arXiv:2601.05892v1 [math.CO] 9 Jan 2026

小孪生宽度图上的 Weisfeiler-Leman

Irene Heinrich* Moritz Lichter‡
Klara Pakhomenko† Simon Raßmann§

2026年1月12日

孪生宽度是一种图参数，最初是在一阶模型检测的背景下引入的，此后已成为算法图论中的核心参数。尽管对于任意有界孪生宽度图类，许多算法问题都会变得更容易，但对于孪生宽度为 4 及以上的图，图同构问题与一般的同构问题一样困难。对于每个正自然数 k，k维 Weisfeiler-Leman 算法都是一种迭代式颜色细化算法，它能够编码结构相似性，并作为区分非同构图的基础工具。我们证明，对于孪生宽度 1 的图，其图同构问题可以通过纯组合的三维 Weisfeiler-Leman 算法解决；然而，不存在固定的 k，使得 k 维 Weisfeiler-Leman 算法能够解决孪生宽度为 4 的图的图同构问题。

此外，我们证明了 Bergougnoux、Gajarský、Guspiel、Hlinený、Pokrývka 和 Sokolowski 提出的猜想：孪生宽度 2 的稳定图具有有界秩宽度。这尤其意味着，可以通过固定维数的 Weisfeiler-Leman 算法判定这些图的同构。

*达姆施塔特工业大学。作者获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟“地平线2020”研究与创新计划提供的资助（EngageS：资助协议编号 820148）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的观点。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见负责。

†哈瑟尔特大学。该作者获得了佛兰德人工智能研究计划的支持。
‡亚琛工业大学。作者获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟“地平线2020”研究与创新计划提供的资助（SymSim：资助协议编号 101054974）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的观点。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见负责。§达姆施塔特工业大学。

1. 引言

孪生宽度是 [9], 中引入的一个图参数，此后由于其在模型检验中的重要性，已成为算法图论中的核心参数：在提供孪生宽度较小的见证时，图上的一阶模型检测是固定参数可处理的。这推广了针对若干经典图类的类似结果，例如有界树宽、有界秩宽、有界亏格的图类、不含某个 minor 的图类，以及地图图。更进一步，有界孪生宽度恰好刻画了有序图 [11], 竞赛图 [19],区间图 [10], 和排列图 [9]上一阶模型检测的可处理性边界。

孪生宽度基于反复合并邻域相似的顶点对，同时保持每个合并后顶点集的总误差有界（形式化定义推迟至第 2 节）。例如，由于每个余图都可以通过反复合并孪生顶点（即具有相同闭邻域或开邻域的顶点对）收缩为单一顶点，因此余图可以在不产生任何误差的情况下完成收缩，从而其孪生宽度为 0。事实上，余图恰好就是孪生宽度为 0 的图。特别地，孪生宽度为 0 的图可以被高效识别，并且包括图同构问题乃至图规范化在内的许多算法问题，都可以在该类图上于多项式时间内求解 [15]。

这些识别结果同样适用于孪生宽度 1 的图；文献 [8], 给出了一种多项式时间识别算法，后来在 [2] 中将其改进为线性时间算法。此外， [8] 还证明了孪生宽度 1 的图具有有界秩宽度，这意味着同构和规范化都可以在多项式时间内求解 [26, 24]。与这些积极结果相反，已知孪生宽度 4 的图的识别是 NP 困难的 [5]。此外，由于每个图的 $\Omega(\log(n))$-细分的孪生宽度至多为 4 [5], ，孪生宽度 4 的图的整体结构基本上不受限制；特别地，在孪生宽度至多为 4 的图类上，图同构问题与一般图上的同构问题一样困难。这使得孪生宽度 2 和 3 的情形仍悬而未决：它们的结构复杂性迄今尚未得到充分理解，且识别与同构的复杂性都尚未确定。请注意，与孪生宽度为 4 或更大的图上的同构问题具有困难性不同，以孪生宽度为参数的竞赛图同构是固定参数可处理的 [25], ，因此，在每个孪生宽度有界的竞赛图类上，它都可以在多项式时间内求解。

本文旨在更深入地理解孪生宽度较小的图的组合复杂性。对此，一个自然的研究框架是 Weisfeiler-Leman 算法。它是一种研究图同构的基础组合方法，用于衡量区分不同图所需的“区分能力”。Weisfeiler-Leman 算法是一类纯组合的多项式时间算法，涵盖了图同构问题中大多数其他组合算法。1 维 Weisfeiler-Leman 算法也称为颜色细化或朴素顶点分类：它首先按照图中每个顶点的度为其着色，然后反复根据每个顶点邻居的颜色多重集细化其颜色，直到着色所诱导的划分稳定为止。接着，

颜色多重集可用作图的同构不变量。即便是这种简单的启发式方法，也能识别几乎所有图的同构类 [3], ，尤其能识别每一棵森林。此外，由于几乎所有图的孪生宽度都与其阶呈线性关系 [1], ，颜色细化算法能够识别孪生宽度无界的图。

作为颜色细化的推广， k维 Weisfeiler-Leman 算法对顶点的k元组着色，而不是对单个顶点着色。使得 k维 Weisfeiler-Leman 算法计算出的着色能够区分某个类 $\mathcal{C}$ 中的所有图（至同构）的最小维数 k ，称为$\mathcal{C}$的*Weisfeiler-Leman* 维数。事实证明，许多自然图类的 Weisfeiler-Leman 维数有界，这意味着 k维 Weisfeiler-Leman 算法能够正确判定该类上的同构问题。这包括树宽或秩宽度有界的图类、 [24], 平面图、有界亏格图，以及更一般地，排除某个 minor [22]的图类。然而，所有图组成的图类的 Weisfeiler-Leman 维数无界，Cai、Fürer和Immerman在其开创性论文 [14]中构造的所谓*CFI* 图就是一个例证。 k维 Weisfeiler-Leman 算法与（$k+1$）变量的一阶计数逻辑 [14]密切对应。通常可以利用这一联系，将 Weisfeiler-Leman 维数的界转化为如下结果：特定图类中的图可以在带计数的最小不动点逻辑 FP +C 中进行可定义规范化。这些可定义性结果意味着，FP + C 恰好能够表达这些图上的多项式时间可判定性质。对于所有秩宽度有界的图类 [24] 以及排除某个 minor [22]的图类，都可以进行 FP + C 可定义的规范化。

我们的结果。 我们研究小孪生宽度图的 Weisfeiler-Leman 维数。首先，我们证明，一般而言，图的 Weisfeiler-Leman 维数无法根据其孪生宽度进行界定。具体来说，我们证明孪生宽度为 4 的图具有无界的 Weisfeiler-Leman 维数，这意味着不存在某个固定维度的 Weisfeiler-Leman 算法，能够正确区分该类中的所有非同构图对。我们的结果基于 CFI图的细分。

与此相反，我们证明三维 Weisfeiler-Leman 算法足以识别所有孪生宽度至多为 1 的图；为此，我们证明该算法可以模拟 [8] 的识别算法，从而为图构造一个规范的1-收缩序列，随后即可利用该序列识别图。虽然已知孪生宽度为 1 的图具有有界秩宽度，因此某个固定维度的 Weisfeiler-Leman 算法能够正确判定同构性，但我们的论证给出了确切的维数 3，且更加明确。此外，我们还展示了如何将这一结果转化为一种效率更高的、可由 FP + C 定义的、针对孪生宽度为 1 的图的规范化算法。

最后，我们考察孪生宽度 2 的图。 [6]中已证明，孪生宽度 2 的稀疏图具有有界树宽，并猜想孪生宽度 2 的稳定图（即排除某个固定半诱导半图 H_t的图）具有有界秩宽度。我们通过证明不含半诱导半图 H_t 的孪生宽度 2 的图具有秩宽度 $O(t)$来证明这一猜想。为此，我们首先对二分

孪生宽度 1 的图进行分类，然后利用这一分类来分析宽度为 2 的收缩序列中的红路径收缩。

使用相同的技术，我们还证明了不含 $K_{t,\ t}$-子图的孪生宽度 2 图的树宽有界于 $O(t)$，从而改进了 [6] 中给出的界。在这两种情况下，可以推出， $O(t)$ 维 Weisfeiler-Leman 算法能够正确判定这些图的同构性。

进一步的相关工作。 自引入以来，孪生宽度得到了广泛研究 [9]，其中包括建立关于布尔宽度（以及秩宽度和团宽度）的界，并研究无小类。其他相关联系包括树宽 [30, 6], 以及亏格等拓扑参数 [33]。对于平面图 [28], ，已知有紧确界；此外，人们也在受限图类 [12]中研究了它与其他图参数之间的关系。

对于较小的孪生宽度，识别问题已经得到研究：当孪生宽度至多为 1 [8, 2] 时，识别可在多项式时间内完成 4 [5], ，但对于孪生宽度 2 和 3，其复杂性仍然是开放问题。

本文研究孪生宽度与图的 Weisfeiler-Leman 维数之间的关系，后者提供了一种互补的复杂性度量：许多算法上易处理的图类具有有界的 Weisfeiler-Leman 维数，包括有界树宽的图 [23], 秩宽度有界的图 [24], 平面图 [21, 32], 以及无小类 [22]。然而，此前对孪生宽度与 Weisfeiler-Leman 维数之间关系的研究仅涉及竞赛图 [25], 在这类图中，尽管 Weisfeiler-Leman 维数无界，有界孪生宽度仍能使同构问题易于处理。

我们对一般图中这一关系的研究，也解决了 [6]中关于孪生宽度 2 的稳定图的秩宽度界的猜想。 [17]也独立研究了有界孪生宽度的稳定图。

2. 预备知识

对于自然数 k，令 $[k] \coloneqq \{1、2、.....、k\}$。矩阵 M的秩记为 $\mathrm{rk}(M)$。

图 本文中的所有图都是有限简单图。如果一个图的补图连通，我们称该图为余连通。对于图 G，我们用 $V(G)$ 表示其顶点集，用 $E(G)$ 表示其边集。 G 的阶为 $|V(G)|$。对于顶点集 $S \subseteq V(G)$，我们用 $G[S]$ 表示 G中由 S 诱导的子图。对于两个不相交集合 L、$R \subseteq V(G)$，我们用 $G[L, R]$表示由 G诱导、部分为 L 和 R 的二分图。如果存在嵌入 $\iota\colon V(H) \to V(G)$，使得诱导映射 $H[A, B] \to G[\iota(A)\ \iota(B)]$ 是一个同构，则称二分图 $H[A, B]$ 是 G 的半诱导子图。如果 H 不是 G的半诱导子图，则称 G为 H-半自由。

我们将图 G 中 $v \in V(G)$ 的邻域记为 $N_G(v)$；若根据上下文可知 G，也可简记为 $N(v)$。我们还用 $N_G^{=d}(v)$、 $N_G^{\leq d}(v)$ 和 $N_G^{\geq d}(v)$ 分别表示图 G 中与 v 的距离恰为 d、至多为 d 或大于 d 的顶点集。

对于图 G 和元组 $\mathbf{v} \in V(G)^k$，其原子类型 $\mathrm{atp}_G(\mathbf{v})$是有序图 $G[\mathbf{v}]$, 的同构类型；也就是说，两个元组 $\mathbf{v} \in V(G)^k$ 和 $\mathbf{w} \in V(H)^k$ 具有相同的原子类型，当且仅当 $v_i \mapsto w_i$ 定义了 $G[\mathbf{v}]$ 与 $H[\mathbf{w}]$之间的同构。

着色图 G^c 是一个元组（G，c），其中 G 是一个图，而 c 是定义在$V(G)$上的映射，通常映射到自然数集。

孪生宽度 三图 G 是一个边被着为红色或黑色的图。将图视为三图时，为每条边着为黑色。对于 $v \in V(G)$，红度$\text{red-deg}_G(v)$是与 v关联的红边数量。三图 G的红连通分量是从 G 中移除所有黑边后所得图的一个连通分量。

如果对于 G 的两个不相交顶点子集 U 和 W，任意二元集合 $\{u, w\}$（其中$u \in U$ 和 $w \in W$）都是黑边，则称它们完全连接。如果不存在这样的对是 G的一条边，则称 U 和 W 是不连通的。如果 U 和 W 要么完全连接，要么不连通，则称它们齐次连接。给定 $V(G)$的一个划分$\mathcal{P}$，我们将商图 $G/\mathcal{P}$ 定义为具有 $V(G/\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ 的三图，其中$\mathcal{P}$ 的两个部分 U和 W 是

