边不相交极大外平面图

Yuto Okada[1], Yota Otachi[1], 和 Lena Volk[2]

[1] 日本名古屋名古屋大学。pv.20h.3324@s.thers.ac.jp，otachi@nagoya-u.jp[2] 达姆施塔特工业大学¨，德国。volk@mathematik.tu-darmstadt.de

arXiv:2601.05885v1 [math.CO] 9 Jan 2026

摘要。 我们给出了两种构造，可对任意顶点数 $n \geq 4t$ 构造边不相交的极大外平面图。最小顶点数的下界是紧的。这些构造表明，对于每个 $t \in \mathbb{N}$，都存在最优外厚度为t 的图。其中一种构造适用于 t 的所有取值，并推广了 Guy 和 Nowakowski（1990年）的图；另一种构造则仅适用于 2 的幂，但所得图的最大度与顶点数的对数成正比。因此，后一种构造或有助于解决确定所有完全图外厚度这一开放问题。

1 引言

在研究完全图的厚度时，Beineke 和 Harary [2] 提出了一个构造：在具有 $6t$ 个顶点的图上构造 t 个边不相交的极大平面图。Boswell 和 Simpson [5] 将其扩展为一种构造，使得对于任意数量的 $n \geq 6t$ 个顶点，都能构造出具有 t 个边不相交的极大平面图。关键在于，在少于 $6t-1$ 个顶点的情况下无法进行这样的构造 [5], ，因此该结果几乎是紧的。在本文中，我们研究外平面图的对应问题。

我们给出了两种边不相交极大外平面图的构造。对于第一种构造，我们将 Guy 和 Nowakowski [9]的一种构造加以扩展，从而得到在 $4t$ 个顶点上具有 t个边不相交的极大外平面图；随后我们证明，在 n 个顶点上的每一组 t 个边不相交的极大外平面图，都可以扩展为在 $n+1$个顶点上的这样一组图。由此可知，对于每个 $t \geq 1$ 和每个 $n \geq 4t$，都存在在 n个顶点上具有 t 个边不相交的极大外平面图。顶点数的下界 $4t$ 在 $t \geq 2$时是紧的。对于第二种构造，我们限制 t 为 2 的幂，并从头构造出在 $4t$个顶点上具有 t 个边不相交的极大外平面图的另一组。与第一组相比，第二组的不同之处在于：在每个外平面图中，其最大度为对数级，而不是线性级。

除了具有理论意义外，第二种构造也受到一个尚未解决的问题的启发：确定完全图的外厚度。这与我们的构造密切相关，因为它们都能将完全图 K_{4t} 减去一个匹配（大小为 t）分解为 t 个外平面图。Guy 和 Nowakowski [9] 确定了大多数情况下 K_n 的外厚度，但正如他们在后续论文 [10],中所指出的， $n \equiv 3$模 4 的情形实际上仍未解决。看来，他们的分解——我们的第一种构造很大程度上依赖于此——难以直接推广到 $n \equiv 3$ 模 4 的情形。因此，由于最大度显著较低且整体结构迥异，我们的第二种构造或许有助于确定完全图中若干尚未解决情形的外厚度。此外，这两种构造还带来了若干有趣的推论。

研究给定类型的最优图，即具有尽可能多边的图，是图绘制领域一个经典且受到广泛研究的问题。根据我们的构造，可以立即得出：对于每个 $t \in \mathbb{N}$，都存在外厚度为 t 、具有 $t(2n-3)$ 条边的图，且其顶点数为任意 $n \geq 4t$ 。这是可能达到的最大边数，因为每个外平面图至多有 $2n-3$ 条边，因此这些图是最优的外厚度为 t 的图。虽然每个极大外平面图（即无法在不破坏外平面性的情况下再添加边的图）也是最优的 [11,，但在本文的推论 11.9(a)], 中，我们举例说明，对于 $t \geq 2$ ，极大外厚度为 t 的图与最优外厚度为 t 的图这两个概念并不等同。

由于所有平面图都能分解为两个外平面图，因此外厚度为 2 的图尤其值得关注。根据我们的构造，可以推出存在一个由非 1-平面图组成的外厚度为 2 的无限族。这将平面图的这两种推广区分开来。反过来，每个 1-平面图都能划分为一个平面图和一个森林。因此，每个 1-平面图的外厚度至多为 3，但是否存在外厚度恰为 3 的 1-平面图仍未解决。Gethner 和 Sulanke 指出，外厚度为 2 的图的最大色数为 $\{6,7,8\}$，并提出了提高下界的问题。由于所有 1-平面图都可 6 着色，外厚度为 2 且非 1-平面图的图对于研究这一问题尤为重要。

