分布式计算中的通用且渐近最优的数据与任务分配

Javad Maheri、K. K. Krishnan Namboodiri 和 Petros Elia

EURECOM 研究所 索菲亚·安提波利斯，法国

电子邮箱： {maheri、karakkad、elia}@eurecom.fr

arXiv:2601.05873v1 [cs.IT] 9 Jan 2026

摘要

我们研究分布式计算中通信成本和计算成本的联合最小化问题，其中主节点协调 N 个工作节点，对包含 n 个文件的库执行函数计算。假设该函数被分解为任意的子函数集合 X，且每个子函数依赖于 d 个输入文件，则该分布式计算问题可转化为一个 d-均匀超图边划分问题：其中，边集（子函数集合）由顶点（文件）之间的 d元依赖关系定义，并必须在 N 个不相交群组（工作节点）之间进行划分。目标是设计一种文件与子函数分配方案，即对 X 进行划分，使通信成本 $\pi_{\mathbf{X}}$最小化；该成本表示每台服务器上的不同文件数量的最大值，同时还要最小化计算成本 $\delta_{\mathbf{X}}$ ，即工作节点子函数负载的最大值。针对广泛的参数范围，我们提出了一种确定性分配方案——交织团（Interweaved-Cliques，IC）设计。对于一大类分解 X，该方案受信息论启发的交织团结构能够同时实现通信成本和计算成本的阶数最优性。该最优性源于我们的可达性和反向界：在对 X 的密度作出合理假设的情况下，这些界揭示了通信成本的最优标度具有 $n/N^{1/d}$ 的形式，表明我们的设计实现了随 $N^{1/d}$扩展的阶数最优划分增益，同时也实现了阶数最优的计算成本。有趣的是，这种阶数最优性以确定性方式实现；更重要的是，它与 X 无关，因此无需重新整理文件即可计算多个目标函数。

索引词

本研究得到华为法国资助的未来无线网络讲席、法国政府通过法国2030 ANR计划“PEPR 未来网络”（编号 ANR-22-PEFT-0010）以及欧洲研究委员会 ERC-StG 项目 SENSIBILIT´E（资助编号 101077361）的支持。

分布式计算、编码映射归约、编码缓存、分布式机器学习、函数计算、盲资源分配、交织团设计、负载均衡、通信优化、组合设计、计算成本、边划分、副本因子

一、引言

计算资源与通信资源的高效分配，是各种分布式计算场景的核心，尤其是在涉及海量数据的复杂函数时。这类要求严苛的分布式计算场景通常需要在多个节点上，对大型数据集进行大量不同的子计算或子函数的求值。这进而凸显出一项挑战：如何在计算节点之间高效分配这些任务和数据，从而最大限度地降低工作节点间的计算负载和通信负载 [1], [2]。

降低计算成本与通信成本的任务和数据分配：这种对数据集和任务分配机制的特别关注，显然有别于函数计算中分布式源编码的经典范式 [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]，，在后者中，数据放置和任务放置通常是固定的。将重点转向优化函数和数据集在服务器之间的分配，有望更好地利用计算的部分可分性，但也带来了复杂的组合设计与信息论设计挑战，既涉及可实现方案，也涉及逆向界；近期多篇文献均对此有所探讨。

在这些近期研究中，我们看到 [10], [11] 聚焦于线性可分函数，并探讨了一种分布式计算场景：其中有 N 台服务器、一个用户，以及针对多个数据集请求的多个函数。这两项研究的主要目标是设计通信方案，在各种数据放置方式和不同掉队者容错能力下，降低总通信负载。在此基础上， [12], [13]将问题扩展到没有掉队者的多用户场景，其中每台服务器为多个用户提供服务。此处的目标同样是降低通信成本和计算成本。这些研究采用了一种新颖的方法，结合覆盖码构造和基于镶嵌的铺砌，提出了用于服务器间任务分配以及服务器与用户之间通信的方案。类似地， [14] 在严格限制每台服务器任务数量的条件下，提出了一个相关的联合设计问题，

优化任务分配和传输，以最小化所有用户需求中的最坏情况通信成本。

一条平行的研究脉络源自 [19]，中关于编码 MapReduce 的工作，同样聚焦于这一更广泛的挑战：设计数据与任务分配方案，以缓解通信瓶颈，而如今采用的是编码交换。后续变体研究了掉队者 [20]、固定分配 [21]、异构或非对称信道 [22], [23]，以及多种拓扑结构 [24]，并常借鉴编码缓存和广播网络中的团启发式工具 [25], [26], [27]。这条研究脉络同样致力于通过结构化的任务放置优化分布式函数计算，并凸显数据集子分包在秩一（瓶颈）通信链路下减少服务器间通信方面的作用。

上述所有研究脉络通常都有一个共同目标：在各种设置和假设下，设计任务与数据分配方法，以降低分布式计算中的通信负载和计算负载。我们的方案也秉持这一相同主题。

所考虑的分布式计算模型的初步描述：本文考虑一种通用的分布式计算环境，其中主节点与 N 个工作节点协调，以计算任意函数。假设该目标函数以一个库中的 n 个数据集或文件作为输入，并且可以分解为若干子函数，每个子函数依赖于不同的文件组合。可以预见，这一环境涉及计算成本和通信成本；工作节点必须各自计算多个分配给它们的子函数，才能共同完成目标计算，同时必须向每个工作节点发送足够多的文件，使其能够计算对应的子函数。因此，设计目标是最小化通信成本（此处以发送给任一工作节点的文件最大数量衡量），并最小化计算成本（此处以分配给任一工作节点的子函数最大数量衡量）。

我们进一步假设，主节点可以访问由 n 个文件 $\mathcal{W} = \{W_1, \ldots, W_n\}$ 组成的库，并且每个文件 $W_j \in \mathbb{F}^B$ 包含来自某个域 $\mathbb{F}$ 的 B 个符号。我们还考虑这样的情况：目标函数 $F : (\mathbb{F}^B)^n \to \mathbb{F}^L$ 被分解为若干子函数，每个子函数都依赖于 d 个文件。因此， F 的任意分解都可以表示为集合 $\mathbf{A}_{n,\,d}$ 中从 1 到 n 的所有 d 元组构成的集合的一个子集 $\mathbf{X}$，这样我们的目标函数 F 可以表示为

$$\Psi(\{\zeta_{\mathcal{T}}(\mathcal{W}_{\mathcal{T}}) : \mathcal{T} \in \mathbf{X}, |\mathcal{T}| = d\}) : (\mathbb{F}^T)^{|\mathbf{X}|} \to \mathbb{F}^L \tag{1}$$

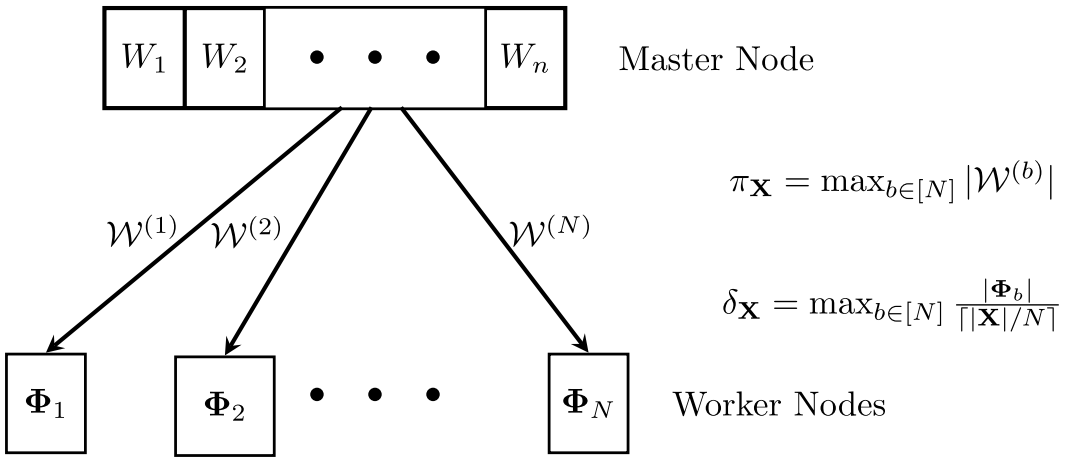

图 1. 分布式计算模型：目标函数 F 可分解为 $F = \Psi(\{\zeta_{\mathcal{T}}(\mathcal{W}_{\mathcal{T}}) : \mathcal{T} \in \mathbf{X} \ |\mathcal{T}| = d\})$，其中 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,d}$。发送给工作节点 b 的文件集记为 $\mathcal{W}^{(b)}$；假设主从链路为并行等容量链路，$\pi_{\mathbf{X}}$ 表示这些链路上的最坏情况通信成本。类似地，分配给工作节点 b 进行计算的子函数索引（d 元组）记为 $\mathbf{\Phi}_b$；假设工作节点同构，$\delta_{\mathbf{X}}$ 表示归一化后的计算延迟，即实际计算延迟与可能达到的最小计算延迟之比。

对于某个函数 Ψ，其中每个子函数 $\zeta_{\mathcal{T}}: (\mathbb{F}^B)^d \to \mathbb{F}^T$ 作用于文件 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}} = \{W_j, j \in \mathcal{T}\} \subset \mathcal{W}$。我们通常将参数 d 称为子函数文件度，或简称度。

与大多数分布式计算场景一样，我们有以下两个阶段。

文件与任务分配阶段——为每个工作节点 b 分配子函数集合 $\mathbf{\Phi}_b$ 和文件集 $\mathcal{W}^{(b)}$：主节点为每个工作节点 b 分配一组子函数 $\mathbf{\Phi}_b \subset \mathbf{X}$，以供计算 $\zeta_{\mathcal{T}}(\mathcal{W}_{\mathcal{T}})$ $\mathcal{T} \in \mathbf{\Phi}_b$。为此，必须向该工作节点发送其所分配子函数所需的所有文件输入。设 $\mathcal{W}^{(b)} \subseteq \mathcal{W}$ 为发送给工作节点 b 的文件集，则该链路上的通信负载等于 $\pi_b = |\mathcal{W}^{(b)}|$（以文件为单位），因此总通信成本

$$\pi_{\mathbf{X}} = \max_{b\in\{1,\cdots,N\}} |\mathcal{W}^{(b)}| \tag{2}$$

将反映整体通信延迟[1]。正如预期的那样，对于任何工作节点 b 计算子函数 $\zeta_{\mathcal{T}}(\mathcal{W}_{\mathcal{T}})$，文件和任务分配都必须保证[2] $\mathcal{W}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{W}^{(b)}$。因此，如果 $\mathcal{I}_{\mathcal{W}^{(b)}}$

[1]在多播遗憾地很少被网络采用的情况下，这一单播相关指标很好地体现了通信延迟等概念。[2]例如，假设 $d = 3$。如果文件三元组 W_1、W_2、W_3 未出现在任何一个工作节点上，那么子函数$\zeta_{\{1,2,3\}}(\mathcal{W}_{\{1,2,3\}})$就无法计算。

表示 th e 分配给工作节点 b的文件索引集，那么设计必须保证 tha t

$$\bigcup_{\mathcal{T}\in\mathbf{\Phi}_b}\mathcal{T}\subseteq\mathcal{I}_{\mathcal{W}^{(b)}} \tag{3}$$

这再次简单地说明，必须向每个工作节点传送其计算所分配子函数 $\mathbf{\Phi}_b$所需的全部文件（$\mathcal{W}^{(b)}$）。

计算阶段——每个工作节点 b 计算子函数 $\mathbf{\Phi}_b$：在此阶段，每个工作节点 b 继续计算所有子函数 $\zeta_{\mathcal{T}}$（$\mathcal{W}_{\mathcal{T}}$），涉及所有 $\mathcal{T}\in\mathbf{\Phi}_b$。假设各工作节点具有相同的计算能力，且每个子函数的计算成本相同，则计算时间与分配给任一工作节点的最大子函数数量成正比。因此，对于给定的分解 X，最小化该计算时间等价于最小化

$$\delta_{\mathbf{X}}=\frac{\max_{b\in[N]}|\mathbf{\Phi}_b|}{\lceil|\mathbf{X}|/N\rceil} \tag{4}$$

这意味着应使 $\delta_{\mathbf{X}}$ 尽可能接近 1。在上文中，分母表示与最小可能计算延迟相对应的理想均匀负载。我们的目标是降低通信成本 $\pi_{\mathbf{X}}$ 和计算成本 $\delta_{\mathbf{X}}$。

示例 1。考虑一个从包含 $n=7$ 个文件的库中获取输入的函数，并考虑一个分解 X $=\{12,13,23,45,36,27\}\subset\mathsf{A}^{7,2}$，它表明涉及 6 个子函数，其中每个子函数以 $d=2$ 个文件作为输入；第一对子函数[3] 的输入文件为文件 1 和 2，第二对子函数的输入文件为文件 1 和 3，依此类推。考虑 $N=2$ 个工作节点。如果将子函数 $\mathbf{\Phi}_1=\{12,13\}$分配给工作节点 1，并将子函数 $\mathbf{\Phi}_2=\{23,45,27,36\}$ 分配给工作节点 2，则需要向工作节点 1 发送文件 $\mathcal{W}^{(1)}=\{1,2,3\}$，并向工作节点 2 发送文件 $\mathcal{W}^{(2)}=\{2,3,4,5,6,7\}$。该方案的通信成本为 $\pi_{\mathbf{X}}=\max\{|\mathcal{W}^{(1)}|,|\mathcal{W}^{(2)}|\}=6$，计算成本为$\delta_{\mathbf{X}}=\frac{max\{|\mathbf{\Phi}_1|,|\mathbf{\Phi}_2|\}}{\lceil|}\mathbf{x}_{|/N\rceil}=\frac{4}{3}$。另一方面，如果将子函数 $\mathbf{\Phi}_1=\{12,13,45\}$分配给工作节点 1，并将 $\mathbf{\Phi}_2=\{23,27,36\}$ 分配给工作节点 2，则可以得到更优的 $\pi_{\mathbf{X}}=5$ 和最优的 $\delta_{\mathbf{X}}=1$。

注 1. 我们的框架可以直接涵盖一大类函数，这些函数可分解为输入变量子集上的 d 元依赖。这类结构存在于各种应用领域。在统计学中，计算协方差矩阵涉及成对依赖

[3]我们在此省略 co 描述这些对时的 mmas。显然，当我们说 12 时，指的是对 (1, 2)，依此类推。

(d = 2)在变量 *[28],* 之间，而高阶累积量估计则将其扩展到 d > 2依赖关系 *[29]*。在机器学习中，核主成分分析和谱聚类等核方法需要计算所有成对核函数 *[30]*；包括成对损失 *[31]* 和三元组损失 *[32],* 在内的对比学习与度量学习目标，同样分别依赖于 d = 2 和 d = 3 项。粒子与分子动力学模拟等科学计算任务也呈现出类似的成对或高阶结构 *[33], [34]*。在基因组学和生物信息学中，穷举式 SNP–SNP相互作用分析 *[35]* 和序列比对问题 *[36]* 通过多路依赖关系建模。即便是现代学习架构也表现出类似的 d元结构：基于Transformer的注意力机制计算成对词元依赖关系 *[37],* ，而大规模相似性搜索框架 *[38]* 则执行基于元组的计算。在许多此类情况下，任务集 X 可能非常庞大，甚至占据完整集合 A 中不可忽略的一部分$_{n,\ d}$，这凸显了对分配方案的需求：即使计算涉及数量极多的子函数，也能保持高效且均衡。

与超图划分的联系：显然，当前这个一般化的分布式计算问题可以等价地表述为一个超图边划分问题。对于相同的 n、 d、 N 和 X，我们考虑一个 d一均匀超图 $\mathcal{H} = ([n], \mathbf{X})$，其顶点集为 $[n]$, $\{1, 2, \cdots, n\}$ （文件），超边集为 X（子函数）；目标是将 X 划分为 N 个组 $\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \ldots, \mathbf{\Phi}_N$，以使

$$\pi_{\mathbf{X}} = \max_{b \in [N]} |\alpha(\mathbf{\Phi}_b)|$$

满足约束

$$\frac{\max_{b \in [N]} |\mathbf{\Phi}_b|}{\lceil |\mathbf{X}|/N \rceil} \leq \delta_{\mathbf{X}}$$

其中， $\delta_{\mathbf{X}} \geq 1$ 是给定的实值约束，而 $\alpha(\mathbf{\Phi}_b)$ 表示来自 $[n]$ 、与组 $\mathbf{\Phi}_b$中的超边关联的顶点集合。因此，最小化通信成本 $\pi_{\mathbf{X}}$这一目标，转化为最小化与任一组关联的顶点数的最大值，同时也要最小化 $\delta_{\mathbf{X}}$ ，这意味着各组的大小应尽量相近。

大量关于超图边划分的文献都聚焦于类似问题，而文献中广泛研究的一个密切相关的目标，是将

顶点 [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], 的平均复制因子（ARF）最小化，其中 ARF 定义为

$$\mathrm{ARF} = \frac{1}{n} \sum_{v \in \mathcal{V}} \left| \{\, b \in [N] : v \in \alpha(\mathbf{\Phi}_b) \,\} \right| \tag{5}$$

表示一个顶点所属组的平均数量[4]。

无论是否聚焦于 ARF，大多数研究都采用基于算法和搜索的设计，而理论见解或性能保证方面的成果则少得多，更不用说划分问题本身的基本极限了。下面回顾一些现有研究进展，首先要指出一个关键事实：超图边划分问题旨在最小化平均复制因子，即使对于图而言，该问题也是 NP困难的（$d = 2$） [47]。此外，还有一些研究受到该问题计算复杂性高且适用范围广的启发，可参见 [48], [49], [50], [51], [52], ；这些研究同样聚焦于算法发展，提出了针对大规模图的启发式或基于搜索的划分策略。