> 若 U 与 W 完全相连，则以黑边相连；若 U 与 W 不连通，则不相邻；否则以红边相连。

阶为 n 的三图 G 的划分序列，是由 $V(G)$的划分 $\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_{n-1}, \ldots, \mathbf{P}_1$ 组成的序列，其中 $\mathbf{P}_n$ 是离散划分；对于每个 $i \in [n-1]$，划分 $\mathbf{P}_i$由 $\mathbf{P}_{i+1}$ 中的两个不同部分 P 和 Q 替换为 $P \cup Q$ 得到（我们称之为合并或收缩）。等价地，划分序列可由三图 $G/\mathbf{P}_i$ 的序列，或由这些三图中待收缩的顶点对序列给出；二者均称为收缩序列。作为一种简写，描述一对顶点的收缩时，用 $G/w, x$ 表示 $G/\mathbf{P}$，其中 $\mathbf{P} = \{\{w, x\}\} \cup \{\{v\} : v \in V(G)\}$。收缩序列（或其对应的划分序列）的宽度，是所有三图 $G/\mathbf{P}_i$中的最大红度。如果划分序列或收缩序列的宽度至多为 k，则分别称其为 k-划分序列或 k-收缩序列。G 的孪生宽度 $\mathrm{tww}(G)$是 G的收缩序列的最小宽度。着色图的孪生宽度是其底层无色图的孪生宽度。

G 的分量孪生宽度 是所有收缩序列中，所出现的三图里的红色分量的最大阶的最小值。分量孪生宽度与秩宽度 [7] 在函数意义上等价，并且与团宽度 [4]至多相差一个常数因子。

秩、秩宽度与良连接集 令 G为一个图。给定两个顶点集A、$B \subseteq V(G)$，A与 B之间的二邻接矩阵记为 $\mathrm{Adj}_G(A, B)$，它是一个取值于 $\mathbb{F}_2$ 的 $|A| \times |B|$矩阵，行由 A 中的顶点索引，列由 B 中的顶点索引，且第（a, b）个元素为 $\mathbf{1}$ 当且仅当 $ab \in E(G)$。定义 $\mathrm{rk}_G(A, B) := \mathrm{rk}(\mathrm{Adj}_G(A, B))$。秩函数是次可加的：若 A、B、$C \subseteq V(G)$两两不相交，则 $\mathrm{rk}_G(A, B \cup C) \leq \mathrm{rk}_G(A, B) + \mathrm{rk}_G(A, C)$。

设 A 和 B 是 $V(G)$中的不相交集合。 G 中 A 与 B 的秩连通度 为

$$\kappa^{\mathrm{rk}}_G(A,B) \coloneqq \min_{A\subseteq X\subseteq V(G)\setminus B} \mathrm{rk}_G(X, V(G)\setminus X).$$

引理 2.1 (秩连通函数的单调性与次可加性)。 若 G 是一个图，且 A、 B 和 C 是 G 的两两不相交的顶点子集，则

(a) $\kappa^{\mathrm{rk}}_G(A,\ B) \le \kappa^{\mathrm{rk}}_G(A,\ B\cup C)$，且(b) $\kappa^{\mathrm{rk}}_G($
$A,\ B\cup C) \le \kappa^{\mathrm{rk}}_{G-C}(A,\ B) + \kappa^{\mathrm{rk}}_{G-B}(A,\ C)$。

证明。 第一个不等式显然成立。对于第二个不等式，取两个割 $V(G) = A'_B \dot\cup B' = A'_C \dot\cup C'$，使得 $\mathrm{rk}(A\subseteq A'_B\subseteq V(G)\setminus C, A\subseteq A'_C\subseteq V(G)\setminus B, B\subseteq B'\subseteq V(G)\setminus C$ 和$C\subseteq C'\subseteq V(G)\setminus B) = \kappa^{\mathrm{rk}}_{G-C}(A,\ B)$ 且 $\mathrm{rk}(A'_C,\ C') = \kappa^{\mathrm{rk}}_{G-B}(A,\ C)$。那么

$$\begin{aligned}\kappa^{\mathrm{rk}}_G(A, B\cup C) &\le \mathrm{rk}(A'_B\cap A'_C, B'\cup C')\\ &\le \mathrm{rk}(A'_B, B') + \mathrm{rk}(A'_C, C')\\ &\le \kappa^{\mathrm{rk}}_{G-C}(A,B) + \kappa^{\mathrm{rk}}_{G-B}(A,C).\end{aligned}$$ □

G 的秩分解 是一个有根二叉树 T，以及该树的叶子与 G的顶点之间的一个双射。这样，每条树边 $e\in E(T)$都会将 $V(G)$划分为两个部分 A 和 B，从而诱导出一个割：根据顶点所属叶子所在的连通分量，对顶点进行划分。秩分解的宽度是所有这些割对应的秩 $\mathrm{rk}(A,\ B)$中的最大值，而 G 的秩宽度是秩分解的最小宽度。

我们需要用到的有界秩宽度的一个重要刻画，是良连接集顶点的存在性。

图中的 rk-良连接 集是一个子集 $U\subseteq V(G)$，满足对于任意两个不相交集合 A, $B\subseteq U$，都有 $\kappa^{\mathrm{rk}}_G(A,\ B) \ge \min\{|A|,\ |B|\}$。

定理 2.2 ([36, 定理5。2])。 每个秩宽度大于 k 的图都包含一个大小为 k的rk-良连接集。

对于其他连通参数，也存在类似的良连接概念。例如，若每个割 $U = X\dot\cup(U\setminus X)$ 都包含一个大小至少为 $\min\{|X|, |U\setminus X|\}$ 的匹配，则顶点子集 $U\subseteq V(G)$ 称为 mm-良连接 。这等价于要求每两个子集 $A, B\subseteq U$之间都有 $\min\{|A|, |B|\}$ 条顶点不交路径相连。

定理 2.3 ([37, 引理3。4])。 每个树宽大于 k 的图都包含一个大小为 k 的 *mm*-良连接集。

Weisfeiler-Leman 算法对于图 G， k维 Weisfeiler-Leman 算法（简称： k-WL）会迭代地细化 $V(G)^k$的同构不变着色。初始着色为$\chi^0_{G,\ k}$： $\mathbf{v}\ \mapsto$原子类型$_G(\mathbf{v})$。对于 $i\ge 0$，我们设

$$\chi^{i+1}_{G,k}(\mathbf{v}) \coloneqq \Big(\chi^i_{G,k}(\mathbf{v}), \{\{\Big(\mathrm{atp}_G(\mathbf{v}w), \chi^i_{G,k}(\mathbf{v}\,[w/1]), \ldots, \chi^i_{G,k}(\mathbf{v}\,[w/k])\Big) : w\in V(G)\}\}\Big),$$

其中，记号$\mathbf{v}[w/i]$ 表示通过将$\mathbf{v}$ 的第 i个分量替换为 w而得到的元组。注意，对于某些 $i \in \mathbb{N}$，着色$\chi^{i}_{G,\,k}$ 和$\chi^{i+1}_{G\,,\,k}$ 等价，即这两种着色恰好具有相同的颜色类。如果 i 是这种情况发生时的最小索引，则稳定着色 $\chi^{i+1}_{G\,,\,k}$ 记作$\chi_{G,\,k}$ ，并且可以在$\mathcal{O}(k^2 n^{k+1} \log n)$ [29]时间内计算。若存在某个颜色 c 使得两个图 G 和 H 满足以下条件，则称它们被 k-WL区分

$$|\{\mathbf{v} \in V(G)^k \colon \chi_{G,k}(\mathbf{v}) = c\}| \neq |\{\mathbf{w} \in V(H)^k \colon \chi_{H,k}(\mathbf{w}) = c\}|.$$

如果算法能够将图 G 识别为与所有非同构图 H不同，则称图 G 可由 k-WL 识别。G 的*WL* 维数是能够识别该图的最小 k，即 k-WL。图类$\mathcal{C}$ 的 WL 维数是能够识别$\mathcal{C}$ 中所有图的最小 k，即 k-WL。关于该算法的更详细讨论，请参见例如[14, 31]。

逻辑 C_k 是带计数的一阶逻辑的 k 变量片段。对于恰好满足 C_k 中相同公式的两个图 G 和 H，我们记作 $G \equiv_{C_k} H$。关于更详细的定义和相关示例，请参见例如 [14]。

定理 2.4（[14]中的定理 5.2）。设 $k \in \mathbb{N}$。两个图 G 和 H 无法被 k-*WL* 区分，当且仅当 $G \equiv_{C_{k+1}} H$。

双射 k-卵石游戏，记作 BP_k，是由两名玩家 Spoiler 和复制者参与的基于回合的组合博弈。一个位置是一对元组 (v, w) $\in V(G)^\ell \times V(H)^\ell$，其中 $\ell \in [k] \cup \{0\}$。初始位置为 ((), ())。设某一回合开始时的位置为 $((v_1, \ldots, v_\ell), (w_1, \ldots, w_\ell))$。如果 $\ell > 0$，Spoiler 可以通过选取某个 $i \in [\ell]$ 移除一对卵石，并转移到 $((v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_\ell,)$ $(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_\ell))$ =: (v′, w′)。如果 Spoiler 不移除一对卵石，则 (v′, w′) := (v, w)。如果 Spoiler 移除了一枚卵石或 $\ell < k$，则复制者选取一个双射 $b \colon V(G) \to V(H)$，然后 Spoiler 选取某个 $v \in V(G)$，并转移到 (v′v, w′$b(v)$)。若在任意时刻，atp$_G$(v) $\neq$ atp$_H$(w)，则 Spoiler 获胜。若 Spoiler 始终未获胜，则复制者获胜。如果 Spoiler/复制者在从 p 开始的游戏中有获胜策略，我们就称 p 为 Spoiler/复制者的获胜局面。如果 ((), ()) 是 Spoiler/复制者的获胜局面，我们就称 Spoiler/复制者获胜。

引理 2.5 ([14])。对于所有整数 $k \geq 1$，两个图 G 和 H 无法被k-*WL* 区分，当且仅当 *Spoiler* 在 G 和 H上赢得双射$(k+1)$-卵石游戏。

半图与稳定性 对于整数 k，半图 H_k 是顶点集为 $V(H_k) = \{v_i \colon i \in [k]\} \cup \{w_i \colon i \in [k]\}$ 的二分图，其中 $v_i w_j \in E(H_k)$ 当且仅当 $i \leq j$。

如果一个图类不能转导所有半图组成的类，那么它就是单子稳定的。特别地，这意味着该类对某个 $k \in \mathbb{N}$ 是 H_k-半自由的。由于我们只会用到单子稳定类的这一性质，因此不正式定义一阶转导，而是请参阅 [17]。

3. 孪生宽度 4

本节将证明，孪生宽度为 4 的图不具有有界的 Weisfeiler-Leman 维数。为此，我们考察 *Cai-Fürer-Immerman* 图（简称：CFI 图）的细分图，参见 [14]。

引理 3.1 ([14])。 对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $k \geq 1$的情形，都存在一对大小为 $O(k)$ 的非同构三次 *CFI* 图，它们无法被 k-*WL* 区分。

设 G 是一个图，且 $s \in \mathbb{N}$。 G的 s-细分图（记作 G^s ）是这样得到的图：将 G 的每条边 G 替换为一条长度为 $s+1$ 的路径。 G 的 ($\geq s$)- 细分图是满足 $s' \geq s$ 的 G 的 s'- 细分图。

引理 3.2 ([5])。 若 G 是一个具有 n 个顶点的图，且 $s \geq 2$对数 n，则 $\mathrm{tww}(G^s) \leq 4$。

由于两个图同构当且仅当它们的细分图同构，因此一般图同构问题可以归约为孪生宽度至多为 4 的图类上的图同构问题。特别地，如果孪生宽度为 4 的图的 WL 维数有界，那么图同构问题就可以在多项式时间内求解。在本节中，我们证明该维数是无界的。

引理 3.3。 如果 G 和 H 是满足 $G \equiv_{C_{2k}} H$ 的图，那么 $G^1 \equiv_{C_k} H^1$。

证明概要。 1-细分可以通过二维逻辑解释来定义。关于逻辑解释的详细证明和预备知识见附录 A。 □

对于 $s > 1$，这个结果可以推广到 s-细分。

定理 3.4。 设 $s \in \mathbb{N}$，且 G、H 是满足 $V(G) = V(H)$ 的图。那么对于所有 k，如果$2k$-*WL* 无法区分 G^3 和 H^3，那么 k-*WL* 也无法区分 G^s 和 H^s。

证明概要。 完整证明见附录 B。直观而言，复制者将其针对 3-细分图的策略扩展到 s-细分图：先复制原始顶点上的双射，再提前观察一步，判断在原始博弈中路径顶点应映射的“方向”，并相应调整双射。

□

应用两次定义 3.3，再应用定义 3.4，我们得到以下结果。

推论 3.5. 设 $s, k \in \mathbb{N}$，并设 G 和 H 为图。若 $G \equiv_{C_{8k}} H$，则 $G^s \equiv_{C_k} H^s$.