2 预备知识

我们假设读者熟悉图论的标准术语（例如，参见 [6]）。对于正整数 n，令 $[n]_0$ 表示小于 n 的非负整数集合，即 $[n]_0 = \{0, \ldots, n-1\}$。

外平面图。 如果图 G 可以在平面上绘制，且边之间没有交叉，并且所有顶点都位于外面上，则称其为外平面 图。如果无法在不破坏其外平面性的情况下添加一条边，则称外平面图为极大 外平面图。已知每个具有 $n \geq 2$ 个顶点的极大外平面图恰有 $2n-3$ 条边 [11,推论 11.9(a)]。在平面上的每种绘制中，至少有三个顶点的极大外平面图在外面上都有唯一的哈密顿圈 [12]。我们称这个圈为外圈。

边不相交的外平面图。 所谓在 n 个顶点上边不相交的外平面图 t 顶点，是指 t 定义在同一顶点集上的外平面图 V，其 $|V| = n$ 所有图的边集两两不相交。

外厚度。 图的外厚度 G是满足以下条件的最小数目 t： 边集 $E(G)$存在一个划分 $\{E_0, E_1, \ldots, E_{t-1}\}$，使得对于每个 $i \in [t]_0$，图（$V(G)$ E_i）都是外平面图。注意，在这种情况下，根据定义，当 $|V(G)| \geq 2$时， $|E(G)| \leq t(2|V(G)| - 3)$成立。

设 G 是一个具有 $n \geq 3$ 个顶点、 m 条边且外厚度为 $t \geq 1$ 的图。如果无法在 G 中添加任何边而不增加其外厚度，我们就称 G 为极大外厚度-t 图。

如果 $m = t(2n-3)$，我们就称 G 为最优外厚度-t 图。注意，每个最优外厚度-t 图都可以划分为 t 个极大外平面图。全文中，关于外厚度的极大性和最优性概念仅针对至少有三个顶点的图讨论。

1-平面图。如果一个图可以绘制在平面上，且每条边至多与另一条边交叉，则称其为 *1*-平面图。

3 边不相交极大外平面图

我们首先给出两种不同的构造方法，用于构造具有 $4t$ 个顶点的 t 个边不相交极大外平面图。第一种构造适用于所有 $t \geq 1$，并扩展了 [9] 中定理 1 证明里的图。由于这种构造中的外平面图的最大度与顶点数呈线性关系，我们还给出第二种构造，使最大度仅与顶点数呈对数关系。只有当 t 是 2 的幂时，才能使用这种构造。

引理 1。对于每个 $t \geq 1$，都存在 t 个具有 $4t$ 个顶点、最大度为 $t+3$ 的边不相交极大外平面图。

证明。我们考虑 [9] 中定理 1 证明里的图。为便于衔接到它们的构造，令 $r = t$。对于每个 $i \in [r]_0$，Guy 和 Nowakowski [9] 构造了一个外平面图，他们将其称为图 i，该图有 $4r$ 个顶点和 $2 \cdot 4r - 4$ 条边。这些图见图 1，并在 [9] 中证明两两边不相交。注意，这些图的最大度为 $r+2$，在顶点 i、$i+r$、$i+2r$ 和 $i+3r$ 处达到。现在，对每个 $i \in [r]_0$，我们在图 i 中添加边 $\{i, i+2r\}$。这不会破坏图 i 的外平面性，因为这条边可以作为图 1 中正方形的对角线嵌入。（在 [9], 中，这条边称为图 i 的右向直径。）总共由此得到 r 个极大外平面图。此外，这些图仍然两两边不相交，因为在添加之前，没有任何图包含两个顶点之差为 $2r$ 的边。包含对角线后，这些图的最大度为 $r+3$，并在顶点 i 和 $i+2r$ 处达到。

引理 2. 对于每个 $s \geq 0$，都存在 2^s 个边不相交的极大外平面图，它们有 $4 \cdot 2^s$ 个顶点，最大度为 $2s+3$。

证明。设 $s \in \mathbb{N}_0$ 并设 $V^s = [2^{s+2}]_0$。首先，我们在顶点集 V^s 上给出 2^s 个极大外平面图。具体而言，对于每个 $k \in [2^s]_0$，我们构造一个图 (V^s, E^s_k)。然后我们证明边集 E^s_0、……、$E^s_{2^s-1}$ 两两不相交。若某个顶点集为 $[n]_0$ 的外平面图对于某个 $d \in [n]_0$ 满足性质 $(\star)$，则称其具有性质 $(\star)$：其外圈形式为 $(0,\ d,\ 2d,\ \ldots\ldots,\ (n-1)d,\ 0)$（所有元素均视为 $\mathbb{Z}_n$ 中的值）。注意，在这种情况下，d 必须是 $\mathbb{Z}_n$ 中阶为 n 的元素，即若 $n = 2^{s+2}$，则 d 为奇数。下面，我们构造图 (V^s, E^s_k)，使得每个图对于某个 d 都具有性质 $(\star)$。

