arXiv:2601.05888v1 [math.AG] 9 Jan 2026

A_g的低次上同调紧化

SAMIR CANNING、DAN PETERSEN 和 OLIVIER TAÏBI

摘要。我们计算了 A_g^{Sat}（即 A_g 主极化阿贝尔簇模空间的 Satake紧化）上辛局部系统的低次 ℓ-进交叉上同调。我们证明，在 A_g 或$X_{g,\ s}$（即泛阿贝尔簇的 s重纤维积）的任意非奇异环面紧化的低次上同调中，只可能出现一个很小的有限不可约伽罗瓦表示列表。我们给出了若干应用，包括环面紧化上的全纯形式空间以及内部的上同调。特别地，我们完整刻画了何时 $H^\bullet(X_{g,\ s},\ \mathbf{Q}_\ell)$和 $H^\bullet(X_{g,\ s},\ \mathbf{Q}_\ell)$为泰特对象；这一性质与环面紧化的选择无关。

1. 引言

1.1. 动机论预测。 在朗兰兹纲领和 Fontaine–Mazur 猜想的框架下，有一系列相互关联的猜想，对簇的上同调，或更一般地说，对 Deligne–Mumford 代数栈的上同调作出预测。具体而言，人们预期以下对象的同构类之间存在自然的双射：

- （某些）$\mathrm{GL}_{n,\ \mathbf{Q}}$的自守表示，其中整数 n 各不相同，
- $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}/\mathbf{Q})$ 在 $\mathbf{Q}_\ell$ 上的（某些）表示，对任意素数 ℓ，
- 纯动机[1]在 $\mathbf{Q}$。

要精确描述哪些自守表示或伽罗瓦表示应当源自几何，是一件微妙的事，但几何应当对自守一侧施加显著限制。例如，若 X 是 $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ 上的光滑固有 Deligne–Mumford 代数栈，那么由 ℓ-进上同调 $H^\bullet(X,\ \mathbf{Q}_\ell)$ 给出的伽罗瓦表示（或“动机”）将在所有素数处非分歧，这是一种极为罕见的性质。猜想上，处处非分歧的伽罗瓦表示应当对应于在所有素数处都为球 的自守表示，即一个一级或导子为一的表示。

Chenevier、Renard、Lannes 和 Taïbi 的近期工作 [CR15, CL19, Taï17, CT20] 表明，小“动机权重”的一级自守表示可以得到完整分类；这也意味着，对那些应当对 Spec Z 上光滑固有德利涅–Mumford 代数栈的低次上同调作出贡献的伽罗瓦表示，也已完成分类。通过对某个 $w \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ 取 $|\det|^w$ 的扭曲，我们可以将问题归约为 $\mathrm{PGL}_{n,\mathbf{Q}}$ 的自守表示。Chenevier–Lannes [CL19, Theorem F] 给出了动机权重至多为 22 的所有一级代数尖点自守表示的完整列表；特别地，除 $\mathrm{PGL}_{1,\mathbf{Q}}$ 的平凡表示外，对于任何 n，都不存在动机权重小于 11 的 $\mathrm{PGL}_{n,\mathbf{Q}}$ 一级代数尖点自守表示。对于奇数动机权重，这一点早已由 Mestre 的论证所知 [Mes86, III, Remarque 1]。另见 [CT20]，其中给出了 [CL19, Theorem F], 的一个更简单证明，以及动机权重为 23 和 24 时的部分结果。

定理 1.1 (Chenevier–Lannes)。存在11 个$\mathrm{PGL}_{n,\mathbf{Q}}$的代数尖点自守表示，层为 1，动机权至多为22:

$$1,\ \Delta_{11},\ \Delta_{15},\ \Delta_{17},\ \Delta_{19},\ \Delta_{19,7},\ \Delta_{21},\ \Delta_{21,5},\ \Delta_{21,9},\ \Delta_{21,13},\ \mathrm{Sym}^2\,\Delta_{11}.$$

2020 数学主题分类。14K10, 11F70, 11F75。[1]更准确地说，是系数在$\mathbf{Q}$中的动机，即带有一个$\mathbf{Q}$ 作用的动机，其中该数域 $E \subset$可以扩张。

定理1.1中的每个自守表示都对应一个 ℓ-进伽罗瓦表示。自守表示 Δ_w 对应于附属于 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ 上权 $w+1$ 尖点形式的二维伽罗瓦表示 $S_\ell\langle w+1\rangle$；类似地，自守表示 Δ_{w_1,w_2} 对应于一个 4 维伽罗瓦表示，该表示附属于稳定型的向量值西格尔尖点形式（它经由 $\mathrm{GSp}_4(\mathbf{Q}_\ell)$ 因子化），这些形式定义在 $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{Z})$ 上；而 $\mathrm{Sym}^2\,\Delta_{11}$ 对应于 $\mathrm{Sym}^2\,S_\ell\langle 12\rangle$。

因此，给定一个在 $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ 上的光滑适当 Deligne–Mumford 栈以及 $k\le 22$，验证出现在 $H^k(X,\mathbf{Q}_\ell)$ 中的唯一伽罗瓦表示，正是与定理 1.1 中的自守表示相关的泰特扭曲，这是一个自然的问题。在 $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ 上的光滑适当代数栈十分罕见。首先想到的对象（例如旗簇）在其上同调中根本没有有趣的伽罗瓦表示。一个非常非平凡的例子是 $M_{g,n}$，即带有 n个标记点的亏格为 g 的稳定曲线的模空间；德利涅和 Mumford [DM69]证明了它在 $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ 上是光滑适当的。由定理 1.1 对 $H^\bullet(M_{g,n})$ 作出的许多预测，已在阿巴雷洛–科尔纳尔巴 [AC98], 贝里斯特伦–法伯–佩恩 [BFP24], 以及 Canning–Larson– Payne [CLP23, CLP24] 的工作中得到验证。下面的定理汇总了这些结果。

定理 1.2. 对于 $k\le 15$，伽罗瓦表示 $H^k(M_{g,n},\mathbf{Q}_\ell)$ 的半单化是 1、$S_\ell\langle 12\rangle$ 和 $S_\ell\langle 16\rangle$ 的泰特扭曲的直和。

接下来值得研究的自然对象是阿贝尔簇模空间。与 $M_{g,n}$ 一样，主极化阿贝尔簇的模代数栈 A_g 在整数环上光滑但不固有；不同于 $M_{g,n}$，它并没有一个天经地义、最自然的紧化，而是有各种各样各具优缺点的紧化。A_g 的扭曲系数上同调已在 g 较小时得到广泛研究 [BFvdG14, BF23], ，研究采用了有限域上的点计数；所得结果与定理 1.1 的预测高度一致。关于 A_g 及其各种紧化的上同调的进一步计算，参见例如[Hai02, HT10, HT12, GH17, HT18, BBC+24, BCGP24, Bor74, CL83, CL17, GHT18]。

1.2. Satake紧化。紧化 A_g 的一种自然方式是 Satake紧化A_g^{Sat}。它是定义在 Z 上的固有 Deligne–Mumford 栈，包含 A_g 作为稠密开子叠，但具有高度奇异性。因此，考虑其交叉上同调群 $\mathrm{IH}^\bullet(A_g^{Sat},\mathbf{Q}_\ell)$或许更为自然。既然交叉上同调的存在理由在于，它应当像处理光滑空间那样处理奇异空间，那么 $\mathrm{IH}^\bullet(A_g^{Sat},\mathbf{Q}_\ell)$ 同样处处非分歧，或许也就不足为奇了（见 [Taï25，命题 4.52]或下文引理 5.1）。因此，从抽象角度看，对于 $k\le 22$，我们也应当预期 $\mathrm{IH}^k(A_g^{Sat},\mathbf{Q}_\ell)$ 分解为来自定理 1.1 的伽罗瓦表示的泰特扭曲的直和。

事实上，利用自守表示，我们可以更直接地将 Satake 紧化的交叉上同调紧化与自守表示联系起来，并据此证明远超上述预期的结果。尤其值得注意的是，即使不知道权至少为 22 时（原则上还可以更高，特别是对于常值系数），定理 1.1 的类似结论，我们仍能超越权 23。关于这一点，我们将在定理 1.6 和定理 2.5中作进一步讨论。为简便起见，我们先首陈述上同调系数为常值系数的特殊情形。

定理 1.3。我们可以显式计算所有 $g\ge 1$ 和所有 $k\le 23$ 的 $IH^k(A_g^{Sat},\mathbf{Q}_\ell)$。所有上同调均为纯泰特型，唯一的例外是 $(g,k)=(7,22)$，在这种情况下

$$IH^{22}(A_7^{Sat},\mathbf{Q}_\ell)\simeq \mathbf{Q}_\ell(-11)^{\oplus 10}\oplus \mathrm{Sym}^2\,S_\ell\langle 12\rangle.$$

特别地，对于所有奇数 $k\le 23$ 以及所有 g，$IH^k(A_g^{Sat},\mathbf{Q}_\ell)$ 均消失。

对于 $\lambda=(\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_g\ge 0)$ 的一个支配权辛群$_{2g}$，我们关联一个光滑的 ℓ-进层$\mathbf{V}_\lambda$于 A_g，其权为 $|\lambda|$，并可考虑交叉上同调群交叉上同调 $^k(A_g^{Sat},\ \mathbf{V}_\lambda)$，它是纯的，权为 $k+|\lambda|$。对于 $k+|\lambda|\le 22$，我们预期它分解为若干直和项，这些项由与定理1.1中的自守表示相关联的伽罗瓦表示给出。

设 Y_g 为 g维子空间构成的拉格朗日格拉斯曼流形，其中这些子空间取自一个 $2g$维空间。在复数域上， Y_g 是 A_g的紧对偶。的上同调环 Y_g 已得到充分理解：$H^\bullet(Y_g)$ 是纯泰特的，并且同构于任一非奇异环面紧化的重言环化 A_g (定义见第3 节的定义)，其由 [vdGvan der Geer99]计算得出。特别地，其庞加莱多项式为 $\sum_{i\geq 0} b_k t^k = \prod_{j=1}^{g}(1+t^{2j})$。

定理 1.4 （定理 2.4）。 除去 有限多个对 （g， λ）之外，存在一个同构 m

$$IH^k(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda) \cong \begin{cases} H^k(Y_g, \mathbf{Q}_\ell) & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda \neq 0 \end{cases} \qquad \textit{for all } k + |\lambda| \leq 23. \tag{1.1}$$

我们列出了所有使（g， λ）中的（1.1）不成立的例外情形，并在这些情形下计算了 IH^k（A_g^{Sat}，$\mathbf{V}_\lambda$）的半单化，其中 $k + |\lambda| \leq 23$。所有直和项都是与定理*1.1* 中的自守表示相关的伽罗瓦表示的泰特扭曲，此外还有 $\Delta_{23}^{(i)}$ ($i = 1$、2，对应于 S_{24}（SL_2（$\mathbf{Z}$））中的两个特征形式）、$\Delta_{23,\,7}$以及 $\Delta_{23,\,9}$，其权为 *23*。

注 1.5。定理 1.4 的第一句并非新结果：由于（1.1）对于 $|\lambda| > 24$ 是空泛的，只需证明（1.1）对所有充分大的 g 成立，即可看出例外情形只有有限多个。根据扎克猜想（ [Loo88，SS90] 定理），$\mathrm{IH}^\bullet(A_g^{Sat}$，R) 同构于以超越方式定义的 L^2-上同调，而 L^2-上同调则在 Borel 关于算术群稳定实上同调的工作中得到了详细研究 [Bor74]。事实上，Borel 的结果（专门化到辛群）通过先证明 L^2-上同调的同调稳定性，再证明 L^2-上同调与普通上同调在一定范围内一致，从而为 $H^\bullet(A_g$，R) 证明了同调稳定性；由此可以推出（1.1）对充分大的 g成立。我们还要指出，Borel 的结果更一般地对 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ 的任意同余子群都成立。

备注 1.6. 我们来解释为什么本文使用的方法能够超越动机权重22。关键在于，Satake紧化的交叉上同调可以分解为由阿瑟–朗兰兹参数标记的若干直和项，每一项都可用某个$\mathrm{PGL}_{n,\mathbf{Q}}$的1级自对偶尖点自守表示来描述。但是，如果一个阿瑟–朗兰兹参数 ψ由1级的尖点自守表示 $\pi_0, \ldots, \pi_r$构成，那么相应的交叉上同调直和项一般并非直接由附属于$\pi_0, \ldots, \pi_r$的伽罗瓦表示构成，而是由这些标准伽罗瓦表示提升到GSpin 群后得到的表示构成（见 [Taï25]的§1.3.4–6）。因此，从阿瑟–朗兰兹参数得到交叉上同调中出现的相应伽罗瓦表示，其配方更为微妙；特别是，构成成分的动机权重并不能直接决定上同调直和项的权。

阿瑟–朗兰兹参数的非平凡构成成分总是正则1 级尖点自守表示。相比之下，出现在交叉上同调 $^\bullet(A_g^{Sat}$，$\mathbf{V}_\lambda)$ 中的伽罗瓦表示通常并不与正则自守表示相关联。此外，可以对任意固定权中出现的维数给出上界。例如，由定理2.2 可知，若 $k + |\lambda| \leq 77$，则对交叉上同调 $^k(A_g^{Sat}$，$\mathbf{V}_\lambda)$ 有非平凡贡献的阿瑟–朗兰兹参数只会涉及 $\mathrm{PGL}_{n,\ \mathbf{Q}}$ 的正则 1 级尖点自守表示，其中 $n \leq 23$。枚举正则 1 级尖点自守表示远比枚举所有这类表示容易，而且借助计算机可以在相当高的权范围内完成。

定理 1.4 之所以能够用与 PGL_n 的一级尖点自守表示相关联的（标准）伽罗瓦表示来表述，是因为这里只会出现维数较小的 π_i，我们还知道例外同构 $\mathrm{Spin}_3 \simeq \mathrm{SL}_2$,、$\mathrm{Spin}_4 \simeq \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$ 以及 $\mathrm{Spin}_5 \simeq \mathrm{Sp}_4$，并且知道自守表示一侧相应的提升。在更高维数中，这种情形不再成立（但参见注 2.5，其中还有一个额外情形），因此，即使我们能够列出可能出现的（半）自旋伽罗瓦表示的精确清单（即表示 $\sigma_{\psi_0\,\iota}^{\mathrm{spin}}$，以及 σ^{spin}、$_{\psi_i\,\iota}{}^{\epsilon}$，来自 [Taï25，第 1.3.6] 节），也无法在更高次数中以同样方式表述定理 1.4 的类似结果。

还请注意，并非所有已知的 GL_n 的一级尖点自守表示$\mathbf{Q}$ （动机权重为 23；参见 [CT20，定理 3 和定理 4]）都会对某个 交叉上同调 ^{k}（A_g^{Sat}，$\mathbf{V}_\lambda$）（其中 $k+|\lambda| \leq 23$）有所贡献。在次数 24 中也出现了类似现象：比较定理 2.5 和 [CT20，定理 5]。

证明定理1.4的大部分工作已由第三作者在先前的研究中完成 [Taï25]。

1.3. **环面紧化**。除了 Satake 紧化之外，还可以考虑亏格 A_g的环面紧化，由 Ash、Mumford、Rapoport 和 Tai 构造 [AMRT10] 在$\mathbf{C}$上的环面紧化是正规交叉紧化，且任何环面紧化都存在一个同样为环面紧化的奇点消解。

Faltings 和 Chai 在 [AMRT10], 的基础上进行了拓展，构造出定义在$\mathbf{Z}$[FC90]上的光滑且固有的紧化。此外，令 $X_g \to A_g$ 为普遍的主极化阿贝尔 g重簇，令 $X_{g,s} \to A_g$为其 s重纤维积。对于所有的 g 和 s，Faltings 和 Chai 都构造了$X_{g,s}$ 的环面紧化，它们在整数环上光滑且固有。当 $s=0$ 时，便得到 A_g的环面紧化。

一种环面紧化fi化 A_g^Σ 取决于对 Σ 正定二次型锥的有理闭包finite 二次型在$\mathbf{R}^g$上的选择一个容许分解。环面紧fi化$X_{g,\,s}$ 还取决于相关锥的容许锥分解（定义见第3 节）。几何的某些方面反fi映在锥分解的组合学中。特别地，如果锥分解是单纯的，则该紧fl化作为fi上的代数栈$\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ 是光滑的。

定理 1.7。 对于 $k \leq 23$ 以及任意非奇异环面紧化*fi*化$X_{g,\,s}$ 的$X_{g,\,s}$，伽罗瓦表示的半单*fi*化 $H^k(X_{g,\,s}, \mathbf{Q}_\ell)$ 同构于与定理*1.4*中自守表示相关的伽罗瓦表示的不可约构成成分的泰特扭曲的直和。

一些最常研究的环面紧化fi化 A_g 对应于完美锥分解、第二沃罗诺伊分解和中心锥分解。这些分解对于 $g \geq 5$而言都不是单纯的，因此相应的紧fi化是奇异的。然而，任何容许锥分解都可以重新fi化为单纯分解；对于产生fi化$X_{g,\,s}$的锥分解，相应结果同样成立。该重新fi化在模栈层面诱导出奇点消解。考察权，我们得到定理1.7的以下推论。

推论 1.8。 对于 $k \leq 23$以及任意环面紧化*fication* $X_{g,\,s}$ 的$X_{g,\,\overline{s}}$，伽罗瓦表示$\mathrm{gr}_k^W H^k(X_{g,\,s}, \mathbf{Q}_\ell)$ 是与定理*1.4*中的自守表示相关的伽罗瓦表示的泰特扭曲的直和。

g	1	2	3	4	5	6			≥ 7
$c(g)$	10	7		6		3	2	1	0

表 1。

自然会问，定理 1.1 中与非平凡自守表示相关的伽罗瓦表示，是否有任何一个实际出现在$X_{g,\,s}$ 的上同调中。令 $c(g)$ 为表 1中定义的函数。

定理 1.9。 令 $g \geq 1$ 和 $X_{g,\,s}$ 为 $X_{g,\,s}$的非奇异环面紧化。那么 $H^\bullet(X_{g,\,s}, \mathbf{Q}_\ell)$ 不是泰特当且仅当 $s \geq c(g)$ 。

点计数 $\#X_{g,\,s}(\mathbb{F}_q)$ 对于任意非奇异环面紧化都是多项式，关于 q 当且仅当上同调是泰特时成立，因此定理 1.9 确定了点计数函数何时为多项式。请注意，第三作者已证明$\#A_g(\mathbb{F}_q)$ 在 q 为多项式，当 $g \leq 6$时，

计算出了这些多项式，并证明 $\#A_7(\mathbb{F}_q)$ 不是 q [Taï25定理 1]中的多项式。这意味着 $H^\bullet(A_7,\mathbf{Q}_\ell)$ 不是泰特。我们将这一结果推广到更高亏格以及泛阿贝尔簇的纤维积，并证明一个逆命题。

定理 1.10. 设 $g \geq 1$。伽罗瓦表示 $H^\bullet(X_{g,s},\mathbf{Q}_\ell)$ 不是泰特表示，当且仅当 $s \geq c(g)$。

定理 1.9 和定理 1.10 应与曲线模空间上的类似结果进行比较。例如，$\#M_g(\mathbb{F}_q)$ 是关于 q 的多项式，当且仅当 $g \leq 8$；而 $\#M_{g,n}(\mathbb{F}_q)$ 对于$g \geq 16$ [CLPW24，CLPW25]。

定理 1.7、1.9、1.10 和推论 1.8 将 ℓ-进上同调视为伽罗瓦表示来研究。利用霍奇–泰特比较同构，我们还可以对满足 $p+q \leq 22$ 且使 $H^{p,q}(X_{g,s}) \subset H^{p+q}(X_{g,s}, \mathbf{C})$ 非零的 (p,q) 施加强限制。为陈述结果，我们先引入一些记号。对于定理 1.1 中的每个自守表示 Δ，都存在与之对应的纯实霍奇结构 $\mathrm{Hdg}(\Delta)$。对于 $(p,q) \notin \{(w,0),(0,w)\}$，有 $\mathrm{Hdg}(\Delta_w)^{p,q} = 0$。对于 $(p,q) \notin \{(w_1,0),(\frac{w_1+w_2}{2},\frac{w_1-w_2}{2}),(\frac{w_1-w_2}{2},\frac{w_1+w_2}{2}),(0,w_1)\}$，有 $\mathrm{Hdg}(\Delta_{w_1,w_2})^{p,q} = 0$。

定理 1.11。对任意 $k \leq 23$ 以及任意非奇异环面紧化 $X_{g,s}$，霍奇结构$H^k(X_{g,s},\mathbf{R})$ 是以下霍奇结构的有效泰特扭曲之和：$\mathrm{Hdg}(\Delta)$ 其中 Δ 属于定理 1.4 所列的自守表示。