最后，由此得到我们的定理。

定理 3.6. 对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都存在两个非同构图，其孪生宽度为 4，大小为 $O(k \log k)$，且无法被 k-*WL* 区分。

证明。 取定义 3.1 中的两个图 G_{8k}， H_{8k} ，并将它们的规模记为$n := |V(G_{8k})|$。注意，$n \in \mathcal{O}(k)$。令 $s := 2\lceil \log n \rceil$ ，并考虑 G^s_{8k}和 H^s_{8k}。由于G_{8k} 和 H_{8k} 是三次图，它们的边数为$\mathcal{O}(k)$。总之，它们的细分图规模为$\mathcal{O}(k + ks) = \mathcal{O}(k \log k)$。根据定义 3.2，它们的孪生宽度都至多为 4；又由于 G_{8k} 和 H_{8k} 不同构，它们的细分图也不同构。最后，根据定义 3.5，我们知道复制者在这些细分图上的 k-卵石游戏中获胜，因此 k-WL 无法区分这两个图。 □

4. 孪生宽度 1

现在我们知道，孪生宽度为 4 的图类没有有界的 WL 维数。亟待解决的问题是，孪生宽度更小的图类的维数是否有界。孪生宽度为 0 的图类，也就是余图类，其 WL 维数为 2，见 [16]。关于孪生宽度为 1 的图，已有如下结论。

引理 4.1（[8]）。 *孪生宽度 1 的图具有一个 1-序列，其中每一步都只有一条红边。*

引理 4.2（[24]）。 *对于每个 $k \in \mathbb{N}$，(3k+4) 维 Weisfeiler-Leman 算法都能识别秩宽度至多为 k 的每个图。*

推论 4.3。 *孪生宽度 1 的图的 WL 维数至多为 10。*

证明。 根据引理 4.1，孪生宽度 1 的图具有分量孪生宽度 2，因此根据 [7]，的定理 10，还具有有界布尔宽度和有界秩宽度 [13]。通过检查 [7], 的定理 10 的证明可以看出，分量孪生宽度 2 的图的秩宽度至多为 2：我们将分量孪生宽度 2 的收缩序列中红色分量的收缩树视为秩分解。根据定义 4.2，结论随即成立。

□

基于 [8]，中的结果，我们还可以更明确地证明一个更好的界：也就是说，孪生宽度为 1 的图的 WL 维数至多为 3。首先，我们证明素图的情形。

4.1. 孪生宽度为 1 的素图

若图 G 的顶点 v 与顶点集 $S \subseteq V(G)$ 中的所有顶点或均不相邻，则称其与 $S \subseteq V$ 齐次连接 。若集合 $M \subseteq G$ 中的所有顶点（$v \in V(G)$）$\setminus M$均与 M 齐次连接，则称 $M \subseteq G$ 为一个模 。若图 G 的一个模只包含一个顶点或包含图 G 的所有顶点，则称其为平凡的 。若图 G 只有平凡模，则称其为素 。

本节进一步考察定义 4.1 的证明如何表明，任意孪生宽度为 1 的图都具有如下形式的 1-序列：

(a) 猜测一个有效 1-收缩序列的第一次收缩。此操作会产生一条红边。(b) 执行所有可能的“安全”收缩，即将当前红边的端点收缩合并，且不产生额外红边的收缩。(c) 收缩红边的两个端点。如果剩下的顶点只有一个，则终止。否则，这将恰好再产生一条红边。重复步骤 2。

该收缩序列在以下意义下是规范的：给定起始收缩，可以对其进行描述，使之成为孪生宽度 1 的带色素图的不变量；如果两个图上的不变量相同，则这两个图同构。给定一个孪生宽度 1 的带色素图 G^c 及其中的两个顶点 u，v，我们定义函数

$\mathrm{cs}(G^c, u, v)$：如果存在，则返回从收缩 u and v 开始的该序列的描述；如果不存在，则返回 `f` 。对于只有一个顶点的输入图，返回该顶点的颜色。否则：

(a) 设 $i := 0$。若 $uv \in E(G)$，则设 $\mathrm{cs}_0 := \mathtt{1}c(u)c(v)$；否则设 $\mathrm{cs}_0 := \mathtt{0}c(u)c(v)$。

(b) 设 $G_0 := (V(G)\ E(G)\ \emptyset)$，设 $u_{G,\ 0} := u$，并设 $v_{G,\ 0} := v$。接下来，重复执行以下两个步骤：

(i) 若 $|V(G_i)| = 2$，则以 $\mathrm{cs}(G^c, u, v) := \mathrm{cs}_i$ 终止。否则，令 W 为 $V(G_i)$ 中恰好与 $u_{G,i}$ 和 $v_{G,i}$ 两者之一相邻的顶点集。若 $|W| \neq 1$，则以 $\mathrm{cs}(G^c, u, v) := \mathtt{f}$ 终止。否则，令 $w \in W$，并在 $wv_{G,i} \in E(G_i)$ 时设 $\mathrm{cs}_{i+1} := \mathrm{cs}_i\#\mathtt{r0}c(w)$，在 $wu_{G,i} \in E(G_i)$ 时设 $c_{i+1} := \mathrm{cs}_i\#\mathtt{r1}c(w)$。设 $G_{i+1} := G_i/u_{G,i}, v_{G,i}$，设 $u_{G,i+1}$ 为收缩后得到的顶点，并设 $v_{G,i+1} := w$。将 i 加一，然后转到步骤 2b。

(ii) 在此步骤中，我们用函数 $\mathrm{ntw}_G^{(t,t'\ \ x\ c^*)}$，$(u, v)$ 定义近孪生点，其中 G 是一个带有某种颜色着色的三图，c、u 和 v 是 G 中的顶点，t 和 t' 是原子类型，$x \in \{u, v\}$，而 c^* 是一种颜色。然后，该函数定义如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{ntw}_G^{(t,t'),x,c^*}(u,v) := \{w \in V(G) \mid & \mathrm{atp}_G(u,w) = t, \mathrm{atp}_G(v,w) = t', \\ & G/w, x = G \setminus \{w\}, \\ & c(w) = c^*\}.\end{aligned}$$

此外，定义 t_1 为边的原子类型，t_0 为非边的原子类型。令 k 为 c 所用颜色的数量。设 $n^{(t,t')_i\ \ x\ c}, := |\mathrm{ntw}^{(t,t')_{G_i}\ \ x\ c}, (u_{G_i}, v_{G_i})|$，且 $\mathcal{T} := ((t_0, t_0), (t_0, t_1), (t_1, t_0), (t_1, t_1)$。我们设

$$\begin{aligned} n_i^x &:= n_i^{\mathcal{T}_1,x,1}; \ldots; n_i^{\mathcal{T}_4,x,1}; \ldots; n_i^{\mathcal{T}_4,x,k}, \\ \mathrm{cs}_{i+1} &:= \mathrm{cs}_i\#n_i^{u_{G,i}}; n_i^{v_{G,i}}. \end{aligned}$$

令 G_{i+1} 为从 G_i 通过执行上述所有安全收缩得到的三图。从此以后，这一系列收缩中的每一次都称为一个收缩阶段。设 $u_{G,\ i+1} := u_{G,\ i}$，且 $v_{G,\ i+1} := v_{G,\ i}$。将 i 加一，然后进入下一次迭代。

在第 i 次迭代中，三图 G_i 中的红边始终位于 $u_{G、i}$ 和 $v_{G、i}$ 之间，因此，三图 G_i 以及顶点 $u_{G、i}$ 和 $v_{G、i}$ 的序列表示从 u 和 v 开始的规范收缩序列。该函数可在多项式时间内计算，运行时间为 $\mathcal{O}(|V|^3)$。我们可以证明：

引理 4.4。设 $G^c = (G, c_G)$ 和 $H^c = (H, c_H)$ 是两个孪生宽度为 *1* 的带色素图。当且仅当存在某些 $u, v \in V(G)$ 和 $u', v' \in V(H)$ 使得 $\mathrm{cs}(G^c, u, v) = \mathrm{cs}(H^c, u', v') \neq f$ 时，这两个图同构。

证明概要。 由于规范收缩序列定义了图顶点上的一个顺序，因此不难看出如何从具有相同规范收缩序列的两个图推导出一个同构。完整证明见附录 C。

□

定理 4.5. *存在一个多项式时间可计算的不变量 I，适用于孪生宽度 1 的带色素图，使得对于任意图 G、H，若 $I(G) = I(H)$，则 $G \cong H$。*

证明. 设 G 是一个孪生宽度为 1 的带色素图。定义

$$\mathrm{CS}(G) := \{\mathrm{cs}(G, u, v) \mid u, v, \in V(G), \mathrm{cs}(G, u, v) \neq \mathtt{f}\}.$$

那么，根据定义 4.4，$\mathsf{cs}(G) := \min_{\leq_{\mathrm{lex}}}(\mathsf{CS}(G))$ 是这样一个不变量，且可在 $\mathcal{O}(|V|^5)$ 时间内计算，因为规范收缩序列可在 $\mathcal{O}(|V|^3)$ 时间内计算。

□

通过“展开”孪生宽度为 1 的带色素图的最小规范收缩序列，还可以得到一种规范形式。

最后，我们可以利用规范收缩序列证明，三维 Weisfeiler-Leman 能够识别孪生宽度为 1 的带色素图。

定理 4.6. *设 G、H 是两个孪生宽度为 1 的带色素图，且满足 $G \ncong H$。那么，3-WL 可以区分 G和 H。*

证明。 我们证明，Spoiler 能在 G 和 H上赢得四棋子游戏。策略的思路是，先各用一枚卵石固定起始收缩对，再用另外两枚卵石跟踪由此产生的序列，并最终发现其中的差异。

令 $u, v \in V(G)$ 是一对顶点，使得 $\mathsf{cs}(G, u, v) \neq \mathsf{f}$。Spoiler 在 u 上放一枚卵石，然后在 v上放一枚卵石。令 b 为复制者在两者都放上卵石后给出的双射，并设 $u' := b(u)$ 和 $v' := b(v)$。注意，$\mathsf{cs}(G, u, v) \neq \mathsf{cs}(H, u', v')$，否则根据定义 4.4，这两个图将同构。

从此以后，Spoiler 不再移动前两枚卵石，而复制者必须尝试重现 $\mathsf{cs}(G, u, v)$ 中描述的收缩序列；否则，Spoiler 可以利用第三枚和第四枚卵石发现差异并获胜。然而，由于 $\mathsf{cs}(G, u, v) \neq \mathsf{cs}(H, u', v')$，Spoiler 总能在序列的某个时刻发现差异。为此，我们定义一串集合$U_{G,i}$ 和 $V_{G,i}$，以及一串集合 $U_{H,i}$ 和 $V_{H,i}$，使得以下不变量在所有回合中都成立：

(a) 如果复制者没有选择双射 b 使得 $b(U_{G,\,i}) = U_{H,\,i}$ 且 $b(V_{G,\,i}) = V_{H,\,i}$，那么 Spoiler 就有获胜策略。(b) $U_{G,\,i}$、$V_{G,\,i}$、$U_{H,\,i}$ 和 $V_{H,\,i}$ 都是模。(c) 集合 $U_{G,\,i}$ 总是包含一个已放置卵石的顶点。

这一串的开头是 $U_{G,\,i} := \{u\}$ $V_{G,\,i} := \{v\}$ $U_{H,\,i} := \{u'\}$ $U_{G,\,i} := \{v'\}$。Spoiler 在游戏的最后阶段之前绝不会移动前两个卵石，因此这些集合显然满足不变量。从这里开始，Spoiler 按如下方式行动：

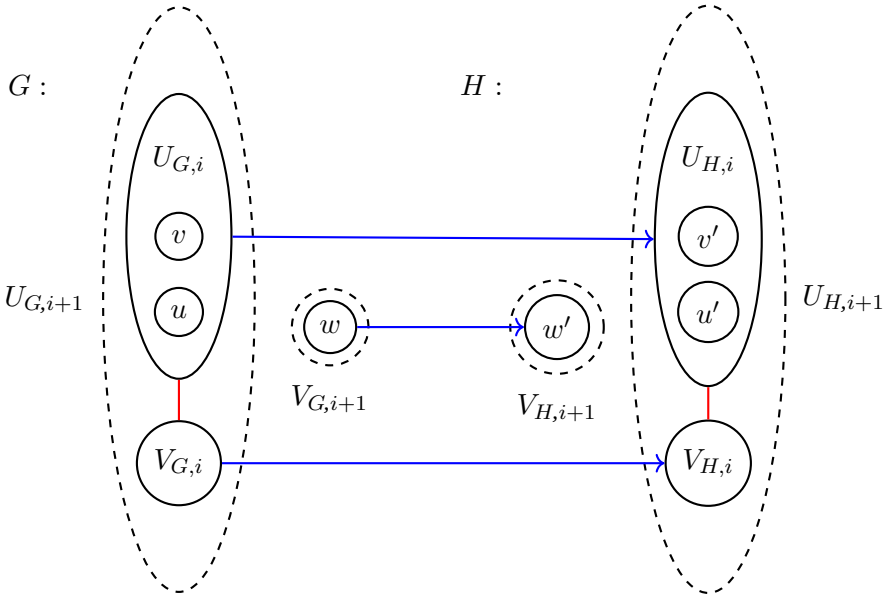

图1：定义4.6证明中红边收缩的示意图。箭头表示复制者选择的双射。

- 对于 cs(G, u, v) 中标出的第一次收缩，如果 atp$_G$(u, v) $\neq$ atp$_H$(w v)，或者颜色不同，Spoiler 就自动获胜。否则，继续。