在理论见解方面，对于图（即 $d = 2$），一些结果给出了可实现 ARF 的解析界。例如， [48], [52] 中的研究表明，其提出的算法保证 ARF 不大于（$n+|\mathbf{X}|+N$）$/n$。此外，Li 等人 [47] 证明，对于任意图，都可以实现 ARF O（$\sqrt{N}$），且保证其上界为 ARF $\leq 2\sqrt{N} + \frac{N}{n}$。正如近期 [53],所示，这种 O（$\sqrt{N}$）的尺度对于完全图是紧的，该研究给出了达到 ARF $= O$（$\sqrt{N}$）的显式构造。此外， [54]中的研究采用有限射影几何对图的边进行划分，使 ARF 达到$1.5\sqrt{N}$至 $2\sqrt{N}$之间。对于具有 $N = q^2 + q + 1$ 个顶点的图，这一可达性结果成立，其中q 为素数幂。此限制源于有限射影平面存在范围有限。

事实上，超图划分问题与各种分布式计算场景 [55] 密切相关。在 [39], 的重要研究中，作者探讨了图划分在并行稀疏矩阵向量乘法中的作用。在这一背景下，通过将给定矩阵的每一行表示为一个顶点，并将每一列表示为一条超边（连接该列中非零条目所在各行对应的所有顶点），即可构造一个超图。随后，通信和计算成本最小化问题被表述为一个最优

[4]值得注意的是，通过一个简单的计数论证，ARF 可以等价地表示为 ARF $= \frac{1}{n} \sum_{b=1}^{N} |\alpha(\mathbf{\Phi}_b)|$.由于我们的表述保证对所有 $b \in [N]$ 都有 $|\alpha(\mathbf{\Phi}_b)| \leq \pi_{\mathbf{X}}$，因此可以立即推出 ARF $\leq \pi_{\mathbf{X}} \frac{N}{n}$. 。因此，最小化 $\pi_{\mathbf{X}}$ 也会最小化 ARF 的一个上界，从而建立了两个目标之间的直接联系。

超图划分任务，通常通过对所构造超图进行顶点划分来解决。

无论是否处于分布式计算的背景下，通过超图划分进行资源和任务分配的问题，都是一个广阔且成熟的科学研究领域，已有数百项研究成果，跨越四十余年 [45]。这一丰富的研究文献源于双重驱动。首先，该问题具有深刻的数学内涵，将 NP 难优化挑战与复杂的组合结构、拉姆齐理论和有限几何联系起来 [56]。其次，也许更重要的是，该领域受到大量关键应用需求的推动。除了分布式计算及前文提到的其他应用外，这种超图划分方法还可直接应用于新兴领域，例如大语言模型的并行训练 [37]。

A. 主要结果简述

回到一般的分布式计算环境，我们回顾一下：我们考虑一个目标函数，它接受由集合 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,d}$ 定义的任意分解；该集合通过列出每个子函数中对应的 d 元输入，列明所有必须计算的子函数。我们还回顾一下，我们的目标是将这些子函数分配给 N个工作节点，因此需要将 $\mathbf{X}$ 划分为 N 组，并在均衡因子降低的情况下，使通信成本 $\pi_{\mathbf{X}}$最小化；该均衡因子 $\delta_{\mathbf{X}}$ 反映了计算延迟。我们通过一种构造性设计，同时最小化 $\pi_{\mathbf{X}}$ 和 $\delta_{\mathbf{X}}$ 。该设计基于交织团原理，此原理将支配精心构造的 $\mathbf{A}_{n,d}$子图中的团交集。交织团原理常见于编码缓存和编码分布式计算等信息论领域，可为超图边划分问题提供一种新颖的结构化方法，进而为文件和子函数在工作节点计算单元间的分配提供明确的设计。我们将该设计称为交织团（IC）设计，它适用于所有系统参数 (n, d, N)；而其性能保证则适用于非常广泛的参数范围 (n, d, N)，详见定理1。

就这一性能而言，所提出的设计可针对任意给定的任务集提供确定性保证 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,d}$。该设计与一个反向界共同表明，对于任意 $\mathbf{X}$ ，其大小为 $|\mathbf{X}| = \varphi|\mathbf{A}_{n,d}|$， 任意 N 最大约为 $\sqrt{\binom{n}{d}}$ ，以及任意 φ 低至约 $\ln \frac{n}{n^{d/2}}$

（$\varphi \in [0,1]$ 表示X的归一化大小），最优通信成本 $\pi^{\star}_{\mathbf{X}}$满足

$$\pi^{\star}_{\mathbf{X}} \in [\frac{\varphi^{\frac{1}{d}} n}{N^{\frac{1}{d}}}, \frac{4e\, n}{N^{\frac{1}{d}}}].$$

此外，当将 X 视为由 $\mathbf{A}_{n,d}$ 经随机稀疏化得到时——也就是说，$\mathbf{A}_{n,d}$ 的每个d-元组都以固定概率 φ 独立地纳入 X——同一构造还以至少 $1-\frac{1}{n}$ 的概率实现计算成本 $\delta_{\mathbf{X}} \le 5$。最终，我们现在知道，对于任何归一化大小固定（非零）的子函数集合 X $\varphi > 0$，在所有文件和任务分配方法中，最优通信成本的尺度为$\pi^{\star}_{\mathbf{X}} \asymp n/N^{\frac{1}{d}}$；并且高概率下，该成本可通过 $\delta_{\mathbf{X}} \le 5$ 的计算延迟实现。因此，对于固定的 φ （对应于并非无限稀疏的超图），所得尺度律表明，最优增益的尺度为 $N^{\frac{1}{d}}$，而这一阶数最优的增益可通过 IC 设计实现。详细的集中界、采样阈值和证明见 IV-D节。

最后，后面 4 条推论所处的背景是：给定的目标函数可能有多种表示形式 X，而每种表示形式都会对应一组不同的子函数以及输入文件之间的依赖关系。尽管识别有利的表示形式 X 并非本文的重点，但推论 2、3、4 在这一方向上提供了一些启示。

值得关注的算法特性

我们的设计具有两个非常出色的算法特性。首先，就复杂度而言，IC 设计是确定性的，而非基于搜索，因此复杂度负担极小。其次，在我们的设计中，最终得到的文件到工作节点的分配（或等价地，顶点到组的分配）不依赖于 X。这意味着，这种文件分配只需设计一次，便可用于任何采用任意分解 X 的目标函数（库以及 d 保持不变），而任务分配（超边分组）则可通过将预先计算好的组限制到 X 上自然得到。在实际场景中，多个函数以公共数据集库中的文件为输入，同时或依次进行计算，这种独立性带来了显著的运作优势。为了更清楚地说明这一点，考虑一系列以 i为索引的目标计算函数，其中第 i个函数基于集合 $\mathbf{X}_i \subseteq \mathbf{A}_{n,\ d}$进行分解。在所提出的 IC 设计下，只要 d 保持不变，连续轮次之间就无需在 N 个工作节点之间重新分配文件。对于每个实例 $\mathbf{X}_i$，每个工作节点处理的子函数子集可能会有所不同，但文件放置保持不变，且对所有任务都有效。

对于每个工作节点处理的子函数，其子集可能会有所不同，但文件放置保持不变，且对所有任务都有效。对于任意 $\mathbf{X}_i$，文件分配都将保持不变，并且其通信成本在广义的 n、N 意义下是阶数最优的（只要不同的归一化大小 $\varphi_i > 0$ 均不趋于零）；这种阶数最优性适用于所有文件与任务分配算法，而不仅限于“盲”算法。以高概率，相同的文件分配还将使 $\delta_{\mathbf{X}_i} \leq 5$ 的计算成本达到阶数最优。

上述特征是交织团方法的产物。这些 IC 设计对信息论领域来说并不新鲜；它们在编码缓存等问题中十分常见， [57], 在这类问题中，基于团的用户侧信息结构得到了有效利用，通过秩一信道进行编码传输，以满足多个用户的需求。相比之下，在本文中，团的概念出现在一个根本不同的背景下，作为构造工作节点—文件—任务分配的组合种子。具体而言，较大的全集 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,\ d}$ 由较小的种子 $\mathbf{A}_{f,\ d}$生成，其中 f 可能远小于 n。涉及两个完全集结构的类似表述也曾出现在其他编码理论和信息论背景中
[24], [58], [59], [60], [61], [62] （另见 [63], [64]）。

一个基本示例：在对我们的分布式计算问题给出严格的组合表示之前，我们先举一个简单的例子，考虑一种可能被视为最坏情况的情形：我们需要划分 $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{n,\ d}$。

例 2。在一个 $N = 3$ 个工作节点的设置中，子函数以总计 $n = 6$ 个文件中的 $d = 2$ 个作为输入，我们的目标是进行划分

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_{6,2} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},$$

$$\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$$

划分为 3 个集合 $\mathbf{\Phi}_1$、$\mathbf{\Phi}_2$ 和 $\mathbf{\Phi}_3$，分别描述与每个工作节点关联的子函数。我们的目标是减少每个组中出现的数字数量。首先考虑字典序划分

$$\mathbf{\Phi}_1 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\}\},$$

$$\mathbf{\Phi}_2 = \{\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\}\},$$

$$\mathbf{\Phi}_3 = \{\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$$

显然，第一个组包含从 1 到 n 的所有 $n = 6$ 个数字，因此必须为第一个工作节点分配全部 6 个文件 W_1 到 W_6，从而产生最大通信成本 $\pi_{\mathbf{X}} = n = 6$。另一方面，划分

$$\mathbf{\Phi}_1 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\},$$

$$\mathbf{\Phi}_2 = \{\{1,5\},\{1,6\},\{2,5\},\{2,6\},\{5,6\}\},$$

$$\mathbf{\Phi}_3 = \{\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\}\}$$

这意味着通信成本降低了 $\pi_{\mathbf{X}} = 4$，因为每个组只涉及 4 个数字；数字$\{1,2,3,4\}$ 位于 $\mathbf{\Phi}_1$中，随后数字 $\{1,2,5,6\}$ 位于 $\mathbf{\Phi}_2$中，数字 $\{3,4,5,6\}$ 位于 $\mathbf{\Phi}_3$中。第二种方案更为可取，而且正如我们将要看到的，它是最优的。

备注 2。仅仅将 X 的每个 d-元组均匀随机地放入 N 列/组之一中来执行划分，这种做法颇具诱惑力。然而，对于我们减少 $\pi_{\mathbf{X}}$ 的目标而言，这种随机化方法的表现会非常糟糕。实际上，鉴于每个顶点最多属于 $\binom{n-1}{d-1}$ d个元组，一个顶点不被落入某一特定列的边覆盖的概率极小，这意味着 $\pi_{\mathbf{X}} \asymp n$。这凸显了根本难点：边之间存在大量重叠，而在保持列大小均衡的同时，必须控制这种重叠。因此，从原则上说，最小化 $\pi_{\mathbf{X}}$ 并不是朴素的随机划分所擅长的事情。

B. 论文组织与符号说明

本文其余部分安排如下。第二节介绍问题的形式化表述与目标，第三节给出定理1及其推论1–4等主要结果，并提供相应证明。第 IV 节介绍 IC 设计，以及支撑主定理所需的引理和命题。最后，第六节给出结论，附录则收录所有补充证明。

记号：我们用粗体小写字母表示 d 元组，例如 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_d\}$。 d 元组的集合用粗体大写字母表示，例如 X。对于任意 d 元组集合 X，我们用 $\mathbf{X}^{\text{lex}} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{|\mathbf{X}|})$ 表示 X 中元素按字典序排列列表。正如前面所述，我们用 $[n]$ 表示集合 $\{1,2,\ldots,n\}$.。我们还用 $\mathbf{A}_{n,\,d} = \binom{[n]}{d}$ 表示 $[n]$ 中所有大小为 d 的可能子集的集合。对于随机变量 R， $\mathbb{E}(R)$ 表示期望， $\mathbb{P}r(R)$ 表示 R 的一个实例发生的概率。最后，当存在常数 c_1、 c_2 和 n_0，使得 $\forall n \geq n_0$、 $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ 时，我们使用 $f(n) \asymp g(n)$。

II. 问题陈述与设置

所考虑的系统由 N 个工作节点（服务器）和一个主节点组成，主节点负责协调对 n 个输入文件的目标函数进行计算。该函数可以像式 (1) 中那样分解为子函数，其中每个子函数取决于来自 $[n]$ 的索引所对应的 d 个文件，而集合 $\mathbf{X} \subseteq \mathsf{A}_{n,\,d}$ 表示必须计算的子函数集合。[5]

如前所述，主节点将子函数 $\mathbf{\Phi}_b \subseteq \mathbf{X}$ 分配给每个工作节点 $b \in [N]$，这些组共同构成集合

$$\mathbb{P} = \{\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \ldots, \mathbf{\Phi}_N\} \tag{6}$$

该集合划分了 $\mathbf{X}$，从而保证

$$\bigcup_{b\in[N]} \mathbf{\Phi}_b = \mathbf{X}, \quad \mathbf{\Phi}_b \cap \mathbf{\Phi}_{b'} = \emptyset,\ \forall b \neq b' \tag{7}$$

确保不会将同一个子函数重复分配给多个工作节点。

为了计算其子函数 $\mathbf{\Phi}_b$，每个工作节点 b 都会从主节点接收所有索引[6] 属于集合的文件

$$\alpha(\mathbf{\Phi}_b) = \{i \in [n] \mid \exists \mathbf{a} \in \mathbf{\Phi}_b \text{ with } i \in \mathbf{a}\}. \tag{8}$$

显然，$|\alpha(\mathbf{\Phi}_b)|$ 表示必须从主节点传输到工作节点 b 的不同文件数量，因此反映了该链路上的通信负载。

给定 n、d、N 和子函数集合 $\mathbf{X}$，我们用 $\mathfrak{S}_{\mathbf{X}}(n, d, N)$ 表示所有有效分配方案构成的类，这些方案将 $\mathbf{X}$ 划分为 N 个不相交群组 $\mathbf{\Phi}_1$、……、$\mathbf{\Phi}_N$，如式 (6) 和 (7) 所示。任意方案 $\mathsf{S} \in \mathfrak{S}_{\mathbf{X}}(n, d, N)$ 均产生通信成本

$$\pi_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}} = \max_{b\in[N]} |\alpha(\mathbf{\Phi}_b)| \tag{9}$$

以及计算成本

$$\delta_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}} = \frac{\max_{b\in[N]} |\mathbf{\Phi}_b|}{\lceil |\mathbf{X}|/N \rceil} \tag{10}$$

其中，这些成本的上界为

$$\pi_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}} \in [d, n], \quad \delta_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}} \in [1, N]$$

[5]我们通常会说“ $[n]$中的文件”（而不是索引属于 $[n]$ 的文件），也常将 $\mathbf{X}$ 称为子函数集，但需牢记，$\mathbf{X}$ 实际上是由文件的索引集组成的集合，这些文件构成了各个子函数的输入。[6]例如，如果 $\mathbf{\Phi}_b = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\}\} \subset \mathsf{A}_{7,3}$，那么 $\alpha(\mathbf{\Phi}_b) = \{1,2,3,4\} \subset [7]$。为简洁起见，我们常将$\alpha(\mathbf{\Phi}_b)$称为发送给工作节点 b 的文件。

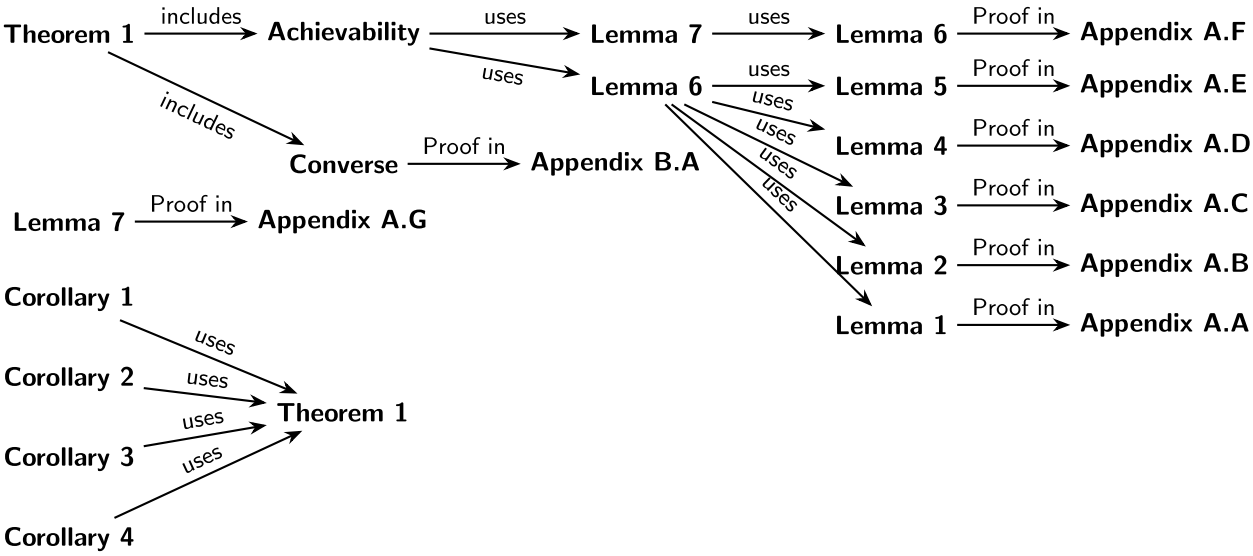

图2. 概述　　本文证明的逻辑结构，突出显示引理与定理之间的依赖关系　　.