我们得到全纯形式空间 $H^{p,0}(X_{g,s})$ 的更强（不）消失结果。

定理 1.12。设 $X_{g,s}$ 是 $X_{g,s}$ 的非奇异环面紧化。若 $g \geq 3$，则对所有 $s \geq 0$ 且 $0 < k \leq 21$ 或 $k = 23$，都有 $H^{k,0}(X_{g,s}) = 0$。

(1) 若 $g = 3$，则 $H^{22,0}(X_{g,s}) \neq 0$ 当且仅当 $s \geq 8$。

(2) 若 $4 \leq g \leq 7$，则 $H^{22,0}(X_{g,s}) \neq 0$ 当且仅当 $s \geq c(g)$。

(3) 若 $g \geq 8$，则 $H^{22,0}(X_{g,s}) = 0$。

全纯形式空间的维数公式 $H^{k,0}(X_{g,s})$ 对于任意 k 以及 s 当 $g = 1, 2$均可从文献中查得。参见注 6.1。

1.4. 本文结构。第 2 节中，我们从自守表示理论的角度讨论 Satake紧化的交叉上同调。特别地，我们证明定理 1.3 和定理 1.4。我们列出表 2、3 和 4，其中包含定理 1.4 中例外情形的完整细节。第 3 节中，我们回顾 A_g 和 $X_{g,s}$ 的环面紧化，以及根据相应锥分解中的锥所作的分层。接着在第 4 节中，我们说明如何从 Satake紧化的带扭曲系数的交叉上同调群出发，将各分层的上同调计算为伽罗瓦表示，由此证明定理 1.7，进而证明推论 1.8。第 5 节中，我们运用第 2 节和第 4 节的结果证明定理 1.9。第 6 节包含定理 1.10、1.11 和 1.12 的证明。最后，在第 7 节中，我们概述一种利用 L^2 上同调证明主要结果较弱形式的替代证明。

致谢。我们感谢 Gaëtan Chenevier、Jeremy Feusi、Sam Grushevsky、Sophie Morel、Johannes Schmitt 和 Pim Spelier 就相关工作进行的有益讨论。S.C. 获得了苏黎世联邦理工学院数学研究所提供的赫尔曼-外尔讲席以及 SNSF Ambizione 资助 PZ00P2_223473 的支持。D.P. 获得了瓦伦堡学者奖学金的支持。

免责声明。本文的结果依赖于 Arthur 的端oscopic 分类，该分类 [Art13], 目前尚未完全无条件化。感谢 [AGI+24] 目前唯一尚待证明的结果，是正特征局部域上李代数的（标准与非标准）加权基本引理（推广 至一般情形 [CL12]）。值得欣慰的是，我们了解到 Connor Halleck-Dubé 正在这一推广方面取得良好进展，因此可以期待 [Art13] 的结果很快就会成为无条件结果。

2. 通过自守表示研究 Satake紧化的交叉上同调

Satake 紧化是一种高度奇异的紧化，将 A_g^{Sat}视为 SpecZ上的代数栈。就集合而言，它具有如下分层

$$A_g^{Sat} = \coprod_{0\le k\le g} A_k. \tag{2.1}$$

在复数域上的粗模空间层面，它是次数为 g的 Siegel 模形式环的 Proj。本节将说明如何通过自守表示理论计算其带辛群系数的低次数交叉上同调。特别地，我们证明定理1.3 和1.4。

设 λ是辛群 Sp_{2g}的一个支配权，即一个整数元组 $(\lambda_1,\dots,\lambda_g)$，满足 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_g \ge 0$。记 $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_g$。对每个这样的 λ，存在 Sp_{2g}（作为定义在$\mathbf{Q}$上的代数群）的一个最高权为 λ 的不可约表示 V_λ，它可延拓为 GSp_{2g} 的表示，令$zI_{2g} \in Z(\mathrm{GSp}_{2g})$通过 $z^{-|\lambda|}$作用。我们将$\mathbf{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{Q}} V_\lambda$ 视为 $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbf{Q}_\ell)$的连续表示，从而在 A_g上诱导一个 ℓ-进局部系统，简记为$\mathbf{V}_\lambda$。于是$\mathbf{V}_\lambda$ 是权为$|\lambda|$的光滑层。我们将关注交叉上同调交叉上同调 $^\bullet(A_g^{Sat},\ \mathbf{V}_\lambda)$；也就是说，关注$\mathbf{V}_\lambda$ 从 A_g 到 A_g^{Sat}的中间延拓的上同调。

我们选取一个域同构 $\iota:\ \mathbf{C} \simeq \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ （实际上只有其在$\mathbf{Q}$ 的代数闭包上的限制起作用），并在全文中固定使用。令 ρ 为正根半和。我们令 $\tau = \lambda + \rho =（\lambda_1 + g,\ \dots,\ \lambda_g + 1）$。Taï [的定理 4.7.225]（利用该处的注记 4.3.6 和 4.3.7，将情形约化为 V_λ 的中心特征平凡且具有纯性的情形）分解为

$$\bigoplus_k \overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} IH^k(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$$

~作为对形式阿瑟–朗兰兹参数集合 $\Psi^{\mathrm{unr},\ \tau\text{-disc}}$(辛群$_{2g}$)的（典范）直和

$$\psi = \psi_0 \oplus \cdots \oplus \psi_r = \pi_0[d_0] \oplus \cdots \oplus \pi_r[d_r],$$

它们是形式上的，意思是 ψ实际上定义为集合 $\{(\pi_i,\ d_i)\ |\ 0 \le i \le r\}$，而直和只是启发性的记号。这里，对每个 i，我们都有一个整数 $d_i \ge 1$，以及一个自对偶尖点一级~代数表示 $\pi_i \simeq \otimes'_v \pi_{i,\ v}$，它属于 $\mathrm{GL}_{n_i,\ \mathbf{Q}}$。要属于 $\Psi^{\mathrm{unr},\ \tau\text{-disc}}$(辛群$_{2g}$)，形式参数 ψ 必须满足以下附加条件：记 $(w_j(\pi_i))_{1\le j\le n_i} \in \mathbf{C}^{n_i}/\mathfrak{S}_{n_i}$ 为$\pi_{i,\ \infty}$的无穷小特征，则我们有多重集相等

$$\{w_j(\pi_i) + (d_i-1)/2 - k\,|\,0\le i\le r,\ 1\le j\le n_i,\ 0\le k\le d_i-1\} = \{\pm(\lambda_1+g),\dots,\pm(\lambda_g+1),0\}$$

注意，右侧实际上是一个集合，因此说这是多重集相等，意味着左侧的所有项都彼此不同。特别地，对于每个 i，复数 $(w_j(\pi_i) + (d_i - 1)/2)_{1\le j\le n_i}$ 都是互不相同的整数，并且自然可以对 w_j 排序，使其满足 $w_1(\pi_i) > \cdots > w_{n_i}(\pi_i)$。无穷小特征的这一条件还意味着整数 $n_i d_i$ 中恰有一个是奇数，我们可以且确实要求这一奇数对应 $i = 0$。命题 3.4.7（同上）将一族半单共轭类 $(c_{p,\ \mathrm{sc}}(\psi_i))_p$ （由所有素数 p索引）与每个$\psi_i = \pi_i[d_i]$相关联；这些共轭类位于某个与 $\mathrm{Spin}_{n_i d_i}(\mathbf{C})$ 同构的群中，并且在标准表示下，$c_{p,\ \mathrm{sc}}(\psi_i)$ 的像具有如下特征值

$$\{\alpha_j(\pi_{i,p})p^{(d_i-1)/2-k}\,|\,1\le j\le n_i,\ 0\le k\le d_i-1\}$$

其中 $(\alpha_j(\pi_{i,p}))_{1\le j\le n_i}$ 是非分歧表示 $\pi_{i,p}$的 Satake 参数（对应于 $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbf{Q}_p)$）的特征值。我们在此情形下知道 Ramanujan 猜想，即这些特征值 $\alpha_j(\pi_{i,p})$的绝对值为 1（见 [Clo13] 或 [Car12]）。ψ 对交叉上同调的贡献 $\sigma_\psi^{IH,\iota}$ 在 [Taï25，定理 7.1 中得到了细化。3], 但对于下一个引理，我们只需知道，对于任意素数 $p \ne \ell$，该贡献

在 p 处是非分歧的，并且几何 Frobenius Frob_p 在其上的特征多项式是

$$\iota\left(p^{g(g+1)/4+|\lambda|/2}\mathrm{spin}(c_{p,\mathrm{sc}}(\psi_0)\otimes\cdots\otimes\mathrm{spin}(c_{p,\mathrm{sc}}(\psi_r))\right).$$

注意，$\sigma^{IH}_{\psi,\iota}(\mathrm{Frob}_p)$ 的特征值是 Weil 数，这既可由交叉上同调的纯性得出，也可由我们知道在这种情况下 Ramanujan 猜想成立这一事实得出。

引理 2.1. 参数 $\psi=\oplus_i\pi_i[d_i]$ 对 $IH^\bullet(A_g^{Sat},\mathbf{V}_\lambda)$ 的贡献在低于以下次数时消失

$$g(g+1)/2-\sum_{i=0}^{r}\frac{n_i\lfloor d_i^2/2\rfloor}{4}.$$

证明。由纯性可知，只需任取一个素数 $p\neq\ell$ 并追踪 Frob_p 在 $\sigma^{IH}_{\psi,\iota}$ 中的特征值的权。更确切地说，只需证明每个 $\mathrm{spin}(c_{p,\mathrm{sc}}(\psi_i))$ 的特征值权至少为 $-\frac{1}{4}n_i\lfloor d_i^2/2\rfloor$。我们分别考虑三种可能的情况。我们使用与 辛群中极大环面的相同参数化来进行计算，见 [Taï25，§2.2]。为简化记号，我们记作 $\alpha_j=\alpha_j(\pi_{i,p})$。经过重新编号后，我们可以假设对所有 $1\leq j\leq n_i$ 都有 $\alpha_j\alpha_{n_i+1-j}=1$。

(1) 首先假设 $i=0$，即 n_id_i 为奇数。那么 $c_{p,\mathrm{sc}}(\psi_0)$ 共轭于 $\mathrm{Spin}_{n_id_i}(\mathbf{C})$ 的极大环面 $\mathcal{T}_{\mathrm{Spin}_{n_id_i}}$ 中由下式给出的元素：

$$(\alpha_1p^{(d_i-1)/2},\ldots,\alpha_1p^{(1-d_i)/2},\ldots,\alpha_{(n_i-1)/2}p^{(d_i-1)/2},\ldots,\alpha_{(n_i-1)/2}p^{(1-d_i)/2},p^{(d_i-1)/2},\ldots,p,s),$$

其中

$$s^2=\left(\prod_{j=1}^{(n_i-1)/2}\alpha_j\right)^{d_i}p^{(d_i^2-1)/8}.$$

该元素在自旋表示中的特征值为

$$s\prod_{(j,k)\in S_1}\alpha_jp^k\prod_{k\in S_2}p^k$$

当 S_1 遍历

$$\left\{1,\ldots,\frac{n_i-1}{2}\right\}\times\left\{\frac{1-d_i}{2},\ldots,\frac{d_i-1}{2}\right\}$$

的所有子集时，S_2 遍历 $\{-1,\ldots,(1-d_i)/2\}$ 的所有子集。我们看到，出现的最小权为

$$\frac{d_i^2-1}{8}-\frac{n_i-1}{2}\sum_{k=1}^{(d_i-1)/2}2k-\sum_{k=1}^{(d_i-1)/2}2k=\frac{-n_i(d_i^2-1)}{8}.$$

(2) 现在假设 $i>0$（即 n_i 为偶数），且 d_i 为奇数。那么 $c_{p,\mathrm{sc}}(\psi_0)$ 共轭于由正交群作用得到的 $\mathcal{T}_{\mathrm{Spin}_{n_id_i}}$ 中的下列元素

$$(\alpha_1p^{(d_i-1)/2},\ldots,\alpha_1p^{(1-d_i)/2},\ldots,\alpha_{n_i/2}p^{(d_i-1)/2},\ldots,\alpha_{n_i/2}p^{(1-d_i)/2},s)$$

其中 $s^2=(\prod_j\alpha_j)^{d_i}$。它在自旋表示中的特征值为

$$s\prod_{(j,k)\in S}\alpha_jp^k$$

其中 S 遍历的范围是所有子集

$$\left\{1,\ldots,\frac{n_i}{2}\right\}\times\left\{\frac{1-d_i}{2},\ldots,\frac{d_i-1}{2}\right\}.$$

我们看到出现的最小权是

$$-2 \cdot \frac{n_i}{2} \sum_{k=1}^{(d_i-1)/2} k = \frac{-n_i(d_i^2-1)}{8}.$$

(3) 当 d_i 为偶数时（因此 $i>0$ 和 n_i 为偶数），情况类似，故略去细节：我们发现出现的最小权为

$$\frac{-n_i d_i^2}{8}. \qquad \square$$

~因此，我们关注的是：对于某个固定的 M，确定满足以下条件的所有参数 $\psi \in \Psi^{\mathrm{unr}, \tau}$（辛群(辛群$_{2g}$)（当 g 和 λ变化时）

$$g(g+1)/2 - \sum_i \frac{n_i \lfloor d_i^2/2 \rfloor}{4} + |\lambda| \le M. \tag{2.2}$$

（这最终将使我们能够理解 $p+|\lambda| \le M$ 的交叉上同调 交叉上同调 $^p(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$。）回顾一下，向量 τ 恰好由集合中的正元素组成

$$\{w_j(\pi_i) + (d_i-1)/2 - k \,|\, 0 \le i \le r,\, 1 \le j \le n_i,\, 0 \le k \le d_i - 1\}.$$

用 $\tau^{(i)}$ 表示仅包含子集中正元素的子元组会比较方便

$$\{w_j(\pi_i) + (d_i-1)/2 - k \,|\, 1 \le j \le n_i,\, 0 \le k \le d_i - 1\}.$$

那么 $g(g+1)/2 + |\lambda| = |\tau| = \sum_{i=0}^r |\tau^{(i)}|$，因此条件 (2.2) 化为

$$\sum_{i=0}^r k(\psi_i) \le M \quad \text{where} \quad k(\psi_i) := |\tau^{(i)}| - \frac{n_i \lfloor d_i^2/2 \rfloor}{4}. \tag{2.3}$$

引理 2.2。 ~取 $\psi = \psi_0 \oplus \cdots \oplus \psi_r \in \Psi^{\mathrm{unr}, \tau_{\text{圆盘}}}$(辛群$_{2g}$)。对于每个 $0 \le i \le r$，记作 $r_i = \lfloor n_i/2 \rfloor$，我们有

$$k(\psi_i) \ge \sum_{j=1}^{r_i} w_j(\pi_i) \ge r_i(r_i+1)/2 \quad \textit{if } d_i \textit{ is odd},$$

$$k(\psi_i) \ge 2\sum_{j=1}^{r_i} w_j(\pi_i) - r_i \ge 2r_i^2 \quad \textit{if } d_i \textit{ is even}.$$

特别地，我们总有 $k(\psi_i) \ge 0$。

证明。 在证明中，我们令 $w_j = w_j(\pi_i)$ 以简化记号。

(1) 我们首先考虑 n_i 和 d_i 为偶整数的情形，因此 $r_i = n_i/2$。我们有

$$|\tau^{(i)}| - \frac{n_i d_i^2}{8} = \frac{d_i}{2}\left(2\sum_{j=1}^{r_i} w_j - \frac{r_i d_i}{2}\right).$$

令 R 为满足 $\pi_i[d]$ 正则的偶整数 $d \ge 2$ 的集合，即多重集

$$\{w_j + (d-1)/2 - k \,|\, 1 \le j \le n_i,\, 0 \le k \le d-1\}$$

是一个集合。它的形式为 $\{2, \ldots, d_{\max}\}$，包含 d_i。对于 $d \in R$ 和 $0 \le j \le r_i - 1$，我们有 $2w_{r_i - j} \ge (2j+1)d + 1$，从而得到

$$2\sum_{j=1}^{r_i} w_j \ge r_i(d+1) + r_i(r_i-1)d = dr_i^2 + r_i. \tag{2.4}$$

我们推得

$$\frac{4}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i} w_j - d_{\max} \geq d_{\max}(2r_i - 1) + 2 > 2,$$

这意味着.....的最小值

$$d \longmapsto d\left(2\sum_{j=1}^{r_i} w_j - \frac{r_i d}{2}\right) = \frac{r_i}{2} d\left(4\frac{\sum_{j=1}^{r_i} w_j}{r_i} - d\right)$$

在 R 上于 $d = 2$ 处取得。因此

$$|\tau^{(i)}| - \frac{n_i d_i^2}{8} \geq 2\sum_{j=1}^{r_i} w_j - r_i \geq \frac{r_i(r_i+1)}{2},$$

其中最后一个不等式由（2.4）对 $d = 2$ 成立得出。

(2) 接下来考虑 d_i 为奇数且 $n_i = 2r_i$ 为偶数的情形（由于一级假设，r_i 为偶数）。我们计算

$$|\tau^{(i)}| - n_i\frac{d_i^2 - 1}{8} = \frac{d_i}{2}\left(2\sum_{j=1}^{r_i} w_j - \frac{r_i d_i}{2}\right) + r_i/4.$$

令 R 为满足 $\pi[d]$ 正则的奇整数集合。它具有 $\{1, \ldots, d_{\max}\}$ 的形式。与第一种情形类似，对于 $d \in R$ 和 $0 \leq j \leq r_i - 1$，我们得到不等式 $2w_{r_i - j} \geq (2j+1)d_i + 1$，从而对于 $d \in R$

$$2\sum_{j=1}^{r_i} w_j \geq dr_i^2 + r_i.$$

与第一种情况一样，这意味着.....的最小值

$$d \longmapsto \frac{d}{2}\left(2\sum_{j=1}^{r_i} w_j - \frac{r_i d}{2}\right)$$

在 R 上于 $d = 1$ 处取得，因此

$$|\tau^{(i)}| - n_i\frac{d_i^2 - 1}{8} \geq \sum_{j=1}^{r_i} w_j \geq \frac{r_i(r_i+1)}{2}.$$

(3) 最后考虑 $n_i = 2r_i + 1$ 和 d_i 为奇数的情况。我们再次计算

$$|\tau^{(i)}| - n_i\frac{d_i^2 - 1}{8} = d_i\left(\sum_{j=1}^{r_i} w_j - \frac{r_i d_i}{4}\right) + \frac{r_i}{4}.$$

对于 $r_i = 0$ （即 π_i，GL_1 的平凡表示），其值为零，因此我们可以假设 $r_i > 0$。令 $R = \{1, \ldots, d_{\max}\}$ 为满足 $\pi_i[d]$ 正则的奇整数集合 d。对于 $d \in R$ 和 $0 \leq j \leq r_i - 1$，我们有 $w_{r_i - j} \geq (j+1)d$，因此

$$\sum_{j=1}^{r_i} w_j \geq d_{\max}\frac{r_i(r_i+1)}{2},$$

这意味着

$$\frac{4}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i} w_j - d_{\max} \geq n_i d_{\max} > 1.$$

与前面的情形一样，我们推得

$$|\tau^{(i)}| - n_i \frac{d_i^2 - 1}{8} \geq \sum_{j=1}^{r_i} w_j \geq \frac{r_i(r_i+1)}{2}. \qquad \square$$

命题 2.3。不属于以下形式的 $\psi \in \Psi^{\mathrm{unr}}$、$^{\tau}{}_{\mathrm{disc}}$(辛群$_{2g}$) 且满足 $[2g+1]$ 条件 (2.2) 的 $M = 23$ 列表列于表2、3和4的第三列中。

证明。我们使用引理 $\psi \in \Psi^{\mathrm{unr}}$、$^{\tau}{}_{\mathrm{disc}}$(辛群$_{2g}$)，对满足条件（2.2）的 $M = 23$ 进行分类。该引理2.2首先推出，当 first 为 $r_i \leq 3$ 时， d_i 为偶数；而当 $r_i \leq 6$ 时， d_i 为奇数。

- 首先考虑 first 为偶数的情形。若 d_i 为偶数，则 $r_i = 3$ 于是 $\sum_{j=1}^{3} w_j(\pi_i) \leq 13$，从而 $w_1(\pi_i) \leq 21$ 2。由 [CL19，定理 F] 可知，情形 $r_i = 3$ 不会发生。若 $r_i = 2$ 则$w_1(\pi_i) + w_2(\pi_i) \leq 12$，查阅 GL_4、$\mathbf{Q}$ 上权不超过 23 的辛型自对偶代数正则尖点自守表示表可得

$$\pi_i \in \{\Delta_{19,7}, \Delta_{21,5}, \Delta_{21,9}, \Delta_{21,13}\},$$

但这些表示中没有一个满足 $\sum_{j=1}^{2} w_j \leq 12$，因此情形 $r_i = 2$ 也被排除了。最后，对于 $r_i = 1$，我们发现 π_i 对应于 $S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$ 中关于 $2k \leq 24$ 的一个特征形式，即 π_i 要么是 $w \in \{11, 15, 17, 19, 21\}$ 的 Δ_w，要么是两个 $\Delta_{23}^{(j)}$、$j \in \{1, 2\}$中的一个。除 Δ_{11}外，我们都有 $d_i = 2$；在 Δ_{11}的情形下，还可能有 $d_i = 4$。