- 如果 cs(G, u, v) 中描述的下一步收缩是红边收缩，或者这是第一次收缩，那么必定恰有一个 $w \in V(G)$ 与 $U_{G,i}$,$V_{G,i}$ 中恰好一个集合的所有顶点相连，而与其他集合均不相连。还必定恰有一个同颜色的 $w' \in V(H)$ 与 $U_{H,i}$,$V_{H,i}$ 中恰好一个集合的所有顶点相连。若复制者没有将 w 映射到 w'，或者 w 和 w'在各自对应的集合上颜色或同构类型不同，Spoiler 就放置卵石 w。现在，若复制者将$U_{G,i}$ 映射到 $U_{H,i}$ ，并将$V_{G,i}$ 映射到 $V_{H,i}$，Spoiler 就获胜：设 b 为复制者选择的双射。在$U_{G,i}$ 中总有一颗卵石放在某个顶点 $u^* \in U_{G,i}$ 上，并且 w与$U_{G,i}$ 及$V_{G,i}$齐次连接，因此对任意 $v^* \in V_{G,i}$，都有 atp$_G$(u^*, w, v^*) $\neq$ atp$_H$(b(u^*) b(w) b(v^*))。如果复制者没有将 $U_{G,i}$ 映射到$U_{H,i}$ ，并将$V_{G,i}$ 映射到 $V_{H,i}$，Spoiler 就“回溯”到那些集合，并遵循必定存在的获胜策略，因为那些集合的不变量保证了该策略存在。如果复制者迫使 Spoiler 一直回溯到收缩序列的起点，Spoiler 就会因 u 和 v 已被放置卵石而获胜。最后，如果复制者将 w 映射到 w'，且它们在各自对应的 U和 V上的颜色与同构类型一致，则继续进行 $U_{G,i+1} := U_{G,i} \cup V_{G,i}$, $U_{H,i+1} := U_{H,i} \cup V_{H,i}$, $V_{G,i+1} := \{w\}$ 以及 $V_{H,i+1} :=\{w'\}$。参见图1。

于是该不变量成立：

(a) 不变量的第一部分成立，因为复制者必须始终将集合$U_{G,\ i+1}$ 映射到 $U_{H,\ i+1}$ ，否则她要么没有将$U_{G,\ i}$ 映射到 $U_{H,\ i}$ ，要么

没有将$V_{G,\ i}$映射到$V_{H,\ i}$，而这些集合满足不变量。复制者也必须始终将 w 映射到 w'，否则 Spoiler 会像上文所述那样通过放置卵石 w 获胜。

(b) 不变量的第二部分成立，因为这些集合遵循规范的收缩序列：由$U_{G,i}$ 表示的顶点与由 $V_{G,i}$ 表示的顶点在此步骤中收缩并形成$U_{G,i+1}$，这会使其与 w之间产生一条红边，而此时 w由 $V_{G,i+1}$表示，但不会与其他顶点产生红边。因此，它们在所有其他顶点上的情况相同。 H也同理。

(c) 注意，顶点 $u,v \in U_{G,i} \subseteq U_{G,i+1}$ 始终都放置着卵石。不变量的第三部分也成立。

- 对于 cs(G, u, v) 中描述的所有其他收缩阶段，令 W为在 G中选定进行收缩的顶点集，令 W' 为在H中选定进行收缩的顶点集。如果 $|W| \neq |W'|$，或者复制者没有将 W映射到 W'，令 b 为复制者选定的双射，并且不失一般性地令 $w \in W$ 满足 $w' := b(w) \notin W'$。此时 Spoiler 在 w上放置卵石。如果复制者将集合$U_{G,i}$ 映射到 $U_{H,i}$，并将 $V_{G,i}$ 映射到 $V_{H,i}$，则 Spoiler 获胜：w'要么颜色不正确，要么相对于对应的 U 和 V具有错误的同构类型。在这种情况下，$U_{G,i}$ 中总有一枚卵石放在某个顶点 $u^* \in U_{G,i}$ 上，并且 w 与 $U_{G,i}$ 和 $V_{G,i}$齐次连接，因此对于任意的 $v^* \in V_{G,i}$，都有 $\mathrm{atp}_G(u^*, w, v^*) \neq \mathrm{atp}_H(b(u^*)\ b(w)\ b(v^*))$。否则，$w'$ 与相应的 U 或 V在某个公共邻居上不一致。此时 Spoiler 可以通过将第三枚棋子移到$V_{G,i}$中的任意位置获胜，然后，如果复制者触发了关于$U_{G,i}$ 和$V_{G,i}$的不变量，就进行回溯；否则，最终在意见不一致的那个邻居上放置卵石。如果 $|W| = |W'|$，并且复制者确实将 W映射到 W'，则根据收缩阶段，继续将 W 加入U_G、将 $_i$ 加入U_G以得到 $_{i+1}$，并将 W'加入U_H、将 $_i$ 加入U_H以得到 $_{i+1}$；或者将 W加入V_G、将 $_i$ 加入V_G以得到 $_{i+1}$，并将 W'加入V_H、将 $_i$ 加入V_H以得到 $_{i+1}$，同时让另一个集合保持不变，以便进行下一次迭代。见图2。

  于是，不变量成立：

  (a) 不变量的第一部分成立，因为复制者必须始终将 W 映射到 W'，否则 Spoiler 就会如上所述获胜。(b) 不变量的第二部分成立，因为这些集合遵循规范的收缩序列：由$U_{G,\ i}$ 表示的顶点和 W 中的顶点被收缩，现在由$U_{G,\ i+1}$表示，而 $V_{G,\ i+1}$ 则保持为$V_{G,\ i}$。 H也一样。(c) 第三部分成立，因为顶点 $u,\ v \in U_{G,\ i} \subseteq U_{G,\ i+1}$ 始终都放置着卵石。

由于两个规范收缩序列必然会在某处出现差异，这一过程最终将使 Spoiler 获胜。实质上，Spoiler 找出复制者所模拟的收缩序列中的最早错误，然后最坏情况下回溯到序列起点，以“困住”复制者并获胜。因此，Spoiler 最多经过 $|V(G)|$步即可获胜。

□

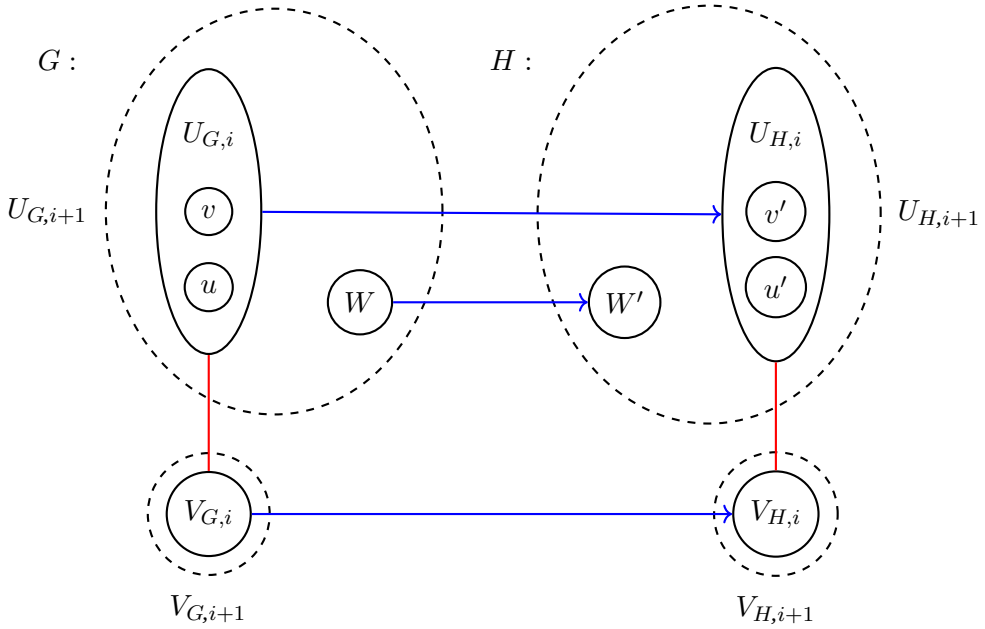

图2：定义4.6证明中收缩阶段的示意图。

4.2. 从素图到所有图

现在，我们将该结果推广到所有孪生宽度 1 的图。为此，我们使用模分解。回顾一下，模的定义是素图的核心。若一个模集中的各个模两两不相交，则称该模集为强模集。对于连通且余连通的图 G，令 M_G 表示由 $V(G)$ 的真子集构成的、按包含关系极大的强模集。 M_G 中的元素也将被称为 G的极大模。

M_G 是 $V(G)$ [27]的唯一确定划分。我们称 M_G 为 G的模分解。Gallai 展示了一种巧妙的方法，可以不断将图分解为其极大模，而这些极大模总能导出一个素商图：

引理4.7 ([18]). 对于每个图 G，以下情况之一成立：

- G不连通。
- $\overline{G}$不连通。
- G/M_G 是素图。

注意，由于 M_G 的集合是 G的模， G/M_G 将没有红边。受Gallai定理启发，存在一棵唯一的树来表示图的所有模。

定义4.8 （模分解树， [34]）。 对于图 G，模分解树 $\mathrm{ModTree}_G = (\mathcal{M}\ E, \ell)$由一组模 $\mathcal{M} \subseteq 2^V$构成

G、关系 $E \subseteq \mathcal{M}^2$ （使得 $(\mathcal{M}, E)$ 是一棵有向树），以及一个标签函数ℓ：$\mathcal{M} \to \{$ `prime`, `series`, `parallel`, `single`$\}$ 为每个模赋予标签。其递归定义如下：

- 含一个顶点的图的模分解树 v 是标记为 `single` 的模$\{v\}$。

- 如果 G 是连通且余连通的，那么将根 $V(G)$ `prime` 标记为 `prime`，并对每个 $M \in M_G$，将 $\mathrm{ModTree}^{G[M]}$ 作为子树附加到它上面。
- 如果 G 不连通，那么将根 $V(G)$ `parallel` 标记为 `parallel`，并对 G 的每个连通分量 C，将 $\mathrm{ModTree}^{G[C]}$ 作为子树附加到它上面。
- 如果 G 不连通，那么将顶点 $V(G)$ `series` 标记为 `series`，并对 G 的每个连通分量 C，将 $\mathrm{ModTree}^{G[C]}$ 作为子树附加到它上面。

利用这一点，我们可以将规范化结果从素图推广到所有图：通过在每一步按字典序对子图排序，我们可以利用相关子图的规范化递归地定义整个图的规范化。为此，我们可以使用带颜色的 素图的规范化：给商素图中的每个顶点着色，颜色取为它所代表的模的同构类型。

引理 4.9. *存在一种多项式时间可计算的规范形式，适用于孪生宽度为 1 的着色图。*

接下来，我们转而讨论如何用 Weisfeiler-Leman 区分孪生宽度为 1 的图。首先，我们证明 2-WL 能区分图中的极大模。

引理 4.10. *设 G, H 为连通且余连通的图。对于所有 $u, v \in V(G)$和 $u', v' \in V(H)$，若 u 和 v 属于 G 的同一个极大模，而 u' 和 v' 属于 H的不同极大模，则 $uv, u'v'$ 是 $BP_3(G, H)$ 中 Spoiler 的获胜局面。*

证明. 可以自底向上计算图 G 的模分解树，并为每个模指定层级：首先追溯所有可能的串联分解和并行分解，然后进行一次素步骤，再重复此过程，直到形成树的根。给定树的这一标记，可以归纳证明，从叶子开始的所有层级上，该引理均成立。

对于图 G，我们将 twins(G) 定义为将 $V(G)$ 按照 G 上的“是孪生顶点”关系划分得到的等价类，即对于所有 u，$v \in V(G)$，当且仅当它们是孪生顶点时，它们才属于同一个 twins(G) 集合。图 G 的模分解树可以按如下方式自底向上计算：令 $M_0 := \{\{v\} \mid v \in V(G)\}$。当 $M_i \neq \{V(G)\}$ 时重复执行：