其中 $\pi_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}} = n$ 对应于将所有文件分配给一台服务器的方案，而$\delta_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}} = N$ 对应于将所有子函数分配给一台服务器的解决方案。任何方案都会带来分区增益，参见 $n/\pi_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$。

最后，所有有效方案对应的最优值定义如下

$$\pi_{\mathbf{X}}^{\star} = \min_{\boldsymbol{\mathcal{S}} \in \mathfrak{S}_{\mathbf{X}}(n,d,N)} \pi_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}}, \quad \delta_{\mathbf{X}}^{\star} = \min_{\boldsymbol{\mathcal{S}} \in \mathfrak{S}_{\mathbf{X}}(n,d,N)} \delta_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$$

我们的目标是为分布式计算问题构造一个分配方案 S，同时最小化 $\pi_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$ 和 $\delta_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$，从而使系统中的总体通信成本和计算成本最小。

III. 主要结果

现在，我们介绍分布式计算环境中的主要结果，给出最优通信成本 $\pi_{\mathbf{X}}^{\star}$ 和计算成本 $\delta_{\mathbf{X}}^{\star}$的下界与上界。正如前文所述，任何概率陈述都将 $\mathbf{X}$ 视为对 $\mathbf{A}_{n,\ d}$ 进行独立随机稀疏化后的一种实现，其中每条超边以概率 φ被保留。接下来，我们给出主定理，该定理对所有

$$\varphi \geq \varphi_{\min} = \frac{96\, N\, \log(2Nn)}{\binom{n}{d} - 2^{\,d+2} N} \approx \frac{\ln n}{n^{d/2}} \tag{11}$$

（另请参见后文（125））。还要注意， $\varphi_{\min}$也可以很好地以上界形式表示为 $C_d \cdot \ln \frac{n}{n^{d/2}}$，其中$C_d = 192 \cdot (e \cdot d)^{d/2}$，且 e 为欧拉数。

定理1. 对于具有 n 个文件、 N 个工作节点、子函数度d以及子函数集合 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,\ d}$ 且归一化大小为 $\varphi = |\mathbf{X}|/\binom{n}{d}$ 的分布式计算环境，最优通信成本 $\pi^{\star}_{\mathbf{X}}$ 满足

$$\pi^{\star}_{\mathbf{X}} \in \left[\frac{\varphi^{\frac{1}{d}} n}{N^{\frac{1}{d}}},\ \frac{4en}{N^{\frac{1}{d}}} \right].$$

此外，如果 $\varphi \geq \varphi_{\min}$、 $d \leq \frac{n}{32}$和 $N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d$，则可保证上述上界，并且 $\delta_{\mathbf{X}} \leq 5$，其概率至少为 $1 - \frac{1}{n}$；这些结果均可通过 IC 设计实现。

[1]证明。上述结论直接来自附录 B-A 中的反向界 $\pi^{\star}_{\mathbf{X}} \geq \frac{\varphi^{\frac{1}{d}} n}{N^{\frac{1}{d}}}$以及可达性部分 $\pi^{\star}_{\mathbf{X}} \leq \frac{4en}{N^{\frac{1}{d}}}$；其中，可达性是通过第 IV 节中的交织团设计实现的。计算成本 $\delta_{\mathbf{X}}$ 的保证由引理 7 推导得出，并结合了前述引理 1–6 的结果。

□

注释 3。在定理1中，参数 φ 既表示给定子函数集合 $\mathbf{X}$ 的归一化大小，也作为控制 $\mathbf{X}$ 随机构造的参数。一方面，对于给定的子函数集合 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,\ d}$ ，若其归一化大小为 $\varphi = |\mathbf{X}|/\binom{n}{d}$，则通信成本 $\pi_{\mathbf{X}} \leq \frac{4en}{N^{\frac{1}{d}}}$ 可达。另一方面， φ 也表示通过从 $\mathbf{A}_{n,\ d}$中独立采样元素来构造 $\mathbf{X}$ 时所用的采样概率。在定理1所述条件下，对于通过此采样过程得到的任意 $\mathbf{X}$，所提出的 IC 设计都能实现相同的通信成本 $\pi_{\mathbf{X}} \leq \frac{4en}{N^{\frac{1}{d}}}$；此外，以至少 $1-\frac{1}{n}$的概率，还能保证 $\delta_{\mathbf{X}} \leq 5$。

注释 4. 上述定理并非渐近性质。不过，在较大的 n 范围内，该定理可进一步简化为：如果 $\varphi \geq \varphi_{\min} \approx \ln\frac{n}{n^{d/2}}$，且 $N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d \approx \sqrt{\binom{n}{d}}$，则以几乎为一的概率获得 $\delta_{\mathbf{X}} \leq 5$这一额外保证。

以下推论以尺度律的形式概括了上述定理。此后，我们将使用（n， N， d， φ）-分布式计算环境这一术语，指代包含n 个文件、 N 个工作节点、子函数度为 d，且子函数集合为 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,\ d}$ 归一化大小为$\varphi = |\mathbf{X}|/\binom{n}{d}$的环境。最后，我们回顾一下，分区增益指的是 n/π。

推论 1. 在我们的 (n, N, d, φ) 分布式计算环境中，当缩放为 $n, N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d$ 且 d, φ 固定时，最优通信成本按 $\frac{n}{N^{1/d}}$ 缩放，从而获得按 $N^{\frac{1}{d}}$ 缩放的阶数最优划分增益。对于任意 $\mathbf{X}$，交织团设计都能实现这一阶数最优性能；当 $N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d$ 时，同一设计也能保证阶数最优

$\delta_{\mathbf{X}} \le 5$，且概率至少为 $1-\frac{1}{n} \to 1$。因此，可以同时实现 $\pi_{\mathbf{X}}$ 和 $\delta_{\mathbf{X}}$ 中的阶最优性。

证明。该结果可直接由定理1得出。 □

前述结果确立了任意固定子函数集合 X 的通信成本最优标度。不过，正如前文所述，函数 F 通常存在多个形式如式 (1) 的有效分解，每个分解都对应一个不同的子函数集合 X。对于任意函数 F，下面的推论给出了最优通信成本的直接上界，该成本是对所有子函数分解 X 以及每种有效分解对应的所有数据与任务分配方案进行联合优化得到的。

推论2。对于任意具有 n 个输入文件的函数 F，设 $\mathcal{X}_{F,\ d}$ 为其所有可能的分解 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,\ d}$ 的集合，其中子函数度 d 固定；并设 $\varphi_{\mathrm{x-min}}$，$\mathbf{min}^{\mathbf{x}\in\mathcal{X}_{F,\ d}}\{|\mathbf{X}|/\binom{n}{d}\}$。则对所有分解 X 和所有数据与任务分配策略进行优化后得到的最优通信成本 $\pi_F^{\star\star}$ 位于以下区域

$$\pi_F^{\star\star} \in \left[\varphi_{\mathrm{x-min}}^{1/d} \cdot \frac{n}{N^{1/d}},\ \frac{4e\,n}{N^{1/d}}\right].$$

因此，对于标度 n 和 $N \le \left(\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}}\right)^{\ d}$，且在任意非消失的 $\varphi_{\mathrm{x-min}} > 0$ 条件下，该最优成本的标度为

$$\pi_F^{\star\star} \asymp \frac{n}{N^{1/d}}$$

因此，最优分区增益按 $N^{1/d}$ 的量级增长。此外，对于每个分解 $\mathbf{X} \in \mathcal{X}_F$，所提出的交织团设计都能实现这一阶的最优增益。

证明。证明同样可直接由定理1得出。 □

下面考虑分解跨越多个 d 取值的情况。该推论提供了一种基于上界的优化方法。

推论3。设函数 F 具有一组允许的分解 $\mathcal{X}_F = \{\mathbf{X}_i \subseteq \mathbf{A}_{n,\ d_i}\}$，其中每个 $\mathbf{X}_i$ 都有自己的度 d_i 和密度 $\varphi_i = |\mathbf{X}_i|/\binom{n}{d_i}$.。设 $d_{\min}$ 为 $\mathcal{X}_F$中的最小子函数度 d 。那么，在 $\mathcal{X}_F$ 中的所有分解以及所有数据与任务分配方案中，最优通信成本位于以下范围

$$\Big[\min_{\mathbf{X}_i\in\mathcal{X}_F} \frac{\varphi_i^{1/d_i}\,n}{N^{1/d_i}},\quad \frac{4en}{N^{1/d_{\min}}}\Big].$$

此外，对于满足 $\mathbf{X}_{i'}$ 的度为 $d_{\min}$的 i'，给定任意 n，若以下三个条件$\varphi_i' \geq C_{d_{\min}} \cdot \ln \frac{n}{n^{d_{\min}/2}}$、$d_{\min} \leq \frac{n}{32}$和 $N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d_{\min}}})^{d_{\min}}$成立，则可保证上述上界满足 $\delta_{\mathbf{X}_{i'}} \leq 5$，其概率至少为 $1-\frac{1}{n}$，并且可通过 IC 设计实现。

证明。该结论可直接由定理1得出。 □

最后，下面讨论前述推论的尺度律。

推论4。在我们的分布式计算环境中，对于具有目标函数 F、允许的分解 $\mathcal{X}_F = \{\mathbf{X}_i \subseteq \mathbf{A}_{n,\ d_i}\}$的情形，若 $\varphi_i = |\mathbf{X}^{(d_i)}{}_i\ |/\binom{n}{d_i} > 0$不趋于零，且 $d_{\min}$是 $\mathcal{X}_F$中的最小子函数度 d，那么当 $n, N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d_{\min}}})^{d_{\min}}$按相应尺度变化时，在 $\mathcal{X}_F$ 中的所有分解以及所有数据与任务分配方案中，最优通信成本的尺度律为

$$\pi^{\star\star} \asymp \frac{n}{N^{1/d_{\min}}}$$

而最优分区增益的尺度律为 $N^{1/d_{\min}}$。

证明。该结论可直接由定理1得出，而且再次涉及通过 IC 设计实现可达性。

□

总而言之，定理1揭示，对于任意函数以及任意满足$|\mathbf{X}| \geq \varphi|\mathbf{A}_{n,\ d}|$ 的子函数分解 $\mathbf{X}$，其最优通信成本（如本文所采用的度量方式，以任意工作节点处文件数量的最大值[1]表示）都落在区域 $\pi^{\star}_{\mathbf{X}} \in [\frac{\varphi^{\overline{d}} n}{N^{\frac{1}{d}}}, \frac{4e\,n}{N^{\frac{1}{d}}}]$.内。不存在任何函数或分解，其最优通信成本会落在上述区域之外。这一事实也涵盖了将目标函数分解为一组非原子子函数的潜在做法，这些子函数以尺寸更小的子文件为输入。这种子分包方法往往会产生一个新的、更大的 n，以及更小的新文件和一个新的、可能更大的 $\mathbf{X}$；该方案仍须遵循上述基本极限所描述的规则，而这些规则将决定子分包是否能够带来增益。

最后，在我们的度量标准下可以看到，这种新型 IC 设计是一种通用设计；也就是说，在上述固定 φ 的假设下，对于任意函数和任意分解，它都能提供阶最优增益 $N^{1/d}$。

IV. 可实现方案：交织团设计（IC）

本节介绍用于分布式计算中数据和任务（子函数）分配的 IC 设计。该设计会将任意子集 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,\ d}$ 划分为 N 个组 $\mathbf{\Phi}_1$、$\mathbf{\Phi}_2$、……、$\mathbf{\Phi}_N$，以尽量减小 $\pi_{\mathbf{X}}$ 和 $\delta_{\mathbf{X}}$，并包含三个主要步骤。首先，我们将设计对整个 $\mathbf{A}_{n,\ d}$的划分，其中该划分仅涉及 N' 个组。在这第一步中——将在 IV-A节和IV-B节中介绍——该 N' 将采用以下形式

$$N' = \binom{k}{d} \tag{12}$$

其中，k 定义为

$$k \triangleq \max\left\{ r \in \mathbb{Z}^+ \mid \binom{r}{d} \leq N \right\}. \tag{13}$$

在下一步（第 IV-C 节）中，我们将介绍一种技术，将$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$划分从 N'个组扩展为 $N \geq N'$个组 $\mathbf{\Phi}_1$、$\mathbf{\Phi}_2$..... $\mathbf{\Phi}_N$；而最后一步（第 IV-D 节）将主要涉及最终划分的构建

$$\mathbf{\Phi}_1 = \widetilde{\mathbf{\Phi}}_1 \cap \mathbf{X},\ \mathbf{\Phi}_2 = \widetilde{\mathbf{\Phi}}_2 \cap \mathbf{X},\ \ldots,\ \mathbf{\Phi}_N = \widetilde{\mathbf{\Phi}}_N \cap \mathbf{X} \tag{14}$$

同时确保两项成本均处于可控范围内。在提及 IC 设计时，为简洁起见，我们通常使用 $\pi_{\mathbf{X}}$ 和 $\delta_{\mathbf{X}}$，而不是 $\pi_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$ 和 $\delta_{\mathbf{X}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$。此外，在上下文允许的情况下，尤其是在对 $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{n,\ d}$进行划分时，为简洁起见，我们也可以分别简单地写作 π 和 δ。

让我们从第一步开始，并考虑两种不同情形：当 n 可被式（13）中定义的 k 整除时为情形 1；当 n 不能被 k整除时为情形 2。

A. 情形 1：$k = \frac{n}{s}$，其中 $s \in \mathbb{Z}^+$

这里我们考虑 (13) 中的 k 能整除 n 的情形。令 $s = \frac{n}{k}$，并令 $N' = \binom{k}{d} = \binom{n/s}{d}$。首先将文件集 $[n]$ 划分为 f 个互不相交的族 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$、……、$\mathcal{F}_f$，每个族的形式如下

$$\mathcal{F}_i \triangleq \{(i-1)s+1, (i-1)s+2, \ldots, is\},\ i \in [f] \tag{15}$$

其中我们令 $f = k = \frac{n}{s}$；对于任意子集 $\mathcal{I} \subseteq [f]$，现在定义族的并集，供后续使用：

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} \triangleq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i. \tag{16}$$

我们现在的目标是设计一个划分

$$\mathbf{A}_{n,d} = \bigcup_{\sigma \in \binom{[f]}{d}} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma \tag{17}$$

其中我们将 $\mathbf{A}_{n,\ d}$ 划分为 $\binom{f}{d}$ 个不相交群组 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}$，每个群组都由一个 d-元组 $\sigma \subset [f]$标记。在继续构造这一划分之前，我们先介绍如下的 d-元组的支撑族定义。

定义 1. 对于一个 d 元组 $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_{n,\ d}$，其支撑族定义为

$$\mathcal{B}(\mathbf{a}) \triangleq \{j \in [f] \mid \mathbf{a} \cap \mathcal{F}_j \neq \emptyset\}$$

支撑族的大小定义为

$$b(\mathbf{a}) \triangleq |\mathcal{B}(\mathbf{a})| \in \left[\lceil \frac{d}{s} \rceil, d\right].$$

我们还令 $\mathbf{A}_{\text{full}}$ ，$\{\mathbf{a} \in \mathbf{A}_{n,\ d} : b(\mathbf{a}) = d\}$ 表示所谓的满支撑（最大支撑） d 元组集合，并令 $\mathbf{A}_{\text{com}} = \mathbf{A}_{n,\ d} \backslash \mathbf{A}_{\text{full}}$ 为其补集。

现在，我们必须先将 $\mathbf{A}_{\text{full}}$ 划分为 $N' = \binom{f}{d}$ 组 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{full})}$, $\sigma \in \binom{[f]}{d}$。这些组按如下方式设计

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{full})} = \{\mathbf{a} \in \mathbf{A}_{n,d} \mid \mathcal{B}(\mathbf{a}) = \sigma\} \tag{18}$$

其中很容易验证

$$\mathbf{A}_{\text{full}} = \bigcup_{\sigma \in \binom{[f]}{d}} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{full})} \tag{19}$$

也就是说，组 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{full})}$两两不相交，且覆盖 $\mathbf{A}_{\text{full}}$。最后，我们注意到 $|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{full})}| = s^d$ 对每个 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$ 都成立，这意味着 $|\mathbf{A}_{\text{full}}| = s^d \cdot \binom{f}{d}$，因而 $|\mathbf{A}_{\text{com}}| = \binom{n}{d} - s^d \cdot \binom{f}{d}$。

现在，剩下的任务是将 $\mathbf{A}_{\text{com}}$ 划分为 N' 个组。为此，我们考虑 $\mathbf{A}_{n,d}$ 的一个划分，根据支撑族的大小对其 d 元组进行分类。该划分如下

$$\mathbf{A}_{n,d} = \{\mathbf{C}_{\lceil \frac{d}{s} \rceil}, \mathbf{C}_{\lceil \frac{d}{s} \rceil + 1}, \ldots, \mathbf{C}_d\} \tag{20}$$

其中，对于每个 $\beta \in [\lceil \frac{d}{s} \rceil, d]$，集合

$$\mathbf{C}_{\beta} \triangleq \{\mathbf{a} \in \mathbf{A}_{n,d} \mid b(\mathbf{a}) = \beta\} \tag{21}$$

表示由满足 $\mathbf{a} \in \mathbf{C}_{\beta}$ 的 d 元组构成的集合，其中每个元组恰好与 β 个族相交。显然，我们有 $\mathbf{C}_d = \mathbf{A}_{\text{full}}$ 且 $\mathbf{A}_{\text{com}} = \bigcup_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} \mathbf{C}_{\beta}$。令我们固定 $\beta \in [\lceil \frac{d}{s} \rceil, d-1]$。然后，对于每个 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$，我们定义

$$\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I}} \triangleq \{\mathbf{a} \in \mathbf{C}_{\beta} \mid \mathcal{B}(\mathbf{a}) = \mathcal{I}\} \tag{22}$$

在这里我们将看到，对于所有 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$，$|\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I}}|$ 保持不变（参见附录 B-B
wh ）.