- 接下来我们考虑 d_i 为奇数的情形，排除 $\pi_i = 1$ 的情形（即 $r_i = 0$）。现在有$\sum_{j=1}^{r_i} w_j(\pi_i) \leq M$，特别地，有 $w_1(\pi_i) \leq M - r_i(r_i-1)/2$。对于 $r_i \geq 6$，这要求 $w_1(\pi_i) \leq 8$，而根据 [CL19，定理 F]，这种情况不会发生。对于 $r_i \leq 5$，查阅正交型 GL_{n_i},Q 的自对偶代数正则尖点自守表示表（[Taï17] 或 [CT20]）表明，当 $r_i > 3$时，不存在满足 $\sum_{j=1}^{r_i} w_j(\pi_i) \leq 25$ 的此类表示。（推测也可以使用 [CT20, §2.4]的方法排除 $r_i \in \{4, 5\}$ 的情形。）对于 $r_i \leq 3$，我们得到 π_i 的以下可能性（关于所涉及的三个自守提升，参见 [CR15, §4] 以及 [Taï25, §3.5]）：

  - π_i =对称幂^2 Δ_w，其中 $n_i = 3$，其中 $w \in \{11, 15, 17, 19, 21, 23\}$（而 Δ_{23}可理解为 $\Delta_{23}^{(j)}$、$j \in \{1, 2\}$之一），- $\pi_i = \Delta_{w_1} \otimes \Delta_{w_2}$，其中 $n_i = 4$，其中 $23 \geq w_1 > w_2$（同上），- $\pi_i = \Lambda^*(\Delta_{w_1,\ w_2})$，其中 $23 \geq w_1$。

我们发现，在所有这些情形中，唯一的可能性是 $d_i = 1$。

总之，ψ 的构成成分必须属于以下列表

- $[2d+1]$，其中 $d \geq 0$,
- $\Delta_w[2]$，其中 $w \in \{11, 15, 17, 19, 21, 23\}$,
- $\Delta_{11}[4]$,
- (对称幂^2 Δ_w)[1] 对于 $w \in \{11, 15, 17, 19, 21, 23\}$,
- $(\Delta_{w_1} \otimes \Delta_{w_2})[1]$ 对于 $23 \geq w_1 > w_2$,
- $\Lambda^*(\Delta_{w_1,\ w_2})[1]$对于

$$(w_1, w_2) \in \{(19, 7), (21, 5), (21, 9), (21, 13), (23, 7), (23, 9), (23, 13).\}$$

现在只需将其中一些成分（具有不同的权且恰好有一个奇数维成分）组合起来，形成参数 $\psi \in \Psi^{\mathrm{unr}}$，$^{\tau}$ 判别式(辛群$_{2g}$) 并且只保留满足(2.3) 的那些，对于$M = 23$。$\square$

现在我们要计算每种情形对交叉上同调的贡献。对于 $d \geq 0$，记

$$T_\ell\langle d\rangle := \bigotimes_{i=1}^{d} (\mathbf{Q}_\ell \oplus \mathbf{Q}_\ell(-i)).$$

注意，这是“平凡”参数 $[2d+1]$ 对 $\mathrm{IH}^\bullet(A_d^{Sat}, \mathbb{Q}_\ell)$ 的贡献。记 $S_\ell\langle k\rangle$ 为与权为 k 的尖点形式（定义在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上）关联的 ℓ-进伽罗瓦表示，并记 $s\langle k\rangle = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{Q}_\ell} S_\ell\langle k\rangle$ 为该尖点形式空间的维数。类似地，对于奇整数 $w_1 > w_2 > 0$，记 $S_\ell\langle \frac{w_1+w_2-4}{2}, \frac{w_1-w_2-2}{2}\rangle$ 为与自对偶尖点自守表示 $\Delta^{(i)}_{w_1,w_2}$（定义在 $\mathrm{PGL}_{4,\mathbb{Q}}$ 上，且在实处的无穷小特征为 $(\pm\frac{w_1}{2}, \pm\frac{w_2}{2})$）相关联的伽罗瓦表示的直和。采用 [Taï25 中的记号，定理 6.3.1]

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} S_\ell\langle \tfrac{w_1+w_2-4}{2}, \tfrac{w_1-w_2-2}{2}\rangle \simeq \bigoplus_i (\mathrm{std}\circ\rho^{\mathrm{GSp}}_{\Delta^{(i)}_{w_1,w_2},\iota})(\tfrac{1-w_1}{2}).$$

（右侧先验上仅定义了一个取值于 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的表示，但可用 $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ 交叉上同调 $^3(A_2^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$ 中的有理 Hecke 算子将其刻画出来，其中 $\lambda = (\frac{w_1+w_2-4}{2}, \frac{w_1-w_2-2}{2})$，因此它定义在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上。）注意，正规化（泰特扭曲）的选取使得该伽罗瓦表示是有效的（其 Hodge-Tate 权均为非负），且其纯权为 w_1。

我们还需要回顾与以下对象相关的符号的定义 $(u_i(\psi))_{1\le i\le r}$，它们与 $\psi = \psi_0 \oplus \cdots \oplus \psi_r \in \widetilde{\Psi}^{\mathrm{unr}, \tau\,\mathrm{disc}}(\text{辛群}_{2g})$ 相关，见 [Taï25，定理 4.7.2 和 7.1。3]。对于 $1 \le i \le r$，回忆 n_i 为偶数，并令 J_i 为 $\{1,\dots,g\}$ 的子集，使得有

$$\{w_j(\pi_i) + \tfrac{d_i-1}{2} - k \mid 1 \le j \le \tfrac{n_i}{2},\ 0 \le k \le d_i - 1\} = \{\tau_j \mid j \in J_i\}.$$

记 f_i 为 $\{j \in J_i \mid j \text{ even}\}$ 的基数，我们有

$$u_i(\psi) = (-1)^{f_i} \prod_{\substack{0\le j\le r\\ d_i+d_j \text{ odd}}} \epsilon(\tfrac{1}{2}, \pi_i \times \pi_j)^{\min(d_i,d_j)}.$$

回顾 [CR15，§3。9] 辛根数 $\epsilon(\frac{1}{2}, \pi_i\times\pi_j)$ 可由 π_i 和 π_j 的权轻易计算得到。我们还需要 $\mathrm{spin}^{\pm}_{\psi_i}$ 中区分出的半旋量表示，见 [Taï25，定义 4.7。1]。

定理 2.4（定理 1.4）。所有 $\psi \in \widetilde{\Psi}^{\mathrm{unr}, \tau\,\mathrm{disc}}(\text{辛群}_{2g}) \smallsetminus \{[2g+1]\}$ 对交叉上同调 $^k(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$ 在 $k + |\lambda| \le 23$ 中的贡献列于表 2、3 和 4 的最后一栏，其中我们记 L^i 为 $\mathbf{Q}_\ell(-i)$。

证明。我们更精确地计算了每种情况下的贡献。

（A 型）（椭圆全纯尖点形式）类型为 $(\mathrm{Sym}^2\Delta_w)[1]$ 的参数（此处 $g=1$ 和 $\lambda = w-1$）对交叉上同调 $^\bullet(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$ 的贡献为 $S_\ell\langle w+1\rangle$。

（B 型）（稳定型的亏格二全纯 Siegel 尖点形式）类型为 $(\Lambda^*\Delta_{w_1,w_2})[1]$（这里 $g=2$ 且 $\lambda = (\frac{w_1+w_2-4}{2}, \frac{w_1-w_2-2}{2})$）的参数对交叉上同调 $^\bullet(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$ 的贡献为 $S_\ell\langle\lambda\rangle$（参见 [Taï25，注记 5.2。3]）。

（C 型）设 $\psi = \Delta_w[2] \oplus [2d+1]$ 对 $0 \le d \le (w-3)/2$。我们有

$$u_1(\psi) = -\epsilon(\tfrac{1}{2}, \Delta_w)^{\min(2,2d+1)} = \begin{cases} -1 & \text{if } d>0 \text{ or } w \equiv -1 \mod 4 \\ +1 & \text{if } d = 0 \text{ and } w \equiv 1 \mod 4. \end{cases}$$

我们发现（计算类似于 [Taï25，§9。2] 对于情形 $w=11$，使用同处的推论 6.2.3）这类参数对交叉上同调 $^\bullet(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$ 的贡献为

$$(\mathbf{Q}_\ell(\tfrac{-w+1}{2}) \oplus \mathbf{Q}_\ell(\tfrac{-w-1}{2})) \otimes T_\ell\langle d\rangle$$

第一种情况下为，而 $S_\ell\langle w+1\rangle$ 在第二种情况下为。

（D 型）考虑 $\psi = \Delta_{11}[2] \oplus (\text{对称幂}^2\,\Delta_{11})[1]$，，其中 $g=3$ 且 $\lambda = (8, 4, 4)$。于是 $u_1(\psi) = -\epsilon(\frac{1}{2}, \Delta_{11} \times \text{对称幂}^2\,\Delta_{11}) = +1$，类似于 C 型和 E 型情形的计算表明，$\psi$ 对交叉上同调 $^\bullet(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$ 的贡献为

$$S_\ell\langle 12\rangle^{\otimes 2} \simeq \mathrm{Sym}^2 S_\ell\langle 12\rangle \oplus \mathbf{Q}_\ell(-11).$$

g	λ	ψ	权重中的贡献 ≤ 23
1	(10)	(对称幂$^2\,\Delta_{11}$)[1]	$S_\ell\langle 12\rangle$
1	(14)	(对称幂$^2\,\Delta_{15}$)[1]	$S_\ell\langle 16\rangle$
1	(16)	(对称幂$^2\,\Delta_{17}$)[1]	$S_\ell\langle 18\rangle$
1	(18)	(对称幂$^2\,\Delta_{19}$)[1]	$S_\ell\langle 20\rangle$
1	(20)	(对称幂$^2\,\Delta_{21}$)[1]	$S_\ell\langle 22\rangle$
1	(22)	(对称幂$^2\,\Delta_{23}$)[1]	$S_\ell\langle 24\rangle$
2	(11, 5)	$\Lambda^*(\Delta_{19,\ 7})[1]$	$S_\ell\langle 11,\ 5\rangle$
2	(11, 7)	$\Lambda^*(\Delta_{21,\ 5})[1]$	$S_\ell\langle 11, 7\rangle$
2	(13, 5)	$\Lambda^*(\Delta_{21,\ 9})[1]$	$S_\ell\langle 13, 5\rangle$
2	(13, 7)	$\Lambda^*(\Delta_{23,7})[1]$	$S_\ell\langle 13, 7\rangle$
2	(14, 6)	$\Lambda^*(\Delta_{23,\ 9})[1]$	$S_\ell\langle 14, 6\rangle$
2	(15, 3)	$\Lambda^*\ (\Delta_{21,\ 13})\ [1]$	$S_\ell\langle 15, 3\rangle$
2	(16, 4)	$\Lambda^*\ (\Delta_{23,\ 13})\ [1]$	$S_\ell\langle 16, 4\rangle$

表 2. A型和B型

（E 型） $\Delta_{11}[4]\oplus[2d+1]$ 型参数对 $d\in\{0,1,2,3\}$ 的贡献（这里 $g=d+4$ 且$\lambda=(7-g,\ 7-g,\ 7-g,\ 7-g,\ 0,\ \ldots,\ 0)$）对 交叉上同调 $^\bullet(A_g^{Sat},\ \mathbf{V}_\lambda)$ 的贡献为

$$\left(\operatorname{Sym}^2 S_\ell\langle 12\rangle\oplus\bigoplus_{i=9}^{13}\mathbf{Q}_\ell(-i)\right)\otimes T_\ell\langle d\rangle$$

如 [Taï25第9节所述2]。

（F型）考虑 $\psi=(\Delta_{w_1}\otimes\Delta_{w_2})[1]\oplus[2d+1]$，其中 $w_1>w_2$ 且 $0\leq d\leq {}^{w_1-w_2}\!/_2-1$。~~这里~~ $g=d+2$ 且

$$\lambda=\left(\frac{w_1+w_2}{2}-d-2,\frac{w_1-w_2}{2}-d-1,0,\ldots,0\right).$$

我们有 $u_1(\psi)=-\epsilon(1/2,\ \Delta_{w_1}\times\Delta_{w_2})=-1$，因此这些参数对交叉上同调 $^\bullet(A_g^{Sat},\ \mathbf{V}_\lambda)$ 的贡献为

$$S_\ell\langle w_2+1\rangle^{\oplus s\langle w_1+1\rangle}((w_2-w_1)/2)\otimes T_\ell\langle d\rangle.$$ □

定理1.3的证明。我们首先证明该定理在半单化之前成立。对于 $g\neq 7$ 这由定理2.4 以及选取表中 $\lambda=0$ 对应的行可得。对于 $g=7$ 交叉上同调的半单化交叉上同调 $^\bullet(A_7^{Sat},\ \mathbf{Q}_\ell)$ 已在 [Taï25第9节中计算过2]: 仅有两个参数有贡献，分别是 [15] 和$\Delta_{11}[4]\oplus[7]$ (E 型)。由此可得

$$\bigoplus_k IH^k(A_7^{Sat},\mathbf{Q}_\ell)^{\mathrm{ss}}\simeq T_\ell\langle 7\rangle\oplus\left(\operatorname{Sym}^2 S_\ell\langle 12\rangle\oplus\bigoplus_{i=9}^{13}\mathbf{Q}_\ell(-i)\right)\otimes T_\ell\langle 3\rangle$$

并且在权 ≤ 23 中，右侧唯一的非泰特部分处于权22。

为去掉半单化，我们利用交叉上同调 $^k(A_g^{Sat},\mathbf{Q}_\ell)$在 ℓ之外是非分歧的，并且在 ℓ处是晶体的。在泰特型的情形下，这意味着交叉上同调 $^k(A_g^{Sat},\mathbf{Q}_\ell)(\binom{k}{2})$ 是处处非分歧的伽罗瓦表示，因此它是平凡的。对于情形 $(g,k)=(7,22)$，得益于 [NT23，定理 B (1)]，我们知道 $\operatorname{Sym}^2 S_\ell\langle 12\rangle$ 与 $\mathbf{Q}_\ell(-11)$ 之间不存在非平凡的导子为一的几何扩张。□

注 2.5。实际上，可以将 $M=23$ 在命题 2.3 和定理 2.4中推进得远得多。下面我们将为 $M=24$概述分类（但不给出表格），并为 $M=33$指出一种新现象，$M=34$ 并解释这些结果在何种意义下至少可以推广到 $M=77$ 。

对于 $M=24$，我们使用相同的方法找到了以下另外 27 个参数:

g	λ	ψ	权重 ≤ 23 中的贡献
2	(4, 4)	$\Delta_{11}[2] \oplus [1]$	$L^5 \oplus L^6$
3	(3,3,0)	$\Delta_{11}[2] \oplus [3]$	$L^5 \oplus 2L^6 \oplus L^7$
4	(2, 2, 0, 0)	$\Delta_{11}[2] \oplus [5]$	$L^5 \oplus 2L^6 \oplus 2L^7 \oplus 2L^8 \oplus L^9$
5	(1, 1, 0, 0, 0)	$\Delta_{11}[2] \oplus [7]$	$L^5 \oplus 2L^6 \oplus 2L^7 \oplus 3L^8 \oplus 3L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 2L^{11}$
6	(0, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{11}[2] \oplus [9]$	$L^5 \oplus 2L^6 \oplus 2L^7 \oplus 3L^8 \oplus 4L^9 \oplus 4L^{10} \oplus 4L^{11}$
2	(6, 6)	$\Delta_{15}[2] \oplus [1]$	$L^7 \oplus L^8$
3	(5, 5, 0)	$\Delta_{15}[2] \oplus [3]$	$L^7 \oplus 2L^8 \oplus L^9$
4	(4, 4, 0, 0)	$\Delta_{15}[2] \oplus [5]$	$L^7 \oplus 2L^8 \oplus 2L^9 \oplus 2L^{10} \oplus L^{11}$
5	(3, 3, 0, 0, 0)	$\Delta_{15}[2] \oplus [7]$	$L^7 \oplus 2L^8 \oplus 2L^9 \oplus 3L^{10} \oplus 3L^{11}$
6	(2, 2, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{15}[2] \oplus [9]$	$L^7 \oplus 2L^8 \oplus 2L^9 \oplus 3L^{10} \oplus 4L^{11}$
7	(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{15}[2] \oplus [11]$	$L^7 \oplus 2L^8 \oplus 2L^9 \oplus 3L^{10} \oplus 4L^{11}$
8	(0, 0,0, 0, 0,0, 0,0)	$\Delta_{15}[2] \oplus [13]$	$L^7 \oplus 2L^8 \oplus 2L^9 \oplus 3L^{10} \oplus 4L^{11}$
2	(7, 7)	$\Delta_{17}[2] \oplus [1]$	$S_\ell\langle 18\rangle$
3	(6, 6, 0)	$\Delta_{17}[2] \oplus [3]$	$L^8 \oplus 2L^9 \oplus L^{10}$
4	(5, 5, 0, 0)	$\Delta_{17}[2] \oplus [5]$	$L^8 \oplus 2L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 2L^{11}$
5	(4, 4, 0, 0, 0)	$\Delta_{17}[2] \oplus [7]$	$L^8 \oplus 2L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 3L^{11}$
6	(3, 3, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{17}[2] \oplus [9]$	$L^8 \oplus 2L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 3L^{11}$
7	(2, 2, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{17}[2] \oplus [11]$	$L^8 \oplus 2L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 3L^{11}$
8	(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{17}[2] \oplus [13]$	$L^8 \oplus 2L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 3L^{11}$
9	(0, 0,0, 0, 0,0, 0, 0, 0)	$\Delta_{17}[2] \oplus [15]$	$L^8 \oplus 2L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 3L^{11}$
2	(8,8)	$\Delta_{19}[2] \oplus [1]$	$L^9 \oplus L^{10}$
3	(7, 7, 0)	$\Delta_{19}[2] \oplus [3]$	$L^9 \oplus 2L^{10} \oplus L^{11}$
4	(6, 6, 0, 0)	$\Delta_{19}[2] \oplus [5]$	$L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 2L^{11}$
5	(5, 5, 0, 0, 0)	$\Delta_{19}[2] \oplus [7]$	$L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 2L^{11}$
6	(4, 4, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{19}[2] \oplus [9]$	$L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 2L^{11}$
7	(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{19}[2] \oplus [11]$	$L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 2L^{11}$
8	(2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{19}[2] \oplus [13]$	$L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 2L^{11}$
9	(1, 1,0, 0, 0,0, 0, 0, 0)	$\Delta_{19}[2] \oplus [15]$	$L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 2L^{11}$
10	(0, 0,0, 0, 0,0, 0, 0,0, 0)	$\Delta_{19}[2] \oplus [17]$	$L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 2L^{11}$
2	(9, 9)	$\Delta_{21}[2] \oplus [1]$	$S_\ell\langle 22\rangle$
3	(8, 8, 0)	$\Delta_{21}[2] \oplus [3]$	$L^{10} \oplus 2L^{11}$
4	(7, 7, 0, 0)	$\Delta_{21}[2] \oplus [5]$	$L^{10} \oplus 2L^{11}$
5	(6, 6, 0, 0, 0)	$\Delta_{21}[2] \oplus [7]$	$L^{10} \oplus 2L^{11}$
6	(5, 5, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{21}[2] \oplus [9]$	$L^{10} \oplus 2L^{11}$
7	(4, 4, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{21}[2] \oplus [11]$	$L^{10} \oplus 2L^{11}$
8	(3, 3,0, 0, 0,0, 0,0)	$\Delta_{21}[2] \oplus [13]$	$L^{10} \oplus 2L^{11}$
9	(2, 2,0, 0, 0,0, 0, 0, 0)	$\Delta_{21}[2] \oplus [15]$	$L^{10} \oplus 2L^{11}$
10	(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{21}[2] \oplus [17]$	$L^{10} \oplus 2L^{11}$
11	(0, 0,0, 0, 0,0, 0, 0, 0, 0,0)	$\Delta_{21}[2] \oplus [19]$	$L^{10} \oplus 2L^{11}$
2	(10, 10)	$\Delta_{23}[2] \oplus [1]$	L^{11}
3	(9, 9, 0)	$\Delta_{23}[2] \oplus [3]$	L^{11}
4	(8, 8, 0, 0)	$\Delta_{23}[2] \oplus [5]$	L^{11}
5	(7, 7, 0, 0, 0)	$\Delta_{23}[2] \oplus [7]$	L^{11}
6	(6, 6, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{23}[2] \oplus [9]$	L^{11}
7	(5, 5, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{23}[2] \oplus [11]$	L^{11}
8	(4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{23}[2] \oplus [13]$	L^{11}
9	(3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{23}[2] \oplus [15]$	L^{11}
10	(2, 2,0, 0, 0,0, 0, 0,0, 0)	$\Delta_{23}[2] \oplus [17]$	L^{11}
11	(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{23}[2] \oplus [19]$	L^{11}
12	(0, 0,0, 0, 0,0, 0, 0,0, 0, 0, 0)	$\Delta_{23}[2] \oplus [21]$	L^{11}