(a) 令 $T :=$ 为 G/M_i 的孪生顶点。如果 T 是由单元素集合组成的平凡划分，则跳至步骤 b。否则，令 $M_{i+1} := \{\bigcup_{M \in t} M \mid t \in T\}$。这样， G/M_i 中每个孪生类的顶点都会被“合并”在一起。注意，每个孪生类 t 要么构成一个

独立集，要么构成 G/M_i 中的一个团。如果 t 构成独立集，这种“合并”对应于并行分解；否则，对应于串行分解。对 M_{i+1} 重复此步骤。

(b) 令 C 为 $V(G/M_i)$ 按连通分量划分所得的划分，并令 C' 为将这些连通分量进一步细分为余连通分量所得的划分。设 $M_{i+1} \coloneqq \{M_{(G/M_i)[c]} \mid c \in C'\}$，即 C' 中每个连通分量的极大模。这对应于一个素分解： G/M_i 的每个素部分中的顶点都会被“合并”。回到第一步，并继续处理 M_{i+1}。

按照此过程，可以定义 G 的模分解树，并为每个模指定“层级”；事实上，由于 $\mathsf{ModTree}_G$ 是唯一的，因此恰好定义了这一分解。对于图 G 和一个 $i \in \mathbb{N}$，若模 $M \in M_i$ 是 G 的层级为 i 的模，我们就称之为如此。现在，我们通过对 i 使用归纳法证明：对于所有 $u,\ v \in V(G)$ 和 $u',\ v' \in V(H)$，若 u 和 v 位于 G 的同一个层级为 i 的模中，而 u' 和 v' 不位于 H 的同一个层级为 i 的模中，则 Spoiler 从位置 $uv,\ u'v'$ 获胜于 $\mathsf{BP}_3(G,\ H)$。极大模位于最高层级，因此引理得证。

- 对于第0层，该陈述显然成立。
- 设 u、v 是 G 的同一个第 $i+1$ 层模中的两个顶点。设 $u'v' \in V(H)$，使得 u' 和 v' 分别属于 H 的不同第 i 层模。若 u 和 v 也属于 G 的同一个第 i 层模，则由归纳法可得该陈述成立（因为 u' 和 v' 必定已经属于 H 的不同第 i 层模）。若 U 和 v 属于 G 的不同第 i 层模，令包含 u 的 G 的第 i 层模为 M_u，包含 v 的那个模为 M_v。令 $M_{u'}$ 为包含 u' 的第 i 层模，$M_{v'}$ 为包含 v' 的那个模。我们进行分类讨论。

  (a) 假设 $\mathsf{twins}(G/M_i)$ 不是将 G/M_i 划分为单元素集合的平凡划分。那么M_u 和 M_v 是 G/M_i 中的孪生顶点，也就是说， u 和 v 在 G 中位于 $M_u \cup M_v$之外的所有邻居上都一致。注意， $M_{u'}$ 和 $M_{v'}$ 在相应的商图中不是孪生顶点，因此 u' 和 v' 在 $M_{u'} \cup M_{v'}$之外的某个邻居上不一致。令 $w \in V(H)$ 为该顶点。由归纳法，若 M_u 没有映射到 $M_{u'}$，或者 M_v 没有映射到 $M_{v'}$，则 Spoiler 可以通过放置卵石于一个被映射到相应模之外的顶点上，采用获胜策略。若 M_u 映射到 $M_{u'}$ 且 M_v 映射到 $M_{v'}$，Spoiler 现在可以在位置 $uv,\ u'v'$ 获胜，方法是放置卵石于 w 的原像，因为 u 和 v 在各自模之外的所有邻居上都一致，而 u' 和 v' 在w上不一致。参见图 3。

  (b) 否则，$\mathsf{twins}(G/M_i)$ 是 G/M_i 的平凡划分，即划分为单元素集合。令 M_i^H 为 H 按层级 i 划分得到的模。如果 $\mathsf{twins}(H/M_i^H)$ 不是 H/M_i^H 的平凡划分，即划分为单元素集合，那么交换 G 和 H，并回到情形1中的论证。因此，假设它是平凡划分。于是， M_u 和 M_v 属于 G/M_i 的同一个连通且余连通分量。此外， $M_{u'}$ 和 $M_{v'}$ 不属于 H/M_i^H 的同一个连通且余连通分量。由于 M_i 的集合都是模， G/M_i 中模之间的路径

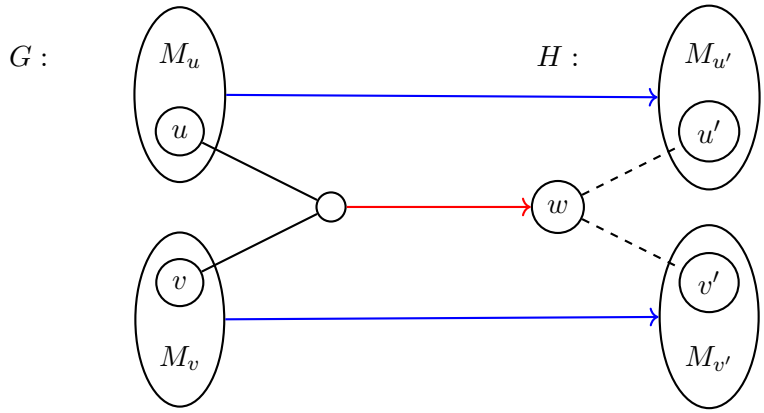

图 3：定义4.10证明中情形1的示意图。复制者选择的双射由箭头表示。

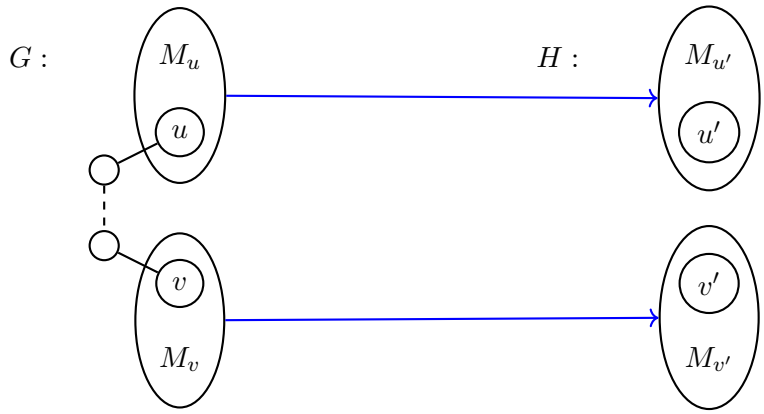

图4：定义4.10证明中情形2的示意图。复制者选择的双射由箭头表示。

以及 H/M_i^H 会产生 G 和 H 中顶点之间的路径。因此，要么 G 中存在一条从 u 到 v 的路径，但 H 中不存在一条从 u' 到 v' 的路径；要么 G 中存在一条从 u 到 v 的路径，但 H 中不存在一条从 u' 到 v' 的路径。在这两种情况下，Spoiler 都可以用第三枚棋子沿着 G 或 G 中的路径行进并获胜。见图4。 □

这个引理使我们得以确立本节的关键结果，该结果涉及这样的着色商素图：非同构的模被赋予不同的颜色。

定义4.11。设 $<^*$ 是着色图同构类型上的任意但固定的一个阶。给定一个着色图 $G_c = (G, c)$，令 $I := \{\text{itp}(G_c[M]) \mid M \in M_G\}$ 为 G 中着色极大模的同构类型集合。令 $(i_1, \ldots, i_k)$ 为 I 的一个枚举，使得 $i_1 <^* \cdots <^* i_k$。我们定义图 $G_c^* := (G/M_G, c^*)$，其中 $c^*(M) = k$，使得 $\text{itp}(G_c[M]) = i_k$。

由于描述 Spoiler 的策略时，颜色顺序并不重要，

我们现在可以证明这一一般性结论 .

引理 4.12. 设 $G_c = (G, c)$ 是一个着色图，对于其无色版本 G，商图 G/M_G 是素图，并设 $k := |M_G|$ 和 $M_G = \{M_1, \ldots, M_k\}$。那么

$$\dim_{\mathrm{WL}}(G_c) \leq \max\{\dim_{\mathrm{WL}}(G_c^*), \dim_{\mathrm{WL}}(G_c[M_1]), \ldots, \dim_{\mathrm{WL}}(G_c[M_k]), 2\}.$$

证明。 设 G_c, H_c 是不同构的着色图， G, H 是它们对应的无色图。给定 G 或 H中的一个顶点 v ，我们用 M_v 表示该顶点在相应图中所属的极大模。现在，进行 $\mathrm{BP}_k(G_c, H_c)$。

- 如果游戏过程中任何时候复制者选择了一个双射 b ，使得对于某个顶点 v，有 $G_c[M_v] \ncong H_c[M_{b(v)}]$, ，则以在 v上放置一颗卵石作为回应。在游戏剩余过程中，只要 M_v 中有顶点被放置了卵石，复制者就必须根据定义4.10选择满足 $b\prime(M_v) = M_{b(v)}$的双射 $b\prime$ 。因此，由于 $G_c[M_v] \ncong H_c[M_{b(v)}]$ ，且复制者必须始终选择满足 $b\prime(M_v) = b\prime(M_{b(v)})$的双射 $b\prime$ ，Spoiler现在可以转而采用该模上的策略并获胜。

- 如果复制者选择一个双射 b ，使得对所有顶点 v，都有$G_c[M_v] \cong H_c[M_{b(v)}]$, 注意到 $G_c^* \ncong H_c^*$，因为 $G_c \ncong H_c$。因此，Spoiler 可以在 G_c^* 和 H_c^*上进行一场获胜博弈。我们可以用相同数量的卵石，将此转化为 Spoiler 在 G_c 和 H_c 上的获胜策略。 G_c 或 H_c 的模M 中的卵石，分别对应于放置在 G_c^* 或 H_c^*中 M 上的卵石。如果复制者在 G_c 和 H_c 上选择一个双射 b ，我们可以按如下方式将其转化为 G_c^*和 H_c^* 上的一个双射 b^* ： 令

$$R := \{(M_v, M_w) \mid v \in V(G_c), w \in V(H_c), b(v) = w\}.$$

  然后，我们可以选取一个双射 b^*，使得如果 $b^*(M) = M'$，那么 $(M, M\prime) \in R$。之所以能够选取这样的双射，是因为极大模 M中的每个顶点都会被映射到 M' 中大小相同的一个极大模内的顶点。Spoiler 可以通过在 G_c^* 和 H_c^*的模上放置卵石来应对这个双射；这些卵石对应于在 G_c 和 H_c的模内任意位置放置的卵石。以这种方式在 G_c^* 和 H_c^* 上进行游戏时， b^* 会保留已有的卵石和颜色；如果 Spoiler 最终在 G_c^* 和 H_c^* 上到达一个获胜局面，那么这也是 G_c， H_c上的获胜局面，因为在 G_c^* 或 H_c^* 中，两个模相邻，当且仅当这两个模中的所有顶点在 G_c 或 H_c中都相邻。

□

现在，我们可以证明本节的核心结果了。

引理 4.13. *3-WL* 可以识别亏生宽度为 *1* 的着色图。

证明。 设 G 是亏生宽度为 1 的着色图。我们对 $\mathrm{ModTree}_G = (\mathcal{M}, E, \ell)$ 进行归纳，证明 3-WL 可以识别 G。由于 3-WL 可以识别单顶点图，因此它可以识别所有标记为 `single` 的叶模。现在，设 $M \in \mathcal{M}$ 是一个模，且对于 $\mathrm{ModTree}_G$ 中 M 的所有子节点 $M\prime$，3-WL 都可以识别 $G[M\prime]$。如果 M 标记为 `parallel`，那么 $G[M]$ 是

其子节点的不交并，因此可以由 3-WL 识别。如果 M 标记为`series`，那么 $G[M]$ 可以由 3-WL 识别，因为 3-WL 可以识别一个图，当且仅当它可以识别该图的补图。如果 M 标记为 `prime`，那么 $G[M]^*$ 是一个李生宽度为 1 的素彩色图，因此根据定义 4.6 可由 3-WL 识别。3-WL 也可以识别 $G[M]/M_{G[M]}$ 中各模的所有诱导子图。因此，根据定义 4.12，3-WL 也可以识别 $G[M]$。由归纳法，3-WL 可以识别所有 $M \in \mathcal{M}$ 对应的 $G[M]$。由于根模块是 $V(G)$，3-WL 可以识别 G。 □

定义4.6的证明中使用的第四枚棋子是否确有必要，目前尚不明确。因此：

Th定理 4.14. 李宽为 *1* 的彩色图类的 *WL* 维数为 *2* 或 *3* .