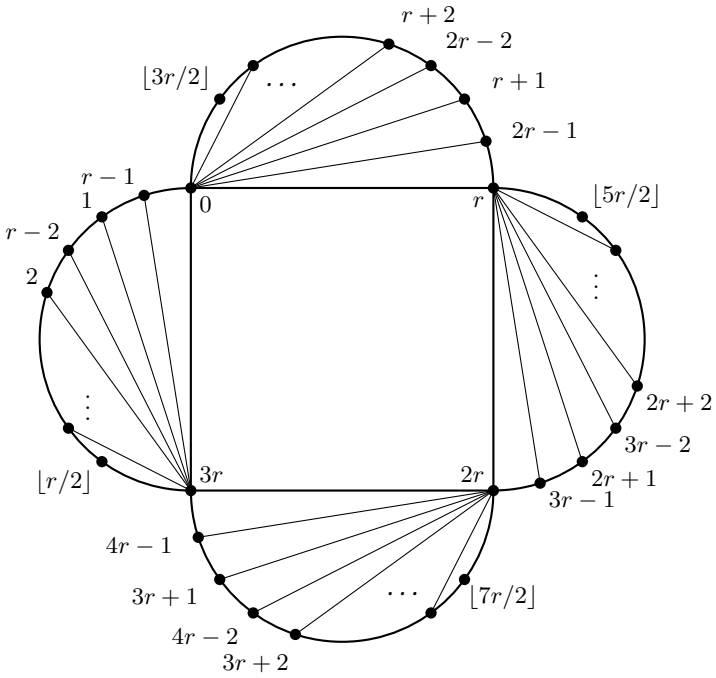

图 1。 所谓的 *graph zero* 来自 [9]。对于 $i \in [r]_0$，所谓的 *graph* i 是将零号图中每个顶点的标签增加 i 后再对 $4r$ 取模所得到的副本。这些图在 [9] 中被证明两两边不相交，且最大度为 $r+2$。

我们通过对 s 使用归纳法来定义图（V^s, E^s_k）（见图 2 至图 4）。当 $s = 0$ 时，单个图（V^0, E^0_0）如图 2 所示。该图对于 $d = 1$ 具有性质（$\star$）。现在，设 $s \geq 0$。由当前的图集 $\{$（V^s, E^s_k）$\mid k \in [2^s]_0\}$（这些图具有性质（$\star$））， 我们通过对每个 $k \in [2^s]_0$ 按如下方式从（V^s, E^s_k）构造两个新图（V^{s+1}, E^{s+1}_k）和（V^{s+1}, $E^{s+1}_{2^s+k}$），得到下一组图 $\{$（V^{s+1}, E^{s+1}_k）$\mid k \in [2^{s+1}]_0\}$，这些图具有性质（$\star$）。

– 从图 (V^s, E^s_k) 开始。假设对于某个奇数 $d = d^s_k \in [2^{s+2}]_0$，$(V^s, E^s_k)$ 具有性质 ($\star$)。– 对于 (V^{s+1}, E^{s+1}_k)，将所有顶点的标号加倍。对于 $(V^{s+1}, E^{s+1}_{2^s+k})$，将所有顶点的标号加倍后再加 1。注意，所有这些新标号都属于 $[2^{s+3}]_0$。– 新图的外圈形式为 $(0, (2d^s_k), 2(2d^s_k) \ldots, (n-1)(2d^s_k), 0)$，其中所有项都视为 $\mathbb{Z}_{2^{s+3}}$ 中的值。方程 $2x \equiv 2d^s_k \bmod 2^{s+3}$ 有两个解，分别为 $x = d^s_k$ 和 $y = d^s_k + 2^{s+2}$，且都属于 $[2^{s+3}]_0$。由于 d^s_k 为奇数，这两个解都是奇数，因此是 $\mathbb{Z}_{2^{s+3}}$ 的生成元。– 对于外圈上的每条边 $\{u, u + 2d^s_k\}$ (模 2^{s+3})，在图中为 (V^{s+1}, E^{s+1}_k) 添加顶点 $u + x \bmod 2^{s+3}$，并为 $(V^{s+1}, E^{s+1}_{2^s+k})$ 添加顶点 $u + y \bmod 2^{s+3}$，然后将这些顶点分别连接到该边的两个端点。标号示意见图 3。– 注意，对于 $d = x$ 和 $d = y$，(V^{s+1}, E^{s+1}_k) 和 $(V^{s+1}, E^{s+1}_{2^s+k})$ 分别具有性质 ($\star$)。此外，这两个图现在都包含所有顶点 $[2^{s+3}]_0$，因为 x 和 y 是 $\mathbb{Z}_{2^{s+3}}$ 的生成元。