~我们将分配给组 $\mathbf{\Phi}_\sigma$的 $\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I},\sigma}$ 定义为 $\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I}}$ 的一个子集。在附录 B-C 中，我们将依次执行一系列步骤，以构造 $\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I},\sigma}$。关于 $\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I},\sigma}$，我们回顾一下，对于每个 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$，都存在 $\binom{d}{\beta}$ 个互不相同的 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$，使得 $\mathcal{I} \subset \sigma$。因此，

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})} = \bigcup_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} \bigcup_{\mathcal{I} \subset \sigma} \mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I},\sigma}. \tag{23}$$

此时，我们已经完整描述了分配给工作节点 σ（暂时如此）的子函数（d-元组），这些子函数的形式为

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma = \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})}. \tag{24}$$

现在我们继续讨论引理 1，该引理给出了最初与前 $N' = \binom{k}{d}$ 台服务器各自关联的子函数数量的上界。

引理 1. 对于情形 1（第 IV-A 节），该构造包含一个 $|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma|$, $\sigma \in \binom{[f]}{d}$，其上界如下

$$\frac{\binom{n}{d}}{N'} - 2^d + d \le |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma| \le \frac{\binom{n}{d}}{N'} + 2^d - d.$$

证明。引理 1 的证明见附录 A-A。 □

下面的引理描述了相同设计的通信成本 .

引理 2。对于情形 1（第 IV-A 节），对于任意选定的整数 s，使得 $s \mid n$，且对于 $k = n/s$，该 IC 设计可实现

$$\pi = s \cdot d.$$

证明。引理 2 的证明见附录 A-B。 □

现在我们继续讨论第二种情形。

B. 情况 2： $k \nmid n$

这里的方案将沿用情形 1（第 IV-A 节）中的一般方案形式，但我们会调整部分参数，以适应 $k \nmid n$ 这一事实。具体而言，对于 k， f 与之前一样，由下式给出：

$$k = \max\left\{ r \in \mathbb{Z}^+ \mid \binom{r}{d} \le N \right\}, \quad f = k \tag{25}$$

以及对于

$$s_0 = \left\lfloor \frac{n}{k+d} \right\rfloor + 1 \tag{26}$$

我们将暂时舍弃

$$g = n - k \cdot s_0 \tag{27}$$

文件，并在新文件数为 $n' = n - g$ 的前提下继续讨论。采用新的文件数 n' 后，我们仍先假设有 $N' = \binom{k}{d}$个工作节点。在这种第二种情形下，正如附录 B-F 中所述，我们接受这一限制：$N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d$。

对于上述参数 $n' = n - g$、f、d 和 $N' = \binom{f}{d}$，第一步是采用第 IV-A 节的设计，将 $\mathbf{A}_{n',d}$ 划分为 N' 组 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\text{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\text{com})}$、$\sigma \in \binom{[f]}{d}$。第二步考虑排除的 [7]$d$-元组

$$\mathbf{A}_{\text{exc}} = \mathbf{A}_{n,d} \setminus \mathbf{A}_{n',d} \tag{28}$$

以及 g 个排除元素 $[n] \setminus [n']$，我们在此将其记作

$$\mathcal{E} \triangleq \{n'+1, \ldots, n'+g = n\}. \tag{29}$$

任意的 d 元组 $\mathbf{t} \in \mathbf{A}_{\text{exc}}$ 都会包含来自排除文件索引集 $\mathcal{E}$ 的任意数量 $m_{\mathbf{t}} = |\mathbf{t} \cap \mathcal{E}|$ 个分量/元素，而其余部分则包含 $d - m_{\mathbf{t}} = |\mathbf{t} \cap [n']|$ 个元素。显然，$m \in [1, \min\{d, g\}]$，因此 $d - m \in [\max\{d-g, 0\}, d-1]$。只要不会产生歧义，今后我们将改用较简单的记法 m，而不使用 $m_{\mathbf{t}}$。

对于每个 $m \in [1, \min(d, g)]$,，我们定义集合

$$\mathbf{R}_{m,\beta} \triangleq \{\mathbf{t} \in \mathbf{A}_{\text{exc}} \mid b(\mathbf{t}) = \beta,\ |\mathbf{t} \cap \mathcal{E}| = m\} \tag{30}$$

该集合描述了恰好与 β 个族相交，且包含来自 $\mathcal{E}$ 的 m 个排除元素的 d 元组 $\mathbf{t}$。注意，β 的取值范围为 $\left[\lceil \frac{d-m}{s_0} \rceil, d-m\right]$。若 $m = d \leq g$，则 $\beta = 0$，这意味着 $\mathbf{t}$ 的所有条目都来自 $\mathcal{E}$。

现在让我们按如下方式划分 $\mathbf{A}_{\text{exc}}$

$$\mathbf{A}_{\text{exc}} = \bigcup_{m=1}^{\min\{d,g\}} \bigcup_{\beta=\lceil \frac{d-m}{s_0} \rceil}^{d-m} \mathbf{R}_{m,\beta}.$$

[7]例如，对于 $n = 5$、$n' = 4$、$d = 2$，我们有 $\mathrm{A}_{\text{exc}} = \{15, 25, 35, 45\}$。

对于每个 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$，现在定义

$$\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}} \triangleq \left\{ \mathbf{t} \in \mathbf{A}_{\text{exc}} \;\middle|\; \mathcal{B}(\mathbf{t}) = \mathcal{I},\ \mathbf{t} \in \bigcup_{m=1}^{\min\{d-\beta,g\}} \mathbf{R}_{m,\beta} \right\} \tag{31}$$

定义为所有与 $\mathcal{I}$ 中的各个族恰好相交的 d 元组 $\mathbf{t} \in \mathbf{A}_{\text{exc}}$ 的集合，其中在上述定义中，$\mathcal{B}$(t) 表示与 t 相交的族的集合。不难看出，基数$|\mathbf{R}_{\beta,\ \mathcal{I}}|$ 对于任意 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$ 都保持不变（参见附录 B-D）。现在我们还定义

$$\mathbf{R}_{\beta} \triangleq \bigcup_{\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}} \mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}} \subset \mathbf{A}_{\text{exc}} \tag{32}$$

定义为所有恰好与 β 个族相交的、被排除的 d 元组的集合。此外，直接应用已确定的参数范围 m 和 k，我们可以得出，$\beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ 的范围定义为

$$\beta_{\min} \triangleq \left\lceil \frac{d - \min\{d, g\}}{s_0} \right\rceil = \left\lceil \frac{\max\{0, d-g\}}{s_0} \right\rceil, \tag{33}$$

$$\beta_{\max} \triangleq d - 1. \tag{34}$$

下一步是遍历 β 的范围。对于每个 $\beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$，我们每次都将集合 $\mathbf{R}_{\beta}$ 划分为 $N' = \binom{f}{d}$ 个组。该划分过程详见附录 B-E。具体而言，首先回顾一下，每个组都由一个 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$ 标记。对于每个这样的 σ，存在 $\binom{d}{\beta}$ 个不同的、基数为 β 的子集 $\mathcal{I} \subset \sigma$。对于每个 $\mathcal{I} \subset \sigma$，集合 $\mathbf{R}_{\beta,\ \mathcal{I},\ \sigma}$ 收集 $\mathbf{R}_{\beta,\ \mathcal{I}}$ 中与组 σ 相关联的所有 d 元组——同样如附录 B-E 所述。随后我们构造并集

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{exc})} = \bigcup_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \bigcup_{\mathcal{I} \subset \sigma} \mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I},\sigma} \tag{35}$$

然后取并集

$$\mathbf{A}_{\text{exc}} = \bigcup_{\sigma} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{exc})}.$$

现在回忆一下，$\mathbf{A}_{n',\ d}$ 已经划分为

$$\mathbf{A}_{n',d} = \bigcup_{\sigma \in \binom{[f]}{d}} \left(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{com})} \right)$$

并且每个 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{com})} \subset \mathbf{A}_{n',d}$ 都被放置在组 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$中。因此，最终我们得到

$$\mathbf{A}_{n,d} = \mathbf{A}_{n',d} \cup \mathbf{A}_{\text{exc}} = \bigcup_{\sigma} (\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{com})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\text{exc})}) = \bigcup_{\sigma} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma} \tag{36}$$

~其中， $\mathbf{\Phi}_\sigma$ 是作为第一步分配给组 σ的所有 d-元组的集合，直至第 N'个组。

以下引理描述了上述任务分配所对应的通信成本。我们还简要回顾一下，第二种情形下的设计适用于 $N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d$，并回顾 $s_0 = \lfloor \frac{n}{k+d} \rfloor + 1$ 和 $g = n - k \cdot s_0$。

引理 3. 对于 n, d，情况 2（第 IV-B 节）中的 IC 设计达到

$$\pi = s_0 \cdot d + g.$$

证明。引理 3 的证明见附录 A-C。 □

我们继续 界定每组的元素数量。我们简要回顾一下， $N' = \binom{f}{d}$.

Le理 4. 情况 2（第 IV-B 节）中的 IC 设计满足以下上界 *s*

$$\frac{\binom{n}{d}}{N'} - 2^{d+1} + 2d \leq |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma| \leq \frac{\binom{n}{d}}{N'} + 2^{d+1} - 2d.$$

证明。证明见附录 A-D。 □

C. 将划分从 N' 组扩展到 N 组

回顾（ 参见（36）），我们已经将 $\mathbf{A}_{n,\ d}$ 划分为 $N' = \binom{f}{d}$ 个不相交群组

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma_1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma_{N'}}, \qquad \sigma_1, \ldots, \sigma_{N'} \in \binom{[f]}{d}.$$

在此我 们将把这些 N' 组中的 d 元组重新分配到所有现有的 N 组中。

为此，假设索引 σ_1、.....、 $\sigma_{N'}$ 按字典序排列。为简化记号，我们按字典序位置重新命名相应的 N' 个组，如下所示

$$\widetilde{\mathbb{P}} \triangleq \{\widetilde{\mathbf{\Phi}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{N'}\} \tag{37}$$

~ ~，其中尤其有：当 $b \in [N']$时，$\mathbf{\Phi}_b = \mathbf{\Phi}_{\sigma_b}$。再次回顾，实际组的数量为 $N \geq N'$，我们先定义以下变量

$$q \triangleq \left\lfloor \frac{N}{N'} \right\rfloor, \qquad p \triangleq \left\lceil \frac{N}{N'} \right\rceil, \qquad r \triangleq N \bmod N' \quad (0 \leq r < N') \tag{38}$$

由此可知 $N = qN' + r$，其中当 $r = 0$ 时， $p = q$；当 $r > 0.$ 时， $p = q + 1$

此时，我们继续进行第一步：将前 N' 组中每一组的 d 元组集合划分为不同部分；然后进行第二步：重新分配其中一些部分，以填满空的 $N - N'$ 组。

步骤 1 – 划分前 N' 组中每一组的 d 元组：对于每个 $b \in [N']$，我们定义部分的数量

$$s_b \triangleq \begin{cases} p & \text{if } 1 \le b \le r, \\ q & \text{if } r < b \le N' \end{cases}$$

并且我们使用字典序将每个 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b$ 划分为 s_b 个互不相交的子部分，从而得到大小相等的切片，最多相差[8] 或少 1。我们将这些子部分记为

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b^{(0)}, \widetilde{\mathbf{\Phi}}_b^{(1)}, \ldots, \widetilde{\mathbf{\Phi}}_b^{(s_b-1)}, \qquad \widetilde{\mathbf{\Phi}}_b = \bigcup_{j=0}^{s_b-1} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_b^{(b')}.$$

步骤 2 – 扩展为 N 组：随后，我们重新标记这些子部分，以获得所需的 N 组。我们根据以下索引规则定义新的 N 组 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_1$、……、$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_N$

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{b+b'N'} \triangleq \widetilde{\mathbf{\Phi}}_b^{(b')}, \qquad \text{for } b \in \{1, \ldots, N'\},\ b' \in \{0, \ldots, s_b - 1\}$$

我们很容易验证以下结论。

1）索引双射：映射 $(b, b') \mapsto t = b + b'N'$ 是 $\{1, \ldots, N'\} \times \{0, \ldots, s_b - 1\}$ 与 $\{1, \ldots, N\}$ 之间的一个双射，因此每个新索引 $t \in \{1, \ldots, N\}$ 都恰好对应一个子部分。为此，只需注意索引 $b + b'N'$ 遍历了所有整数 1、……、N：当 $1 \le b \le r$ 时，我们有 $b' \in \{0, \ldots, p-1\}$，且最大索引为 $r + (p-1)N' = qN' + r = N$；当 $r < b \le N'$ 时，我们有 $b' \in \{0, \ldots, q-1\}$，且最大索引为 $N' + (q-1)N' = qN' \le N$。

2）划分：根据构造，$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_1$、……、$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_N$ 两两不相交，并覆盖 $\mathbf{A}_{n,d}$，因此确保了该划分

$$\mathbf{A}_{n,d} = \bigcup_{b=1}^{N} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_b. \tag{39}$$

这直接成立，因为此前组集合 $\mathbf{\Phi}_{\sigma_1}$、……、$\mathbf{\Phi}_{\sigma_{N'}}$ 划分了 $\mathbf{A}_{n,d}$，并且重新分配（即从 N' 组转变为 N 组）按设计保证这些最初的 N' 组中没有条目重复出现。

此时，我们有以下两个引理；其中主要的引理是引理 6，而引理 6 需要以下引理来对式（38）中的变量 q、p、r 进行上界约束，因为这些变量与 IC 设计相关。

[8] 我们会跟踪每个子部分的确切大小。

引理 5。对于任意 n、d、N，IC 设计对 $N' = \binom{k}{d}$ 和 $k = \max\left\{r \in \mathbb{Z}^+ \,\middle|\, \binom{r}{d} \le N\right\}$ 的使用（参见式（13））保证了

$$\frac{N}{N'} < d + 1 \le 2^d.$$

证明。引理 5 的证明见附录 A-E。 □

根据情形 1 和情况 2，我们得到 IC 设计所实现的 δ 和 π的以下上界保证。

引理 6。给定 n、$d \le \frac{n}{32}$和 $N \le (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d$，划分 $\mathbf{A}_{n,\,d} = \bigcup_{b=1}^{N} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_b$保证 (39),

$$\delta = \frac{\max_{b\in[N]} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b|}{\lceil \binom{n}{d}/N \rceil} \le 4$$

and

$$\pi \le \frac{4e \cdot n}{N^{\frac{1}{d}}}.$$

证明。证明见附录 A-F。 □

D. 划分细化

在上文中，我们给出了 $\mathbf{A}_{n,\,d}$的一个划分 $\mathbb{P} = \{\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \ldots, \mathbf{\Phi}_N\}$，并对可实现的 π 和 δ给出了保证。现在，我们需要考虑实际的子函数集合 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,\,d}$，这意味着我们需要对 X 进行划分，而该划分将产生文件分配（对应于成本 $\pi_{\mathbf{X}}$）以及子函数分配（对应于成本 $\delta_{\mathbf{X}}$）。文件分配是自动完成的；我们只需按照上述对 $\mathbf{A}_{n,\,d}$ 的划分所建议的方案，原样维持文件分配，从而维持完全相同的 π。各 N 服务器之间的子函数分配将由新的划分（此时是对 X 的划分）决定，这只需将上述划分 $\mathbb{P}$ 与 X 取交集即可。虽然这一步足够简单，但根据 X 的不同，可能会导致 $\delta_{\mathbf{X}}$非常大。因此，我们现在的主要工作是为 $\delta_{\mathbf{X}}$确定上界。

为分析这一点，我们可以将 X 视为从 $\mathbf{A}_{n,d}$ 中随机稀疏化得到的一个实现，其中每个 d 元组 $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_{n,d}$ 都以概率 $\varphi = |\mathbf{X}|/\binom{n}{d}$ 独立地被纳入 X。接下来我们来求 $\delta_{\mathbf{X}}$ 的上界。

回顾 $\mathbf{A}_{n,\,d}$ 的原始划分 $\mathbb{P} = \{\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \ldots, \mathbf{\Phi}_N\}$，现在我们将把组中的条目分配给每台服务器 $b \in [N]$

$$\mathbf{\Phi}_b = \widetilde{\mathbf{\Phi}}_b \cap \mathbf{X} \tag{40}$$

据此我们定义

$$\mu_b \triangleq |\mathbf{\Phi}_b|,\ b \in [N], \quad \mu_{\min} \triangleq \min_{b\in[N]} \mu_b, \quad \mu_{\max} \triangleq \max_{b\in[N]} \mu_b \tag{41}$$

从而重写

$$\delta_{\mathbf{X}} = \frac{\max_b \mu_b}{\lceil |\mathbf{X}|/N \rceil} = \frac{\mu_{\max}}{\lceil (\varphi \cdot \binom{n}{d})/N \rceil}. \tag{42}$$

接下来给出以下引理，该引理涉及 X 的 IC 设计划分，并且对所有 $\varphi \geq \varphi_{\min} \approx \ln \frac{n}{n^{d/2}}$ 均成立（参见后文的式 (125)）。还需注意，$\varphi_{\min}$ 也以上界 $C_d \cdot \ln \frac{n}{n^{d/2}}$ 为上界，其中 $C_d = 192 \cdot (e \cdot d)^{d/2}$。