最后请注意， [24] 还表明，对于所有 k，秩宽度至多为 k 的所有图构成的类中的每个多项式时间可判定性质，都可以用 FP+C 表达，因为该类具有 FP+C 可定义的规范化。李宽为 1 的图类就是这样一个类，因为其秩宽度有界于 2。然而，[24] 中的构造使用了 2^{2k}元关系符号，其中 k 是图的秩宽度。有一种方法可以证明李宽为 1 的图具有可定义规范化，且只使用至多 5 元关系符号。其运行时间为$\mathcal{O}(n^5)$，且其工作方式与本节所述的规范化算法类似。相关描述见附录 D。

5. 李生宽度 2 的稳定类

正如上一节所利用的那样，李生宽度 1 的图总是存在一个收缩序列，其中始终至多包含一条红边。特别是，它们的分量李生宽度有界，因此秩宽度和团宽度也有界。李生宽度为 2 的图则并非如此，因为单位区间图的李生宽度至多为 2 [9] ，但其秩宽度无界 [20]。尽管如此， [6] 已证明，李生宽度为 2 的稀疏图具有有界树宽，且树宽的上界关于禁半诱导完全二部图的大小为多项式。我们通过证明以下结论来加强并推广这一结果：若李生宽度为 2 的图类是 单子稳定的，也就是说，禁止某个半图 H_t 作为半诱导子图，那么其秩宽度就有一个线性上界，该上界关于被禁止的半诱导半图的大小为线性函数。由此还可得到其 Weisfeiler-Leman 维数的线性上界。

我们通过证明李生宽度 2 的图的秩宽度与其最大半诱导半图的大小呈线性关系，强化并拓展了这一结果。特别地，单子稳定的李生宽度 2 图类，也就是说，排除某个半诱导半图的李生宽度 2 图类，具有有界秩宽度。

5.1. 李生宽度为 1 的图中由红边诱导的割

在李生宽度 2 的收缩序列中，所有红连通分量要么是红路径，要么是环。在对这类红路径或环的内部顶点进行收缩时，这些收缩的行为实质上类似于宽度为 1 的收缩，因为它们

不会产生额外的红边。这启发了我们的方法：我们首先分析 1-收缩序列所形成的结构，然后将这一认识应用于一般 2-收缩序列中的局部宽度为 1 的行为。在此过程中，讨论划分序列而非收缩序列往往会更有帮助。

因此，我们从重新考察孪生宽度为 1 的图开始这项研究，并提出以下问题：给定一个图 G，它有一个 1-划分序列 $(\mathcal{P}_i)_{i\in[n]}$ 以及一条红边 $PQ \in R(G/\mathcal{P}_i)$，那么我们能对图 $G[P,Q]$ 作何判断？等价地，哪些二分图 $G[A,B]$ 存在一种 1-划分序列，使其最后两个部分分别为两侧 A 和 B？

半图就是这类二分图的一个例子：

引理 5.1. 对于每个 $t \in \mathbb{N}$，半图 H_t 都存在一种1-划分序列，其最后两个部分是半图的两侧。

证明。令 H'_t 为从 H_t 将边 v_tw_t 染成红色后得到的三图。现在注意到，先收缩顶点对 w_tw_{t-1}，再收缩顶点对 v_tv_{t-1}，不会产生红度为 2 的顶点，且所得图与 H'_{t-1} 同构。因此，我们可以通过归纳找到一个 1-划分序列，将 H'_t 收缩为 H'_1，即一条单条红边。

□

由于孪生宽度在诱导子图下具有单调性，因此半图的每个诱导子图也都存在这样的 1- 划分序列。我们将这样的图称为部分半图。我们将证明，这已经涵盖了所有情况：也就是说，1-划分序列中由红边诱导出的每个二部图都是部分半图。

引理 5.2. 对于每个图 G、每个1-划分序列$(P_i)_{i\in[n]}$ 以及其中任意两个不同部分 $P,Q \in P_i$，图 $G[P,Q]$ 都是部分半图。

证明。我们对 i 进行反向归纳来证明该结论。如果 $i = n$，所有部分都是单元素集合，结论显然成立，因为边和非边都是部分半图。因此，假设该结论对所有 $j > i$ 都成立，并选取两个不同部分 $P,Q \in \mathrm{P}_i$。若$P,Q \in \mathrm{P}_{i+1}$，结论显然成立。因此，不妨假设 $Q = Q_0 \dot\cup Q_1$，其中$Q_0,Q_1 \in \mathrm{P}_{i+1}$。由于 P 在 P_{i+1} 中至多有一个非齐性邻点，因此 Q_0或 Q_1，不妨设 Q_1 与 P齐次连接，而 $G[P,Q_0]$ 根据归纳假设是部分半图，记作 $G[P,Q_0] \subseteq H_k$。现在，若 P 与 Q_1完全连接，我们声称$G[P,Q_0 \dot\cup Q_1] \subseteq H_{k+|Q_1|}$：将 H_k 嵌入这个更大的半图的底部，并将 Q_1 任意嵌入 $H_{k+|Q_1|}$中相应部分顶部的 $|Q_1|$ 个元素即可。若 P 与 Q_1不连通，则改为将 H_k 嵌入半图$H_{k,k+|Q_1|}$ 的顶部，并将 Q_1 嵌入 $H_{k+|Q_1|}$中相应部分最小的 $|Q_1|$个元素。

□

有了这一关于孪生宽度 1 的图中由红边诱导的二分图的刻画后，接下来我们考察两部分之间的高连通性会迫使哪些类型的子图出现。

引理 5.3. 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，部分半图 $H[L,R]$ 包含诱导半图H_t，当且仅当 $\mathrm{rk}_H(L,R) \geq t$。

证明。由于删除孪生顶点和孤立顶点既不会改变秩，也不会影响诱导半图的存在性，我们不妨假设 H 既不包含孪生顶点，也不包含孤立顶点。由于半图任一侧的顶点按照其邻域的包含关系构成线性序，部分半图任一侧的顶点按照其邻域的包含关系构成线性预序。但由于该预序中的任何非平凡等价类都将是一个孪生类， H 的任一侧的顶点也按照其邻域的包含关系构成线性序，我们可以写作$L = \{\ell_1, ..., \ell_n\}$和 $R = \{r_1, ..., r_m\}$，其中 n、$m \in \mathbb{N}$满足：当且仅当 $i \geq j$ 时， $N_H(\ell_i) \subseteq N_H(\ell_j)$；当且仅当 $i \leq j$ 时， $N_H(r_i) \subseteq N_H(r_j)$。由于两侧都不包含孤立顶点，顶点 ℓ_1 必须与 R完全相连，而 ℓ_n 仍至少有一个邻居。由于 ℓ_i 和 ℓ_j 的邻域对于 $i \neq j$而言必须不同，这意味着 $n \leq m$；同理，交换 L 和 R 后可得 $n = m$，并且$N_H(\ell_i) = \{r_i, ..., r_n\}$。因此， H同构于一个标准半图 H_n。但该图的秩恰好为 n。

□

类似地，我们也可以将最大匹配的大小与最大双团的大小联系起来。

引理 5.4. 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，如果部分半图 $H[L,R]$ 包含一个大小为 $2t-1$ 的匹配，那么 H 包含一个双团 $K_{t,t}$。

证明. 设 $\iota\colon H \to H_n$ 是一个嵌入，并按照顶点在嵌入中的顺序，将 L 的顶点标记为 $\ell_1, \ldots, \ell_{|L|}$；再按照嵌入顺序的逆序，将 R 的顶点标记为 $r_1, \ldots, r_{|R|}$。这样可以确保 L 和 R的两种枚举都按照其邻域的包含关系排序，其中 ℓ_1 和 r_1 具有最大的邻域。

如果图 H是$K_{k,\,k}$-自由的，那么特别地，元素 ℓ_1、.....、ℓ_k不会与元素 r_1、.....、r_k 完全连接，这意味着 $\iota(\ell_k) > \iota(r_k)$。但这进一步意味着， H的每条边都与大小为 $2k-2$ 的顶点集 $\{\ell_1$、.....、ℓ_{k-1}，r_1、.....、r_{k-1}相 incident，这排除了大小为 $2k-1$ 的匹配。

□

5.2. 孪生宽度 2 的稳定图具有有界秩宽度

做好这些准备后，我们就可以证明 H_k-半自由图的孪生宽度 2 具有秩宽度 $O(k)$。我们的一般策略与 [6] 的策略类似，具体如下：假设 G 的秩宽度很大，根据定义 2.2，可知存在一个较大的 rk-良好链接集。考察该良好连接集上的 2-划分序列，我们可以在一条较长的红路径中提取一条具有良好连通性性质的单条红边。现在沿着划分序列回溯，我们注意到，只要这条红路径仍然存在，应用于该路径中这条红边的（非）收缩序列实际上就是一个 1-划分序列，因为路径上的额外红边排除了所讨论的两个部分之间出现其他红边的可能性。因此，我们可以找到一个具有良好连通性性质的孪生宽度 1 的大二分图，

根据上一节，这意味着存在一个大型半图。

我们首先证明：含有大型良连接集的孪生宽度 2 图，在划分序列的某个位置必然也含有一条高度连通红路径。

引理 5.5. 设 $t \geq 0$ 为一个整数，且 $k := 2t + 9$。若 G 是一个包含大小为 $11k - 5$ 的 rk-良连接集 W 的图，且 $(P_i)^{i \in [n]}$ 是 G的一个 2-划分序列，则存在某个 $i \in [n]$ 以及四个部分 X_1、X_2、X_3、$X_4 \in P_i$，使得

- $X_1X_2X_3X_4$ 按此顺序在 G/P_i中构成一条红4-路径，
- 不存在红边 X_1X_4，
- $\kappa^{\text{秩宽}G[X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4]}(X_1, X_4) \geq t$。

证明。取 $i \in [n]$ 为最小值，使得 $\mathcal{P}_i$ 的每个部分至多包含 $2k - 1$ 个 W的顶点。由最小性可知，$\mathcal{P}_i$ 包含一个部分 Z，其中至少包含 k 个 W的顶点。

对于某些 $d \in \mathbb{N}$和 $R \in \{=, <, >, \leq, \geq\}$，令 $N^{Rd}_{\text{red}}(Z)$ 表示 $\mathcal{P}_i$ 中与 Z 在 $G/\mathcal{P}_i$ 的红图中距离指定值的部分所组成的集合。滥用记号，我们也将包含在这些部分中的 G 的顶点集记为 $N^{Rd}_{\text{red}}(Z)$。

由于红图的最大度至多为 2，$N^{\leq d}{}_{\text{red}}(Z)$ 至多包含 $2d+1$ 个部分，而 $N^{=d}_{\text{red}}(Z)$ 至多包含 2 个部分。特别地，$N^{\leq 2}{}_{\text{red}}$由至多五个部分组成，这些部分总共包含来自 W 的至多 $10k - 5$ 个顶点。特别地，集合$W_3 := W \cap \bigcup N^{\geq 3}(Z)$ 至少包含 k 个顶点。

因此，由于 W 是良好连接的，我们得到

$$\kappa^{\text{rk}}_G(Z, W_3) \geq \min\{|Z|, |W_3|\} \geq k.$$

现在，$\mathcal{P}_i$ 中与 W_3 相交的每个部分，要么是 $N^{=3}{}_{\text{red}}(Z)$ 中至多两个部分之一，要么与 $N^{\leq 2}{}_{\text{red}}(Z)$ 中的所有部分齐次连接。但后者相对于 $N^{\leq 2}{}_{\text{red}}(Z)$ 的秩总共至多为 5，根据定义 2.1(b)，这意味着

$$\kappa^{\text{rk}}_{G\left[N^{\leq 3}_{\text{red}}(Z)\right]}\left(Z, N^{=3}_{\text{red}}(Z)\right) \geq k - 5 = 2t + 4.$$

特别地，$N^{=3}_{\text{red}}(Z)$ 非空。

首先假设它包含两个部分，这意味着存在一条红色 7-路径L_3-L_2-L_1-Z-R_1-R_2-R_3。我们声称，两个 4-路径 L_3-L_2-L_1-Z 或Z-R_1-R_2-R_3 中至少有一条满足该断言的要求。由于前两个性质显然成立，为了导出矛盾，我们可以假设这两者 $\kappa^{\text{rk}}_{G[Z \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3]}(Z, R_3) \leq t - 1$ 和 $\kappa^{\text{rk}}_{G[Z \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3]}(Z, L_3) \leq t - 1$都成立。但这意味着存在两个割 $L_1 \cup L_2 = L_Z \dot\cup L_P$和 $R_1 \cup R_2 = R_Z \dot\cup R_P$，使得 $\mathbf{rk}_G(Z \cup L_Z, L_3 \cup L_P) \leq t - 1$且