表 3. C 型

g	λ	ψ	权重中的贡献 ≤ 23
3	(8、4、4)	$\Delta_{11}[2] \oplus$ (对称幂^2 Δ_{11})$[1]$	对称幂^2 $S_\ell\langle 12\rangle \oplus L^{11}$
4	(3、3、3、3)	$\Delta_{11}[4] \oplus [1]$	对称幂^2 $S_\ell\langle 12\rangle \oplus L^9 \oplus L^{10} \oplus L^{11}$
5	(2, 2, 2, 2, 0)	$\Delta_{11}[4] \oplus [3]$	对称幂^2 $S_\ell\langle 12\rangle \oplus L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 2L^{11}$
6	(1, 1, 1, 1, 0, 0)	$\Delta_{11}[4] \oplus [5]$	对称幂^2 $S_\ell\langle 12\rangle \oplus L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 3L^{11}$
7	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{11}[4] \oplus [7]$	对称幂^2 $S_\ell\langle 12\rangle \oplus L^9 \oplus 2L^{10} \oplus 3L^{11}$
2	(11, 1)	$\Delta_{15} \otimes \Delta_{11} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes L^2$
3	(10, 0, 0)	$\Delta_{15} \otimes \Delta_{11} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes (L^2 \oplus L^3)$
2	(12, 2)	$\Delta_{17} \otimes \Delta_{11} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes L^3$
3	(11, 1, 0)	$\Delta_{17} \otimes \Delta_{11} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes (L^3 \oplus L^4)$
4	(10, 0, 0, 0)	$\Delta_{17} \otimes \Delta_{11} \oplus [5]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes (L^3 \oplus L^4 \oplus L^5 \oplus L^6)$
2	(14, 0)	$\Delta_{17} \otimes \Delta_{15} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 16\rangle \otimes L^1$
2	(13, 3)	$\Delta_{19} \otimes \Delta_{11} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes L^4$
3	(12, 2, 0)	$\Delta_{19} \otimes \Delta_{11} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes (L^4 \oplus L^5)$
4	(11, 1, 0, 0)	$\Delta_{19} \otimes \Delta_{11} \oplus [5]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes (L^4 \oplus L^5 \oplus L^6)$
5	(10, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{19} \otimes \Delta_{11} \oplus [7]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes (L^4 \oplus L^5 \oplus L^6)$
2	(15, 1)	$\Delta_{19} \otimes \Delta_{15} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 16\rangle \otimes L^2$
3	(14, 0, 0)	$\Delta_{19} \otimes \Delta_{15} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 16\rangle \otimes (L^2 \oplus L^3)$
2	(16, 0)	$\Delta_{19} \otimes \Delta_{17} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 18\rangle \otimes L^1$
2	(14, 4)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{11} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes L^5$
3	(13, 3, 0)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{11} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes (L^5 \oplus L^6)$
4	(12, 2, 0, 0)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{11} \oplus [5]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes (L^5 \oplus L^6)$
5	(11, 1, 0, 0, 0)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{11} \oplus [7]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes (L^5 \oplus L^6)$
6	(10, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{11} \oplus [9]$	$S_\ell\langle 12\rangle \otimes (L^5 \oplus L^6)$
2	(16, 2)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{15} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 16\rangle \otimes L^3$
3	(15, 1, 0)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{15} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 16\rangle \otimes (L^3 \oplus L^4)$
4	(14, 0, 0, 0)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{15} \oplus [5]$	$S_\ell\langle 16\rangle \otimes (L^3 \oplus L^4)$
2	(17, 1)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{17} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 18\rangle \otimes L^2$
3	(16, 0, 0)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{17} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 18\rangle \otimes (L^2 \oplus L^3)$
2	(18, 0)	$\Delta_{21} \otimes \Delta_{19} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 20\rangle \otimes L^1$
2	(15, 5)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{11} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 12\rangle^{\oplus 2} \otimes L^6$
3	(14, 4, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{11} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 12\rangle^{\oplus 2} \otimes L^6$
4	(13, 3, 0, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{11} \oplus [5]$	$S_\ell\langle 12\rangle^{\oplus 2} \otimes L^6$
5	(12, 2, 0, 0, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{11} \oplus [7]$	$S_\ell\langle 12\rangle^{\oplus 2} \otimes L^6$
6	(11, 1, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{11} \oplus [9]$	$S_\ell\langle 12\rangle^{\oplus 2} \otimes L^6$
7	(10, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{11} \oplus [11]$	$S_\ell\langle 12\rangle^{\oplus 2} \otimes L^6$
2	(17, 3)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{15} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 16\rangle^{\oplus 2} \otimes L^4$
3	(16, 2, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{15} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 16\rangle^{\oplus 2} \otimes L^4$
4	(15, 1, 0, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{15} \oplus [5]$	$S_\ell\langle 16\rangle^{\oplus 2} \otimes L^4$
5	(14, 0, 0, 0, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{15} \oplus [7]$	$S_\ell\langle 16\rangle^{\oplus 2} \otimes L^4$
2	(18, 2)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{17} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 18\rangle^{\oplus 2} \otimes L^3$
3	(17, 1, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{17} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 18\rangle^{\oplus 2} \otimes L^3$
4	(16, 0, 0, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{17} \oplus [5]$	$S_\ell\langle 18\rangle^{\oplus 2} \otimes L^3$
2	(19, 1)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{19} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 20\rangle^{\oplus 2} \otimes L^2$
3	(18, 0, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{19} \oplus [3]$	$S_\ell\langle 20\rangle^{\oplus 2} \otimes L^2$
2	(20, 0)	$\Delta_{23} \otimes \Delta_{21} \oplus [1]$	$S_\ell\langle 22\rangle^{\oplus 2} \otimes L^1$

表 4。D、E和F型

- $\Delta_{25}[2]\oplus[2d+1]$ 对于 $0\le d\le 11$，其对交叉上同调的贡献已被计算出来(C 型)。
- $\Delta_{15}[2]\oplus\Delta_{11}[2]\oplus[2d+1]$ 对于 $0\le d\le 4$ 记 $\psi_1=\Delta_{15}[2]$ 和 $\psi_2=\Delta_{11}[2]$ 我们计算$u_1(\psi)=u_2(\psi)=-1$ 并如 (C 型) 中那样得出结论：对交叉上同调的贡献为

$$\mathbf{Q}_\ell(-12)\otimes(\mathbf{Q}_\ell\oplus\mathbf{Q}_\ell(-1))^{\otimes 2}\otimes T_\ell\langle d\rangle.$$

- $\Delta_{11}[6]\oplus[2d+1]=\psi_1\oplus\psi_0$对于 $0\le d\le 2$。我们计算 $u_1(\psi)=-\epsilon(1_2,\Delta_{11})^{\min(6,2d+1)}=-1$和

自旋$^-_{\psi_1}\circ\widetilde{\alpha}_{\psi_1}|_{\mathrm{Sp}_2\times\mathrm{SL}_2}\simeq(1\otimes$对称幂^{9}标准表示$_{\mathrm{SL}_2})\oplus(1\otimes$对称幂^{3}标准表示$_{\mathrm{SL}_2})\oplus($对称幂^{2}标准表示$_{\mathrm{Sp}_2}\otimes$对称幂^{5}标准表示$_{\mathrm{SL}_2})$

（应将其理解为 $[10]\oplus[4]\oplus($对称幂$^2\,\Delta_{11})[6]$），由此可得交叉上同调中的贡献为以下各项之和

$$\left(\bigoplus_{i=12}^{21}\mathbf{Q}_\ell(-i)\oplus\bigoplus_{i=15}^{18}\mathbf{Q}_\ell(-i)\right)\otimes T_\ell\langle d\rangle\quad\text{and}$$

$$(\mathrm{Sym}^2 S_\ell\langle 12\rangle)(-3)\otimes\left(\bigoplus_{i=0}^{5}\mathbf{Q}_\ell(-i)\right)\otimes T_\ell\langle d\rangle.$$

- $\Delta_{w_1,\,w_2}[2]\oplus[2d+1]=\psi_1\oplus\psi_0$对于 $(w_1,\ w_2)\in\{(19,\ 7),\ (21,\ 5)\}$对于 $0\le d\le(w_2-3)/2$。我们有

$$u_1(\psi)=\epsilon(\tfrac{1}{2},\Delta_{w_1,w_2})^{\min(2,2d+1)}=((-1)^{1+(w_1+w_2)/2})^{\min(2,2d+1)}=+1$$

并且我们计算得到

$$\mathrm{spin}^-_{\psi_1}\circ\widetilde{\alpha}_{\psi_1}|_{\mathrm{Sp}_4\times\mathrm{SL}_2}\simeq(V_{1,1}\otimes 1)\oplus(1\otimes\mathrm{Sym}^2\,\mathrm{Std}_{\mathrm{SL}_2})$$

（应将其理解为 $(\Lambda^*\Delta_{w_1,\,w_2})[1]\oplus[3]$），并由此得到交叉上同调中的一个贡献

$$\left(\mathbf{Q}_\ell(-\tfrac{w_1+w_2}{2}-1)\oplus\mathbf{Q}_\ell(-\tfrac{w_1+w_2}{2}+1)\oplus\Lambda^2 S_\ell\langle\tfrac{w_1+w_2-4}{2},\tfrac{w_1-w_2-2}{2}\rangle\right)\otimes T_\ell\langle d\rangle$$

（使用 $\Lambda^2 V_{1,\,0}\simeq V_{1,\,1}\oplus V_{0,\,0}$）。

- $\psi=\pi[1]$（对于 $g=3$和 $\lambda=(9,\ 6,\ 3)$），其中 $\pi=\Delta^o_{24,\,16,\,8}$是具有这些权的 PGL7, $\mathbb{Q}$ 的唯一一级自对偶尖点自守表示。在这种情况下，其贡献仅为（沿用 [Taï25，定理 5.22]）中的记号）

$$\sigma^{\mathrm{spin}}_{\psi,\iota}(-9)\simeq(\mathrm{spin}_\psi\circ\rho^{\mathrm{GSpin}}_{\psi,\iota})(-9)$$

但得益于 Chenevier-Gan [CG25] 的结果，我们可以得出更多结论。对于 $\mathrm{GSp}_{6,\,\mathbb{Q}}$ 存在唯一的一级尖点自守表示 Π，其为 Siegel 型（即对应于一个 $\mathrm{Sp}_6(\mathbf{Z})$ 一级的 Siegel 特征形式），且其标准 Arthur-Langlands 参数为 ψ。根据 [的定理 3.8、定理 3.10 和命题 7.11CG25]，存在一个（唯一的）Arthur-Langlands参数$\psi(\pi,$ 自旋$)$，它要么形如 $\pi'[1]$（其中 π' 是 $\mathrm{PGL}_{8,\,\mathbb{Q}}$的一个一级自对偶尖点自守表示，其无穷小特征为 $(\pm12,\ \pm8,\ \pm4,\ 0,\ 0)$），要么等于 $\pi\oplus[1]$，并满足$\sigma^{\mathrm{spin}}_{\psi,\iota}$。在相差一个泰特扭曲的意义下，是与 ψ'相关联的标准伽罗瓦表示。查阅表格可知，不存在这样的表示 π'，因此我们有 $\psi(\pi,$ 自旋$)=\pi[1]\oplus[1]$，且π 属于 G_2型。由此得出，ψ 对交叉上同调的贡献为

$$(\mathrm{std}\circ\rho_{\Delta^o_{24,16,8}})(-12)\oplus\mathbf{Q}_\ell(-12).$$

- $\psi=\pi[1]$ 其中 $\pi=\Delta^o_{28,\,14,\,6}$（对于 $g=3$ 和 $\lambda=(11,\ 5,\ 2)$）。这种情况与前一种类似，不同之处在于，现在 $\psi(\pi,$ 自旋$)$ 的无穷小特征为 $(\pm12,\ \pm9,\ \pm5,\ \pm2)$，因此我们不可能有$\psi(\pi,$ 自旋$)=\psi\oplus[1]$（即 $\Delta^o_{28,\,14,\,6}$不可能属于类型 G_2），由此得出 $\psi'=\Delta^o_{24,\,18,\,10,\,4}[1]$（这

具有该无穷小特征的 PGL_8，$\mathbf{Q}$ 上唯一的 levelone 自对偶尖点自守表示），而 ψ 有贡献

$$(\mathrm{std}\circ\rho^{\mathrm{O}}_{\Delta^e_{24,18,10,4}})(-12)$$

到交叉上同调。

对于 $M=33$，ψ_i 的唯一新形状[2] 是 $\Delta_w[6]$ 和 $\Delta_w[8]$（仅当 $w=11$ 时），以及 $\Delta^e_{w_1,w_2,w_3,w_4}[1]$（其中 $w_1>w_2>w_3>w_4>0$ 是偶整数）。对于 $\psi_i=\Delta_{11}[6]$ 或 $\Delta_{11}[8]$，可以轻易地将出现在 [Taï25, Theorem 7.1.3] 中的表示 $\sigma^{\mathrm{spin}}_{\psi_i\iota}{}^{\pm}$ 表示为 $0\le d\le 4$ 的 $\mathrm{Sym}^d S_\ell\langle 12\rangle$ 的泰特扭曲之直和。对于 $\psi_i=\pi[1]=\Delta^e_{w_1^{(j)},w_2,w_3,w_4}[1]$，我们有 $k(\psi_i)\in\{30,32,34\}$，并且可以像 [CG25] 中那样利用三元性证明，表示 $\sigma^{\mathrm{spin}}_{\psi_i\iota}{}^{\pm}$ 也可以再次表示为与自对偶代数正则尖点表示相关联的伽罗瓦表示的直和。更确切地说，存在两个 8 维正交参数 ψ（π，自旋$^{\pm}$），其权为

$$\pm(\tfrac{w_1+w_2+w_3+w_4}{4},\tfrac{w_1+w_2-w_3-w_4}{4},\tfrac{w_1-w_2+w_3-w_4}{4},\tfrac{w_1-w_2-w_3+w_4}{4})\ (\text{for }\psi(\pi,\mathrm{spin}^+))$$
$$\pm(\tfrac{w_1+w_2+w_3-w_4}{4},\tfrac{w_1+w_2-w_3+w_4}{4},\tfrac{w_1-w_2+w_3+w_4}{4},\tfrac{w_1-w_2-w_3-w_4}{4})\ (\text{for }\psi(\pi,\mathrm{spin}^-))$$

并且 $\sigma^{\mathrm{spin}}_{,\psi_i\iota}{}^{\pm}$,在泰特扭曲意义下，是与 $\psi(\pi,$自旋$^{\pm})$ 相关联的标准伽罗瓦表示。可能出现三种情况。

- 若对于某个 $\pi'=\Delta^o_{,(j)\ w_1',w_2',w_3'}$，$\psi_i$ 是 $\psi(\pi',$自旋$)$，则必然有

$$\{\pm w_1,\pm w_2,\pm w_3,\pm w_4\}=\{\pm\tfrac{w_1'+w_2'+w_3'}{2},\pm\tfrac{w_1'+w_2'-w_3'}{2},\pm\tfrac{w_1'-w_2'+w_3'}{2},\pm\tfrac{w_1'-w_2'-w_3'}{2}\}$$

且 π' 不是 G_2 类型，则

$$\{\psi(\pi,\mathrm{spin}^+),\psi(\pi,\mathrm{spin}^-)\}=\{\pi'[1]\oplus[1],\pi[1]\},$$

其特征是权中出现 0。

- 若 $\pi=\Delta_{(j')\ w_1'}\boxtimes\Delta_{(j'')\ w_1'',w_2''}$（张量积函子性，参见 [CG25，定理 5。3]）则我们有

$$\{\psi(\pi,\mathrm{spin}^+),\psi(\pi,\mathrm{spin}^-)\}=\{(\mathrm{Sym}^2\Delta^{(j')}_{w_1'})[1]\oplus(\Lambda^*\Delta^{(j'')}_{w_1'',w_2''})[1],\pi[1]\},$$

其特征是权中出现 0。

- 否则，我们有 $\psi(\pi,$自旋$^+)=\pi'[1]$ 和 $\psi(\pi,$自旋$^-)=\pi''[1]$，其中 π' 和 π'' 均为尖点形式。注意，在这种情况下，可能恰好 π' 和 π'' 中的一个在实处具有无穷小特征 $(\pm w_1',\pm w_2',\pm w_3',0,0)$，其中 $w_1'>w_2'>w_3'>0$ 是整数；此时，相关的伽罗瓦表示通过 ℓ-进插值从正则情形得到，参见 [Taï25，推论 6.4.5]。在这种情况下，对于所有素数 $p\neq\ell$，局部-整体相容性均成立，但在 ℓ 处的相容性尚未完全明了。更确切地说，我们知道该表示是晶体的（这是 [Taï25，推论 6.5.4]的推论），其 Hodge-Tate 权等于无穷小特征的特征值（由 ℓ-进插值得出）；但我们尚不知道相关 Weil-Deligne 表示上 Frob_ℓ 的特征值是否为 Satake 参数 $\pm\iota(c(\pi'_\ell))$ 或 $\pm\iota(c(\pi''_\ell))$ 的特征值，因此目前还无法消除 $\pm$ 的歧义。

对于 $M=34$，出现了一种新的形状：$\Delta^o_{w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4}[1]$ 对于

$$(w_1,w_2,w_3,w_4)\in\{(30,20,10,8),(32,16,14,6),(36,16,10,6)\}$$

而我们不知道如何将相关的 spin伽罗瓦表示 $\sigma^{\mathrm{spin}}_{\psi_i\iota}$，表示为与自对偶尖点表示相关的伽罗瓦表示的直和。

我们有关于 PGL_n 上自对偶代数正则尖点自守表示数量的显式公式$\mathbf{Q}$，对于 $n\le 24$（见 [Taï]），因此原则上，采用上述方法，可以计算 fi化后的 交叉上同调 ^{k}（A_g^{Sat}，$\mathbf{V}_\lambda$），至少对于 $k+|\lambda|\le 77=12\cdot 13/2-1$，其结果可用

[2]形式化地定义，令 $\pi_i[d_i]$ 的形状为 $(n_i,\ d_i)$。

spin伽罗瓦表示 $\sigma^{\mathrm{spin}}_{\psi_0\,\iota}$ 和 $\sigma^{\mathrm{spin}}{}_{,\psi_i\,\iota}{}^{\pm}$ [表示，Taï25，定理 7.1.3]。例如，这些交叉上同调群的维数可以显式计算。目前我们尚不知道伽罗瓦表示 $\sigma^{\mathrm{spin}}{}_{,u_i(\psi)\,\psi_i,\iota}$ 的 Hodge-Tate 权是否由配方 spin^{u_i} $(\psi)\,\psi_i$ $(\tau\psi_i)$ 给出（定义见 [Taï25，定义 3.1.7 和 4.7.1]）：见注 7.2。不过，在混合霍奇模的框架下，可以计算 IH$^\bullet(A_g^{Sat}, \mathrm{V}_\lambda)$ 上的实霍奇结构，正如第7节所解释的那样。

3. A_g 和 $X_{g,\,s}$的环面紧化

3.1. A_g的紧化。 A_g 的环面紧化由 Ash、Mumford、Rapoport 和 Tai 在 Spec C 上构造 [AMRT10]，并由 Faltings 和 Chai 在 Spec Z 上构造 [FC90]。令 Ω_g^{rt} 为由对称半正定实 $g\times g$ 矩阵构成的锥，其核有一个定义在 Q 上的基。环面紧化对应于可容许分解，即由 Σ_g 个包含于 Ω_g^{rt}中的有理多面锥构成的集合，并满足以下性质：

(1) Σ_g 中各锥的并覆盖 Ω_g^{rt}；(2) Σ_g 对取面封闭。两个锥的交 Σ_g 是它们共同的面；
(3) Σ_g 在 GL$_g$(**Z**) 的自然作用下保持不变；(4) 在 GL$_g$(**Z**) 的作用下，Σ_g 中锥的轨道有限。

Σ_g Ω_g^{rt}的一个容许分解会为任意 $0\le g'\le g$诱导出$\Omega_{g'}^{\mathrm{rt}}$ 的一个容许分解 $\Sigma_{g'}$。为简便起见，我们将这些容许分解中的每一个记为 Σ，并将其对 g 的依赖关系略去。

对于上述每一个容许分解 Σ，都有一个真代数栈 A_g^{Σ} 将 A_g紧化。为简便起见，我们将其记为 A_g，但要记住它取决于上述容许分解的选择。

如果 Σ 是单纯的，即每个锥 $\sigma\in\Sigma$ 都是单纯的，那么A_g 作为代数栈是光滑的。任意容许分解 Σ 都可以细化为单纯的容许分解。对于任意 Σ，A_g 的边界是一个正规交叉除子，但可能具有自交。