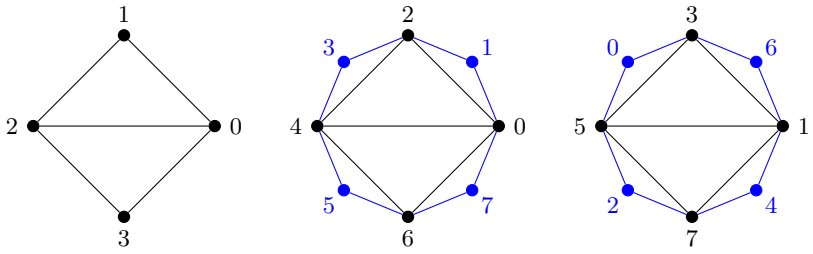

图 2. 左侧展示了引理 2 证明中的基础图 (V^0, E_0^0)。中间的图 (V^1, E_0^1) 和右侧的图 (V^1, E_1^1)，均按照引理 2 证明中的描述，由 (V^0, E_0^0) 得到。

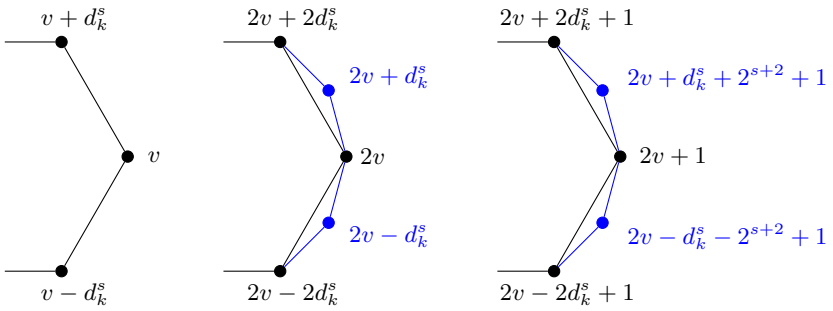

图 3. 引理 2 证明中的归纳顶点标记。左侧展示了 (V^s, E_k^s) 中紧邻 $v \in V^s$ 的外圈部分。中间展示了归纳定义的图 (V^{s+1}, E_k^{s+1}) 中对应的部分。对于中间的图，黑色顶点的标记加倍（模 2^{s+3}），并添加蓝色的新顶点和边（在构造的第四步中，对 $u = 2v$ 进行上述操作）。类似地，右侧展示了 $(V^{s+1}, E_{2^s+k}^{s+1})$ 的构造。

总之，对于每个 $k \in [2^{s+1}]_0$，我们都构造了一个极大外平面图 (V^{s+1}, E_k^{s+1})。从 0 到 1 的归纳构造如图 2 所示，从 1 到 2 的构造如图 4 所示。在证明边集 E_0^s、……、$E_{2^s-1}^s$ 两两不相交之前，我们需要关于图 (V^s, E_k^s) 的两个辅助结论。

断言 3. 对于每个奇数 $d \in [2^{s+2}]_0$，都存在某个 $k \in [2^s]_0$，使得 (V^s, E_k^s) 中的外圈为 $(0, d, 2d, \ldots, (2^{s+2}-1)d, 0)$（所有项均视为 $\mathbb{Z}_{2^{s+2}}$ 中的值）。

断言的证明。我们对 s 使用归纳法来证明这一点。基础情形 $s = 0$ 可由图 2 得出，因为图 (V^0, E_0^0) 的外圈 $(0, 1, 2, 3, 0)$ 实现了 $d = 1$（从左到右）和 $d = 3$（从右到左）。假设该命题对某个 $s \in \mathbb{N}_0$ 成立。令 $d \in [2^{s+3}]_0$ 为奇数。若 $d \in [2^{s+2}]_0$，由归纳假设，存在某个 $k \in [2^s]_0$，使得 (V^s, E_k^s) 中的外圈为 $(0, d, 2d, \ldots, (2^{s+2}-1)d, 0)$（所有项均视为 $\mathbb{Z}_{2^{s+2}}$ 中的值）。于是，根据构造的第四步，(V^{s+1}, E_k^{s+1}) 中的外圈也为 $(0, d, 2d, \ldots, (2^{s+3}-1)d, 0)$（所有项均视为 $\mathbb{Z}_{2^{s+3}}$ 中的值）。若 $d \geq 2^{s+2}$，则我们将 $d = 2^{s+2} + d'$ 写作某个 $d' \in [2^{s+2}]_0$。同样，由归纳假设，存在某个 $k' \in [2^s]_0$，使得 $(V^s, E_{k'}^s)$ 中的外圈为 $(0, d', 2d', \ldots, (2^{s+2}-1)d', 0)$（所有项均视为 $\mathbb{Z}_{2^{s+2}}$ 中的值）。于是，对于 $k = 2^s + k' \in [2^{s+1}]_0$，再次根据构造的第四步，$(V^{s+1}, E_k^{s+1})$ 中的外圈为 $(0, d, 2d, \ldots, (2^{s+3}-1)d, 0)$（所有项均视为 $\mathbb{Z}_{2^{s+3}}$ 中的值）。$\diamondsuit$

