性的说明。未发表手稿，1999年。 (↑20,21)
[3] Angeli, D., De Leenheer, P., and Sontag, E. D. 具有流入与流出的化学网络：一种正线性微分包含方法。 *Biotechnol. Prog. 25*, 3 (2009年), 632–642. (↑20,21) [4] Barabanov, N. E. 一类线性非定常微分方程组的绝对特征指数。 *Sib. Math. J. 29* (1988 年), 521–530. (↑3, 25,26) [5] Bebutov, M. V. *Byull. Moskov.* 连续函 *Gos. Univ. Mat. 2* 5 1940 1 52 ↑5
数空间中的动力系统。 , ( ), – . ( ) [6] Bendixson, I. 关于由微分方程定义的曲线。 *Acta Math. 24*, 1 (1901年), 1–88. (↑17)
[7] Berger, M. A., and Wang, Y. 矩阵有界半群。 *Linear Algebra Appl. 166* (1992年), 21–27. (↑2)
[8] Blondel, V. D., Theys, J., and Vladimirov, A. A. 有限性猜想的一个初等反例。 *SIAM J. Matrix Anal. Appl. 24*, 4 (2003年), 963–970. (↑3) [9] Boscain, U. *SIAM J.* 平面切 *Control Optim. 41* 1 2002 89 112 ↑3
换系统的稳定性：线性单输入情形。 , ( ), – . ( ) [10] Bousch, T., and Mairesse, J. 拓扑迭代函数系、俄罗斯方块堆与有限性猜想的渐近高度优化。 *J. Amer. Math. Soc. 15*, 1 (2002年), 77–111. (↑3) [11] Chitour, Y., Gaye, M., and Mason, P. 线性切换系统的几何与渐近性质。 *J. Differential Equations 259*, 11 (2015年), 5582–5616. (↑7,23)
[12] Chitour, Y., Mason, P., and Sigalotti, M. 关于线性切换系统的边缘不稳定性。 *Systems Control Lett. 61*, 6 (2012年), 747–757. (↑23, 24,25) [13] Chitour, Y., Mason, P., and Sigalotti, M. 具有巴拉巴诺夫范数的线性切换系统的刻画。 *Math. Rep. (Bucur.) 24(74)*, 1-2 (2022年), 125–137. (↑26)
[14] Chitour, Y. Mason P. and Sigalotti M. *Dynamics and stability of continuous-time , , , , , switched linear systems* 105 *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications* ¨ 2025 ↑2 3 23 25 26 卷。
Birkhauser/Springer, Cham, . (, , , ,) [15] Ciesielski, K. *Topol.* 二维半 *Methods Nonlinear Anal. 3* 1 1994 163 178 ↑17
流的庞加莱–本迪克松定理。 , ( ), – . ( ) [16] Ciesielski, K. *Cent.* 庞加莱– *Eur. J. Math. 10* 6 2012 2110 2128 ↑17
本迪克松定理：从庞加莱到二十一世纪。 , ( ), – . ( ) [17] Coudene, Y. 双曲动力系统图集。 *Notices Amer. Math. Soc. 53*, 1 (2006年), 8–13. (↑7) [18] Dayawansa, W. P., and Martin, C. F. 一类发生切换的动力系统的李雅普诺夫逆定理。 *IEEE Trans. Automat. Control 44*, 4 (1999年), 751–760. (↑20) [19] Diestel, R. *Graph theory*,第六版, *Graduate Texts in Mathematics*第173卷。施普林格，柏林，2025年。(↑10)