锥 $\sigma\in\Sigma$ 的维数是其在$\mathbf{R}^g$上的二次型向量空间中张成空间的维数。若锥 $\sigma\in\Sigma$ 的通用元素对应于一个秩为 r的对称双线性型，我们就称锥 $\sigma\in\Sigma$ 的秩为 r。

环面紧化与 Satake紧化的关系如下。对于所有可容许分解 Σ 及其关联的紧化A_g，存在唯一的映射

$$\varphi:\overline{A}_g\to A_g^{Sat}$$

将内部 A_g上的恒等映射延拓出去。空间 A_g 具有一个分层，其分层集合由分解 Σ中的锥 σ 的集合索引。我们将 $\beta(\sigma)$记作A_g 中与锥 σ相关联的局部闭层。设 σ 的秩为 r 且维数为 d。那么，φ 在$\beta(\sigma)$上的限制的像包含于 A_g^{Sat}的局部闭子代数栈 A_{g-r} 中。

我们对分层 $\beta(\sigma)$给出更为显式的描述。令 $X_{g-r,r}$ 为万能阿贝尔 $(g-r)$-簇在 A_{g-r}上的 r重纤维积。在 $X_{g-r,r}$上，存在与锥σ 相关联的环面丛 $T(\sigma)$，其纤维为商 T_r/T_σ，其中 $T_r=\mathrm{Sym}^2(\mathbf{Z}^r)\otimes\mathbf{G}_m$ 且 $T_\sigma=(\mathrm{Sym}^2(\mathbf{Z}^r)\cap\langle\sigma\rangle)\otimes\mathbf{G}_m$。考虑有限群 $G(\sigma)$，它是 GL$_r$(**Z**)中锥 σ 的稳定子。群 $G(\sigma)$作用于

$$T(\sigma)\to X_{g-r,r}$$

以及 $\beta(\sigma)=T(\sigma)/G$({v6)。

3.2. 紧化 $X_{g,\,s}$。 设 $\pi:X_g\to A_g$ 为泛阿贝尔簇，并设 $\pi^s:X_{g,\,s}\to A_g$ 为其 s重纤维积。Faltings 和 Chai [FC90] 构造了 $X_{g,\,s}$的环面紧化，这些紧化同样与某些组合数据相关。令

$$\Omega^{\mathrm{rt}}_{g,s}=\{(Q,L_1,\dots,L_s)\in\Omega^{\mathrm{rt}}_g\times(\mathbf{R}^g)^s : L_i \text{ vanishes on the kernel of } Q \text{ for all } i\}.$$

这里，我们将 L_i 视为行向量，或等价地视为线性形式。相对于 Σ 的Ω_g^{rt}的一个容许分解$\Omega_{g,\,s}^{\mathrm{rt}}$相对于一个容许分解 Σ，是由位于 $\Omega_{g,\,s}^{\mathrm{rt}}$中的一组有理多面锥 Σ 构成，并满足以下性质：

(1) Σ 中的锥的并覆盖 $\Omega_{g,\,s}^{\mathrm{rt}}$；

(2) Σ 对取面运算封闭。 Σ中两个锥的交集是它们的公共面；(3) Σ 在 $\mathrm{GL}_g(\mathbf{Z}^g) \ltimes (\mathbf{Z}^g)^s$的自然作用下保持不变；(4) $\mathrm{GL}_g(\mathbf{Z}^g) \ltimes (\mathbf{Z}^g)^s$在 Σ 上的作用有有限多个锥轨道；(5) 任意锥 $\tau \in \Sigma$ 在自然投影映射下都映入 Σ 中的某个锥 σ。

与每个这样的 Σ 相关联的是$X_{g,\,s}$的一个环面紧化。我们将其记作$X_{g,\,s}$，仍然在记号中省略对分解 Σ 的依赖。该环面紧化带有一个映射$\pi^s : X_{g,\,s} \to A_g$，它延拓了 π^s。$X_{g,\,s}$ 的几何性质由 Σ的组合学编码。特别地，若 Σ 是单纯的，则$X_{g,\,s}$ 是非奇异的。锥 $\tau \in \Sigma$ 的维数 是其张成空间的维数。若对一般元素（Q，L_1，$\ldots, L_s$），Q 的秩为 r，则称锥 $\tau \in \Sigma$ 的秩 为 r。

紧化$X_{g,s}$ 具有一种分层，该分层由 Σ的锥 τ 集合索引。令 $\gamma(\tau)$为$X_{g,s}$ 中与 τ相关联的局部闭层。分层 $\gamma(\tau)$可显式描述为一个环面丛的有限群商。令$X_{g-r,r} \times_{A_{g-r}} X_{g-r,s} \to A_{g-r}$ 为万能阿贝尔$g-r$重簇的（$r+s$）重纤维积。存在一个环面丛 $T(\tau) \to X_{g-r,r} \times_{A_{g-r}} X_{g-r,s}$，其纤维为 (对称幂$^2(\mathbf{Z}^r) \times (\mathbf{Z}^r)^s) \otimes \mathbf{G}_m/($对称幂$^2(\mathbf{Z}^r) \times (\mathbf{Z}^r)^s \cap \langle\tau\rangle) \otimes \mathbf{G}_m$。有限群$G(\tau)$是锥 τ在 $\mathrm{GL}_r(\mathbf{Z}) \ltimes (\mathbf{Z}^r)^s$ 中的稳定子，它作用于 $T(\tau) \to X_{g-r,r} \times_{A_{g-r}} X_{g-r,s}$，以及 $\gamma(\tau) = T(\tau)/G(\tau)$。注意，在 $s=0$的情况下，我们恰好得到第3.1节中 A_g 的紧化的分层。

$X_{g,\,s}$ 与 A_g 的分层在以下意义下是相容的。如果 τ 在自然投影映射下映至 σ，那么 $\gamma(\tau)$ 在 π^s下映至 $\beta(\sigma)$。

4. 分层的上同调

4.1. 泛阿贝尔簇的纤维积幂。 回忆一下 $\pi^s : X_{g,\,s} \to A_g$ 是泛阿贝尔 g 维簇 $\pi : X_g \to A_g$的 s重纤维积。

引理 4.1. 局部系统 $R^q\pi_*^s\mathbf{Q}_\ell(-k)$ 分解为$\mathbf{V}_\lambda(-m)$ 的直和，使得 $m \geq k$、$\lambda_1 \leq s$ 和$|\lambda| + 2m = q + 2k$。

证明。 只需在 $k=0$ 时证明这一点，因为函子 $R^q\pi_*^s$ 与泰特扭曲可交换。由库讷公式可得

$$R^q\pi_*^s\mathbf{Q}_\ell \cong \bigoplus_{i_1+\cdots+i_s=q} R^{i_1}\pi_*\mathbf{Q}_\ell \otimes \cdots \otimes R^{i_s}\pi_*\mathbf{Q}_\ell,$$

其中 $\pi^1 = \pi$。我们有 $R^1\pi_*\mathbf{Q}_\ell \cong \mathbf{V}_1$,，而且 $R^i\pi_*\mathbf{Q}_\ell \cong \bigwedge^i \mathbf{V}_1$. 对于 $0 \leq i \leq g$，我们有 e

$$\bigwedge^i \mathbf{V}_1 \simeq \bigoplus_{0\leq j\leq \lfloor i/2\rfloor} \mathbf{V}_{1^{i-2j}}(-j)$$

and

$$\bigwedge^{2g-i} \mathbf{V}_1 \simeq \bigwedge^i \mathbf{V}_1(i-g) \simeq \bigoplus_{0\leq j\leq \lfloor i/2\rfloor} \mathbf{V}_{1^{i-2j}}(i-g-j).$$

考察辛群$_{2g}$ 的对角环面的权，我们看到该表示

$$V_{1^{i_1-2j_1}} \otimes \cdots \otimes V_{1^{i_s-2j_s}}$$

辛群$_{2g}$ 的表示分解为满足条件 $\sum_{k=1}^{s} 1^{i_k-2j_k} - \lambda = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha \alpha$ 的 V_λ的直和，其中 $n_\alpha \geq 0$，且

$$\Delta = \{(1,-1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1,-1),(0,\dots,0,2)\}$$

是单根集合。特别地，只有当 $\lambda_1 \leq s$ 时才会出现 V_λ 。条件 $|\lambda| + 2m = q$ 可由权的考察得出（等价地说，可由 GSp$_{2g}$ 表示的中心特征得出）。□

4.2. **分层空间的谱序列化**。设 Y 是域上的 Deligne–Mumford 栈。假设 Y 具有由闭子栈构成的滤过

$$\emptyset = Y_{-1} \subset Y_0 \subset \cdots \subset Y_n = Y.$$

那么存在一个谱序列

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(Y_p \smallsetminus Y_{p-1}, \mathbf{Q}_\ell) \implies H_c^{p+q}(Y, \mathbf{Q}_\ell) \tag{4.1}$$

微分与权滤过相容。特别地，若 Y 光滑且固有，则每个项 $E^{p,q}_1$ 中只有纯权部分能存留至 $E^{p,q}_\infty$。

这一构造对专家而言众所周知，但为方便读者，我们仍加以说明。对于每个 p，令 $j(p)$ 为开嵌入 $(Y \smallsetminus Y_p) \hookrightarrow Y$，并令 $i(p)$ 为局部闭嵌入 $(Y_p \smallsetminus Y_{p-1}) \hookrightarrow Y$。对于每个 p，在 Y 上有一个可构造层的短正合列，

$$0 \to j(p+1)_!\mathbf{Q}_\ell \to j(p)_!\mathbf{Q}_\ell \to i(p+1)_!\mathbf{Q}_\ell \to 0.$$

现在我们考虑单射链

$$0 = j(n)_!\mathbf{Q}_\ell \to j(n-1)_!\mathbf{Q}_\ell \to \cdots \to j(1)_!\mathbf{Q}_\ell \to j(0)_!\mathbf{Q}_\ell \to j(-1)_!\mathbf{Q}_\ell = \mathbf{Q}_\ell.$$

它可视为$\mathbf{Q}_\ell$ 的递减滤过，其中 $F^p\mathbf{Q}_\ell = j(p)_!\mathbf{Q}_\ell$，且相关分次部分为 $\mathrm{gr}_F^p\mathbf{Q}_\ell = F^p\mathbf{Q}_\ell/F^{p+1}\mathbf{Q}_\ell = i(p+1)_!\mathbf{Q}_\ell$。由此得到 $R\Gamma_c(Y,\mathbf{Q}_\ell)$的相应滤过，以及相应的上同调谱序列，其 E_1 页为

$$E_1^{pq} = H_c^{p+q}(Y, \mathrm{gr}_F^p\,\mathbf{Q}_\ell) = H_c^{p+q}(Y, i(p+1)_!\mathbf{Q}_\ell) = H_c^{p+q}(Y_{p+1} \smallsetminus Y_p, \mathbf{Q}_\ell)$$

收敛到 $H_c^\bullet(Y,\mathbf{Q}_\ell)$；重新编排指标后，便得到我们的谱序列。

4.3. **环面紧化的上同调子商化** $X_{g,s}$。设 Σ 为 Ω_g^{rt}的单纯形容许分解$\widetilde{\ }$，且 Σ 为 $\Omega_{g,s}^{\mathrm{rt}}$ 在 Σ上的单纯形容许分解。我们用 $\pi^s : X_{g,s} \to A_g$ 表示模栈之间的相应态射；这两个模栈均为非奇异且固有的。

引理 4。 2. $H^i(X_{g,\ s})$ 的半单化是 $\bigoplus_{\tau\in\widetilde{\Sigma}} \mathrm{gr}_i^W\, H_c^i(\gamma(\tau))$的子商的直和。

证明。第 3.2 节所述的分层 诱导出 的一个滤过$Y = X_{g,\ s}$，其中 Y_p 所有维数至多为 $\gamma(\tau)$ 的分层之并 p。相应的谱序列（4.1）为

$$\bigoplus_{\dim\gamma(\tau)=p} H_c^{p+q}(\gamma(\tau)) \implies H_c^{p+q}(\overline{X}_{g,s}) = H^{p+q}(\overline{X}_{g,s}).$$

由于 $H^{p+q}(X_{g,\ s})$ 是纯的，因此只有 $H_c^{p+q}(\gamma(\tau))$ 的纯权部分能够存留到 E_∞ 页。因此， $H^i(X_{g,\ s})$ 的半单化是 $\bigoplus_\tau \mathrm{gr}_i^W\, H_c^i(\overline{\gamma(\tau)})$ 的子商的直和。

□

引理 *4.3.* 设 $\tau \in \widetilde{\Sigma}$ 是一个秩为 r、维数为 d的锥。设 $k = \binom{r+1}{2} + rs - d$ 为第 *3.2* 节中描述的相关环面丛 $T(\tau) \to X_{g-r}$的秩。$gr_i^W\, H_c^i(\gamma(\tau))$ 的半单化是纯权上同调群 $gr_i^W\, H_c^p(A_{g-r}, V_\lambda(-m))$ 的子商的直和，其中 (λ, m) 遍历满足 $p + |\lambda| + 2m = i$, $m \geq k$ 和 $\lambda_1 \leq s + r$ 的 $GSp_{2(g-r)}$ 的支配权。

证明。 环面丛 $T(\tau)$ 是 $X_{g-r,\ s+r}$ 上的一个秩为 k的仿射丛的开子栈。事实上，该环面丛是 k 个 $\mathbf{G}_m$-丛的积，其中每个丛都是某个 $X_{g-r,\ s+r}$上的线丛 L_j 去掉零截面所得的空间。因此， $T(\tau)$ 是直和 $V := \bigoplus_{j=1}^{k} L_j$ 去掉零截面所得的空间。由紧支撑上同调的长正合列可知，我们有一个单射

$$\mathrm{gr}_i^W H_c^i(T(\tau)) \hookrightarrow \mathrm{gr}_i^W H_c^i(V).$$

此外，我们有一个单射

$$\mathrm{gr}_i^W H_c^i(\gamma(\tau)) \cong \mathrm{gr}_i^W H_c^i(T(\tau))^{G(\tau)} \hookrightarrow \mathrm{gr}_i^W H_c^i(T(\tau)).$$

由于 V 是 $X_{g-r,s+r}$ 上秩为 k 的向量丛，我们有

$$H_c^i(V, \mathbf{Q}_\ell) \cong H_c^{i-2k}(X_{g-r,s+r}, \mathbf{Q}_\ell(-k)).$$

复合后，我们有一个单射

$$\mathrm{gr}_i^W H_c^i(\gamma(\tau)) \hookrightarrow \mathrm{gr}_i^W H_c^{i-2k}(X_{g-r,s+r}, \mathbf{Q}_\ell(-k)).$$

为计算 $\mathrm{gr}_i^W H_c^{i-2k}(X_{g-r,s+r},\mathbf{Q}_\ell(-k))$，我们对投影映射 $\pi^{s+r} : X_{g-r,s+r} \to A_{g-r}$ 应用紧支撑 ℓ-进上同调的 Leray谱序列。Leray谱序列

$$E_2^{p,q} = H_c^p(A_{g-r}, R^q\pi_*^{s+r}\mathbf{Q}_\ell(-k)) \implies H_c^{p+q}(X_{g-r,s+r}, \mathbf{Q}(-k)) \tag{4.2}$$

与权相容，因此 将 $\mathrm{gr}_i^W H_c^{i-2k}(X_{g-r,s+r},\mathbf{Q}_\ell(-k))$ 半单化后是 $\mathrm{gr}_i^W H_c^p(A_{g-r}, R^q\pi_*^{s+r}\mathbf{Q}_\ell(-k))$的子商的直和，其中 $p+q = i-2k$。应用引理 4.1即可得到结论。 □

命题 4.4. *$H^i(X_{g,s})$ 的半单化是交叉上同调群 $IH^p(A_{g-r}^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda(-m))$的子商的直和，其中 $g \geq r \geq 0$, 且(λ, m) 遍历满足 $p + |\lambda| + 2m = i$、 $m \geq \binom{r+1}{2} + rs$ 和 $\lambda_1 \leq s + r$ 的 $GSp^{2(g-r)}$ 的支配权。*

证明。 这由定理 4.2 和定理 4.3 得出，因为定理 $\mathrm{gr}_i^W H_c^p(A_{g-r},\mathbf{V}_\lambda(-m))$ 中出现的每个对象都是相应交叉上同调群 $IH^p(A_{g-r}^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda(-m))$ 的子商。事实上，根据 [Dur95，引理 2] （但系数取在局部系统中）ffi，自然映射

$$H_c^p(A_{g-r}, \mathbf{V}_\lambda(-m)) \to IH^p(A_{g-r}^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda(-m))$$

在纯权商上诱导出一个单射。 □

定理1.7的证明。 现在结合命题4.4 和定理1.4即可得到该结果。 □

5. Non-Tate cohomology

引理5.1。 设 $f\colon\ X \to Y$ 是域 k上有限型分离 *Deligne–Mumford* 栈之间的一个射影态射，且 X非奇异。设 $j\colon\ U \hookrightarrow Y$是一个稠密开嵌入，使得 $f^{-1}(U) \to U$光滑。那么 $\oplus_n j_{!*} j^* R^n f_* \mathbf{Q}_\ell[-n]$是 $Rf_*\mathbf{Q}_\ell$的一个直和项。

证明。根据分解定理 [BBD82], , 对于$X_k \to Y_k$该结果成立；但由于分解定理所给出的分裂并非典范的，因此没有先验理由认为它能下降到 k。然而，根据相对 Hard Lefschetz 定理和 [Del68], , 并利用 $D_c^b(Y, \mathrm{Q}_\ell)$ 是反常层的导出范畴 [Bei87], , 我们看到 $Rf_*\mathrm{Q}_\ell \simeq \bigoplus_n {}^{\mathfrak{p}}H^n(Rf_*\mathrm{Q}_\ell)[-n]$ 在 k上成立。再由 [HZ25 的论证（引理 3.2.6]），对于所有 n，$({}^{\mathfrak{p}}Rf_*\mathrm{Q}_\ell)$ 是 ${}^{\mathfrak{p}}H^n(Rf_*\mathrm{Q}_\ell)$ 的一个直和项，其中利用了$j^{*\mathfrak{p}}H^n(Rf_*\mathrm{Q}_\ell)$ 是一个移位的局部系统这一事实。 X 和 Y是代数栈这一事实在论证中不起作用。事实上，我们可以转到粗空间；由于 X 的粗空间 cX 只有有限商奇点，它仍满足 $\mathrm{IC}_{cX} = \mathrm{Q}_\ell[\dim cX]$。 □

回顾表 $c(g)$中定义的函数，并在定理1.9 的陈述中使用。

定理1.9在 $(g,\ s)\neq(3,\ 6),\ (3,\ 7)$的证明。 假设 $g\geq 4$且 $s\geq c(g)=7-g$或 $g=3$且 $s\geq 8$。现在将定理 5.1 应用于映射 $f:X_{g,\ s}\overline{\to}A_g^{Sat}$，其中 $j:\ A_g\to A_g^{Sat}$。于是

$$IH^{\bullet-q}(A_g^{Sat},R^q\pi_*^s\mathbf{Q}_\ell)\hookrightarrow H^\bullet(\overline{X}_{g,s},\mathbf{Q}_\ell).$$

- 对于 $g=3$和 $s\geq 8$，取 $\lambda=(8,\ 4,\ 4)$系数系 $\mathbf{V}_\lambda$出现在 $R^{16}\pi_*^s\mathbf{Q}_\ell$中，而参数 $\Delta_{11}[4]\oplus($对称幂$^2\ \Delta_{11})[1]$对 交叉上同调 $^\bullet(A_g^{Sat},\ \mathbf{V}_\lambda)$贡献了一个非泰特伽罗瓦表示（见表 4）。

- 对于 $4\leq g\leq 7$和 $s\geq 7-g=c(g)$，系数系 V_λ 出现在 $R^{4c}(g)\pi_*^s\mathrm{Q}_\ell$ 中，其中$\lambda=(c(g)\ c(g)\ c(g)\ c(g)\ 0,\ldots,0)$，而参数 $\Delta_{11}[4]\oplus[2g-7]$ 对交叉上同调 $\mathrm{IH}^\bullet(A_g^{Sat},\mathrm{V}_\lambda)$ 贡献了一个非泰特伽罗瓦表示（见表 4 ）。

- 对于 $g=8$，我们需要证明 $\mathrm{IH}^\bullet(A_8^{Sat},\mathrm{Q}_\ell)$ 不是泰特型。为此，我们考虑参数$\psi=\Delta_{11}[6]\oplus[5]$。我们有 $u_1(\psi)=-\epsilon(1\ 2,\Delta_{11})\min(5,6)=-1$。根据 Taï25, §6.3] 中的计算，求出$^-_{\Delta_{11}[6]}\circ\widetilde{\alpha}_{\Delta_{11}[6]}$复合旋量$^-_{\Delta_{11}[6]}\circ\widetilde{\alpha}_{\Delta_{11}[6]}$ 后，利用权可知 $(\mathrm{Sym}^2\ S_\ell\langle 12\rangle)(-3)$ 出现在 $\mathrm{IH}^{28}(A_8^{Sat},\mathrm{Q}_\ell)$ 中。