Claim 4. 对于每个 $i \in [2^s]_0$，都存在某个 $k \in [2^s]_0$，使得 $\{i, i + 2^{s+1}\} \in E \quad {}^s_k$.

断言的证明。 我们再次对此进行归纳。基础情形由图 2 中的边得出。假设该断言对某个情形成立。现在令.....。若.....为偶数，根据归纳假设，存在.....使得该边.....。然后，根据.....的构造，该边.....。若.....为奇数，我们同样处理，得到.....使得该边.....（.....），（.....1）.....。然后，根据.....的构造，该边.....。.....

接下来，我们证明边集 $E^s_0, \ldots, E^s_{2^s-1}$ 两两不相交。为证明这一点，我们在顶点集 V^s 上定义一个图 G^s，其具有 $2^s(2n-3)$ 条边，然后证明 G^s 的每条边都属于边集 $E^s_0, \ldots, E^s_{2^s-1}$ 中的某一个。注意，根据计数论证，这足以证明这些边集两两不相交。

令 G^s 为顶点集 V^s 上的图，其中两个顶点 $u, v \in V^s = [2^{s+2}]_0$相邻，当且仅当 $u - v \not\equiv 2^{s+1}$ 模 2^{s+2}。此外，对于每个 $i \in [2^s]_0$，我们添加边 $\{i, i + 2^{s+1}\}$ 至 G^s。于是，我们有

$$|E(G^s)| = \left(2^{s+1} - 1\right) 2^{s+2} + 2^s = 2^s(2^{s+3} - 3).$$

接下来，我们证明 G^s 的每条边都包含于某个 E^s_k 中，其中 $k \in [2^s]_0$。同样地，我们对 s 使用归纳法来证明这一点。

对于 $s = 0$ 的基础情形，该命题可以很容易地由图 2 中所示的图 (V^0, E^0_0) 推出。现在假设该命题对某个 $s \in \mathbb{N}_0$ 成立。令 $\{u, v\} \in E(G^{s+1})$。我们的目标是证明存在某个 $k \in [2^{s+1}]_0$ 使得 $\{u, v\} \in E^{s+1}_k$. 首先，假设 $u - v \equiv 2^{s+2}$ 模 2^{s+3}。根据 G^{s+1} 的定义，我们有 $\{u, v\} = \{i, i + 2^{s+2}\}$，其中某个 $i \in [2^{s+1}]_0$。由断言 4 可知，存在某个 $k \in [2^{s+1}]_0$ 使得 $\{u, v\} \in E^{s+1}_k$. 因此，在下文中，我们假设 $u - v \not\equiv 2^{s+2}$ 模 2^{s+3}。

– 如果 u 和 v 都为偶数，那么 $\{u/2, v/2\} \in E(G^s)$，因为 $u/2 - v/2 \not\equiv 2^{s+1}$ 模 2^{s+2}。因此，根据归纳假设，存在某个 $k \in [2^s]_0$ 使得 $\{u/2, v/2\} \in E^s_k$。于是，根据 E^{s+1}_k 的构造，我们有 $\{u, v\} \in E^{s+1}_k$。– 如果 u 和 v 都为奇数，那么 $\{(u-1)/2, (v-1)/2\} \in E(G^s)$，因为我们有 $(u-1)/2 - (v-1)/2 \not\equiv 2^{s+1}$ 模 2^{s+2}。同样，根据归纳假设，存在某个 $k \in [2^s]_0$使得 $\{(u-1)/2, (v-1)/2\} \in E^s_k$。于是，根据 $E^{s+1}_{2^s+k}$的构造，我们有 $\{u, v\} \in E^{s+1}_{2^s+k}$。– 如果 u和 v中一个为奇数，另一个为偶数，那么 $d \equiv u - v$模 2^{s+3}为奇数。根据断言 3，存在某个 $k \in [2^{s+1}]_0$，使得边 $\{u, v\}$ 位于 E^{s+1}_k 的外圈上。

因此，G^{s+1} 的每条边都包含于某个边集 E^{s+1}_k 中，$k \in [2^{s+1}]_0$成立。归纳法至此完成。因此，边集 E^s_0、.....、$E^s_{2^s-1}$ 两两不相交。