引理 7. 对于 $n \geq 32d$, $N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d$，以及 $\varphi \geq \varphi_{\min}$，则以至少 $1 - \frac{1}{n}$ 的概率，有

$$\max_{b\in[N]} |\mathbf{\Phi}_b| \ \leq \ \frac{5}{4}\varphi \max_{b\in[N]} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b|$$

从而我们有

$$\delta_{\mathbf{X}} \leq 5.$$

至此，主定理的证明完成。这表明，无论是情形 1 还是情况 2，IC 设计都能以概率 $1 - \frac{1}{n}$ 保证 $\delta_{\mathbf{X}} \leq 5$，同时也再次说明它能保证$\pi_{\mathbf{X}} \leq \frac{4e \cdot n}{N^{1/d}}$。

V. 比较

在本节中，我们根据平均复制因子保证，对所提出的 IC 设计与现有图划分算法的性能进行比较。尽管 ARF 最小化并非 IC 设计的主要目标，但我们已经看到

$$\mathrm{ARF} \leq \frac{N\pi}{n} \tag{43}$$

因此，我们在此最小化的实际上是 ARF 的一个上界。据我们所知，关于可实现 ARF 的理论保证仅限于 $d = 2$ 的情形。我们将比较范围限定在这种情形，并重点关注 [47], [48], [52], [54] 中报告的最先进的结果。

对于 IC 设计，在情形 1（引理 2 的整除条件成立）中，我们有$\pi = sd = 2n/k$ （回顾引理 2，并回顾 $s = n/k$），同时也回顾一下，k 是这样的

即 $N=\binom{k}{2}$，这意味着 $k=\frac{1+\sqrt{8N+1}}{2}$，这意味着 $\pi=\frac{4n}{1+\sqrt{8N+1}}<\frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{N}}$，最终即表示（参见（43））

$$\mathrm{ARF}^{(\mathrm{IC})}<\sqrt{2N}.$$

类似地，对于情况 2，回顾引理 3 给出的 $\pi=s_0d+g$，其中 $s_0=\lfloor n/(k+d)\rfloor+1$ 和 $g=n-s_0k$。结合 $\binom{k\ (k-1)}{2}\leq N\leq \binom{k\ (k+1)}{2}$，即结合

$$\frac{-1+\sqrt{8N+1}}{2}\ \leq\ k\ \leq\ \frac{1+\sqrt{8N+1}}{2}$$

并在设定 $k=\frac{-1+\sqrt{8N+1}}{2}$ 后，我们得到

$$\pi\leq\frac{4n}{k+2}+2-k\leq\frac{2\sqrt{2}\,n}{\sqrt{N}}+\frac{5-\sqrt{8N+1}}{2}$$

并且由于对于所有 $N\geq 3$ 都有 $\frac{5-\sqrt{8N+1}}{2}\leq 0$，我们得到 $\pi\leq\frac{2\sqrt{2}n}{\sqrt{N}}$，对于每个 $N\geq 3$，这给出

$$\mathrm{ARF}^{(\mathrm{IC})}\leq 2\sqrt{2N}. \tag{44}$$

现在让我们将 $\mathrm{ARF}^{(\mathrm{IC})}$ 与算法在 [48], [52], 中可实现 $\mathrm{ARF}^{(\mathrm{Dynamic})}$ 的保证进行比较，由此我们知道

$$\mathrm{ARF}^{(\mathrm{Dynamic})}\leq\frac{n+|\mathbf{X}|+N}{n}.$$

令 (44) 中 $\mathrm{ARF}^{(\mathrm{IC})}$ 的一般情形界等于 $\mathrm{ARF}^{(\mathrm{Dynamic})}$，并求解 $\varphi=|\mathbf{X}|/\binom{n}{2}$，得到

$$\mathrm{ARF}^{(\mathrm{IC})}\leq\mathrm{ARF}^{(\mathrm{Dynamic})}\quad\Longleftrightarrow\quad\varphi\geq\frac{2}{n-1}\left(2\sqrt{2N}-1-\frac{N}{n}\right) \tag{45}$$

这里我们再次强调，关于 φ 的上述条件，是通过比较现有的可实现性能保证得出的结果；上述条件准确刻画了我们的 IC 设计何时能比[48], [52]中的方案更好地保证可实现 ARF。回顾一下，在这里的 $d=2$ 情况下，最小的 φ 随 n^2缩放。观察式 (45) 可直接得出：当 N 相较于 n 较小时（此时，表达式 $2\sqrt{2N}-1-\frac{N}{n}$ 的影响较小），对于所有缩放大于 $1/n$的 φ，IC 设计的表现都更好；而在另一极端情况下，若有 $N\approx n$ （之所以说这是极端情况，是因为对于 $d=2$，我们要求 $N\leq(\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{2}})^2<n$），可以看出，对于所有缩放大于 $1/\sqrt{n}$的 φ，IC 设计的表现都更好。

在 [47], 中也记录到了类似的性能，该文提出了一种基于邻域启发式的算法，其可实现 ARF 满足

$$\mathrm{ARF}^{(\mathrm{NH})}\leq 2\sqrt{N}+\frac{N}{n}$$

这分别接近 IC 设计在情形 1 和情况 2 下对 $\mathrm{ARF}^{(\mathrm{IC})} < \sqrt{2N}$ 和 $\mathrm{ARF}^{(\mathrm{IC})} < 2\sqrt{2N}$ 的保证。

最后，将其与 [54], 基于射影平面的构造进行比较颇有意义。不过，该构造仅适用于 $N = q^2 + q + 1$ 为素数幂 q的情况，且其所保证的

$$1.5\sqrt{N} \leq \mathrm{ARF}^{(\mathrm{Projective})} \leq 2\sqrt{N}$$

同样接近于我们所提供的保证。

总而言之，我们强调，我们的首要设计目标是最小化 π；ARF 是一个派生指标，但即使按照这一辅助指标衡量，在广泛的参数范围内，IC 设计所提供的保证也足以与现有边划分方案的保证相竞争，并且通常优于后者。

VI. 结论

本文介绍了交织团设计（Interweaved Clique design），这是一种适用于一般分布式计算环境的数据与任务分配确定性构造。在目标函数被建模为可分解为由集合 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}_{n,d}$ 索引的子函数的环境中——其中 $\mathbf{X}$ 的每个元素对应于某个子函数的输入文件的一个 d-元组——IC 设计提供了一个将 $\mathbf{X}$ 显式划分到 N 个工作节点上的方案，并产生通信成本 $\pi_{\mathbf{X}}$；对于所有归一化大小 φ不趋于零的 $\mathbf{X}$，该通信成本的渐近标度均为最优。相同的构造还控制了计算延迟参数 $\delta_{\mathbf{X}}$；对于所有归一化大小不趋于零的任务集，该延迟以高概率保持在某个常数以内。

除了 IC 设计之外，我们还得到了一个反向界。尽管它很简单，但它也是紧的：它是对所有 $\mathbf{X}$ 都成立的最紧（最大）下界。具体而言，对于给定的$\varphi \in (0, 1]$, 确定性下界 π_{lb}，$\varphi^{1/d}\frac{n}{N^{1/d}}$ 是紧的，因为存在一个 $\mathbf{X} \subseteq \binom{[n]}{d}$ 能够达到 $\pi_{\mathbf{X}} \asymp \pi_{lb}$。直观而言，这样的 $\mathbf{X}$ 是由 N 个不相交团组成的并集，其中每个团 $\mathcal{C}_i$, $i \in [N]$ 至多由 π_{lb} 个元素构成，且任意两个团可以有 $d-1$ 个共同元素（划分条件），即 $|\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j| \leq d-1$。这证实了当 $\mathbf{X}$ 被构造成由稠密且互不相交的团（$|\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j| \leq d-1$）组成的集合时，每组的最大位数达到了理论最小值。

综合来看，这些结果刻画了在子函数度固定为 d 的情况下，通过文件与任务分配所能实现的阶数最优通信与计算性能，即 $\pi_{\mathbf{X}}$ 和 $\delta_{\mathbf{X}}$。值得指出的是，选择 $\pi_{\mathbf{X}}$ 作为通信指标，与

超图划分文献中常用的平均复制因子不同。回顾一下，平均复制因子（ARF）衡量每个文件被复制到的工作节点的平均数量，而 $\pi_{\mathbf{X}}$ 衡量传输到任一工作节点的文件数量上限，因此能够反映在采用并行、等容量通信信道的系统中，主从链路上的最坏情况负载。当不存在计算延迟 $\delta_{\mathbf{X}}$ 约束时，这一区别至关重要：此时 ARF 会退化，因为可以将所有文件和子函数都分配给单个工作节点，使 ARF 达到 $=1$，同时产生 $\pi_{\mathbf{X}}=n$，也就是最大的通信成本。因此，在这种情况下，ARF 无法反映实际通信瓶颈。相比之下，无论是否考虑计算延迟，$\pi_{\mathbf{X}}$ 都有明确意义，并能直接刻画最坏情况的通信负载。

我们还要回顾 IC 设计的一些结构特性，这些特性有助于实际部署。首先，该构造是确定性的，不依赖基于搜索的流程，从而将实现复杂度降至最低。其次，也是非常重要的一点，设计的文件分配与具体的任务分解 X 无关。文件一旦分配到 N 工作节点上，同样的分配方式就可用于任意 $\mathbf{X}\subseteq\mathbf{A}_{n,d}$；不同任务之间仅子函数分配有所变化。因此，引入新的任务集无需在工作节点之间重新分配文件，而且性能保证对这些任务集仍然成立。

最终，设计近乎统一的特性及其简洁性，使得我们能够首次推导出适用于相关参数范围的基本极限，并为广泛的、X 不趋于零的场景得出紧确的尺度律。

Appendix A
Proof of Lemmas

A. 引理 1 的证明

根据第 IV-A 节中的 (24)，我们回顾一下，对于每个 $\sigma\in\binom{[f]}{d}$，集合 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma$ 被划分为 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma=\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})}\cup\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})}$，其中 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})}$由具有完全支撑的 d元组组成，且其中 $|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})}|=s^d$。还要回顾（根据 (23)），$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})}=\bigcup_{\beta=\lceil\frac{d}{s}\rceil}^{d-1}\bigcup_{\mathcal{I}\subset\sigma}\mathsf{C}_{\beta,\,\mathcal{I},\,\sigma}$。我们还要记住，对于任意 $\beta\in[\lceil\frac{d}{s}\rceil,d-1]$，每个组 $\sigma\in\binom{[f]}{d}$ 恰好有 $\binom{d}{\beta}$ 个基数为 β的不同子集 $\mathcal{I}$，并且对于每个这样的 $\mathcal{I}\subset\sigma$，$\mathsf{C}_{\beta,\,\mathcal{I},\,\sigma}$ 的基数要么为 $q_\beta+1$，要么为 q_β。现在注意，根据 (149)，有

$$\frac{t_\beta}{m_\beta}-1\le q_\beta=\lfloor\frac{t_\beta}{m_\beta}\rfloor\le\frac{t_\beta}{m_\beta} \tag{46}$$

这给出

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}| \leq \sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} (q_\beta + 1)\binom{d}{\beta} \leq \sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} \frac{t_\beta}{m_\beta} \cdot \binom{d}{\beta} + \sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} \binom{d}{\beta} \tag{47}$$

进而得到

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}| \geq \sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} q_\beta \binom{d}{\beta} \geq \sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} \frac{t_\beta}{m_\beta} \cdot \binom{d}{\beta} - \sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} \binom{d}{\beta}. \tag{48}$$

现在利用（148），可得

$$\frac{t_\beta}{m_\beta} \cdot \binom{d}{\beta} = \frac{t_\beta}{\binom{f-\beta}{d-\beta}} \cdot \binom{d}{\beta} = t_\beta \cdot \frac{\binom{f}{\beta}}{\binom{f}{d}} \tag{49}$$

同时注意到

$$\sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} \binom{d}{\beta} \leq \sum_{\beta=0}^{d-1} \binom{d}{\beta} = 2^d - d. \tag{50}$$

此时，利用（49）和（50），我们将（47）和（48）分别上界如下

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}| \leq \sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} \frac{t_\beta \binom{f}{\beta}}{\binom{f}{d}} + 2^d - d, \tag{51}$$

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}| \geq \sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} \frac{t_\beta \binom{f}{\beta}}{\binom{f}{d}} - 2^d + d. \tag{52}$$

回顾（146），我们有

$$\sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d-1} t_\beta \binom{f}{\beta} = \sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d} t_\beta \cdot \binom{f}{\beta} - t_d \cdot \binom{f}{d} = \binom{n}{d} - t_d \cdot \binom{f}{d}$$

这意味着

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}| \leq \frac{\binom{n}{d} - \binom{f}{d} t_d}{\binom{f}{d}} + 2^d - d = \frac{\binom{n}{d}}{\binom{f}{d}} - t_d + 2^d - d \tag{53}$$

并且

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}| \geq \frac{\binom{n}{d} - \binom{f}{d} t_d}{\binom{f}{d}} - 2^d + d = \frac{\binom{n}{d}}{\binom{f}{d}} - t_d - 2^d + d. \tag{54}$$

由于 $t_d = s^d = |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{full})}|$，我们可以对 $|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}|$ 给出如下下界和上界

$$\frac{\binom{n}{d}}{\binom{f}{d}} - |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{full})}| - 2^d + d \leq |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}| \leq \frac{\binom{n}{d}}{\binom{f}{d}} - |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{full})}| + 2^d - d, \tag{55}$$

$$\frac{\binom{n}{d}}{\binom{f}{d}} - 2^d + d \leq |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}| + |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{full})}| \leq \frac{\binom{n}{d}}{\binom{f}{d}} + 2^d - d, \tag{56}$$

$$\frac{\binom{n}{d}}{\binom{f}{d}} - 2^d + d \leq |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}| \leq \frac{\binom{n}{d}}{\binom{f}{d}} + 2^d - d \tag{57}$$

至此证明完毕。

B. 引理 2 的证明

首先回顾式 (17) 中 $\mathbf{A}_{n,d}$ 的 IC 设计划分。我们需要证明 $\pi = \max_{\sigma\in\binom{[f]}{d}} |\alpha(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma)|$，并回顾 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma = \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})}$，其中 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})} \cap \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})} = \emptyset$。我们还由式 (18) 回顾到，对于每个 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$，$|\alpha(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})})| = s\cdot d$，因为对所有 $i\in[f]$，$|\mathcal{F}_i| = s$。现在，对于任意固定的 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$，考虑一个 d-元组 $\mathbf{a} \in \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})}$，并令 $\mathcal{B}(\mathbf{a}) = \mathcal{I}$，其中某个 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$ 满足 $\beta \in [\lceil \frac{d}{s} \rceil, d-1]$。于是，由式 (23) 可知，$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})}$ 中任意 d-元组的支撑族都是 σ 的子集。因此，对于每个 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$，都有 $\alpha(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})}) \subseteq \alpha(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})})$，从而得到 $\alpha(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})}) = \alpha(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma)$，这进而意味着

$$\pi = \max_{\sigma\in\binom{[f]}{d}} \alpha(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma) = \max_{\sigma\in\binom{[f]}{d}} \alpha(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})}) = s\cdot d \tag{58}$$

由此完成证明。

C. 引理 3 的证明

回顾第 IV-B 节中情况 2 所述的 IC 设计，并回顾式 (13) 中的 k以及式 (27) 中的 f, g。还需回顾，$N' = \binom{f}{d}$，其中 $n' = k\cdot s_0$，且 s_0 按式 (26) 设置；此外，$\mathbf{A}_{n',\,d}$ 被划分为

$$\mathbf{A}_{n',d} = \Big\{ \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})} \;\Big|\; \sigma \in \tbinom{[f]}{d} \Big\}. \tag{59}$$

最后，回顾引理 2 可知，对于每个 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$，都有 t

$$\Big|\alpha\big(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})}\big)\Big| = s_0\cdot d. \tag{60}$$

现在分析被排除的 d 元组集合 $\mathbf{A}_{\mathrm{exc}} = \mathbf{A}_{n,\,d} \setminus \mathbf{A}_{n',\,d}$，注意到对于每个 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$，都有分解 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma = \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{exc})}$，其中

$$\big(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{com})}\big) \cap \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{exc})} = \emptyset.$$

考虑任意一个 d 元组 $\mathbf{a} \in \widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{exc})}$。令 $\mathcal{B}(\mathbf{a}) = \mathcal{I}$，其中 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$，且 $\beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$（定义见 (33)–(34)）。对于 (29) 中定义的排除元素集合 $\mathcal{E}$，我们现在有

$$|\mathbf{a}\cap\mathcal{E}| = m \le |\mathcal{E}| = g. \tag{61}$$

利用 (61) 以及我们从 (35) 得知的 $\mathcal{I}\subset\sigma$，可以得出任何 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{exc})}$ 中的 d 元组的元素都属于

$$\mathcal{F}_\mathcal{I} \cup (\mathbf{a}\cap\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}_\sigma \cup \mathcal{E} \tag{62}$$

这意味着，对于所有 $\sigma \in \binom{[f]}{d}.$，$\alpha\big(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{exc})}\big) \subseteq \mathcal{F}_{\sigma} \cup \mathcal{E}$。由于 $\alpha\big(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}\big) = \mathcal{F}_{\sigma} = \bigcup_{i\in\sigma} \mathcal{F}_i$，我们有

$$\alpha(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}) = \alpha\Big(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{full})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{exc})}\Big) \subseteq \alpha\Big(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{full})}\Big) \cup \alpha\Big(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})} \cup \widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{exc})}\Big) \subseteq \mathcal{F}_{\sigma} \cup \mathcal{E} \tag{63}$$