- 对于 $g\geq 9$，我们同样需要证明 $\mathrm{IH}^\bullet(A_g^{Sat},\mathrm{Q}_\ell)$ 不是泰特型。我们使用形如 $\Delta(j)$ $_{2g-3}[4]\oplus[2g-7]$ 的参数（注意 $2g-3\geq 15$，因此 $s\langle 2g-3\rangle>0$）。我们有 $u_1(\psi)=\epsilon(1\ 2^-,\Delta(j)\ _{2g-3})\min(4,_{2g-7})=1$，因为 $2g-7\geq 11>4$，所以计算与（E 型）中的相同，由此得到 $\oplus_j\mathrm{Sym}^2\ \rho_\Delta(j)\ _{2g-3}$ 出现在 $\mathrm{IH}^{4g-6}(A_g^{Sat},\mathrm{Q}_\ell)$ 中。

现在假设 $g\geq 4$和 $g+s\leq 6$。由命题 4.4，只需证明对于满足 $\lambda_1\leq s+r$的所有 $g\geq r\geq 0$，以及取遍 $\mathrm{Sp}_{2(g-r)}$ 的支配权的 λ，$\mathrm{IH}^\bullet(A_{g-r}^{Sat},\mathrm{V}_\lambda)$ 都是泰特的。由于不等式 $\lambda_1+g-r\leq 6$，只有形如 $[2g+1]$ 或 $\Delta_{11}[2]\oplus[2d+1]$的参数会产生贡献。第一种情形的贡献显然是泰特的，第二种情形也由 (C 型) 中的计算可知是泰特的。对于 $g=1$和 $s<10$，考察表 2、3 和 4 可知，没有非平凡参数会产生贡献，因此唯一的贡献是泰特的。如果 $g=2$ 和 $s<7$，唯一会产生贡献的参数是 $[5]$、$\Delta_{11}[2]\oplus[1]$和 $\Delta_{15}[2]\oplus[1]$。第一个贡献显然是泰特的，其余贡献由 (C 型) 中的计算可知是泰特的。最后，如果 $g=3$ 和 $s<6$，唯一会产生贡献的参数是$[7]$、$\Delta_{11}[2]\oplus[3]$和 $\Delta_{15}[2]\oplus[3]$。第一个贡献显然是泰特的，其余贡献由 (C 型) 中的计算可知是泰特的。□

剩下要证明定理 1.9 适用于 $(g,\ s)=(3,\ 6)$ 或 $(3,\ 7)$。证明 $H^\bullet(X_{3,\ s},\ \mathbf{Q}_\ell)$ 不是泰特型的策略，与其他情形不同。我们将发现，对于所有有贡献的局部系统 $\mathbf{V}_\lambda$，$IH^\bullet(A_3^{Sat},\ \mathbf{V}_\lambda)$ 都是泰特型的。相反，我们将对每个分层 S，把紧支撑欧拉特征 $e_c(S)$ 在 ℓ-进伽罗瓦表示的格罗滕迪克群中求和。所有非泰特型的贡献都将是伽罗瓦表示 $S_\ell\langle 18\rangle$ 的泰特扭曲。我们将发现，这些贡献在 $e_c(S)$ 中出现：当 S 是内部时，以及当 S 是环面秩为一的分层时；二者符号相反。我们需要验证这些贡献不会相互抵消。

定义5.2。 设 $M,\ N$ 是 ℓ-进伽罗瓦表示的格罗滕迪克群中的元素。若 $M-N$ 是 $L:=\mathbf{Q}_\ell(-1)$ 中的多项式，我们记作 $M\equiv N$。

5.1. **内部**。

引理 5.3。我们有

$$e_c(X_{3,6})\equiv(L^6+21L^5+120L^4+280L^3+309L^2+161L+32)\cdot S_\ell\langle 18\rangle, \tag{5.1}$$

$$e_c(X_{3,7})\equiv(28L^9+784L^8+6616L^7+25984L^6+57400L^5+77952L^4+ \\ +67032L^3+35728L^2+10780L+1408)\cdot S_\ell\langle 18\rangle. \tag{5.2}$$

证明。 我们回到引理 4.1的证明，并计算每个相关 V_λ 在

$$V_{1^{i_1-2j_1}}\otimes\cdots\otimes V_{1^{i_s-2j_s}}.$$

更确切地说，我们关注满足以下条件的支配权 λ： $\lambda_1 \leq 7$ 并且 $e_c(A_3, \mathbf{V}_\lambda)$，可由 [Taï25定理 8.3 计算。1], 不是泰特的。该公式将 $e_c(A_3, \mathbf{V}_\lambda)$ 表示为以下各项的线性组合： $e_{IH}(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_{\lambda'})$ 其中 $g \leq 3$ 且 $\lambda'_1 + g \leq s + 3$。记 $\tau = \lambda' + \rho$ 该不等式意味着，对于任意

$$\psi = \psi_0 \oplus \cdots \oplus \psi_r \in \widetilde{\Psi}^{\mathrm{unr},\tau}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{Sp}_{2g})$$

对于 $\psi_i = \pi_i[d_i]$，我们有 $\pi_i \in \{1, \Delta_{11}, \Delta_{15}, \Delta_{17}, \Delta_{19}, \Delta_{19,7}\}$ 对所有 i 都成立。由于我们有 $g \leq 3$，因此不可能有 $\pi_i = \Delta_{19,\,7}$ （注意在此情形下 $d_i \geq 2$，因为它是偶数），同理可得

$$\psi_i \in \{[1], [3], [5], [7], \Delta_{11}[2], \Delta_{15}[2], \Delta_{17}[2]\}.$$

因此， ψ 的形式要么是 $[2d+1]$，要么是 $\Delta_w[2] \oplus [2d+1]$，并且我们知道(C 型) 在这些情形下，交叉上同调是泰特型的，但 $\psi = \Delta_{17}[2] \oplus [1]$除外，它出现在 $g = 2$ 和$\mathbf{V}_{7,7}$中。通过枚举，相关的支配权只有 $\lambda = (6,\ 6,\ \lambda_3)$，当 $\lambda_3 \in \{0, 2, 4, 6\}$时，我们使用 [Taï25，定理 8.3，计算得出（省略细节）。1]

$$e_c(A_3, \mathbf{V}_\lambda) \equiv -e_{IH}(A_2^{Sat}, \mathbf{V}_{7,7}) \equiv S_\ell\langle 18\rangle.$$

我们需要考虑满足 $0 \leq i_k \leq 3$ 的所有整数元组（i_1，……，i_s）、满足 $0 \leq 2j_k \leq i_k$ 的所有整数元组（j_1，……，j_s），以及满足对所有 $k \in S$ 都有 $i_k \neq 3$ 的所有 $\{1, \ldots, s\}$ 的子集 S，使得$\mathbf{V}_{6,\ 6,\ \lambda_3}(-m)$（其中 λ_3 为偶数）出现在

$$\mathbf{V}_{1^{i_1-2j_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{V}_{1^{i_s-2j_s}} \left(-\sum_{k=1}^{s} j_k + \sum_{k \in S} i_k - g \right).$$

这意味着 $\#\{k \,|\, i_k - 2j_k \geq 2\} \geq 6$ 且 $q = \sum_{k=1}^{s} i_k$ 为偶数。

- 我们首先考虑 $s = 6$ 的情形。对于所有 k，都有 $2 \leq i_k \leq 3$ 和 $j_k = 0$。权的计算给出

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{1^3}^{\otimes 6} &\simeq \mathbf{V}_{6,6,6} \oplus \mathbf{V}_{6,6,4}(-1)^{\oplus 5} \oplus \mathbf{V}_{6,6,2}(-2)^{\oplus 9} \oplus \mathbf{V}_{6,6,0}(-3)^{\oplus 5} \oplus \text{irrelevant} \\
\mathbf{V}_{1^3}^{\otimes 4} \otimes \mathbf{V}_{1^2}^{\otimes 2} &\simeq \mathbf{V}_{6,6,4} \oplus \mathbf{V}_{6,6,2}(-1)^{\oplus 3} \oplus \mathbf{V}_{6,6,0}(-2)^{\oplus 2} \oplus \text{irrelevant} \\
\mathbf{V}_{1^3}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{V}_{1^2}^{\otimes 4} &\simeq \mathbf{V}_{6,6,2} \oplus \mathbf{V}_{6,6,0}(-1) \oplus \text{irrelevant} \\
\mathbf{V}_{1^2}^{\otimes 6} &\simeq \mathbf{V}_{6,6,0} \oplus \text{irrelevant}.
\end{aligned}$$

  考虑到这些张量积各自出现的次数，以及上述可能的集合 S，记 $\mathbf{1}$ 为$\mathbf{Q}_\ell$，记 L 为$\mathbf{Q}_\ell(-1)$，我们得到

$$\begin{aligned}
e_c(X_{3,6}) \equiv\ & e_c(A_3, \mathbf{V}_{6,6,6}) + (15 + 35L + 15L^2) \cdot e_c(A_3, \mathbf{V}_{6,6,4}) \\
& + (15 + 105L + 189L^2 + 105L^3 + 15L^4) \cdot e_c(A_3, \mathbf{V}_{6,6,2}) \\
& + (1 + 21L + 105L^2 + 175L^3 + 105L^4 + 21L^5 + L^6) \cdot e_c(A_3, \mathbf{V}_{6,6,0}) \\
\equiv\ & (L^6 + 21L^5 + 120L^4 + 280L^3 + 309L^2 + 161L + 32) \cdot S_\ell\langle 18\rangle
\end{aligned}$$

- 现在考虑 $s = 7$ 这种情形。计算与 $s = 6$ 类似，只是更繁琐，因此我们借助计算机完成了计算，并得到（5.2）。□

5.2. 边界的秩 1 环面1 部分。 设 $X_{g,s}$ 是X_g的环面紧化,$_s$。边界的秩 1 环面部分是指对应于秩为 1 的锥的分层之并。等价地，这是$X_{g,s}$ 中的轨迹，在该轨迹上，万有半阿贝尔簇（从 A_g 拉回）具有环面秩 1。

我们需要更明确地描述 $\Omega^{\mathrm{rt}}_{g,s}$的容许分解中的秩 1 锥。当 $s = 0$ 时，直接验证可知，Ω^{rt}_g的任意容许分解中都存在唯一的秩 1 锥轨道 σ。秩一锥 σ 是一维的，形式为 $\mathbf{R}_{\geq 0} q$，且有 $G(\sigma)$ =

$\mathrm{GL}_1(\mathbf{Z}) = \{\pm 1\}$。我们固定这样一个锥 σ。相应的分层 $\beta(\sigma)$ 在 A_g 中是一个与 $[X_{g-1,1}/\{\pm 1\}]$ 同构的边界除子。当 $s > 0$ 时，σ 在 $\Omega^{\mathrm{rt}}_{g,s}$ 中的逆像与 $\mathbf{R}_{\geq 0}q \times \mathbf{R}^s$ 同构。将 $\Omega^{\mathrm{rt}}_{g,s}$ 中位于 σ 上方的每个秩 1 锥 τ，对应到凸多面体 $\tau^{\mathrm{aff}} := \tau \cap \{q\} \times \mathbf{R}^s$，由此可知，边界的秩 1 环面部分在组合意义上由$\mathbf{R}^s$的一个多面体分解描述，该分解在 $\mathbf{Z}^s \rtimes \{\pm 1\}$的作用下等变。$X_{g,s}$内的环面秩 1 分层，因而与多面体的 $(\mathbf{Z}^s \rtimes \{\pm 1\})$-轨道一一对应。如果相应的环面紧化是光滑的，那么我们就得到 $\mathbf{R}^s$的一个三角剖分。

命题 5.4。设 Σ 是 $\Omega^{\mathrm{rt}}_{g,s}$的一个容许分解。在此分解中，我们有

(1) 若 τ 是秩为1 的锥，则 $G(\tau)$ 是平凡群或二阶循环群。*(2)* 秩为1 且满足 $G(\tau) \cong \mathbf{Z}/2$ 的锥恰有 2^s 个轨道。若该分解是单纯的，则这些锥的维数均为1或2。

证明。秩为 r 的锥的稳定子是 $(\mathbf{Z}^r)^s \rtimes \mathrm{GL}_r(\mathbf{Z})$ 中的有限子群，因此也是 $\mathrm{GL}_r(\mathbf{Z})$ 的有限子群。这就推出了第一部分。

对于第二部分，我们考虑实环面 $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^s$所诱导的胞腔分解。该胞腔分解在 ± 1的作用下是等变的，而满足 $G(\tau) \cong \mathbf{Z}/2$ 的锥对应于一个由 ± 1固定的胞腔。从拓扑上看，不动胞腔必与$\mathbf{R}^d$ 同胚（对于 $d = \dim \tau^{\mathrm{aff}} = \dim \tau - 1$），且 ± 1作用于其上。特别地，每个不动胞腔都有唯一的不动点。然而，± 1 在一个 s维实环面上的作用恰有 2^s 个不动点。

对于最后一部分，考虑单形 τ_{aff} 的一个对合。我们断言，若该对合有孤立不动点，则此单形是一个顶点或一条边。事实上，若此单形有两个以上的顶点，那么对合对顶点集合的作用就不是传递的。该对合至少在边界上固定两个不同的点（顶点或边的中点），但连接这两点的直线也会被固定，矛盾。□

引理 5.5. 设 $\gamma(\tau)$ 是 $X_{3,6}$ 的一个环面秩为1 的分层。

(1) 若 $G(\tau)$ 是平凡的，则 $e_c(\gamma(\tau)) \equiv -(L-1)^k \cdot S_\ell\langle 18\rangle$，其中 $k = 6 - \dim(\tau^{\mathrm{aff}})$ 是第 *3.2* 节中所述环面丛的秩。*(2)* 若 $G(\tau) \cong \mathbf{Z}/2$ 且 $\dim \tau^{\mathrm{aff}} = 0$，则 $e_c(\gamma(\tau)) \equiv -(L^6 + 15L^4 + 15L^2 + 1) \cdot S_\ell\langle 18\rangle$。*(3)* 若 $G(\tau) \cong \mathbf{Z}/2$ 且 $\dim \tau^{\mathrm{aff}} = 1$，则 $e_c(\gamma(\tau)) \equiv -(L^5 + 10L^3 + 5L) \cdot S_\ell\langle 18\rangle$。

类似地，$\gamma(\tau)$ 是$X_{3,7}$的一个环面秩为1 的分层。

(1) 若 $G(\tau)$ 是平凡的，则 $e_c(\gamma(\tau)) \equiv -(36 + 64L + 36L^2$<style id='24'>$(L-1)^k \cdot S_\ell\langle 18\rangle$，其中 $k = 7 - \dim(\tau_{\mathrm{aff}})$是第3.2节所述环面丛的秩。*(2)* 若 $G(\tau) \cong \mathbf{Z}/2$ 且 $\dim \tau^{\mathrm{aff}} = 0$，则

$$e_c(\gamma(\tau)) \equiv -(29L^9 + L^8 + 540L^7 + 756L^6 + 1134L^5 + 1358L^4 + 924L^3 + 196L^2 + 189L - 7) \cdot S_\ell\langle 18\rangle.$$

(3) 若 $G(\tau) \cong \mathbf{Z}/2$ 且 $\dim \tau^{\mathrm{aff}} = 1$，则

$$e_c(\gamma(\tau)) \equiv -(29L^8 + 8L^7 + 380L^6 + 568L^5 + 590L^4 + 568L^3 + 380L^2 + 8L + 29) \cdot S_\ell\langle 18\rangle$$

证明。先考虑 $G(\tau)$是平凡的情形。于是，$\gamma(\tau) = T(\tau)$是一个秩为 k的环面丛 $T(\tau) \xrightarrow{p} X_{2,\ s+1}$。局部系统 $R^q p_! \mathbf{Q}_\ell$ 是平凡的，因为 p 是Zariski局部平凡纤维化。我们得到一个谱序列

$$E_2^{pq} = H_c^p(X_{2,s+1}) \otimes H_c^q(\mathbb{G}_m^k) \implies H_c^{p+q}(T(\tau)) \tag{5.3}$$

因此 $e_c(T(\tau)) = (L-1)^k e_c(X_{2,\ s+1})$。

然后我们通过 $e_c(X_{2,\ s+1})$ 的 Leray谱序列研究 fibration $\pi^{s+1} : X_{2,\ s+1} \to A_2$。我们知道 $\mathbf{V}_\lambda$ 上任意辛局部系统的上同调，其中 A_2 [Pet15]。特别地，这些结果表明 $\lambda = (7, 7)$是唯一的 λ，使得 $H_c^\bullet(A_2, \mathbf{V}_\lambda)$ 具有非Tate上同调，并且

使 λ_1 最小：表示 $S_\ell\langle 18\rangle$ 出现在 H_c^3（A_2，$\mathbf{V}^{7,7}$）中。存在具有非Tate上同调的局部系统时，λ_1 的第二小值为 $\lambda_1 = 9$。因此，对于 $s \in \{6,7\}$，我们有

$$e_c(X_{2,s+1}) \equiv -g_s(L) S_\ell\langle 18\rangle$$

对于一个依赖于 s 的多项式 $g_s \in \mathbb{Z}[L]$；也就是说，g 的第 i 个系数是 $\mathrm{V}^{7,7}(-i)$ 在 $R^{14+2i}\pi_*^{s+1}\mathbb{Q}_\ell$ 中的重数，其中 $\pi^{s+1} : X_{2,s+1} \to A_2$。（事实上，根据上文所述，除 $\mathrm{V}^{7,7}$ 外，所有 V_λ 都只贡献泰特类；由于 $\mathrm{V}^{7,7}(-i)$ 的权为 $14+2i$，它仅当 $j = 14+2i$ 时才能在 $R^j\pi_*^{s+1}\mathbb{Q}_\ell$ 中非平凡地出现。）与引理 5.3 中类似的直接计算表明

$$g_6(L) = 1 \qquad \text{and} \qquad g_7(L) = 36 + 64L + 36L^2. \tag{5.4}$$

这给出了 $G(\tau)$ 平凡时的结果。

现在考虑 $G := G(\tau)$ 非平凡（因而为 2 阶循环群），且 $\gamma(\tau) = [T(\tau)/G]$ 的情形。若 X 是一个带有 G-作用的空间，记 $e_c^+(X)$ 和 $e_c^-(X)$ 分别为 G 作用在紧支撑上同调上时，$(+1)$-特征子空间和 (-1)-特征子空间的欧拉示性数。等价地，

$$e_c^+(X) = e_c([X/G]) \qquad \text{and} \qquad e_c^-(X) = e_c(X) - e_c^+(X).$$

群 G 作用于谱序列（5.3），并且在 E_2页上分别作用于两个张量因子。由于 $e_c([T(\tau)/G])$ 是 G不变量在 E_2页上的欧拉示性数，我们得到

$$e_c(\gamma(\tau)) = e_c([T(\tau)/G]) = e_c^+(X_{2,s+1})e_c^+(\mathbb{G}_m^k) + e_c^-(X_{2,s+1})e_c^-(\mathbb{G}_m^k).$$

群 G 在偶数次上以恒等变换作用于 $H_c^\bullet(\mathbb{G}_m^k)$，在奇数次上则以乘以 -1 的方式作用，因此很容易读出 $e_c^+(\mathbb{G}_m^k)$ 和 $e_c^-(\mathbb{G}_m^k)$。研究 G 对 $H_c^\bullet(X_{2,\,s+1})$ 的作用时，我们再次使用纤维化在 A_2 上的 Leray 谱序列，因为 G 逐纤维作用。群 G将在 $R\pi_*^{s+1}\mathbf{Q}_\ell \cong (R\pi_*^1\mathbf{Q}_\ell)^{\otimes s+1}$ 的一个张量因子上非平凡地作用；在这个张量因子上，它对偶数 i 的 $R^i\pi_*\mathbf{Q}_\ell$ 平凡作用，对奇数 i 则以 -1 作用。于是我们可以写出

$$g_s(L) = g_s^+(L) + g_s^-(L)$$

记录 i阶系数数 $g_s^+(L)$（分别为 $g_s^-(L)$），表示 $\mathbf{V}^{7,7}(-i)$ 在 $(+1)$-特征子空间（分别为 (-1)-特征子空间）中 $R^{14+2i}\pi_*^{s+1}\mathbf{Q}_\ell$的重数。以推导（5.4）的相同方式，我们 得到

$$g_6^+(L) = 1, \qquad g_6^-(L) = 0, \qquad g_7^+(L) = 29 + 50L + 29L^2, \qquad g_7^-(L) = 7 + 14L + 7L^2.$$