最后，我们来看看图（V^s，E^s_k）的最大度。首先，参见图 2，可以看到图（V^0，E^0_0）的最大度为 3。此外，每进行一次归纳步骤，图的最大度就增加 2。更确切地说，从（V^s，E^s_k）构造两个新图（V^{s+1}，E^{s+1}_k）和（V^{s+1}，$E^{s+1}_{2^s+k}$）时，只有在第四步中顶点的度才会发生变化，而且增加 2。因此，对所有 $k \in [2^s]_0$，(V^s, E^s_k) 的最大度为 $2s + 3$。

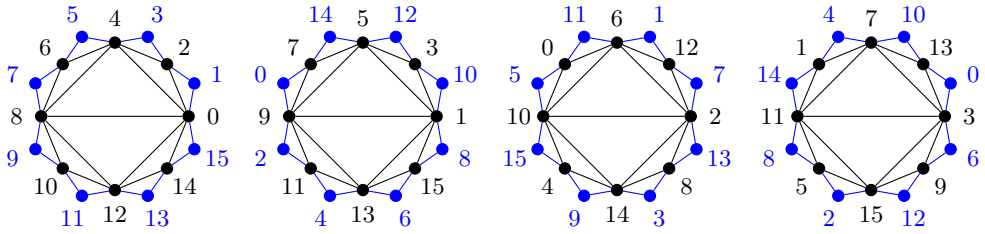

图 4. 从左到右依次为引理 2 证明中的图 (V^2, E_0^2)、(V^2, E_2^2)、(V^2, E_1^2) 和 (V^2, E_3^2)。新顶点和新边以蓝色标示。

接下来，我们证明边不相交极大外平面图的顶点数界是紧的。

引理 5. 设 $t \geq 2$。如果存在一组定义在 n 个顶点上的 t 个边不相交极大外平面图，那么 $n \geq 4t$。

证明. 由于至多有三个顶点的每个图都是外平面图，$t \geq 2$ 意味着 $n \geq 4$。设 $(V, E_0) \ldots, (V, E_{t-1})$ 是定义在 n 个顶点上的边不相交极大外平面图。设 G 为顶点集 V 和边集 $E_0 \cup \cdots \cup E_{t-1}$ 构成的图。由于 G 有 $t(2n-3)$ 条边，$t(2n-3) \leq \binom{n}{2}$ 成立。因此，我们有 $n^2 - (4t+1)n + 6t \geq 0$。设 r_1 和 r_2 满足 $r_1 \leq r_2$，它们是函数 $f(x) = x^2 - (4t+1)x + 6t$ 的根。由于我们有 $f(n) \geq 0$，因此 $n \leq r_1$ 或 $n \geq r_2$ 成立。简单计算可得：$r_1 < n$

$$r_1 = \frac{(4t+1) - \sqrt{(4t+1)^2 - 24t}}{2} < \frac{(4t+1) - (4t-7)}{2} = 4 \leq n,$$

其中，根据 $t \geq 2$，$\sqrt{(4t+1)^2 - 24t} > 4t - 7$ 成立。因此，我们有 $n \geq r_2$。由于对于 $x \geq r_2$，$f(x) \geq 0$，并且如 $t \geq 2$ 所述，$f(4t-1) = -2t + 2 < 0$，我们有 $4t - 1 < r_2$。这意味着 $n \geq 4t$。

注意，对于 $t = 1$，引理 5 不成立，因为 K_3 是一个仅有三个顶点的极大外平面图。

下一步，我们证明，在 n 个顶点上任取一组 t 个边不相交极大外平面图，都可以将其扩展为在 $n+1$ 个顶点上的一组图。

引理 6。 设 $t \in \mathbb{N}$。如果在 n 个顶点上存在 t 个边不相交极大外平面图，那么在 $n+1$ 个顶点上也存在 t 个边不相交极大外平面图。

证明。对于 $t = 1$，外平面图极大性与最优性的等价性蕴含了该结论。接下来，我们假设 $t \geq 2$。令 (V, E_0)……，(V, E_{t-1}) 为定义在 n 个顶点上的边不相交极大外平面图。根据引理 5，我们有 $n \geq 4t$。我们证明存在一个边集 $\{\{u_0, v_0\}, \ldots, \{u_{t-1}, v_{t-1}\}\}$，使得每条边 $\{u_i, v_i\}$ 都属于 (V, E_i) 的外圈，且该边集构成一个匹配，即其中任意两条边都不共享端点。假设我们有这样一个边集，则可按如下方式得到一个定义在 $n+1$ 个顶点上的 t 个边不相交极大外平面图：添加一个新