[20] Filippov, A. F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, 18 *Mathe-* 卷, *matics and its Applications (Soviet Series)* 收录于。Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1988年。由俄文译出。(↑4)[21] Filippov, V. V. *Basic topological structures of ordinary differential equations*, *Mathematics and its Applications*第432卷。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1998年。由俄文译出。(↑4,7)
[22] Foreman, M. *The Complexity and the Structure and Classification of Dynamical Systems*。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，2020年，第1–48页。(↑16)[23] Gurvits, L. 离散线性微分包含的稳定性。 *Linear Algebra Appl. 231* (1995年), 47–85. (↑2)[24] Gurvits, L. 什么是连续时间线性微分包含的有限性猜想? 收录于 *IEEE International Conference on Decision and Control* 2003 2, 1165 1169 ↑2 ( ), vol. pp. – . ( )[25] Hájek, O. *Dynamical systems in the plane*。Academic Press，伦敦-纽约，1968年。(↑17)
[26] Hales, T. C. Jordan 对若尔当曲线定理的证明。 *Stud. Log. Gramm. Rhetor. 10*, 23 2007 45 60 ↑12 ( ), – . ( )[27] Hare, K. G., Morris, I. D., Sidorov, N., and Theys, J. Lagarias-Wang 有限性猜想的一个明确反例。 *Adv. Math. 226*, 6 (2011年), 4667–4701. (↑3)[28] Hartman, P. *Ordinary differential equations*。John Wiley & Sons, Inc.，纽约-伦敦-悉尼，1964年。(↑4, 5,18)[29] Jordan, C. 巴黎综合理工学院分析课程。第三卷。积分学（微分方程）。巴黎：Gauthier-Villars et Fils，1887年。(↑12)[30] Jungers, R. *The joint spectral radius: theory and applications*, 385 *Lecture Notes in* 卷, *Control and Information Sciences* 2009 ↑2 收录于。Springer-Verlag，柏林，。( )[31] Juvan, M., Malnič, A., and Mohar, B. 曲面上的曲线系统。 *J. Comb. Theory, Ser. B 68* 1 1996 7 22 ↑10 , ( ), – . ( )[32] Kakutani, S. 贝布托夫定理的一个证明。 *J. Differential Equations 4* (1968 年), 194–201. (↑5)
[33] Katok, A., and Hasselblatt, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*第54卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。(↑7)
[34] Lagarias, J. C., and Wang, Y. 矩阵集的广义谱半径有限性猜想。 *Linear Algebra Appl. 214* (1995年), 17–42. (↑3)[35] Liberzon, D. *Switching in systems and control*。《系统与控制：基础与应用》。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，MA，2003年。(↑2)[36] Lin, H., and Antsaklis, P. J. 切换线性系统的稳定性与可镇定性：近期成果综述。 *IEEE Trans. Automat. Control 54*, 2 (2009年), 308–322. (↑2)[37] Margaliot, M., and Langholz, G. 绝对稳定性的充要条件：二阶系统情形。 *IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl. 50*, 2 (2003年), 227–234. (↑3)[38] Morris, I. D. 周期切换律下的稳定性并不意味着任意切换下的全局稳定性。预印本：arXiv:2510.08074，2025年。(↑4,20)[39] Munkres, J. R. *Topology*。Prentice Hall, Inc.，上萨德尔河，NJ，2000年。第二版。(↑5,26)[40] Percell, P. 抽象交序列的亏格。 *Proc. Am. Math. Soc. 55* (1976年), 217–220. (↑10)[41] Poincaré, H. 关于由微分方程定义的曲线。 *C. R. Acad. Sci. 90* (1880年), 673–675. (↑17)[42] Protasov, V. Y., and Musaeva, A. 具有任意控制集的二阶线性切换系统：稳定性与不变范数。 *Eur. J. Control* (2025年), 101346. (↑3,28)[43] Pyatnitskii, E. S., and Rapoport, L. B.三维情形下非线性非定常系统周期运动的存在性及绝对稳定性检验。 *Autom. Remote* , ( ), – . *Control 52* 5 1991 648 658 ↑4 ( )[44] Pyatnitskiy, E. S., and Rapoport, L. B. 微分包含渐近稳定性的判据及时变非线性控制系统的周期运动。 *IEEE Trans. Cir-* , ( ), – . *cuits Systems I Fund. Theory Appl. 43* 3 1996 219 229 ↑3 4 28 (, ,)[45] Rudin, W. *Functional analysis*，第二版。《纯粹与应用数学国际丛书》。McGraw-Hill, Inc.，纽约，1991 年。(↑19)

[46] Schwartz, A. J. 闭二维流形上的 Poincar´é-Bendixson 定理推广。 *Amer. J. Math. 85 (1963), 453-458; errata, ibid 85* (1963年), 753。 (↑17) [47] Seibert, P., and Tulley, P. 论平面上的动力系统。 *Arch. Math. (Basel) 18* (1967年), 290–292。 (↑17) [48] Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K., and King, C. 切换系统与混合系统的稳定性判据。 *SIAM Rev. 49*, 4 (2007年), 545–592。 (↑2)
[49] Sontag, E. D., and Wang, Y. 论输入到状态稳定性性质的刻画。*Systems Control Lett. 24*, 5 (1995年), 351–359。 (↑20, 21) [50] Sun, Z. *IEEE Trans. Automat. Control* 关于切换系统边际稳定性的注记。, (), –。 () [51] Sun, Z., and Ge, S. S. *Stability theory of switched dynamical systems*。通信与控制工程丛书。施普林格, 伦敦, 2011年。 (↑2)
[52] Tverberg, H. 若尔当曲线定理的证明。 *Bull. London Math. Soc. 12*, 1 (1980年), 34–38。 (↑12)
[53] Yang, Y., Xiang, C., and Lee, T. H. 任意切换下二阶切换线性系统稳定性的充分必要条件。 *Internat. J. Control 85*, 12 (2012年), 1977–1995。 (↑3)

Department of Mathematics, The Pennsylvania State University
Email address: bochi@psu.edu

School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London
Email address: i.morris@qmul.ac.uk