并对所有 σ 取最大值，我们得到

$$\pi = \max_{\sigma \in \binom{[f]}{d}} \alpha(\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}) \leq |\mathcal{F}_{\sigma} \cup \mathcal{E}| = s_0 \cdot d + g \tag{64}$$

其中，最后一个等式是因为对所有 $i \in [f]$ 都有 $|\mathcal{F}_i| = s_0$，并且 $\mathcal{F}_{\sigma}$ 包含 d 个族。

D. 引理 4 的证明

在第 IV-B 节中，给定 n、d 和 N，我们可以根据（27）确定 g 和 f，进而得到 $n' = n - g$。对于每个 $\sigma \in \binom{f}{d}$，回想一下集合 $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}$ 被划分为全支撑 d 元组、补 d 元组和排除的 d 元组，因此我们有

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}| = |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}| + |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{full})}| + |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{exc})}|. \tag{65}$$

此外，根据引理 1，并给定参数集 n'、d 和 $N' = \binom{f}{d}$，我们得到

$$\frac{\binom{n'}{d}}{\binom{f}{d}} - 2^d + d \leq |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{com})}| + |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{full})}| \leq \frac{\binom{n'}{d}}{\binom{f}{d}} + 2^d - d. \tag{66}$$

现在回想一下，$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{exc})} = \bigcup_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \bigcup_{\mathcal{I}\subset\sigma} \mathbf{R}_{\beta,\ \mathcal{I},\ \sigma}$，并注意到附录 B-E 中描述的方法保证，对于任意 $\beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$，每个 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$ 都恰有 $\binom{d}{\beta}$ 个不同的基数为 β 的子集 $\mathcal{I}$，并且对于每个这样的 $\mathcal{I} \subset \sigma$，$\mathbf{R}_{\beta,\ \mathcal{I},\ \sigma}$ 的基数要么为 $q_{\beta}+1$，要么为 q_{β}。这意味着

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{exc})}| \leq \sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} (q_{\beta}+1) \cdot \binom{d}{\beta} \leq \sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \frac{t_{\beta}}{m_{\beta}} \cdot \binom{d}{\beta} + \sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \binom{d}{\beta} \tag{67}$$

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\sigma}^{(\mathrm{exc})}| \geq \sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} q_{\beta} \cdot \binom{d}{\beta}, \geq \sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \frac{t_{\beta}}{m_{\beta}} \cdot \binom{d}{\beta} - \sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \binom{d}{\beta}. \tag{68}$$

现在回到（148），我们有

$$\frac{t_{\beta}}{m_{\beta}} \cdot \binom{d}{\beta} = \frac{t_{\beta}}{\binom{f-\beta}{d-\beta}} \cdot \binom{d}{\beta} = t_{\beta} \cdot \frac{\binom{f}{\beta}}{\binom{f}{d}} \tag{69}$$

同时指出

$$\sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \binom{d}{\beta} \leq \sum_{\beta=0}^{d-1} \binom{d}{\beta} = 2^d - d. \tag{70}$$

将 (69) 和 (70) 代入 (67)，可得以下不等式

$$\sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \frac{t_\beta \cdot \binom{f}{\beta}}{\binom{f}{d}} - 2^d + d \le |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{exc})}| \le \sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \frac{t_\beta \cdot \binom{f}{\beta}}{\binom{f}{d}} + 2^d - d, \tag{71}$$

$$\frac{\sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} |\mathbf{R}_\beta|}{N'} - 2^d + d \le |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{exc})}| \le \frac{\sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} |\mathbf{R}_\beta|}{N'} + 2^d - d \tag{72}$$

其中，从 (71) 到 (72) 的推导依据 (154)。此外，鉴于 $\sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} |\mathbf{R}_\beta| = |\mathbf{A}_{\mathrm{exc}}| = \binom{n}{d} - \binom{n'}{d}$，我们有

$$\frac{\binom{n}{d} - \binom{n'}{d}}{N'} - 2^d + d \le |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma^{(\mathrm{exc})}| \le \frac{\binom{n}{d} - \binom{n'}{d}}{N'} + 2^d - d. \tag{73}$$

现在利用 (66) 和 (73) 对 (65) 求上界，从而得到

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma| \le \frac{\binom{n-g}{d}}{N'} + 2^d - d + \frac{\binom{n}{d} - \binom{n-g}{d}}{N'} + 2^d - d \tag{74}$$

and

$$|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma| \ge \frac{\binom{n-g}{d}}{N'} - 2^d + d + \frac{\binom{n}{d} - \binom{n-g}{d}}{N'} - 2^d + d \tag{75}$$

由于 (74) 和 (75) 对每个 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$ 都成立，因此我们得到

$$\max_{\sigma \in \binom{[f]}{d}} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma| \le \frac{\binom{n}{d}}{N'} + 2^{d+1} - 2d, \tag{76}$$

$$\min_{\sigma \in \binom{[f]}{d}} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma| \ge \frac{\binom{n}{d}}{N'} - 2^{d+1} + 2d \tag{77}$$

至此证明完成。

E. 引理 5 的证明

直接根据 (13) 中 k 的定义以及 (12) 中 N' 的定义，我们注意到

$$N < \binom{k+1}{d}, \quad N' = \binom{k}{d} \tag{78}$$

这意味着

$$\frac{N}{N'} < \frac{\binom{k+1}{d}}{\binom{k}{d}} = \frac{k+1}{k+1-d}. \tag{79}$$

由于函数 在定义域 $[d+1, \infty)$ 上递减，因此我们可以得出 t

$$\max_{k \in \mathcal{K}_{\mathrm{valid}}} \frac{k+1}{k+1-d} \le d+1 \tag{80}$$

这意味着

$$\frac{N}{N'} < d+1 \le 2^d. \tag{81}$$

F. 引理 6 的证明

让我们考虑第 IV-A 节中所述的情形 1 的设计，其中 $n = k \cdot s$ 对于某个整数 s，且 k 在公式 (13) 中定义。回顾引理 1，我们有

$$\max_{\sigma \in \binom{[f]}{d}} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma| \leq \frac{\binom{n}{d}}{N'} + 2^d - d.$$

还要回顾的是，正如第 IV-C 节所讨论的——将划分从 N' 个组扩展到 N 个组时——每个组会被划分为 q 个或 p 个部分（ q、 p 和 r 的定义见 (38)）。现在，由于 $q \leq p$，我们可以得出

$$\max_{b \in [N]} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b| \leq \lceil \frac{\frac{\binom{n}{d}}{N'} + 2^d - d}{q} \rceil \tag{82}$$

$$\leq \lceil \frac{\binom{n}{d}}{q \cdot N'} \rceil + \lceil \frac{2^d}{q} - \frac{d}{q} \rceil \tag{83}$$

$$\leq \frac{\binom{n}{d}}{q \cdot N'} + 1 + \lceil \frac{2^d}{q} \rceil - \lfloor \frac{d}{q} \rfloor \tag{84}$$

$$\leq \frac{\binom{n}{d}}{N - r} + 2^d \tag{85}$$

其中，从 (82) 到 (83) 的推导基于这样一个事实： $\lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$；从 (83) 到 (84) 的推导基于这样一个事实： $\lceil x \rceil \leq x + 1$ 和 $\lceil x - y \rceil \leq \lceil x \rceil - \lfloor y \rfloor$；而从 (84) 到 (85) 的推导基于这样一个事实： $1 \leq q = \lfloor \frac{N}{N'} \rfloor \leq d$（参见引理 5），以及这样一个事实： $N - r = N' \cdot q$。

现在我们可以继续推导出关于 δ 的以下上界

$$\delta = \frac{\max_{b \in [N]} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b|}{\lceil \binom{n}{d} / N \rceil} \leq \frac{\max_{b \in [N]} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b|}{\binom{n}{d} / N} \leq \frac{N}{N - r} + \frac{2^d \cdot N}{\binom{n}{d}} \tag{86}$$

$$= \frac{N}{N' \cdot \lfloor \frac{N}{N'} \rfloor} + \frac{2^d \cdot N}{\binom{n}{d}} \tag{87}$$

$$\leq 2 + \frac{2^d \cdot N}{\binom{n}{d}} \tag{88}$$

其中，从 (86) 到 (87) 的推导使用了 (85)，还用到了 $N = N' \cdot q + r$ where$q = \lfloor \frac{N}{N'} \rfloor$；而从 (87) 到 (88) 的推导则基于以下事实： $f(x) = \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \leq 2$for $x = \frac{N}{N'} \geq 1$。现在，利用以下事实： $N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d \leq (\frac{n}{d})^{d/2}$（参见附录 B-F），并将 $\binom{n}{d} \geq (\frac{n}{d})^d$和 $N \leq (\frac{n}{d})^{d/2}$代入 (88)，得到

$$\delta \leq \frac{2^d N}{\binom{n}{d}} + 2 \leq \frac{2^d}{(\frac{n}{d})^{d/2}} + 2. \tag{89}$$

现在定义辅助变量

$$Z \triangleq \frac{2^d}{(\frac{n}{d})^{d/2}} \tag{90}$$

并且容易注意到，如果 $d \leq \frac{n}{32}$，那么 $Z \leq 1$。现在将 $Z \leq 1$ 代入 (89)，即可直接得到

$$\delta \leq Z + 2 < 3. \tag{91}$$

现在我们将注意力转向情况 2，如第 IV-B 节所述，其中参数 s_0和 g按照 (26) 和 (27) 定义，且满足 $s_0 \mid n-g$。还需回顾，$n' = n-g$和 $f = \frac{n'}{s}$，后者与 (13) 所指定的值 k 相同。此时我们还可以根据引理 4 得出

$$\max_{\sigma \in \binom{[f]}{d}} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma| \leq \frac{\binom{n}{d}}{N'} + 2^{d+1} - 2d.$$

此外，从 N' 转换到 N 组后，我们还有

$$\max_{b \in [N]} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b| \leq \lceil \frac{\frac{\binom{n}{d}}{N'} + 2^{d+1} - 2d}{q} \rceil \leq \frac{\binom{n}{d}}{N-r} + 2^{d+1} \tag{92}$$

因此我们有

$$\delta \leq \frac{\max_{b \in [N]} |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b|}{\binom{n}{d}/N} \leq \frac{N}{N-r} + \frac{2^{d+1} \cdot N}{\binom{n}{d}} \tag{93}$$

$$= \frac{N}{N' \cdot \lfloor \frac{N}{N'} \rfloor} + \frac{2^{d+1} \cdot N}{\binom{n}{d}} \tag{94}$$

$$\leq 2 + \frac{2^{d+1} \cdot N}{\binom{n}{d}} \tag{95}$$

其中，从 (93) 到 (94) 的推导用到了 $N = N' \cdot q + r$与 $q = \lfloor \frac{N}{N'} \rfloor$的事实，而从 (94) 到 (95) 的推导则基于以下事实：对于 $x \geq 1$，$f(x) = \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \leq 2$。现在注意到，与 (90) 中的情况类似，在条件 $N \leq (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d \leq (\frac{n}{d})^{d/2}$和$d \leq \frac{n}{32}$下，我们有 $Z \leq 1$，由此可得

$$\delta \leq 2 + 2Z \leq 4. \tag{96}$$

现在，关于通信成本 π，首先在情形 1 下，我们通过对 $N' = \binom{k}{d} = \binom{n/s}{d}$ 应用二项式近似，计算可实现的 π 与最优通信成本 $\pi^\star$ 之间的差距，得到

$$\left(\frac{n}{sd}\right)^d \leq N' \leq \left(\frac{en}{sd}\right)^d \tag{97}$$

由此可得

$$\frac{n}{N'^{\frac{1}{d}}} \leq s \cdot d \leq \frac{en}{N'^{\frac{1}{d}}}. \tag{98}$$

此外，根据引理 2，我们有

$$\pi = s \cdot d \leq \frac{en}{N'^{\frac{1}{d}}} \tag{99}$$

根据附录 B-A 和式 (99)，我们得到差距

$$\frac{\pi}{\pi^\star} \leq \frac{en/N'^{\frac{1}{d}}}{n/N^{\frac{1}{d}}} \leq e\left(\frac{N}{N'}\right)^{\frac{1}{d}}. \tag{100}$$

现在利用引理 5，我们可以得出

$$\frac{\pi}{\pi^\star} \leq 2e. \tag{101}$$

现在，我们来计算情况 2（第 IV-B 节）的相同差距。首先，根据引理 3，我们得到以下可实现通信成本

$$\pi = s_0 \cdot d + g \leq 2s_0 \cdot d \tag{102}$$

并且由于 $\binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$，对 $N' = \binom{n'/s_0}{d}$ 应用二项式近似，可得

$$(\frac{n'}{s_0 \cdot d})^d \leq N' \leq (\frac{e \cdot n'}{s_0 \cdot d})^d \tag{103}$$

由此可得

$$\frac{n'}{N'^{\frac{1}{d}}} \leq s_0 \cdot d \leq \frac{e \cdot n'}{N'^{\frac{1}{d}}} \tag{104}$$

因此，根据式 (102)，我们得到

$$\pi \leq 2s_0 \cdot d \leq \frac{2e \cdot n'}{N'^{\frac{1}{d}}}. \tag{105}$$

最后，利用附录 B-A 中的结果，我们得到

$$\frac{\pi}{\pi^\star} \leq \frac{2e \cdot n'/N'^{\frac{1}{d}}}{n/N^{\frac{1}{d}}} = 2e \cdot \frac{n'}{n} \cdot (\frac{N}{N'})^{\frac{1}{d}} \tag{106}$$

$$\leq 2e \cdot (\frac{N}{N'})^{\frac{1}{d}} \tag{107}$$

$$\leq 4 \cdot e \tag{108}$$

其中，从 (106) 到 (107) 的推导基于如下事实：$n' \leq n$；而从 (107) 到 (108) 的推导则依据引理 5。

G. 引理 7 的证明

~ ~ ~回顾一下第 IV-A、IV-B 和 IV-C 节中给出的 $\mathbf{A}_{n,\ d}$划分为 N组 $\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \ldots, \mathbf{\Phi}_N$，接下来我们先定义

$$m_b \triangleq |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b|,\ b \in [N], \quad m_{\min} \triangleq \min_{b\in[N]} m_b, \quad m_{\max} \triangleq \max_{b\in[N]} m_b. \tag{109}$$

我们还 要回顾一下，平衡参数（计算成本）首先具有如下形式

$$\delta = \delta_{\mathbf{A}_{n,d}} = \frac{m_{\max}}{\lceil \binom{n}{d}/N \rceil} \tag{110}$$

根据引理 6，我们知道 $\delta_{\mathbf{A}_{n,\ d}} \leq 4$。给定 X 及其对应的划分为~$\mathbf{\Phi}_1$、.....、 $\mathbf{\Phi}_N$，其中 $\mathbf{\Phi}_b = \mathbf{\Phi}_b \cap \mathbf{X}\ \ b \in [N]$，我们来为相应的上界

$$\delta_{\mathbf{X}} = \frac{\max_{b\in[N]} \mathbf{\Phi}_b}{\lceil |\mathbf{X}|/N \rceil}.$$

~为此，对每个 d元组 $\mathbf{t} \in \mathbf{\Phi}_b$，定义 $I_{\mathbf{t}}$ 为示性随机变量，使得$I_{\mathbf{t}} = 1$ 当 $\mathbf{t} \in \mathbf{X}$ 时成立，而 $I_{\mathbf{t}} = 0$ 在其他情况下成立。回顾一下，我们是在假设 X 是从 $\mathbf{A}_{n,\ d}$经随机稀疏化得到的结果这一前提下进行推导的。由于这种随机稀疏化对每个 d元组独立进行，因此 $\mathbf{\Phi}_b$ 的基数取如下形式

$$\mu_b = |\mathbf{\Phi}_b| = \sum_{\mathbf{t}\in\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b} I_{\mathbf{t}} \tag{111}$$

其中每个 $I_{\mathbf{t}}$ 都服从概率为 φ的伯努利分布，对应于具有 $\mathbb{E}[I_{\mathbf{t}}] =\varphi$的情形。这又意味着

$$\mathbb{E}[\mu_b] = \mathbb{E}\big[\sum_{\mathbf{t}\in\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b} I_{\mathbf{t}}\big] = \sum_{\mathbf{t}\in\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b} \mathbb{E}[I_{\mathbf{t}}] = \varphi \cdot |\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b| = \varphi \cdot m_b. \tag{112}$$

对 [65], 、 $0 < \varepsilon < 1$ 和 $b \in [N]$ 应用推论 4.6，可得

$$\mathbb{P}r\big[|\mu_b - \mathbb{E}(\mu_b)| \geq \varepsilon\mathbb{E}(\mu_b)\big] \leq 2\exp\big(-\tfrac{\varepsilon^2\mathbb{E}(\mu_b)}{3}\big) \tag{113}$$

然后，对所有 N 个组应用并集界，可得

$$\mathbb{P}r\big[\exists b \mid \mu_b \notin [(1-\varepsilon)\mathbb{E}(\mu_b), (1+\varepsilon)\mathbb{E}(\mu_b)]\big] \leq 2\ N \cdot \max_{b\in[N]} \big(\exp(-\frac{\epsilon^2\mathbb{E}(\mu_b)}{3})\big) \tag{114}$$

$$\leq 2\ N \cdot \exp\big(-\frac{\epsilon^2}{3} \cdot \min_{b\in[N]} \mathbb{E}(\mu_b)\big). \tag{115}$$