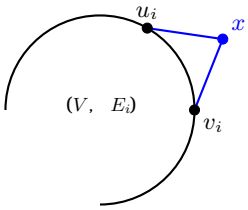

图 5. 引理 6 的证明中所述的 $(V \cup \{x\},\ E_i \cup \{\{u_i, x\}, \{v_i, x\}\})$ 的外平面嵌入。边 $\{u_i, v_i\}$ 位于 $(V,\ E_i)$ 的外平面嵌入的外圈上。新顶点 x 和新边以蓝色标示。

顶点 x，并将边 $\{u_i, x\}$ 和 $\{v_i, x\}$ 加入每个 $(V,\ E_i)$ 中。所得图各有 $2n - 3 + 2 = 2(n + 1) - 3$ 条边。此外，这些图都是外平面图，因为我们可以取 $(V,\ E_i)$ 的外平面嵌入，使边 $\{u_i, v_i\}$ 位于外圈上，并将 x 嵌入该边旁边、外圈之外，从而形成一个三角形，如图 5 所示。

因此，仍需证明存在具有这些性质的边集。我们从 $S = \emptyset$ 开始，迭代构造这样的边集 S。每个 $(V,\ E_i)$ 的外圈包含 $n > 4(t - 1)$ 条边。若某条边的至少一个端点已经是包含在 S 中的某条边的端点，我们就称这条位于某个 $(V,\ E_i)$ 外圈上的边为受阻边。现在证明，对于每个 $i \in [t]_0$，我们都可以迭代地将 $(V,\ E_i)$ 外圈上一条未受阻的边加入 S：在第 i 步，$(V,\ E_i)$ 的外圈上至多有 $4i$ 条受阻边，因为 S 包含 i 条边，而每条边对应两个顶点；这两个顶点各自至多阻挡外圈上的两条边。由于外圈包含 $n > 4(t - 1)$ 条边，我们可以在每一步找到一条未受阻的边。因此，这样的边集确实存在。

4 最优外厚度-t图

本节汇总各项结果，以得出我们的主定理。

定理 7. 对于每个 $t \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $n \geq 4t$，都存在一个具有 n 个顶点的最优外厚度-t图。

证明。引理 1 表明，恰有 $4t$ 个顶点的最优外厚度 t图存在。接着，由引理 6 可知，对于每个顶点数为 $n \geq 4t$ 的图，都存在最优外厚度-t 图。

注意，我们也可以利用引理 2 得出与定理 7 类似的结论：当 t 是 2 的幂时，存在最优外厚度-t 图，然后忽略边划分中的某些集合。

此外，引理 5 给出的顶点数下界，使我们能够在所有 $t \geq 2$ 值下区分极大外厚度-t 图与最优外厚度-t 图这两个概念。

推论 8。 对于每个 $t \geq 2$，都存在外厚度为 t 的极大但非最优图。

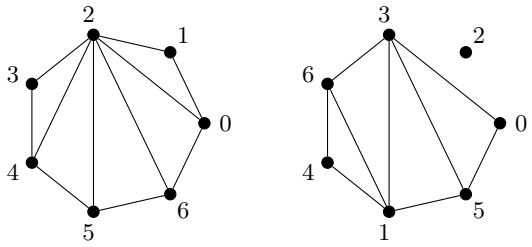

图 6. 一个 d 分解 $K_7 - e$ 为 $e = \{0, 4\}$ 个外平面图。这是一个极大但非最优 al
的示例 外厚度 2 图，同时也是一个非 1-平面外厚度 2 图。

证明。 完全图 K_{4t-4}、K_{4t-3}和 K_{4t-2} 的外厚度为 t [9]。此外，根据引理 5，每个最优外厚度为 t 的图至少有 $4t$ 个顶点。

除了这些简单的完全图示例外，对于 $t = 2$，另一个极大但非最优的外厚度 2 图为 $K_7 - e$，即从 K_7中删除一条边后得到的图。图 6 给出了将 $K_7 - e$ 分解为两个外平面图的方法。 K_7 的外厚度为 3 [9], ，因此 $K_7 - e$ 是一个极大外厚度 2 图。另一方面， $K_7 - e$ 有 $20 < 2 \cdot (2 \cdot 7 - 3)$ 条边，因此它不是一个最优的外厚度 2 图。

注意，对于八个顶点的情形，每个极大外厚度 2 图也是最优的。为此，首先注意到，根据我们的构造， $K_8 - \{e, e'\}$ 含有两条独立边 e， e' 的图是一个最优外厚度 2 图（参见图 2）。另一方面，对于不含两条独立边的边集 F， $K_8 - F$ 含有 K_7 作为子图，因此其外厚度为 3。