$\mathbf{rk}_G(Z \cup R_Z,\ R_3 \cup R_P) \leq t-1$。但是，

$$\begin{aligned}
2t+4 &\leq \kappa^{\mathrm{rk}}_{G[N^{\leq 3}_{\mathrm{red}}(Z)]}(Z, L_3 \cup R_3) \\
&\leq \mathrm{rk}_G(Z \cup L_Z \cup R_Z, L_P \cup R_P \cup L_3 \cup R_3) \\
&\leq \mathrm{rk}_G(Z \cup L_Z, L_P \cup L_3) + \mathrm{rk}_G(Z \cup R_Z, R_P \cup R_3) \\
&\quad + \mathrm{rk}_G(L_Z, R_3 \cup R_P) + \mathrm{rk}_G(R_Z, L_3 \cup L_P) \\
&\leq 4 + 2(t-1) = 2t+2,
\end{aligned}$$

这就构成了矛盾。

若我们得到的不是一条 7-路径，而是一个红色 6-圈 P-L_2-L_1-Z-R_1-R_2-P，则情况与第一种情形类似，唯一的区别是我们在上述计算中将 $\mathbf{rk}_G(Z,\ P)$ 计入了两次。再加上一次以将其抵消，我们得到

$$2t+4 \leq \kappa^{\mathrm{rk}}_{G[N^{\leq 3}_{\mathrm{red}}(Z)]}(Z,\ P) \leq 2t+3,$$

这再次构成了矛盾。

因此，剩下的情形是：从 Z 出发只有一条红色 4-路径，设其为 Z-R_1-R_2-P；令 L 为构成连接到 Z 的第二条红路径的各部分的并集（可能为空）。由于 L 至多由两部分组成，且唯一一条向外的红边将其连接到 Z，我们得到 $\mathbf{rk}(L,\ R_1 \cup R_2 \cup P) \leq 2$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\kappa^{\mathrm{rk}}_{G[Z \cup R_1 \cup R_2 \cup P]}(Z, P) &\geq \kappa^{\mathrm{rk}}_{G[Z \cup R_1 \cup R_2 \cup P \cup L]}(Z \cup L, P) - \kappa^{\mathrm{rk}}_{G[R_1 \cup R_3 \cup P \cup L]}(L, R_1 \cup R_2 \cup P) \\
&\geq \kappa^{\mathrm{rk}}_{G[N^{\leq 3}_{\mathrm{red}}(Z)]}(Z, P) - 2 \\
&\geq 2t+2 > t.
\end{aligned}$$

□

接下来，我们要证明，前一个引理中已证明存在的红色 4-路径会迫使一个大的半诱导半图存在。

引理 5.6。设 G 是一个具有 2-划分序列 $(\boldsymbol{P}_i)_{i \leq n}$ 的图 G，并假设对于某个 $m \in [n]$，存在四个部分 X_1、X_2、X_3、$X_4 \in \boldsymbol{P}_m$，使得

- X_1、X_2、X_3、X_4 按此顺序在 $G/\boldsymbol{P}_m$ 中构成一条红路径，并且不存在红边X_1X_4，
- $\kappa_{\text{秩宽}^{G[X]}}(X_1,\ X_4) \geq t+6$，

其中 $X := X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$。则 G 包含一个半诱导半图 H_t。

证明。设 $i > m$ 为极小的，使得不存在四个部分 Y_1、Y_2、Y_3、$Y_4 \in \mathcal{P}_i$ 具有以下性质：

- 这四个部分 Y_1、Y_2、Y_3 和 Y_4 按此顺序在三图 $G/\mathcal{P}_i$ 中构成一条红路径，并且不存在红边 Y_1Y_4，
- $Y_2 \subseteq X_2$ 和 $Y_3 \subseteq X_3$。

注意，这样的 i 存在，因为图 $G = G/\mathcal{P}^{|G|}$ 不含红边，因此肯定不含红色 4-路径。

断言。 对于每个 $i > j \geq m$，都有一条跨越割(X_2, X_3) 的单条红边，位于G/P^j中，且它是某条红色4-路径的中央边。

证明。对于 $j = m$，该断言成立，此时 X_2X_3 本身就是这条单条红边，它包含在红路径 $X_1X_2X_3X_4$中。现在，假设该断言对某个满足$i - 1 > j \geq m$的 j 成立，且对应的红色 4-路径为 $Y_1Y_2Y_3Y_4$。如果 Y_2 和 Y_3 仍是 P^{j+1}的部分，那么 Y_2Y_3仍是跨越割 (X_2, X_3) 的唯一红边，它位于 G/P^{j+1}中，因为对任何不与跨越割 (X_2, X_3) 的红边相 incident 的部分进行解收缩，都不会产生或移除跨越此割的新红边。此外，由 i的极小性可知，仍然存在一条红色 4-路径 $Y'_1Y'_2Y'_3Y'4$，其中央边跨越割 (X_2, X_3)，这就证明了该断言对 $j + 1$成立。因此，不失一般性，假设 $Y_2 \notin$ P^{j+1}，也就是说， Y_2 是通过在 P^{j+1}中收缩两个部分 $Y_2^{(1)}$ 和 $Y(2)$ 2 得到的。但由于 Y_3 仍有红邻点Y_4，它不可能同时与 $Y_2^{(1)}$ 和 $Y_2^{(2)}$ 共享红边。因此，跨越割 (X_2, X_3) 的红边至多仍有一条。但 i 的极小性保证存在一条红色 4-路径，其中央边跨越割 (X_2, X_3)，故断言得证。■

由于 i 是极小的，我们知道 $G/\mathcal{P}_{i-1}$ 确实包含这样一条红色 4-路径 $Y_1Y_2Y_3Y_4$。在 $G/\mathcal{P}_i$ 中，这四个部分之一（不妨设为 Y_i）会分裂成两个部分 Y_i^1 和 Y_i^2，使得要么$i \in \{2,3\}$ 与 Y_i^1 和 Y_i^2 不共享红边，要么 Y_i 在$G/\mathcal{P}_{i-1}$ 中的红邻点 Y_j 之一不通过红边与部分 Y_i^1 或 Y_i^2 相连。在前一种情况下，我们称部分 Y_i 被拆开；在后一种情况下，我们称边Y_iY_j 被拆开。在这种情况下，我们称红边 Y_iY_j 被拆开。注意，边Y_iY_j 被拆开意味着 $\mathrm{rk}_G(Y_i, Y_j) = 1$。

根据对称性，不妨设 Y_3 被拆开，或者边 Y_2Y_3 或Y_3Y_4 之一被拆开。

如果单条红边 Y_2Y_3 被破坏，那么考虑二分图 $G[X_2, X_3]$。

断言。 二分图 $G[X_2, X_3]$ 存在一个 1-划分序列，其最后两个部分为 X_2 和 X_3。

证明。 考虑由划分序列 $(\mathcal{P}^j)_{m \leq j \leq n}$在 $X_2 \cup X_3$上诱导的划分序列。根据前述断言，对于所有 $m \leq j < i$，在 $G/\mathcal{P}^j$ 中，恰有一条红边跨越割 (X_2, X_3)。由于边 Y_2Y_3 被破坏，在 $G/\mathcal{P}_i$中没有红边跨越 (X_2, X_3)，因此对于任意 $j \geq i$，在 $G/\mathcal{P}^j$中也没有红边跨越 (X_2, X_3)。因此，在 $G[X_2, X_3]$ 上诱导的划分序列中，每一步至多包含一条红边。■

因此，根据定义 5.2， $G[X_2, X_3]$ 是一个部分半图。此外，由于

$$\mathrm{rk}_G(X_2, X_3) \geq \mathrm{rk}_G(X_1 \cup X_2, X_3 \cup X_4) - 2 \geq \kappa^{\mathrm{rk}}_{G[X]}(X_1, X_4) > t,$$

定义 5.3 意味着 $G[X_2, X_3]$ 包含一个半诱导半图 H_t。

如果改为断开边 Y_3Y_4，则考虑图 $G[X_2, X_3 \setminus Y_3]$。由于在 $G/\mathcal{P}_i$ 中，割 $(X_2, X_3 \setminus Y_3)$ 两侧不再存在红边，我们可以像在前一个断言中一样论证，存在一个 $G[X_2, X_3 \setminus Y_3]$ 的 1-划分序列，其最后两个部分分别为 X_2 和 $X_3 \setminus Y_3$。

此外，由于 Y_3 在$\mathcal{P}_i$中至多分裂为两部分，且这两部分都与 X_3 的所有其他部分均匀连通，因此 $\mathrm{rk}_G(Y_3, X_3 \setminus Y_3) \leq 2$。但这样一来，

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}_G(X_2, X_3 \setminus Y_3) &\geq \mathrm{rk}_G(X_2 \cup Y_3, X_3 \setminus Y_3) - 2 \\ &\geq \mathrm{rk}_G(X_1 \cup X_2 \cup Y_3, (X_3 \setminus Y_3) \cup X_4) - 2 \\ &\quad - \mathrm{rk}_G(X_1, X_4 \cup X_3 \setminus Y_3) - \mathrm{rk}_G(X_4, X_1 \cup X_2) - \mathrm{rk}_G(X_4, Y_3) \\ &\geq \kappa^{\mathrm{rk}}_{G[X]}(X_1, X_4) - 6 \geq t.\end{aligned}$$

因此，定义 5.3 再次表明，$G[X_2, X_3 \setminus Y_3]$ 含有一个半诱导半图H_t。

最后，假设部分 Y_3 是破损的，且 Y_2 与部分 Y_3^2 之间没有红边相连。此时，我们考虑二分图 $G[X_2, X_3 \setminus Y_3^1]$；相对于划分$\mathcal{P}_i$，它同样不再含有红边。与之前类似，我们得到一个 1-划分序列，其最后两部分为 X_2 和 $X_3 \setminus Y_3^1$。此外，由于根据假设，$Y_1Y_2Y_3^1Y_4$ 不可能是红色 4-路径，因此要么边 Y_2Y_3 是破损的（此时结论成立），要么 $Y_3^1Y_4$ 不是红边。但这样一来，Y_3^1 与 X_3 中除其自身之外的任何部分都没有红边相连，因此它对 $X_3 \setminus Y_3^1$ 的秩至多为 1。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}_G(X_2, X_3 \setminus Y_3^1) &\geq \mathrm{rk}_G(X_2 \cup Y_3^1, X_3 \setminus Y_3^1) - 1 \\ &\geq \mathrm{rk}_G(X_1 \cup X_2 \cup Y_3^1, (X_3 \setminus Y_3^1) \cup X_4) - 1 \\ &\quad - \mathrm{rk}_G(X_1, X_4 \cup X_3 \setminus Y_3^1) - \mathrm{rk}_G(X_4, X_1 \cup X_2) - \mathrm{rk}_G(X_4, Y_3^1) \\ &\geq \kappa^{\mathrm{rk}}_{G[X]}(X_1, X_4) - 4 > t,\end{aligned}$$

根据定义 5.3，这再次意味着 $G[X_2, X_3 \setminus Y_3^1]$ 包含一个半诱导半图 H_t。

□

结合前两个引理，得到我们的主要定理：

定理 5.7. 每个 H_t-半自由图 G 的孪生宽度至多为2，其秩宽度至多为 $22t + 170$。特别地，每个孪生宽度至多为2 的单子稳定图类都具有有界秩宽度。

证明. 假设结论不成立，也就是说，$\mathrm{rw}(G) > 22t + 170$。根据定义 2.2，图 G包含一个大小为 $22t+170 = 11k-5$的 rk-良好连接集，且 $k = 2(t+6)-9$。因此，根据定义 5.5，我们找到一条高度连通红路径；由定义 5.6，这意味着存在一个 H_t。但这与我们的假设矛盾。

第二个论断源于这样一个观察：每个单子稳定类都是H_t-半自由的，其中 t。

□

该定理推广了 [6] 的相关结果：每个孪生宽度至多为 2 的稀疏图类都有有界树宽，因为每个秩宽度有界的稀疏类也都有有界树宽。不过，尽管这种方法得到的树宽界比 [6], 给出的更差，我们实际上可以改进他们的界：将他们用于树宽的排除网格定理替换为我们证明中使用的 mm-良链接集，并使用定义 5.4 而非定义 5.3，从高度连通的部分半图中提取一个大的完全二部图。这样便能得到树宽关于某个禁半诱导完全二部图的线性上界：

定理 5.8。 孪生宽度至多为 2 且不含 $K_{t,t}$-子图的每个图，其树宽至多为 $O(t)$。

由于定义 5.8 的证明与定义 5.7 的证明颇为相似，只是增加了一些取自 [6], 的细节，因此我们将证明移至 E 节。

此外， [6] 的作者还表明，他们的结果无法推广到孪生宽度为 3 的图；也就是说，存在一个由孪生宽度为 3 的稀疏图组成、且树宽无界的图族。由于秩宽度有界的稀疏类也具有有界树宽，这个图族的秩宽度同样无界。因此，我们的定理也无法推广到孪生宽度为 3 的图。

最后，利用定义 4.2，我们还可以得到 Weisfeiler-Leman 维数的一个上界 .