现在回顾一下 $\min_{b\in[N]} \mathbb{E}[\mu_b] = \varphi \cdot m_{\min}$。然后选择 $\epsilon = \frac{1}{4}$ 和 $\eta = \frac{1}{n}$，并将这些值代入式 (115)。通过求解以下不等式

$$2\ N \cdot \exp(-\frac{\varphi \cdot m_{\min}}{48}) \leq \eta = \frac{1}{n}$$

我们可以得出，在条件

$$\varphi \cdot m_{\min} \ \geq \ 48\big(\log(2N) + \log(n)\big) \tag{116}$$

事实是

$$\Pr\left[\exists b \mid \mu_b \notin [\frac{3}{4}\mathbb{E}(\mu_b), \frac{5}{4}\mathbb{E}(\mu_b)]\right] \leq 2 \ N \cdot \exp\left(-\frac{\varphi \cdot m_{\min}}{48}\right) \leq \frac{1}{n} \tag{117}$$

这意味着，以至少 $1 - \frac{1}{n}$ 的概率，我们有

$$\mu_b = \varphi m_b \pm \frac{1}{4}\varphi m_b, \tag{118}$$

$$|\mathbf{\Phi}_b| = \varphi|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b| \pm \frac{1}{4}\varphi|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b| \tag{119}$$

这意味着

$$\max_{b\in[N]}|\mathbf{\Phi}_b| \leq \frac{5}{4}\varphi \cdot \max_{b\in[N]}|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b| \tag{120}$$

由此可得

$$\delta_{\mathbf{X}} = \frac{\max_{b\in[N]}|\mathbf{\Phi}_b|}{\varphi.\binom{n}{d}} \leq \frac{\frac{5}{4}\varphi \cdot \max_{b\in[N]}|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b|}{\varphi.\binom{n}{d}} = \frac{5}{4}\delta = 5 \tag{121}$$

至此，证明完成。

1) 化简条件 (116)：现在我们来化简条件 (116)。为此，回顾引理 4 可知

$$\min_{\sigma\in\binom{[f]}{d}}|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_\sigma| \geq \frac{\binom{n}{d}}{N'} - 2^{d+1} + 2d.$$

此外，回顾一下，在第 IV-C 节中（我们将划分从 N' 扩展到 N 组），每组被划分为 q 或 p 个部分（ q、 p 和 r 的定义见式 (38) ），并且由于 $q \leq p$，我们有

$$m_{\min} = \min_{b\in[N]}|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_b| \geq \lfloor\frac{\frac{\binom{n}{d}}{N'} - 2^{d+1} + 2d}{p}\rfloor \geq \frac{\binom{n}{d}}{pN'} - \frac{2^{d+1}}{p} + \frac{2d}{p} - 1 \tag{122}$$

$$\geq \frac{\binom{n}{d}}{N+N'} - \frac{2^{d+1}}{p} + \frac{2d}{p} - 1 \tag{123}$$

$$\geq \frac{\binom{n}{d}}{2N} - 2^{d+1} \tag{124}$$

其中，从 (122) 到 (123) 的推导依据以下事实：a) 若 $r = 0$，则 $pN' = N$；b) 若 $r \neq 0$，则 $p = q+1$，因此 $N \leq pN' = N + N' - r \leq N + N' \leq 2N$。此外，上述从 (123) 到 (124) 的推导依据事实 $1 \leq p \leq d+1 \leq 2d$。在

此时，我们将 (124) 代入条件 (116)，并将相应的阈值记为

$$\varphi_{\min} \triangleq \frac{96\,N\,\log(2Nn)}{\binom{n}{d} - 2^{d+2}N}. \tag{125}$$

现在注意到，根据附录 B-F，我们有 $N \le (\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}})^d \le (\frac{n}{d})^{d/2}$；并且注意，对于固定的 $d \ge 2$ 和 $n \ge 32d$，(125) 的分母大于 $\frac{1}{2}(n/d)^d$。现在，由于

$$\binom{n}{d} - 2^{d+2}N \ge \left(\frac{n}{d}\right)^d - 2^{d+2}(\frac{n}{d})^{d/2} \tag{126}$$

当 $n \ge 32d$ 和 $d \ge 2$时，我们可以得出

$$\left(\frac{n}{d}\right)^d - 2^{d+2}(\frac{n}{d})^{d/2} = \left(\frac{n}{d}\right)^d \left(1 - \frac{2^{d+2}}{(\frac{n}{d})^{d/2}}\right) \ge \left(\frac{n}{d}\right)^d (1 - 2^{d+2-2.5d}) \ge \frac{1}{2}(n/d)^d. \tag{127}$$

现在将 (127) 和 $N \le (\frac{n}{d})^{d/2}$ 代入 (125)，即可得到更简单的阈值

$$\varphi_{\min} = \frac{96\,N\,\log(2Nn)}{\binom{n}{d} - 2^{d+2}N} \le \frac{96\,\log(2(\frac{n}{d})^{d/2} \cdot n)}{\frac{1}{2}(n/d)^{d/2}} \tag{128}$$

$$\le \frac{192\,\log(n^{d/2} \cdot n)}{(n/d)^{d/2}} = \frac{192\,d^{d/2}(1 + \frac{d}{2})\log(n)}{n^{d/2}} \tag{129}$$

$$\le 192\,(ed)^{d/2} \cdot \frac{\log(n)}{n^{d/2}} \tag{130}$$

其中，从 (128) 到 (129) 的变换依据是：当 $d \ge 2$时，$2(\frac{1}{d})^{d/2} \le 1$；而从 (129) 到 (130) 的步骤依据是：对于 $x \ge 0$，$1 + x \le e^x$。这意味着，对于任意给定的 $d \ge 2$，我们都有简化后的条件

$$\varphi_{\min} \le C_d\,\frac{\log n}{n^{d/2}} \tag{131}$$

其中，值 $C_d = 192(ed)^{d/2}$ 仅取决于 d。总之，在条件 $\varphi \ge C_d \frac{\log n}{n^{d/2}}$ 下，该结论成立的概率至少为 $1 - \frac{1}{n}$，即 $\delta_{\mathbf{X}} \le 5$。

APPENDIX B
VARIOUS PROOFS

A. $\pi^\star$下界的证明

考虑 $\mathbf{X}$ 的任意 N 组划分 $\mathbb{P} = \{\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \ldots, \mathbf{\Phi}_N\} \subseteq \mathbf{A}_{n,\,d}$。对于$\pi_b$，$|\alpha(\mathbf{\Phi}_b)|$，很容易看出

$$\sum_{b=1}^{N} \binom{\pi_b}{d} \ge |\mathbf{X}|. \tag{132}$$

此外，对于 $\pi_{\max}$，$\max_b \pi_b$，且由于 $\binom{\pi_{\max}}{d} \geq \binom{\pi_b}{d}$，我们可以得出

Fu t

$$N\binom{\pi_{\max}}{d} \geq |\mathbf{X}| = \varphi \cdot \binom{n}{d} \tag{133}$$

由此可得

$$\frac{\pi_{\max}!}{(\pi_{\max}-d)!d!} \geq \frac{\varphi \cdot n!}{N \cdot (n-d)! \cdot d!} \tag{134}$$

展开阶乘后，可得

$$\frac{\pi_{\max} \cdot (\pi_{\max}-1) \cdots (\pi_{\max}-d+1)}{n \cdot (n-1) \cdots (n-d+1)} \geq \frac{\varphi}{N}. \tag{135}$$

此外，由于 $d \leq \pi_{\max} \leq n$，我们有

$$\frac{\pi_{\max}}{n} \geq \frac{\pi_{\max}-k}{n-k}, \quad \text{for } 1 \leq k \leq d-1 \tag{136}$$

结合式 (135)、(136)，可得

$$\frac{(\pi_{\max})^d}{n^d} \geq \frac{\varphi}{N} \tag{137}$$

这可转化为 $\pi_{\max} \geq \frac{\varphi^{\frac{1}{d}} \cdot n}{N^{\frac{1}{d}}}$，由此可得

$$\pi^\star \geq \frac{\varphi^{\frac{1}{d}} \cdot n}{N^{\frac{1}{d}}}. \tag{138}$$

B. 推导 $\mathsf{C}_{\beta,\,\mathcal{I}}$ 的基数

这里我们根据式 (22) 推导 $\mathsf{C}_{\beta,\mathcal{I}} = \{\mathsf{a} \in \mathsf{C}_\beta \mid \mathcal{B}(\mathsf{a}) = \mathcal{I}\}$ 的基数，并证明 $|\mathsf{C}_{\beta,\mathcal{I}}|$对所有 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$ 均保持不变。

首先，根据第 IV-A 节，我们回顾一下：我们有 f 个互不相交的族 $\mathcal{F}_i \subset [n]$, $i \in [f]$, 每个族的基数均为 s。我们还记得式 (21) 中，对于每个 $\beta \in [\lceil \frac{d}{s} \rceil, d]$，集合 C_β 是由恰好跨越 β 个族的 d-元组构成的集合。

现在我们回顾一个众所周知的结果（参见 [66]）：生成函数中 x^k 项的系数

$$G_i(x) = (1+x)^s \tag{139}$$

等于从 $\mathcal{F}_i$ 中选取 k 个元素（k-元组）的方式数，其中 $|\mathcal{F}_i| = s$。

为了计算 $|\mathsf{C}_\beta|$，我们统计所有恰好与 β 个族相交的 d 元组的选取方式。首先，选择要使用的 β 个族，共有 $\binom{f}{\beta}$ 种选择。对于族 $\mathcal{F}_i$，从该族中选取任意 d 元组的生成函数见 (139)。我们从 (139) 中去掉空选项，以确保至少从 $\mathcal{F}_i$ 中选取一个元素，因此将 $(1+x)^s$ 替换为

$(1+x)^s-1$，这意味着从这 β 个族中恰好选取 d 个元素（d 元组）的方式数，是 x^d 在 $\big((1+x)^s-1\big)^\beta$ 中的系数。将此系数记为 $z_{\beta,\,d}$，并注意到

$$|\mathbf{C}_\beta| \;=\; \binom{f}{\beta} z_{\beta,d}. \tag{140}$$

令 $A=(1+x)^s$，并回忆一下，根据二项式定理，

$$\big((1+x)^s-1\big)^\beta = (A-1)^\beta = \sum_{i=0}^{\beta} \binom{\beta}{i} A^i (-1)^{\beta-i} \tag{141}$$

将 A 代入后可得

$$\big((1+x)^s-1\big)^\beta = \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^{\beta-i} \binom{\beta}{i} (1+x)^{s\cdot i}. \tag{142}$$

注意，结合式 (140) 和式 (142)，对每个 $\lceil \frac{d}{s} \rceil \le \beta \le d$，可得

$$|\mathbf{C}_\beta| \;=\; \binom{f}{\beta} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^{\beta-i} \binom{\beta}{i} \binom{s\cdot i}{d}. \tag{143}$$

现在回忆一下，不同的集合 $\mathbf{C}_\beta$ 两两不相交，且覆盖整个 $\mathbf{A}_{n,d}$，这意味着

$$\binom{n}{d} = \sum_{\beta=\lceil \frac{d}{s} \rceil}^{d} \binom{f}{\beta} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^{\beta-i} \binom{\beta}{i} \binom{s\cdot i}{d}. \tag{144}$$

现在回忆一下，对于固定的 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$，集合 $\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I}}$ 包含 $\mathbf{C}_\beta$ 中所有由 $\mathcal{I}$ 中全部 β 族支撑的 d 元组。不过，由于这些族两两不相交，且对应于相同的 s，其基数 $|\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I}}|$ 对所有 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$ 都相同。记 t_β , $|\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I}}|$，则有

$$|\mathbf{C}_\beta| = \sum_{\mathcal{I}\in\binom{[f]}{\beta}} |\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I}}| = \binom{f}{\beta} \cdot t_\beta \tag{145}$$

由此可得

$$t_\beta = |\mathbf{C}_\beta| / \binom{f}{\beta} = \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^{\beta-i} \binom{\beta}{i} \binom{s\cdot i}{d}. \tag{146}$$

C. 集合的显式描述 $\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I},\sigma}$

我们固定一个组 $\sigma \in \binom{[f]}{d}$。对于每个 $\beta \in [\lceil \frac{d}{s} \rceil, d-1]$，组 σ 恰好可以生成 $\binom{d}{\beta}$ 个不同的基数为 $|\mathcal{I}|=\beta$ 的子集 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$。对于每个这样的 $\mathcal{I}$，我们考虑集合 $\mathbf{C}_{\beta,\,\mathcal{I}}$ 它由 $\mathbf{C}_\beta$ 中所有与 $\mathcal{I}$ 相交的不同 d 元组构成。对于一个 d 元组 $\mathbf{a}$，如果 $\mathcal{B}(\mathbf{a}) \subset \sigma$，我们~就称 $\mathbf{a}$ 符合分配给组 $\mathbf{\Phi}_\sigma$ 的条件；同时回顾一下，对于每个

$\mathbf{a} \in \mathbf{C}_\beta$，都存在一个 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$ 使得 $\mathcal{I} = \mathcal{B}(\mathbf{a})$。我们将每个 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$ 对应的符合条件的组集合定义为

$$\mathcal{G}_{\beta,\mathcal{I}} \triangleq \{\sigma \in \binom{[f]}{d} | \ \mathcal{I} \subseteq \sigma\} \tag{147}$$

并且我们还将符合条件的组的数量记为

$$m_\beta \triangleq |\mathcal{G}_{\beta,\mathcal{I}}| = \binom{f-\beta}{d-\beta}. \tag{148}$$

现在回顾一下，$t_\beta = |\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I}}|$（附录 B-D），并记

$$q_\beta \triangleq \left\lfloor \frac{t_\beta}{m_\beta} \right\rfloor \tag{149}$$

and

$$r_\beta \triangleq t_\beta - q_\beta \cdot m_\beta, \qquad 0 \le r_\beta < m_\beta. \tag{150}$$

现在考虑按字典序排列的 $\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I}}$，并将该有序列表记为

$$\mathbf{C}^{\text{lex}}_{\beta,\mathcal{I}} \triangleq \left(\mathbf{c}^{(1)}_{\beta,\mathcal{I}}, \mathbf{c}^{(2)}_{\beta,\mathcal{I}}, \ldots, \mathbf{c}^{(t_\beta)}_{\beta,\mathcal{I}}\right)$$

其中，$\mathbf{c}^{(\ell)}_{\beta,\mathcal{I}}$ 表示该字典序中的第 ℓ 个 d 元组。随后，我们固定 $\mathcal{G}_{\beta,\mathcal{I}}$ 中 m_β 个组的字典序，并将其记为

$$\mathcal{G}^{\text{lex}}_{\beta,\mathcal{I}} = \left(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m_\beta}\right).$$

现在，我们将 $\mathbf{C}^{\text{lex}}_{\beta,\mathcal{I}}$划分到 m_β 个组 σ_1、.....、σ_{m_β} 中。由于 $q_\beta = \lfloor \frac{t_\beta}{m_\beta} \rfloor$，每个组接收的元组数量为 q_β 或 $q_\beta + 1$ d，这意味着，特别是，r_β 个组接收 $q_\beta + 1d$ 元组，其余 $m_\beta - r_\beta$ 个组接收 q_β d 元组。现在，我们将 σ 的索引（给定特定的 $\mathcal{I} \subset \sigma$）定义为

$$J_{\beta,\mathcal{I}}(\sigma) \triangleq \{j \ \text{ s.t. } \sigma = \sigma_j \text{ for some } j \in [m_\beta], \sigma_j \in \mathcal{G}^{\text{lex}}_{\beta,\mathcal{I}}\}.$$

对于 $\mathcal{I} \subset \sigma$ 且 $J_{\beta,\mathcal{I}}(\sigma) = j \in \{1, \ldots, m_\beta\}$，我们现在将分配给 σ 的块的起始和结束索引定义为

$$s_{j,\beta,\mathcal{I}} = (j-1)q_\beta + \min(j-1, r_\beta) + 1, \tag{151}$$

$$e_{j,\beta,\mathcal{I}} = jq_\beta + \min(j, r_\beta) \tag{152}$$

由此得到最终集合

$$\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I},\sigma} = \left\{ \mathbf{c}^{(\ell)}_{\beta,\mathcal{I}} \ | \ \ell = s_{j,\beta,\mathcal{I}}, \ s_{j,\beta,\mathcal{I}} + 1, \ \ldots, \ e_{j,\beta,\mathcal{I}} \right\} \tag{153}$$

针对该 $\mathcal{I}$，分配给组 σ 的 d-元组。

D. 推导 $\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}}$ 的基数

正如我们在第 IV-B 节（紧接在公式 (35) 之前）中回顾的，对于任意 $\mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}$，$\mathbf{R}_{\beta,\,\mathcal{I}}$ 是所有被排除的 d- 元组的集合，其中每个元组恰好由 $\mathcal{I}$ 中的 β 个族支持。由于这些族彼此不相交，且大小均为 s_0，对于所有不同的 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}' \in \binom{[f]}{\beta}$，我们有

$$\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}} \cap \mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}'} = \emptyset$$

因此，我们有

$$\mathbf{R}_{\beta} \;=\; \bigcup_{\mathcal{I}\in\binom{[f]}{\beta}} \mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}} \qquad \Longrightarrow \qquad \big|\mathbf{R}_{\beta}\big| \;=\; \binom{f}{\beta} \cdot |\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}}|. \tag{154}$$

此外，对于 $\mathcal{I}$ 的任意选择，基数 $|\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}}|$ 都相同；我们将该基数记为 t_β，并注意到

$$t_\beta \;\triangleq\; |\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}}|, \quad \text{for each } \mathcal{I} \in \binom{[f]}{\beta}. \tag{155}$$