于是 $e_c^\pm(X_{2,\,s+1}) \equiv -g_s^\pm(L) S_\ell\langle 18\rangle$，将上述结果合并即可得到结论。 □

5.3. **非抵消**。

引理 5.6。 设 $s \in \{6,7\}$。则 $H^\bullet(X_{3,\overline{\ s}})$ 不是 *Tate* 型。

证明。 我们通过对每个锥 τ 求和 $e_c(\gamma(\tau))$ 来计算 $e_c(X_{3,\,s})$。

首先考虑 第一种情况 $s = 6$。根据定理 5.3，内部的贡献为

$$e_c(X_{3,6}) = L^6 S_\ell\langle 18\rangle + 21L^5 S_\ell\langle 18\rangle + \dots$$

若 τ 的秩为 > 1，则 $e_c(\gamma(\tau))$是关于 L的多项式。对于秩为 1 的 τ，我们考察 $e_c(\gamma(\tau))$中 $L^6 S_\ell\langle 18\rangle$ 和 $L^5 S_\ell\langle 18\rangle$ 的系数。根据定理 5.5，该系数始终非正。根据定理 5.4，恰有 64 个锥 τ，其稳定子群为 $G(\tau) \cong \mathbf{Z}/2$；对其中每一个，$e_c(\gamma(\tau))$都含有一项 $-L^6 S_\ell\langle 18\rangle$ 或 $-L^5 S_\ell\langle 18\rangle$（取决于 $\dim \tau$）。无论是哪种情况，将它们全部相加后可知，$e_c(X_{3,6})$中 $L^6 S_\ell\langle 18\rangle$或 $L^5 S_\ell\langle 18\rangle$的系数严格为负。

现在考虑 $s = 7$。内部的贡献为 $e_c(X_{3,7}) = 28L^9 S_\ell\langle 18\rangle + \dots$，并且如果 τ的秩为 > 1，那么$e_c(\gamma(\tau))$仍是关于 L 的多项式。当 τ的秩为 1 时，根据定理 5.5，仅当 $\dim \tau^{\mathrm{aff}} = 0$时，$e_c(\gamma(\tau))$中 $L^9 S_\ell\langle 18\rangle$的系数才非零；此时该系数为 -36或 -29。无论哪种情况，我们都可以看出，$e_c(X_{3,7})$中 $L^9 S_\ell\langle 18\rangle$的系数必定严格为负。□

这就完成了定理1.9的证明。

注5.7。我们指出，对计算结果有一个非平凡的一致性检验。计算 $e_c(X_{3,s})$（其中 $s=6,7$）时，我们发现奇权项全都具有 $L^iS_\ell\langle 18\rangle$ for $i\le 6$，分别为 $i\le 9$ 的形式。特别地，可推出 $H^{31}(X_{3,6})=0$ 以及 $H^{37}(X_{3,7})=0$。根据庞加莱对偶，这意味着$H^{17}(X_{3,6})=H^{17}(X_{3,7})=0$。因此，在这两种情况下，将所有锥 τ 上的 $e_c(\gamma(\tau))$ 相加时， $S_\ell\langle 18\rangle$ 的系数必定抵消。我们来直接验证这一点。

先考虑 $s=6$ 的情形。当 $\gamma(\tau)=X_3$ 时， $e_c(\gamma(\tau))$ 中 $S_\ell\langle 18\rangle$ 的系数为 32（定理 5.3）；当 τ 的秩为 >1 时，该系数为零；当 τ 的秩为 1 且维数为 d 时，该系数为 $(-1)^d$，但若 $\dim\tau=2$ 且 $G(\tau)\cong \mathbf{Z}/2$，则该系数为零（定理 5.5）。

令 a_i（分别为 b_i）表示维数为 $i+1$、稳定子平凡（分别为 2 阶循环群）的秩 1 锥的数量。回忆一下，对于 $i>1$，有 $a_i=0$。我们得到方程

$$a_0+\sum_i(-1)^ib_i=32. \tag{5.5}$$

我们还可以直接如下证明（5.5）。我们得到 $T=(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^6$ 的胞腔分解，其中有 a_i+2b_i 个维数为 i 的胞腔，因此有 $0=e(T)=\sum_i(-1)^i(a_i+2b_i)$。将此方程与 $a_0+a_1=2^s=64$（命题 5.4）取半和，即得（5.5）。

现在考虑 $s=7$ 的情形。 $e_c(\gamma(\tau))$ 中 $S_\ell\langle 18\rangle$ 的系数为 $1408=11\cdot 128$，当 $\gamma(\tau)=X_{3,7}$ 时；当 τ 的秩为 >1 时，该系数为零。若 τ 的秩为 1、维数为 d 且具有平凡稳定子，则该系数为 $36(-1)^{d+1}$。若 $G(\tau)\cong\mathbf{Z}/2$，则当 $\dim\tau$ 为 1 或 2 时，该系数分别为 7 或 -29。沿用上述记号，我们得到方程

$$-7a_0+29a_1-36\sum_i(-1)^ib_i=11\cdot 128. \tag{5.6}$$

同样，这可以由方程 $\sum_i(-1)^i(a_i+2b_i)=0$ 乘以 -18，再加上方程$a_0+a_1=128$乘以 11 得到。

我们还注意到， $S_\ell\langle 18\rangle$-同型部分在 $H^{17}(X_{3,6})$ 和 $H^{17}(X_{3,7})$ 中的消失可由第1.12 定理在第6.1节中的证明推出。

6. Hodge numbers

定理 1.11 的证明。若能找到一个素数 ℓ（以及 $\iota:\mathbf{C}\simeq\overline{\mathbf{Q}}_\ell$），使得定理 1.4 中与自守表示相关联的所有伽罗瓦表示都绝对不可约（猜想上，它们总是不可约的），那么由霍奇–泰特比较同构 [Fal88] 和推论 1.8 可立即得到结论。对于与一级（或更一般地，权为 ≥ 2 的非 CM）特征形式相关联的二维表示的对称幂，已知对所有 ℓ 和 ι 均成立。对于与 Δ_{w_1,w_2}（$23\ge w_1>w_2>0$ 为奇数）相关联的四维伽罗瓦表示，作为 [Ram13, 定理 B] 的特例，已知除有限多个 ℓ 外均成立。□

6.1. **全纯形式**。定理 1.11给出了对 $H^k(X_{g,s})$的霍奇结构的一般约束。这里，我们进一步给出对全纯部分（由霍奇对称性可知，反全纯部分亦然）的强约束 $H^{k,0}(X_{g,s})$，从而证明定理 1.12。我们还利用全纯形式证明定理 1.10。

定理 1.12 的证明。我们应用命题 4.4，将问题归结为研究群 $\mathrm{IH}^p(A_{g-r}^{Sat},\mathbf{V}_\lambda(-m))$。只有满足 $m=0$ 的群才能贡献非平凡的全纯形式。[3] 我们有 $m\ge\binom{r+1}{2}+rs$，因此当 $r\ne 0$ 时有 $m\ge 1$。所以，我们只需考虑满足 $p+|\lambda|=k$ 和 $\lambda_1\le s$ 的 $\mathrm{IH}^p(A_g^{Sat},\mathbf{V}_\lambda)$。全纯形式空间消失的情形可通过考察表 3 和表 4 得出。对于不消失的情形，我们按照定理 1.9 的证明进行论证：存在一个伽罗瓦表示的单射

$$IH^{\bullet-q}(A_g^{Sat},R^q\pi_*\mathbf{Q}_\ell)\hookrightarrow H^\bullet(\overline{X}_{g,s},\mathbf{Q}_\ell).$$

[3]我们利用 $IH^\bullet(A_g^{Sat},\mathbf{V}_\lambda)$ 是有效的这一点，即当且仅当 $h^{p,q}>0$ 时，$p,q\ge 0$。事实上，可以通过将它嵌入到非奇异紧化 $X_{g,s}$的上同调中，证明它是有效的。

当 $g = 3$ 和 $s \geq 8$ 或 $4 \leq g \leq 7$ 和 $s \geq c(g)$时，我们 找到伽罗瓦表示 对称幂$^2 S_\ell\langle 11\rangle$，它来自表 4 的前五 行。相应的霍奇结构 Hdg(对称幂$^2 S_\ell\langle 12\rangle$) 具有非零的全纯 22-形式空间。由霍奇–泰特比较即可得到结果。□

注 6.1。定理 1.12 仅处理 $g \geq 3$ 的情形。 $g \in \{1, 2\}$ 的情形则有所不同。对于这些情形，文献中的已知结果可以给出所有 k 取值下 $\dim H^{k,0}(X_{g,s})$ 的显式公式。在一维亏格的情形，$X_{1,s}$ 与 $M_{1,s-1}$ 双有理，后者是带有 $s-1$ 个标记点的亏格 1 稳定曲线的模空间。由于全纯形式空间是非奇异空间的双有理不变量，CLPW25 的命题 3.1] 给出了公式的答案。

在二维亏格的情形，阿贝尔–雅可比映射

$$M_{2,2s}/\mathfrak{S}_2^s \to X_{2,s}$$

由 $(C, p_1, \ldots, p_{2s}) \mapsto (\mathrm{Jac}(C)\ \omega_C^*(p_1 + p_2) \ldots, \omega_C^*(p_{2s-1} + p_{2s}))$ 给出，且是双有理映射，因此任意环面紧化 $X_{2,s}$ 都与 $M_{2,2s}/\mathfrak{S}_2^s$ 双有理。因此，只需计算 $H^{k,0}(M_{2,2s})^{\mathfrak{S}_2^s}$。现在，CLPW25 的命题 3.5] 将 $H^{k,0}(M_{2,2s})$ 计算为对称群 $\mathfrak{S}_{2s}$ 的一个表示，其表达式涉及 $|\lambda| = k-3$ 下 $W_k H^3(A_2, \mathrm{V}_\lambda)$ 的 $(k, 0)$ 部分；后者又可用 [Pet15] 中的向量值 Siegel 模形式空间表示（当然，也可由本文的结果表示）。由此可以写出一个不太简洁的答案公式。

定理1.10的证明。 令 $X_{g,s}$ 为 $X_{g,s}$ 的任意非奇异环面紧化。我们有一个短正合列

$$H^{k-2}(\widetilde{\partial X}_{g,s}, \mathbf{C}) \to H^k(\overline{X}_{g,s}, \mathbf{C}) \to W_k H^k(X_{g,s}, \mathbf{C}) \to 0,$$

其中 $\widetilde{\partial X}_{g,s}$ 是 X_g 中 X_g 边界的正规化。第一个态射属于霍奇类型 $(1, 1)$。因此，第二个映射限制在全纯 k-形式空间 $H^{k,0}(X_g) \to F^k W_k H^k(X_{g,s}, \mathbf{C})$ 上是一个同构。因此，如果 $H^{k,0}(X_g) \neq 0$ 对某个 $k > 0$ 成立，那么 $H^\bullet(X_{g,s})$ 就不是泰特的。对于 $g = 1, 2$ 和 $s \geq c(g)$，众所周知，$X_{g,s}$ 存在非平凡的全纯形式（见注 6.1）。当 $g = 3$ 时，我们使用引理 5.3，它表明 $H^\bullet(X_{3,6})$ 不是泰特的。由于对于 $s \geq 6$，$X_{3,s} \to X_{3,6}$ 是固有的，因此对任意 $s \geq 6$，$H^\bullet(X_{3,s})$ 都不是泰特的。对于 $4 \leq g \leq 7$ 和 $s \geq c(g)$，根据定理 1.12，存在全纯 22- 形式。

对于 $g \geq 9$，我们采用定理 1.9 的证明中的论证，并使用霍奇–泰特比较。参数 $\Delta_{2g-3}^{(j)}[4] \oplus [2g-7]$ 贡献伽罗瓦表示 $\bigoplus_j \mathrm{Sym}^2 \rho_{\Delta_{2g-3}^{(j)}}$。相应的霍奇结构 $\mathrm{Hdg}(\mathrm{Sym}^2 \rho_{\Delta_{2g-3}^{(j)}})$贡献全纯 $4g-6$ 形式。由分解定理和比较同构可知，$H^{4g-6,0}(A_g) \neq 0$ 对于 $g = 7$ 或 $g \geq 9$。

对于 $g = 8$，上述论证不适用，因为 14 权的 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$没有尖点形式，而在参数 ψ 对 交叉上同调 $^\bullet(A_8)$有贡献的参数中，只有 $\Delta_{11}[6] \oplus [5]$ 具有非泰特贡献，且该贡献带有负的泰特扭曲，因此 交叉上同调 $^\bullet(A_8)$ 只有正的 Hodge-Tate 权。作为替代，我们将检查欧拉示性数 $e_c(A_8)$ 并非泰特类，做法如 [Taï25，§9。2]我们有一个如下形式的显式公式

$$e_c(A_8) = \sum_{g', \lambda', m'} n(\lambda', m') e_{IH}(A_{g'}^{Sat}, \mathbf{V}_{\lambda'}(-m'))$$

其中 $g' \leq g$、 $\lambda' + g' \leq 8$ 和 $m' \geq 0$ 以及 $n(\lambda', m') \in \mathbf{Z}$。对交叉上同调 $^\bullet(A_{g'}^{Sat}, \mathbf{V}_{\lambda'})$ 有贡献的参数具有如下形式： $\psi = \oplus_i \psi_i$ ，其中

$$\psi_i \in \{[2d+1], \Delta_{11}[2], \Delta_{15}[2], \Delta_{11}[4], \Delta_{11}[6]\}$$

并且只有包含 $\Delta_{11}[4]$ 或 $\Delta_{11}[6]$ 的项才有非泰特贡献。根据正则性，它们要么具有 $\Delta_{11}[4] \oplus [2d+1]$ 的形式，要么具有 $\Delta_{11}[6] \oplus [2d+1]$的形式。后一类在权小于28时不会贡献非泰特类，而前一类则对 $\mathrm{IH}^{22}(A_{d+4}^{Sat}, \mathrm{V}_{\lambda'})$贡献 $\mathrm{Sym}^2 S_\ell\langle 12\rangle$ ，模去泰特类后成立（见（E 型））。为简化计算，我们只考虑权22，因此只需考虑上述求和中对应于 $m' = 0$ 和 $\lambda' = (7-g', 7-g', 7-g', 7-g', 0, \ldots, 0)$的项。由此可得， $e_c(A_8)$的权22部分等于 $-\mathrm{Sym}^2 S_\ell\langle 12\rangle$ （模去泰特类）。

现在我们证明逆命题。我们有$X_{g,\ s}$是一个$X_{g,\ s}$的正规交叉紧化，其边界分层对应于锥 τ。我们考虑权重谱序列 [Pet17，例3，5]用于计算紧支撑上同调 $H_c^\bullet(X_{g,\ s})$。谱序列第一页上的项是局部闭分层 $\gamma(\tau)$闭包的正规化的上同调群，这些分层在第3节中有所描述。我们将证明，谱序列第一页上的所有项都是泰特类。

分层闭包的正规化是光滑且固有的，并且每个都由 $\gamma(\tau')$ 分层，其中 τ' 是 τ 的一个面。利用谱序列 (4.1)，只需证明对于所有 i，以及锥分解 X_g、s 中的所有 τ，$\mathrm{gr}_i^W H_c^i(\gamma(\tau))$ 都是泰特的。根据引理 4.3，$\mathrm{gr}_i^W H_c^i(\gamma(\tau))$ 是如下形式的伽罗瓦表示的子商的直和：$\mathrm{gr}_i^W H_c^p(A_{g-r}, \mathrm{V}_\lambda(-m))$；其中 (λ, m) 遍历 $\mathrm{GSp}^{2(g-r)}$ 的支配权，满足 $p+|\lambda|+2m=i, m \geq \binom{r+1}{2} + rs - \dim(\tau)$，且 $\lambda_1 \leq s+r$，其中 $r = \mathrm{rank}(\tau)$。每个 $\mathrm{gr}_i^W H_c^p(A_{g-r}, \mathrm{V}_\lambda(-m))$ 都嵌入相应的交叉上同调群 $\mathrm{IH}^p(A_{g-r}^{Sat}, \mathrm{V}_\lambda(-m))$ 中。首先，若 $i \leq 21 = \dim A_6$，则通过考察表 2、3 和 4，并利用界 $0 \leq r \leq 6$，可知所有贡献都是泰特的。若 $i > 21$，则对交叉上同调群 $\mathrm{IH}^p(A_{g-r}^{Sat}, \mathrm{V}_\lambda(-m))$ 应用庞加莱对偶，将问题化归到情形 $i \leq 21$。□

7. 相对李代数上同调与 L^2-上同调

在主要结果的证明中，我们使用了交叉上同调 $\mathbb{H}^\bullet(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$可分解为由阿瑟–朗兰兹参数标记的直和项。这使我们能够用涉及自守表示的数据来计算交叉上同调 $\mathbb{H}^\bullet(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$（一个代数几何对象）。然而，自守表示与交叉上同调 $\mathbb{H}^\bullet(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda)$之间还存在一种更直接的联系，即通过（$\mathfrak{g}$, K）-上同调和松岛–村上公式建立联系。看来，我们的主要结果的某个版本也可能通过这一联系得到，但我们尚未尝试进行这项工作。此外，使用（$\mathfrak{g}$, K）-上同调的方法，只能看到我们关于霍奇数和实霍奇结构的结果的“影子”；而在 ℓ-进上同调中，我们明确辨认出了上同调中的伽罗瓦表示。无论如何，下面让我们简要阐述一下这种联系。

暂且将由亏格λ 上的不可约表示 V_λ 的辛群$_{2g}$所对应的实极化霍奇结构变分记为 V_λ 。在 V_λ的实德拉姆复形中，可以考虑由满足 ω 和 $d\omega$ 均平方可积的微分形式 ω 构成的子复形。按定义，其上同调就是 A_g的 L^2-上同调，记作 $H_{(2)}^\bullet(A_g, \mathrm{V}_\lambda)$。Zucker 猜想由 Looijenga [Loo88] 和 Saper–Stern [SS90], 分别独立证明，它将以超越方法定义的 L^2-上同调群表示为交叉上同调：

$$H_{(2)}^\bullet(A_g, \mathbf{V}_\lambda) \cong IH^\bullet(A_g^{Sat}, \mathbf{V}_\lambda).$$

这对任意志村簇也成立。同构两侧自然带有实霍奇结构：左侧利用调和形式表示 L^2-上同调，右侧则借助 Saito的混合霍奇模理论。Looijenga 的一项近期成果 [Loo25]证明了这是实霍奇结构的同构。

回顾 [Bor83] 和 [BC83]， L^2-上同调群 $H_{(2)}^\bullet(A_g, \mathbf{V}_\lambda)$ 可以由 $G = \mathrm{GSp}_{2g}$ 的一级离散自守谱计算得到。为简便起见，在接下来的讨论中我们将 $\mathbf{V}_\lambda$ 复化，即假设 V_λ 是辛群 $\mathrm{Sp}_{2g,\mathbf{C}}$ 的不可约代数表示，并按通常方式将其扩充为 $G_{\mathbf{C}}$ 的一个表示。这不会造成信息损失，因为表示 $\mathbb{S} := \mathrm{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}\mathrm{GL}_{1,\mathbf{C}}$ （即实霍奇结构）的同构类由其到 $\mathbf{C}$ 的基变换决定。记 $G = \mathrm{GSp}_{2g}$，具体而言， $G(A) = \{(x, c) \in \mathrm{GL}_{2g}(A) \times A^\times \mid {}^t x J_g x = c J_g\}$，其中

$$J_g = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}.$$

将 A_g（定义在 $\mathbf{C}$ 上）实现为与志村数据 (G, X) 相关、处于级别 $G(\mathbf{Z})$ 的志村簇，其中 X 是 $G(\mathbf{R})$-轨道

$$h : \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbf{R}}$$
$$a + ib \longmapsto \begin{pmatrix} aI_g & -bI_g \\ bI_g & aI_g \end{pmatrix}.$$

令 $K \simeq \mathrm{R}_{>0} \times U(g)$ 为 h 在 $G(\mathrm{R})$ 中的中心化子。态射 h 在 $\mathbb{S}(\mathrm{R}) = \mathrm{C}^\times$ 上可唯一写作 $z \mapsto \mu_h(z)\mu_h'(z)$，其中 $\mu_h, \mu_h' : \bar{\mathrm{G}}\mathrm{L}1,\mathbf{C} \to G_{\mathbf{C}}$。令 $\mathcal{A}^2(G,\omega_\lambda^{-1})$ 为自守形式空间 $G(\mathrm{Q})\backslash G(\mathrm{A}) \to \mathrm{C}$，这些形式在 $\mathrm{R}_{>0} \subset G(\mathrm{R})$ 下按 V_λ 的中心特征 ω_λ 的逆变换，并且经适当扭曲后在 $G(\mathrm{Q})\backslash G(\mathrm{A})/\mathrm{R}_{>0}$ 上平方可积。我们有如下同一化

$$H^\bullet_{(2)}(A_g, \mathbf{V}_\lambda) \simeq H^\bullet(\mathfrak{g}, K; \mathcal{A}^2(G, \omega_\lambda^{-1})^{G(\widehat{\mathbf{Z}})} \otimes V_\lambda)$$