最后，我们总结本节：最优外厚度 2 图的存在使我们能够在一定程度上区分外厚度为 2 的图与 1-平面图。具体而言，我们得到以下结论。

推论 9. 存在一个外厚度为 *2*、但不是 *1*-平面图的图的无限族。

证明。 一个有 n 个顶点的 1-平面图至多有 $4n - 8$ 条边 [3]。由于根据定理 7，存在一个有 n 个顶点且含有 $4n - 6$ 条边的最优外厚度 2 图，结论得证。

除了区分平面图的这两种推广之外，这些图还特别值得关注，因为所有 1-平面图都可 6 着色 [4] ，而 Gethner 和 Sulanke 在 [7] 中提出疑问：外厚度为 2 的图的色数下界能否提高到 6 以上。请注意，引理 1 和引理 2 中的外厚度为 2 的图，都是 K_8 删去一个含两条边的匹配所得的图。因此，尽管它们都不是 1-平面图，却都可 6 着色。

5 结论

我们给出了两种不同的构造，用于构造具有 $4t$ 个顶点的 t 个边不相交极大外平面图（引理 1、引理 2）。由此，我们推导出存在最优外厚度为

t 的图：对于所有 $t \in \mathbb{N}$ 值，任意顶点数均存在此类图（定理 7）。所需的顶点数是紧的（引理 5）。

由此，我们得到一个外厚度为 2、但不是 1-平面图的图的无限族（推论 9）。是否存在外厚度恰为 3 的 1-平面图仍是一个未解问题。

此外，我们给出了对所有 $t \geq 2$ 都成立的极大但非最优外厚度图的例子（推论 8），并提出了是否存在此类图的无限族这一问题。

最后，当前最亟待解决的问题是确定其余完全图的外厚度。除 $n \equiv 3 \bmod 4$ 外，Guy 和 Nowakowski [9] 已解决所有情形（另见 [10]）。

致谢

Yuto Okada 获得了 JST SPRING 的资助，项目编号为 JPMJSP2125。Yota Otachi 获得了 JSPS KAKENHI 的部分资助，项目编号为 JP22H00513、JP24- H00697、JP25K03076、JP25K03077。

参考文献

1. Eyal Ackerman。关于 1-平面图的一则注记。 *Discret. Appl. Math.*，175：104–108，2014年。doi:10.1016/J.DAM. 2014.05.025。2. Lowell W. Beineke 和 Frank Harary。完全图的厚度。 *Canadian Journal of Mathematics*，17 850 859，1965 10 4153 1965 084 2 : – . doi: . /CJM- - - . 3. Rainer Von Bodendiek、Heinz Schumacher 和 Klaus Wagner。关于 G. Ringel 的六色问题的评论。 *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*，53：41–52，1983年。doi:10.1007/BF02941309。4. Oleg V. Borodin。平面图顶点-面着色及 1-平面图着色的 Ringel 问题解答。 *Met. Diskret. Anal.*，41：12–26，1984年。5. Sharon G. Boswell 和 Jamie Simpson。边不相交的极大平面图。 *Discret. Math.*，179(1–3)：235–241，1998年。doi:10.1016/S0012-365X(97)00095-2。6. Reinhard Diestel。 *Graph Theory*， *Graduate Texts in Mathematics* 第 173 卷。柏林施普林格出版社，第 6 版，2025年。doi:10.1007/978-3-662-70107-2。7. Ellen Gethner 和 Thom Sulanke。厚度为二的图，第二部分：更多新九临界图、独立比、克隆平面图，以及单外平面图和双外平面图。 *Graphs Comb.*，25 217，2009 2 197 10 1007 00373 008 0833 5 ( ): – . doi: . /S - - - . 8. Daniel Gonçalves。将平面图的边划分为两个外平面图。载于 Harold N. Gabow 和 Ronald Fagin 编， *Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2005)* 504 512 2005 10 1145 1060590 1060666 ，页码 – 。ACM，。doi: . / . . 9. Richard K. Guy 和 Richard J. Nowakowski。图的外厚度与外粗度 I：完全图与 n 方体。载于 Rainer Bodendiek 和 Rudolf Henn 编， *Topics in Combinatorics and Graph Theory: Essays in Honour of Gerhard Ringel* 297 310 1990 ，页码 – 。Springer，。doi: 10.1007/978-3-642-46908-4_34。10. Richard K. Guy 和 Richard J. Nowakowski。图的外厚度与外粗度 II：完全二分图。载于 Rainer Bodendiek 编， *Contemporary Methods in Graph Theory*，页码 313–322。书目研究所，曼海姆，1990年。11. Frank Harary。 *Graph theory*。艾迪生-韦斯利，1969年。12. Maciej M. Sysło。外平面图的刻画。 *Discrete Mathematics*，26(1)：47–53，1979年。doi: 10.1016/0012-365X(79)90060-8。