我们还知道

$$|\mathbf{R}_{\beta}| = \sum_{m=1}^{min\{d-\beta,g\}} |\mathbf{R}_{m,\beta}|.$$

然后，我们利用 (30) 中 $\mathbf{R}_{m,\beta}$ 的形式，以及排容原理和生成函数方法（参见 [66]），得到

$$|\mathbf{R}_{\beta}| = \sum_{m=1}^{min\{d-\beta,g\}} \binom{g}{m}\binom{f}{\beta} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \binom{\beta}{i}\binom{i\cdot s_0}{d-m}$$

结合 (154) 后，这给出

$$|\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}}| = \sum_{m=1}^{\min\{d-\beta,g\}} \binom{g}{m} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \binom{\beta}{i}\binom{i\cdot s_0}{d-m}$$

由此完成证明。

E. 构造$\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I},\sigma}$

这里我们沿用附录 B-C 中构造 $\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I},\sigma}$ 的设计思路，并再次构造由 β 和 $\mathcal{I}$ 索引的集合；不过在此情形下，β 的取值范围为 $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$，而我们直接使用 $\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I}}$，而非 $\mathbf{C}_{\beta,\mathcal{I}}$。采用同样的方法，可得到分配给组 σ 的 d 元组集合 $\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I},\sigma}$，对应于此 $\mathcal{I}$，其形式为

$$\mathbf{R}_{\beta,\mathcal{I},\sigma} = \Big\{ \mathbf{r}^{(\ell)}_{\beta,\mathcal{I}} \mid \ell = s_{j,\beta,\mathcal{I}},\, s_{j,\beta,\mathcal{I}}+1,\, \ldots,\, e_{j,\beta,\mathcal{I}} \Big\}. \tag{156}$$

F. 界定 N 的范围

回顾式 (13)，$k = \max\left\{r \in \mathbb{Z}^+ \mid \binom{r}{d} \le N\right\}$，并考虑 $k \nmid n$ 的情形。另回顾式 (26)，$s_0 = \lfloor \frac{n}{k+d} \rfloor + 1$，并定义

$$\mathcal{K}_{\text{valid}} \triangleq \left\{ k \in [d, n] \subset \mathbb{Z} \mid \left\lfloor \frac{n}{k+d} \right\rfloor + 1 \le \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right\}. \tag{157}$$

现在我们断言，如果 $k \in \mathcal{K}_{\text{valid}}$，那么对于某个 $0 \le g \le s_0 \cdot d$，文件数 n 可以写成

$$n = k \cdot s_0 + g. \tag{158}$$

为证明这一断言，假设 $k \in \mathcal{K}_{\text{valid}}$，这意味着

$$s_0 \le \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \tag{159}$$

这也意味着

$$g = n - s_0 \cdot k \ge n - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \cdot k \ge 0 \tag{160}$$

因此我们有

$$g = n - s_0 \cdot k = n - \left(\left\lfloor \frac{n}{k+d} \right\rfloor + 1 \right) \cdot k \le n - \left\lceil \frac{n}{k+d} \right\rceil \cdot k \le n - \frac{n}{k+d} \cdot k = \frac{n \cdot d}{k+d}. \tag{161}$$

由于 $\frac{n}{k+d} < \lfloor \frac{n}{k+d} \rfloor + 1 = s_0$，现在可以得出结论

$$g \le \frac{n \cdot d}{k+d} \le s_0 \cdot d. \tag{162}$$

现在将其转化为对 N 的约束。为确保条件 (159) 成立，并考虑到两个实数相差至少为 1 时，其相应的下取整值也必定相差至少为 1，现在只需确保

$$\frac{n}{k} - \frac{n}{k+d} \ge 1 \tag{163}$$

即，确保

$$\frac{nd}{k(k+d)} \ge 1 \tag{164}$$

这继而得到二次不等式条件

$$k^2 + dk - dn \le 0. \tag{165}$$

求解后可得

$$k \le \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4dn}}{2} =: k_{\max} \tag{166}$$

由此我们现在可以得出结论：

$$N \le N_{\max} \triangleq \binom{k_{\max}}{d}. \tag{167}$$

不难看出，对于 $n \ge 32d$，我们有 $\frac{9}{10}\sqrt{dn} \le k_{\max} \le \sqrt{dn}$，应用斯特林性质后可得

$$N_{\max} \ge \left(\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}}\right)^{d}. \tag{168}$$

我们在全文中使用 $\left(\frac{9}{10}\sqrt{\frac{n}{d}}\right)^{d}$ 来限定可接受 N 的范围。

参考文献

[1] Y. Jiang，《分布式系统中的任务分配与负载均衡综述》，IEEE并行与分布式系统汇刊，第27卷，第2期，第585–599页，2015年。[2] V. K. Vavilapalli 等人，《Apache Hadoop YARN：又一个资源协商器》，载于《第4届年度云计算研讨会论文集》，2013年，第1–16页。[3] J. Korner 和 K. Marton，《如何对二元信源的模二和进行编码（勘误）》，IEEE信息论汇刊，第25卷，第2期，第219–221页，1979年。[4] D. Slepian 和 J. Wolf，《相关信息源的无噪声编码》，IEEE信息论汇刊，第19卷，第4期，第471–480页，1973年。[5] T. Han 和 K. Kobayashi，《相关信源 (x, y) 的函数 $f(x, y)$ 的二分性》，IEEE信息论汇刊，第33卷，第1期，第69–76页，1987年。[6] A. B. Wagner，《线性函数的分布式压缩》，IEEE信息论汇刊，第57卷，第1期，第79–94页，2011年。[7] V. Lalitha、N. Prakash、K. Vinodh、P. V. Kumar 和 S. S. Pradhan，《子空间分布式计算的线性编码方案》，IEEE通信精选领域期刊，第31卷，第4期，第678–690页，2013年。[8] A. Orlitsky 和 J. Roche，《计算编码》，IEEE信息论汇刊，第47卷，第3期，第903–917页，2001年。[9] V. Doshi、D. Shah、M. M´edard 和 M. Effros，《通过图着色实现函数压缩》，IEEE信息论汇刊，第56卷，第8期，第3901–3917页，2010年。[10] K. Wan、H. Sun、M. Ji 和 G. Caire，《分布式线性可分计算》，IEEE信息论汇刊，第68卷，第2期，第1259–1278页，2022年。

[11] K. Wan、H. Sun、M. Ji 和 G. Caire，《分布式线性可分计算中计算与通信成本之间的权衡》，IEEE通信汇刊，第69卷，第11期，第7390–7405页，2021年。[12] A. Khalesi 和 P. Elia，《多用户线性可分分布式计算》，IEEE信息论汇刊，第69卷，第10期，第6314–6339页，2023年。[13] A. Khalesi 和 P. Elia，《镶嵌式分布式计算》，IEEE信息论汇刊，第71卷，第6期，第4754–4784页，2025年。[14] K. K. K. Namboodiri、E. Peter、D. Malak 和 P. Elia，《线性可分函数分布式计算的基本极限》，2025年。arXiv: 2509.23447 [cs.IT]。[15] A. Gholami、T. Jahani-Nezhad、K. Wan 和 G. Caire，《分层梯度编码中的最优通信-计算权衡》，arXiv预印本 arXiv:2502.18251，2025年。[16] A. Gholami、K. Wan、T. Jahani-Nezhad、H. Sun、M. Ji 和 G. Caire，《多消息私有计算的基本极限》，IEEE通信汇刊，第73卷，第9期，第7462–7477页，2025年。数字对象标识符：10.1109/TCOMM.2025.3543231[17] L. Qiao、Z. Gao、M. Boloursaz Mashhadi 和 D. G¨und¨uz，《面向通信高效的联邦边缘学习的大规模数字空中计算》，IEEE通信精选领域期刊，第42卷，第11期，第3078–3094页，2024年。数字对象标识符：10.1109/JSAC.2024.3431572[18] D. Malak，《分布式结构化矩阵乘法》，载于《2024年IEEE国际信息论研讨会（ISIT）》，2024年，第2550–2555页。数字对象标识符：10.1109/ISIT57864.2024.10619604[19] S. Li、M. A. Maddah-Ali、Q. Yu 和 A. S. Avestimehr，《分布式计算中计算与通信之间的基本权衡》，IEEE信息论汇刊，第64卷，第1期，第109–128页，2018年。[20] H. Chen、M. Cheng 和 Y. Wu，《循环分配下去中心化线性可分计算的基本极限》，IEEE通信汇刊，第1–1页，2025年。[21] Y. Wang 和 Y. Wu，《采用预设数据放置和输出函数分配的编码分布式计算》，IEEE信息论汇刊，第71卷，第3期，第2195–2217页，2025年。[22] Y. Bi、M. Wigger 和 Y. Wu，《无线MapReduce的归一化传输时间》，IEEE信息论汇刊，第70卷，第10期，第7005–7022页，2024年。[23] E. Peter、K. K. K. Namboodiri 和 B. S. Rajan，《用于编码分布式计算的无线MapReduce阵列》，载于《IEEE信息论研讨会（ITW）论文集》，2024年，第163–168页。

[24] F. Brunero 和 P. Elia，“多接入分布式计算”，IEEE信息论汇刊，第70卷，第5期，第3385–3398页，2024年。[25] K. Wan、H. Sun、M. Ji、D. Tuninetti 和 G. Caire，“缓存辅助标量线性函数检索的最优负载-内存权衡”，IEEE信息论汇刊，第67卷，第6期，第4001–4018页，2021年。[26] Y. Yao 和 S. A. Jafar，“三用户线性计算广播的容量”，IEEE信息论汇刊，第70卷，第6期，第4414–4438页，2024年。[27] Y. Ma 和 D. Tuninetti，K–用户线性计算广播信道的一种可实现方案，2025年。arXiv：2501.12322 [cs.IT]。[28] O. Ledoit 和 M. Wolf，“大维协方差矩阵的良态估计量”，《多元分析杂志》，第88卷，第2期，第365–411页，2004年。[29] P. Comon，“独立成分分析：一个新概念？”，《信号处理》，第36卷，第3期，第287–314页，1994年。[30] B. Sch¨olkopf、A. Smola 和 K.-R. M¨uller，“作为核特征值问题的非线性成分分析”，《神经计算》，第10卷，第5期，第1299–1319页，1998年。[31] T. Chen、S. Kornblith、M. Norouzi 和 G. Hinton，“视觉表征对比学习的简单框架”，载于《国际机器学习会议论文集》，第2卷，PMLR，2020年，第1597–1607页。[32] F. Schroff、D. Kalenichenko 和 J. Philbin，“FaceNet：用于人脸识别和聚类的统一嵌入”，载于《IEEE计算机视觉与模式识别会议论文集》，2015年，第815–823页。[33] G. Dhaliwal、P. B. Nair 和 C. V. Singh，“使用随机特征的机器学习原子间势”，《npj计算材料》，第8卷，第1期，第7页，2022年。[34] A. Rahimi 和 B. Recht，“大规模核机器的随机特征”，《神经信息处理系统进展》，第20卷，第1177–1184页，2007年。[35] P. Li、M. Guo、C. Wang、X. Liu 和 Q. Zou，“全基因组关联研究中SNP相互作用概述”，《功能基因组学简报》，第14卷，第2期，第143–155页，2015年。[36] S. F. Altschul、W. Gish、W. Miller、E. W. Myers 和 D. J. Lipman，“基本局部比对搜索工具”，《分子生物学杂志》，第215卷，第3期，第403–410页，1990年。[37] A. Vaswani 等，“注意力就是你所需要的一切”，《神经信息处理系统进展》，第30卷，第6000–6010页，2017年。

[38] J. Johnson、M. Douze 和 H. J´egou，“使用GPU进行十亿规模的相似性搜索”，IEEE《大数据汇刊》，第7卷，第3期，第535–547页，2019年。[39] U. Catalyurek 和 C. Aykanat，“基于超图划分的并行稀疏矩阵-向量乘法分解”，IEEE《并行与分布式系统汇刊》，第10卷，第7期，第673–693页，1999年。[40] W. Yang、G. Wang、K.-K. R. Choo 和 S. Chen，“Hepart：一种面向大数据应用的平衡超图划分算法”，《未来一代计算机系统》，第83卷，第250–268页，2018年。[41] S. Schlag、T. Heuer、L. Gottesb¨uren、Y. Akhremtsev、C. Schulz 和 P. Sanders，“高质量超图划分”，ACM《实验算法学杂志》，第27卷，2023年2月。[42] M. G. Wrighton 和 A. M. DeHon，“基于SAT的带复制最优超图划分”，载于《2006年亚洲和南太平洋设计自动化会议论文集》，2006年，第789–795页。[43] P. A. Papp、G. Anegg 和 A.-J. N. Yzelman，“超图划分难题：模型、不可近似性与应用”，载于《第35届ACM算法与体系结构并行研讨会论文集》，2023年，第415–425页。[44] G. Karypis、R. Aggarwal、V. Kumar 和 S. Shekhar，“多层超图划分：超大规模集成电路领域的应用”，IEEE《超大规模集成电路系统汇刊》，第7卷，第1期，第69–79页，1999年。[45] G. Karypis、R. Aggarwal、V. Kumar 和 S. Shekhar，“多层超图划分：超大规模集成电路领域的应用”，IEEE《超大规模集成电路系统汇刊》，第7卷，第1期，第69–79页，1999年。.[46] M. Deveci、K. Kaya、B. Uc¸ar 和 U. V. C¸ataly¨urek，“针对多种通信成本指标的超图划分：模型与方法”，《并行与分布式计算杂志》，第77卷，第69–83页，2015年。[47] C. Zhang、F. Wei、Q. Liu、Z. G. Tang 和 Z. Li，“通过邻域启发式进行图边划分”，载于《第23届ACM SIGKDD知识发现与数据挖掘国际会议论文集（KDD 2017）》，ACM，2017年，第605–614页。[48] M. Hanai、T. Suzumura、W. J. Tan、E. Liu、G. Theodoropoulos 和 W. Cai，“万亿边图的分布式边划分”，《VLDB基金会会刊》，第12卷，第13期，第2379–2392页，2019年9月。

[49] H. Cui、F. Cao 和 R. Liu，“一种基于 NSGA-II 的大规模图多目标划分算法”，《Expert Syst. with Appl.》，第 263 卷，第 125756 页，2025年。[50] B. Ucar、C. Aykanat、K. Kaya 和 M. Ikinci，“异构计算系统中的任务分配”，《J. Parallel Distrib. Comput.》，第 66 卷，第 1 期，第 32–46 页，2006 年 1 月。[51] I. Stanton，“随机图的流式平衡图划分算法”，载于《第二十五届 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SIAM，2014 年，第 1287–1301 页。[52] M. Hanai、N. Tziritas、T. Suzumura、W. Cai 和 G. Theodoropoulos，“面向图动态扩缩的高效高质量图划分”，arXiv 预印本 arXiv:2101.07026

，

2021年。[53] A. Yakunin、S. Moiseev 和 A. Kupavskii，“通过相交族实现近最优边划分”，arXiv预印本 arXiv:2505.18026，2025年。[54] O. Kruglov、A. Mastikhina、O. Senkevich、D. Sirotkin 和 S. Moiseev，“基于有限射影平面的图划分方法”，arXiv预印本 arXiv:2312.13861，2023年。[55] J. Maheri 和 P. Elia，“构造完全k均匀超图的哈密顿分解”，载于《2025年IEEE信息论国际研讨会（ISIT）》，IEEE，2025年，第1–6页。[56] Y. Jiang，“分布式系统中的任务分配与负载均衡综述”，《IEEE并行与分布式系统汇刊》，第27卷，第2期，第585–599页，2016年。[57] M. A. Maddah-Ali 和 U. Niesen，“缓存的基本极限”，《IEEE信息论汇刊》，第60卷，第5期，第2856–2867页，2014年。[58] P. N. Muralidhar、D. Katyal 和 B. S. Rajan，“用于多接入编码缓存的Maddah-Ali-Niesen方案”，载于《2021年IEEE信息论研讨会（ITW）》，2021年，第1–6页。[59] F. Brunero 和 P. Elia，“组合多接入缓存的基本极限”，《IEEE信息论汇刊》，第69卷，第2期，第1037–1056页，2023年。[60] E. Parrinello、E. Lampiris 和 P. Elia，“节点协作的编码分布式计算可大幅提升加速因子”，载于《2018年IEEE信息论国际研讨会（ISIT）》，2018年，第1291–1295页。[61] K. K. K. Namboodiri 和 B. S. Rajan，“组合多接入编码缓存：通过编码放置改善速率-内存折衷”，《IEEE信息论汇刊》，第70卷，第3期，第1787–1805页，2024年。

[62] E. Peter、K. K. K. Namboodiri 和 B. S. Rajan，“采用共享缓存和私有缓存的编码缓存”，《IEEE通信汇刊》，第72卷，第8期，第4857–4872页，2024年。[63] F. Engelmann 和 P. Elia，“利用编码缓存隐私优势的内容分发协议”，载于《2017年第15届移动、自组织与无线网络建模和优化国际研讨会（WiOpt）》，2017年，第1–6页。数字对象标识符：10.23919/WIOPT. 2017.7959863[64] H. Zhao、A. Bazco-Nogueras 和 P. Elia，“向量编码缓存可显著提升现实下行链路系统的吞吐量”，《IEEE无线通信汇刊》，第22卷，第4期，第2683–2698页，2023年。数字对象标识符：10.1109/TWC.2022.3213475[65] M. Mitzenmacher 和 E. Upfal，《概率与计算：算法与数据分析中的随机化和概率技术》。剑桥大学出版社，2017年。[66] R. P. Stanley，“《计数组合学》第一卷第二版”，《剑桥高等数学研究》，2011年。