其中右侧定义为切瓦莱-埃伦伯格复形的上同调（省略微分）

$$\mathrm{Hom}_K(\wedge^\bullet \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, \mathcal{A}^2(G, \omega_\lambda^{-1})^{G(\widehat{\mathbf{Z}})} \otimes V_\lambda). \tag{7.1}$$

让我们回顾这些上同调群上的复霍奇结构，它是 $\mathbb{S}_{\mathbf{C}}$（按照 [Del79，(1.1.1.1)]）中的约定）。令 $\mathfrak{p}^\pm \subset \mathfrak{g}$ 为特征子空间，在该空间上 $\mathrm{Ad}\,\mu_h(z)$ 的作用为$z^{\pm 1}$，因此我们有分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 其中 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$，特别是

$$\wedge^\bullet \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \simeq \wedge^\bullet \mathfrak{p}^+ \oplus \wedge^\bullet \mathfrak{p}^-.$$

我们令 $z \in \mathbb{S}(\mathbf{R})$ 通过 z 作用于 $\mathfrak{g}^+$，并通过 z 作用于 $\mathfrak{g}^-$（注意，这并非与h复合后的伴随作用）。我们赋予 V_λ 由 $\mathbb{S}_{\mathbf{C}}$ 的作用与 $G_{\mathbf{C}}$ 复合而得到的作用 $h_{\mathbf{C}}$。最后，我们赋予 $\mathcal{A}^2(G, \omega_\lambda^{-1})$ 平凡的 $\mathbb{S}_{\mathbf{C}}$作用，从而得到 $\mathbb{S}_{\mathbf{C}}$ 在（7.1）上的作用。

一般来说，要使这一描述更加精确，需要详细了解 G 的离散自守谱（或其中一部分）；但幸运的是，在一级情形下，限制映射

$$\mathcal{A}^2(G, \omega_\lambda^{-1})^{G(\widehat{\mathbf{Z}})} \longrightarrow \mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_{2g})^{\mathrm{Sp}_{2g}(\widehat{\mathbf{Z}})}$$

是双射，而上述 $(\mathfrak{g}, K)$-上同调群显然就是 $(\mathfrak{sp}_{2g}, U(g))$-上同调群。借助 $\mathrm{Sp}_{2g,\mathbf{Q}}$ 的 Arthur 端oscopic分类 [Art13]、$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathrm{R})$ 的上同调 Arthur-Langlands 包与（更具体的）Adams-Johnson 包 [AMR18] 的对应关系，以及不可约酉 $(\mathfrak{sp}_{2g}, U(g))$-模的 $(\mathfrak{sp}_{2g}, U(g))$-上同调的显式计算 [VZ84, 命题 6.19]，，原则上可以将 $H^\bullet_{(2)}(A_g, \mathrm{V}_\lambda)$ 作为$\mathbb{S}_{\mathbf{C}}$的表示显式计算出来（甚至可以加入赫克代数 $\mathcal{H}(\mathrm{Sp}_{2g}(\mathrm{A}_f), \mathrm{Sp}_{2g}(\mathrm{Z}))$ 的交换作用）。不过，Arthur 在[Art89, §9] 中（依据 [VZ84]）对志村簇的 L^2-上同调给出了更具概念性的描述，其成立以该志村数据所对应群的离散自守谱的端oscopic分类为条件。尽管 GSp_{2g} 的这一分类尚未在一般情形下完全确立，正如上文所见，在一级情形下，我们可以将问题归结为 Sp_{2g} 的端oscopic分类。只需改述 [Art89, 命题 9.1]（采用德利涅符号约定），即可得到下文的定理 7.1。为此，我们需要回顾几个概念。

按照惯例记 $\mathcal{M}_\psi(n) = \mathcal{M}_\psi(\mathrm{SO}_n)$（辛群），对于每个 $\psi = \psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_r \in \Psi(\mathrm{Sp}_{2g})$，我们都有一个局部 Arthur-Langlands参数 $\psi_{i,\infty} : W_{\mathbf{R}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_{\psi_i}(\mathbf{C}) \simeq \mathrm{SO}_{n_i d_i}(\mathbf{C})$，使其与 $\mathcal{M}_{\psi_i}$ 的标准表示复合后得到 $\mathrm{LL}(\pi_{i,\infty}) \otimes$对称幂 $^{d_i-1}$标准表示$_{\mathrm{SL}_2}$，其中 $\mathrm{LL}(\pi_{i,\infty})$: $W_{\mathbf{R}} \to \mathrm{GL}_{n_i}(\mathbf{C})$ 是 $\pi_{i,\infty}$ 的 Langlands参数。具体而言，Langlands参数 $\mathrm{LL}(\pi_{i,\infty})$ 的特征如下。

- 对于 $i > 0$，它是 $W_{\mathbf{R}}$ 的唯一表示，其对$\mathbf{C}^\times$ 的限制等价于

$$\bigoplus_{j=1}^{n_i/2} z \longmapsto \mathrm{diag}((z/|z|)^{2w_j(\pi_i)}, (z/|z|)^{-2w_j(\pi_i)}).$$

- 对于 $i=0$，它是$\mathbf{R}$ W的唯一表示，具有平凡行列式，其对$\mathbf{C}^\times$的限制等价于

$$1 \oplus \bigoplus_{j=1}^{(n_0-1)/2} z \longmapsto \mathrm{diag}((z/|z|)^{2w_j(\pi_i)}, (z/|z|)^{-2w_j(\pi_i)}).$$

令 $\mathcal{M}_{\psi_i,\mathrm{sc}}$ 为 $\mathcal{M}_{\psi_i}$ 的单连通覆盖，并令 $\mathcal{GM}_{\psi_i,\mathrm{sc}} = (\mathrm{GL}_1 \times \mathcal{M}_{\psi_i,\mathrm{sc}})/\mu_2$，其中子群 μ_2 是对角嵌入的（在第二个因子中的像为 $\ker \mathcal{M}_{\psi_i,\mathrm{sc}} \to \mathcal{M}_{\psi_i}$）。注意，$\mathcal{GM}_{\psi_i,\mathrm{sc}}$ 与 $\mathrm{GSpin}_{n_i d_i}$ 同构。存在提升 $\psi_{i,\infty}$: $W_{\mathbf{R}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \to \mathcal{GM}_{\psi_i,\mathrm{sc}}(\mathbf{C})$，使得与 $\mathrm{GSpin}_{n_i d_i}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}^\times$ 的复合 $(t,g) \mapsto t^2$ 在 $\mathbf{C}^\times \subset W_{\mathbf{R}}$ 上由 $z \mapsto (zz)^{|\tau_i|}$ 给出（相差一个扭曲时，这就是 [Taï25，命题—定义 3.4.4]）。这些提升未必唯一，但它们在 $\mathbf{C}^\times \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ 上的限制是唯一的。令 $\iota_{\mathbf{R}} : \mathbf{C}^\times \to W_{\mathbf{R}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$，$z \mapsto (z, \mathrm{diag}((zz)^{1/2}, (zz)^{-1/2}))$。令 spin_{ψ_0} 为 $\mathcal{GM}_{\psi_0,\mathrm{sc}}$ 的自旋表示，并回顾 [Taï25，定义 4.7.4] 中关于 $i>0$ 的 $\mathcal{GM}_{\psi_i,\mathrm{sc}}$ 的半旋量表示 $\mathrm{spin}^{\pm}_{\psi_i}$。具体而言，对于 $i>0$，半旋量表示 $\mathrm{spin}^{+}_{\psi_i}$ 在 $\mathrm{spin}^{\pm}_{\psi_i}$ 中由如下性质刻画：表示 $\mathrm{spin}^{+}_{\psi_i} \circ \widetilde{\psi}_{i,\infty} \circ \iota_{\mathbf{R}}$ 含有一个特征 $z \mapsto z^a z^b$，且满足 $a = |\tau_i|$。符号 $(u_i(\psi))_{1 \le i \le r}$ 已在定理 2.4 之前回顾过。 –

定理 7.1。表示 (7.1) $\mathbb{S}(\mathbf{R})$ 分解为 $\bigoplus_\psi H_\psi$，其中遍历 $\psi \in \Psi^{\mathrm{unr},\tau\text{-disc}}(\text{辛群}_{2g})$，且$H_\psi$ 同构于将表示的对偶与 $\iota_{\mathbf{R}}$ 复合所得的表示

$$\mathrm{spin}_{\psi_0} \circ \widetilde{\psi}_{0,\infty} \otimes \bigotimes_{i=1}^{r} \mathrm{spin}^{u_i(\psi)}_{\psi_i} \circ \widetilde{\psi}_{i,\infty}$$

$W_{\mathbf{R}}$ 的$\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$。

证明。如上所述，这个公式的证明是对 [Art89，命题 9]的证明进行改述，并使用 辛群$_{2g}$ 的 Arthur 端 oscopic 分类，以及 [AMR18]，将最终表示分解为半自旋表示的张量积，完全如 [Taï25，§4 所述。7]。请注意，我们采用了 Deligne 符号约定，因此必须将r_μ 在 [Art89，§9]中的极小表示替换为其对偶$r_{-\mu}$。□

注 7.2。当然，这与 [Taï25，定理 4.7.2]，非常相似；事实上，[Art89，命题 9.1] 正是 Kottwitz 猜想 [Kot90] 关于 Shimura 簇极小紧化的 ℓ-进 étale 交叉上同调的 Hodge 类比。就我们所知，与紧 Shimura 簇的情形不同，目前没有 de Rham（甚至仅有 Hodge-Tate） ℓ-进比较同构将两者联系起来。因此，我们尚不知道在 [Taï25，定理 7.1.3] 中出现的伽罗瓦表示 σ^{spin}、$u_i(\psi)$ ψ_i、ι的 Hodge-Tate 权（当 $i>0$时），但维数为 2（当 ψ_i 的维数为 4 时）和 8（当 ψ_i 的维数为 8 时）的表示除外。

参考文献

[AC98] Enrico Arbarello 和 Maurizio Cornalba. 通过代数几何计算曲线模空间的上同调群。高等科学研究所 *Publ. Math.*, (88):97–127, 1998. [AGI+24] Hiraku Atobe, Wee Teck Gan, Atsushi Ichino, Tasho Kaletha, Alberto Mínguez 和 Sug Woo Shin. 经典群的局部交织关系与共温和 A 包。*arXiv* 预印本 *arXiv:2410.13504*, 2024. [AMR18] Nicolás Arancibia, Colette Moeglin 和 David Renard. 经典群与酉群的 Arthur 包。《图卢兹数学科学院年刊》*(6)*, 27(5):1023–1105, 2018. [AMRT10] Avner Ash, David Mumford, Michael Rapoport 和 Yung-Sheng Tai. 局部对称簇的光滑紧化. 剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2010。与 Peter Scholze 合作完成。[Art89] James Arthur. 幺幂自守表示：猜想。*Astérisque*, (171-172):13–71, 1989。幺幂轨道与表示，II。 p-进群与实群。[Art13] James Arthur. 表示的端*oscopic* 分类：正交群与辛群，收入第 61 卷 美国数学会讨论会出版物。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013。[BBC+24] Madeline Brandt, Juliette Bruce, Melody Chan, Margarida Melo, Gwyneth Moreland 和 Corey Wolfe. 关于 $\mathcal{A}_g$ 的最高权有理上同调。几何与拓扑, 28(2):497–538, 2024。

[BBD82] Alexander A. Beilinson, Joseph Bernstein 和 Pierre Deligne. 反常层。载于《奇异空间上的分析与拓扑》, I（吕米尼，1981），Astérisque 第 100 卷，第 5–171 页。法国数学会，巴黎，1982。[BC83] Armand Borel 和 William Casselman. 有限体积局部对称流形的 L^2-上同调。《杜克数学杂志》，50(3):625–647, 1983。[BCGP24] Francis Brown, Melody Chan, Søren Galatius 和 Sam Payne. $\mathcal{A}_g$、$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 和 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 上同调中的 Hopf代数。arXiv 预印本 arXiv:2405.11528, 2024。[Bei87] Alexander A. Beilinson. 反常层的导出范畴。载于 K-理论、算术与几何（莫斯科，1984–1986），数学讲义第 1289 卷，第 27–41 页。Springer，柏林，1987。[BF23] Jonas Bergström 和 Carel Faber. 运用 Chenevier 和 Lannes 的一个结果研究模空间的上同调。《Épijournal Géom. Algébrique》，7:第 20 篇文章，14 页，2023。[BFP24] Jonas Bergström, Carel Faber 和 Sam Payne. 稳定曲线模空间的多项式点计数与奇数次上同调消失。《数学年刊》(2)，199(3):1323–1365, 2024。[BFvdG14] Jonas Bergström, Carel Faber 和 Gerard van der Geer. 三次 Siegel 模形式与局部系统的上同调。《Selecta Math.》(新系列)，20(1):83–124, 2014。[Bor74] Armand Borel. 算术群的稳定实上同调。《法国高等师范学校科学年刊》(4)，7:235–272（1975），1974。[Bor83] Armand Borel. 李代数上同调中的正则化定理及其应用。《杜克数学杂志》，50(3):605–623, 1983。[Car12] Ana Caraiani. 局部-整体相容性与单值化在邻近循环上的作用。《杜克数学杂志》，161 2413, 2012 12 2311( ): – 。[CG25] Gaëtan Chenevier 和 Wee Teck Gan. 三元性与函子性。arXiv 预印本 arXiv:2510.21169, 2025。[CL83] Ruth Charney 和 Ronnie Lee. Satake紧化的上同调。《Topology》，22(4):389–423, 1983。[CL12] Pierre-Henri Chaudouard 和 Gérard Laumon. 加权基本引理。II：上同调陈述。《数学年刊》(2)，176(3):1647–1781, 2012。[CL17] Jiaming Chen 和 Eduard Looijenga. $\mathcal{A}_g$ 的 Satake紧化的稳定上同调。《几何与拓扑》，21(4):2231–2241, 2017。[CL19] Gaëtan Chenevier 和 Jean Lannes. 自守形式与偶自对偶格。Niemeier格的 Kneser邻格，收入《数学及其边界领域成果》第 69 卷。数学及其边界领域成果（第 3 辑），现代数学综述丛书。Springer，查姆，2019。由 Reinie Erné 从法文译出。[Clo13] Laurent Clozel. 纯性至高无上。《Int. Math. Res. Not. IMRN》，第 328–346 页，2013。[CLP23] Samir Canning, Hannah Larson 和 Sam Payne. $\mathcal{M}_{g,n}$ 的第十一次上同调群。《Forum Math. Sigma》，11:第 e62 号论文，18 页，2023。[CLP24] Samir Canning, Hannah Larson 和 Sam Payne. $\mathcal{M}_{g,n}$ 上同调中典范环的扩张与动机结构。《Forum Math. Pi》，12:第 e23 号论文，31 页，2024。[CLPW24] Samir Canning, Hannah Larson, Sam Payne 和 Thomas Willwacher. 具有多项式点计数的曲线模空间。arXiv 预印本 arXiv:2410.19913, 2024。[CLPW25] Samir Canning, Hannah Larson, Sam Payne 和 Thomas Willwacher. $\mathcal{M}_{g,n}$ 上全纯形式的 FA模。arXiv 预印本 arXiv:2509.08774, 2025。[CR15] Gaëtan Chenevier 和 David Renard. 小秩经典群的 1级代数尖点形式。《美国数学会回忆录》，237(1121):v+122, 2015。[CT20] Gaëtan Chenevier 和 Olivier Taïbi. Z 上经典群的离散级数重数与 $\overline{1}$ 级代数尖点形式。《高等科学研究所 Publ. Math.》，131:261–323, 2020。[Del68] Pierre Deligne. Lefschetz 定理与谱序列退化判据。高等科学研究所 Publ. Math., (35):259–278, 1968。[Del79] Pierre Deligne. Shimura 簇：模解释与典范模型的构造技术。载于《自守形式、表示与 L-函数》（纯数学研讨会论文集，俄勒冈州立大学，科瓦利斯，俄勒冈州，1977），第 2 部分，纯数学研讨会论文集，XXXIII，第 247–289 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1979。[DM69] Pierre Deligne 和 David Mumford. 给定亏格的曲线空间的不可约性。高等科学研究所 Publ. Math., 36:75–109, 1969。[Dur95] Alan H. Durfee. 交叉同调贝蒂数。《美国数学会会刊》，123(4):989–993, 1995。[Fal88] Gerd Faltings. p-进 Hodge 理论。《美国数学会杂志》，1(1):255–299, 1988。[FC90] Gerd Faltings 和 Ching-Li Chai. 阿贝尔簇退化，收入《数学及其边界领域成果》（3）第 22 卷。Springer-Verlag，柏林，1990。附录由 David Mumford 撰写。[GHI7] Samuel Grushevsky 和 Klaus Hulek. $\mathcal{A}_g$ 的 Satake紧化的交叉上同调，针对 $g \leq 4$。《数学年刊》，369(3-4):1353–1381, 2017。[GHT18] Samuel Grushevsky, Klaus Hulek 和 Orsola Tommasi. $\mathcal{A}_g$ 的完美锥托罗紧化的稳定上同调。《纯粹与应用数学杂志》，741:211–254, 2018。[Hai02] Richard Hain. 三维阿贝尔簇模空间的有理上同调环。《数学研究快报》，9(4):473–491, 2002。[HT10] Klaus Hulek 和 Orsola Tommasi. $\mathscr{A}_3$ 的环面紧化的上同调。载于《向量丛与复几何》，当代数学第 522 卷，第 89–103 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010。

[HT12] Klaus Hulek 和 Orsola Tommasi。

$\mathscr{A}_4$ 17 195 244, 第二沃罗

2012
诺伊紧化的上同调。《数学文献》，：–。[HT18] Klaus Hulek 和 Orsola Tommasi。 $\mathcal{A}_g$ 及其紧化的拓扑。载于《模空间几何》，数学视野丛书第 14 卷，135–193 页。Springer，查姆，2018 年。附录由 Olivier Taïbi 撰写。[HZ25] David Hansen 和 Bogdan Zavyalov。 ℓ-进 étale 上同调与刚性解析空间的邻近循环的算术性质。arXiv 预印本 arXiv:2301.01800v2，2025 年。[Kot90] Robert E. Kottwitz。Shimura 簇与 λ-进表示。载于《自守形式、Shimura 簇与 L-函数》，第 I 卷（密歇根州安娜堡，1988），数学视角丛书第 10 卷，161–209 页。学术出版社，马萨诸塞州波士顿，1990 年。[Loo88] Eduard Looijenga。局部对称簇的 L^2-上同调。《数学汇编》，67(1)：3–20，1988 年。[Loo25] Eduard Looijenga。 L_2-上同调的霍奇分解与 Shimura 簇的交叉上同调。arXiv 预印本 arXiv:2501.19253，2025 年。[Mes86] Jean-François Mestre。代数簇的显式公式与导子的下界。《数学汇编》，58(2)：209–232，1986 年。[NT23] James Newton 和 Jack Thorne。酉型自守伽罗瓦表示的伴随塞尔默群。《欧洲数学会杂志》（JEMS），25(5)：1919–1967，2023 年。[Pet15] Dan Petersen。主极化阿贝尔曲面模空间上的局部系统上同调。《太平洋数学杂志》，275(1)：39–61，2015 年。[Pet17] Dan Petersen。分层空间与点构形空间的一个谱序列。《几何与拓扑》，21 2555，2017 4 2527( )：–。[Ram13] Dinakar Ramakrishnan。与 GL(4) 相关的伽罗瓦表示的分解与奇偶性。载于《自守表示与 L-函数》。国际学术讨论会论文集，印度孟买，2012 年 1 月 3–11 日，427–454 页。新德里：印度斯坦图书机构；印度孟买：塔塔基础研究院，2013 年。[SS90] Leslie Saper 和 Mark Stern。算术簇的 L_2-上同调。《数学年刊》（第 2 辑），132(1)：1–69，1990 年。[Taï] Olivier Taïbi。利用局部—整体方法计算分裂经典群在 $\mathbb{Z}$上的轨道积分。即将出版。[Taï17] Olivier Taïbi。利用迹公式计算分裂经典群一级自守形式空间的维数。《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑），50(2)：269–344，2017 年。[Taï25] Olivier Taïbi。 ℓ-进局部系统在 A_n上的欧拉示性数。arXiv 预印本 arXiv:2510.00656，2025 年。[vdG 99] Gerard van der Geer。阿贝尔簇模空间上的循环。载于《曲线与阿贝尔簇的模空间》，数学视野丛书第 E33 卷，65–89 页。弗里德里希·维韦格出版社，不伦瑞克，1999 年。[VZ84] David A. Vogan, Jr. 和 Gregg J. Zuckerman。具有非零上同调的酉表示。《数学汇编》，53(1)：51–90，1984 年。