推论 5.9。 孪生宽度至多为 2 的 H_t-半自由图可由 $O(t)$ 维 *Weisfeiler-Leman* 算法识别。

6. 结论

我们考察了 Weisfeiler-Leman 算法在孪生宽度较小的图上的能力，证明孪生宽度为 1 的图的 Weisfeiler-Leman 维数至多为 3，而孪生宽度为 4 的图的 Weisfeiler-Leman 维数无界。此外，我们证明了孪生宽度为 2 的稳定图具有有界的秩宽度，从而解决了 [6], 提出的一个猜想，并进一步得出了这类图的 Weisfeiler-Leman 维数存在上界。

孪生宽度为 1 的图的 Weisfeiler-Leman 维数究竟是 2 还是 3，仍是一个未解问题；同样，孪生宽度为 2 的稳定图的确切 Weisfeiler-Leman 维数也尚未确定。最后，孪生宽度为 2 和 3 的一般图是否具有有界的 Weisfeiler-Leman 维数，目前也尚不清楚。

在证明三维 Weisfeiler-Leman 能识别孪生宽度为 1 的图时，我们首先证明了该结论对素图成立，随后构建了一套通用方法，使我们能够将遗传图类中素图的识别结果推广到该类的所有图。该技术能否推广到其他图类，仍有待研究。

回顾 [17] 的结果：每个有界孪生宽度的稳定类，都是某个有界孪生宽度稀疏类的转导。由于有界树宽类的转导具有有界秩宽度，一个自然的问题是：每个孪生宽度 2 的稳定类，是否都是某个孪生宽度 2 的稀疏类的转导？若答案为是，这将为我们的结果提供另一种证明：孪生宽度 2 的稳定图具有

有界秩宽度，不过所得界会更差。然而，我们不知道这样的加强是否成立。

此外，我们的方法或许可以推广到其他宽度参数：在这些参数下，部分半图中的高连通性意味着某些子结构的存在。一个特别有趣的候选参数可能是最大诱导匹配宽度 [38], ，它类似于秩宽度，只是将秩函数替换为割上最大半诱导匹配的大小。由于部分半图中不含非平凡的半诱导匹配，因此人们或许会预期孪生宽度为 2 的图具有有界的最大诱导匹配宽度。然而，由于最大诱导匹配宽度所依据的连通性函数并非次模函数，高最大诱导匹配宽度并不意味着存在大型最大诱导匹配良连通集，而这正是我们证明中的一个主要要素。尽管如此，我们猜想孪生宽度为 2 的图具有有界的最大诱导匹配宽度。由于排列图的最大诱导匹配宽度为 1，且包含所有孪生宽度为 1 的图 1 [2]，因此这一结论对孪生宽度为 1 的图成立。

请注意，一般而言，孪生宽度与最大诱导匹配宽度不可比较，墙图和区间图便是例证 [12]。

参考文献

[1] Jungho Ahn、Kevin Hendrey、Donggyu Kim 和 Sang-il Oum。《图的孪生宽度界》。*SIAM离散数学杂志*，36(3):2352–2366，2022年。doi:10.1137/21M1452834。[2] Jungho Ahn、Hugo Jacob、Noleen Köhler、Christophe Paul、Amadeus Reinald 和 Sebastian Wiederrecht。孪生宽度为一。载于 Olaf Beyersdorff、Michal Pilipczuk、Elaine Pimentel 和 Kim Thang Nguyen（编），第*42*届计算机科学理论方面国际研讨会，*STACS 2025*，*2025*年*3*月*4*日至*7*日，德国耶拿，LIPIcs 第327卷，页码 6:1–6:19。Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，2025年。 doi:10.4230/LIPICS.STACS.2025.6。[3] László Babai、Paul Erdös 和 Stanley M. Selkow。随机图同构。*SIAM*计算杂志，9(3):628–635，1980年。 doi:10.1137/0209047。[4] Ambroise Baril、Miguel Couceiro 和 Victor Lagerkvist。具有算法应用的孪生宽度参数变体的改进界，2025年。 arXiv:2509.05122。[5] Pierre Bergé、Édouard Bonnet 和 Hugues Déprés。判定孪生宽度至多为4是NP完全问题。载于 Mikołaj Bojańczyk、Emanuela Merelli 和 David P. Woodruff（编），第*49*届自动机、语言与编程国际学术讨论会（*ICALP 2022*），LIPIcs 第229卷，莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*），页码 18:1–18:20，德国达格施图尔，2022年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2022.18。[6] Benjamin Bergougnoux、Jakub Gajarský、Grzegorz Guspiel、Petr Hlinený、Filip Pokrývka 和 Marek Sokolowski。孪生宽度为2的稀疏图具有有界

树宽。载于 Satoru Iwata 和 Naonori Kakimura（编），第*34*届国际算法与计算研讨会，*ISAAC 2023*，*2023*年*12*月*3*日至*6*日，京都，日本，LIPIcs 第283卷，页码 11:1–11:13。Schloss Dagstuhl - Leibniz- 信息学中心，2023年。doi:10.4230/LIPICS.ISAAC.2023.11。[7] Édouard Bonnet、Eun Jung Kim、Amadeus Reinald 和 Stéphan Thomassé。孪生宽度 VI：收缩序列视角。载于 Joseph (Seffi) Naor 和 Niv Buch- binder（编），*2022*年 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会论文集，*SODA 2022*，线上会议/美国弗吉尼亚州亚历山德里亚，美国，*2022*年*1*月*9*日至*12*日，页码 1036–1056。SIAM，2022年。doi:10.1137/1.9781611977073.45。[8] Édouard Bonnet、Eun Jung Kim、Amadeus Reinald、Stéphan Thomassé 和 Rémi Watrigant。孪生宽度与多项式核。*Algorithmica*，84(11):3300–3337，2022年。doi:10.1007/S00453-022-00965-5。[9] Édouard Bonnet、Eun Jung Kim、Stéphan Thomassé 和 Rémi Watrigant。孪生宽度 I：易处理的 FO 模型检验。《*ACM*学报》，69(1):3:1–3:46，2022年。doi:10.1145/3486655。[10] Édouard Bonnet、Dibyayan Chakraborty、Eun Jung Kim、Noleen Köhler、Raul Lopes 和 Stéphan Thomassé。孪生宽度 VIII：界定与双赢。arXiv:2204.00722。[11] Édouard Bonnet、Ugo Giocanti、Patrice Ossona de Mendez、Pierre Simon、Stéphan Thomassé 和 Szymon Toruńczyk。孪生宽度 IV：有序图与矩阵。arXiv:2102.03117。[12] Nick Brettell、Andrea Munaro、Daniël Paulusma 和 Shizhou Yang。图类上的宽度参数比较。《欧洲组合学杂志》，127:104163，2025年。doi:10.1016/J.EJC.2025.104163。[13] Binh-Minh Bui-Xuan、Jan Arne Telle 和 Martin Vatshelle。图的布尔宽度。《理论计算机科学》，412(39):5187–5204，2011年。doi:10.1016/j.tcs.2011.05.022。[14] Jin-Yi Cai、Martin Fürer 和 Neil Immerman。图识别所需变量数量的最优下界。*Combinatorica*，12(4):389–410，1992年12月。doi:10.1007/BF01305232。[15] Derek G. Corneil、H. Lerchs 和 L. Stewart Burlingham。补可约图。《离散应用数学》，3(3):163–174，1981年。doi:10.1016/0166-218X(81)90013-5。[16] Sergei Evdokimov、Ilia Ponomarenko 和 Gottfried Tinhofer。森林代数与代数森林（关于一类新的弱紧图）。《离散数学》，225(1-3):149–172，2000年。

[17] Jakub Gajarský、Michal Pilipczuk 和 Szymon Torunczyk。具有有界孪生宽度的稳定图。载于 Christel Baier 和 Dana Fisman 编，*LICS '22*：第*37*届*ACM/IEEE*计算机科学逻辑年度研讨会，以色列海法，*2022*年*8*月*2*日至*5*日，第39:1–39:12页。ACM，2022年。 doi:10.1145/3531130.3533356.[18] T. Gallai。可传递定向图。匈牙利科学院数学学报，18：25–66，1967年。 doi:10.1007/BF02020961.[19] Colin Geniet 和 Stéphan Thomassé。竞赛图中的一阶逻辑与孪生宽度。载于 Inge Li Gørtz、Martin Farach-Colton、Simon J. Puglisi 和 Grzegorz Herman 编，第*31*届欧洲算法研讨会（*ESA 2023*），第274卷，莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*），第53:1–53:14页，德国达格施图尔，2023年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2023.53.[20] Martin Charles Golumbic 和 Udi Rotics。若干完美图类的团宽度。《国际计算机科学基础杂志》，11(3)：423–443，2000年。 doi:10.1142/S0129054100000260.[21] Martin Grohe。平面图上的不动点逻辑。载于第十三届*IEEE*计算机科学逻辑年度研讨会，美国印第安纳州印第安纳波利斯，*1998*年*6*月*21*日至*24*日，第6–15页。IEEE计算机学会，1998年。 doi:10.1109/LICS.1998.705639.[22] Martin Grohe。描述复杂性、规范化与可定义图结构理论，第47卷，逻辑讲义。剑桥大学出版社，2017年。 doi:10.1017/9781139028868.[23] Martin Grohe 和 Julian Mariño。有界树宽数据库上的可定义性与描述复杂性。载于 Catriel Beeri 和 Peter Buneman 编，数据库理论——*ICDT '99*：第七届国际会议，以色列耶路撒冷，*1999*年*1*月*10*日至*12*日，论文集，第1540卷，计算机科学讲义，第70–82页。施普林格，1999年。 doi:10.1007/3-540-49257-7_6.[24] Martin Grohe 和 Daniel Neuen。有界秩宽图的规范化与可定义性。《*ACM*计算逻辑汇刊》，24(1)，2023年1月。 doi:10.1145/3568025.[25] Martin Grohe 和 Daniel Neuen。小孪生宽度竞赛图的同构。载于 Karl Bringmann、Martin Grohe、Gabriele Puppis 和 Ola Svensson 编，第*51*届自动机、语言与编程国际学术讨论会（*ICALP 2024*），第297卷，莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*），第78:1–78:20页，德国达格施图尔，2024年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2024.78.[26] Martin Grohe 和 Pascal Schweitzer。有界秩宽图的同构测试。载于 Venkatesan Guruswami 编，*IEEE*第*56*届计算机科学基础年度研讨会（*FOCS 2015*），美国加利福尼亚州伯克利，*2015*年*10*月*17*日至*20*日，第1010–1029页。IEEE计算机学会，2015年。 doi:10.1109/FOCS.2015.66。

[27] Michel Habib 和 Christophe Paul。模分解算法方面综述。*Computer Science Review*，4(1)：41–59，2010年。 doi:10.1016/j.cosrev.2010.01.001.[28] Petr Hliněný 和 Jan Jedelský。平面图的孪生宽度至多为8，而二部平面图至多为6。载于 Kousha Etessami、Uriel Feige 和 Gabriele Puppis 编，第*50*届自动机、语言与编程国际学术讨论会（*ICALP 2023*），第261卷，莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*），第75:1–75:18页，德国达格施图尔，2023年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2023.75.[29] Neil Immerman 和 Rik Sengupta。 k维 Weisfeiler-Leman 算法。2019年。 arXiv:1907.09582.[30] Hugo Jacob 和 Marcin Pilipczuk。有界树宽图、平面图和二分图的孪生宽度上界。载于 Michael A. Bekos 和 Michael Kaufmann 编，计算机科学中的图论概念——第*48*届国际研讨会，*WG 2022*，德国图宾根，*2022*年*6*月*22*日至*24*日，修订精选论文，第13453卷，计算机科学讲义，第287–299页。施普林格，2022年。 doi:10.1007/978-3-031-15914-5_21.[31] Sandra Kiefer。魏斯费勒-莱曼算法的能力与局限。博士论文，亚琛工业大学，2020年。 doi:10.18154/RWTH-2020-03508.[32] Sandra Kiefer、Ilia Ponomarenko 和 Pascal Schweitzer。平面图的 Weisfeiler-Leman 维数至多为3。《*ACM*学报》，66(6)：44:1–44:31，2019年。 doi:10.1145/3333003.[33] Daniel Kráľ、Kristýna Pekárková 和 Kenny Štorgel。曲面上图的孪生宽度。载于 Rastislav Královič 和 Antonín Kučera 编，第*49*届计算机科学数学基础国际研讨会（*MFCS 2024*），第306卷，莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*），第66:1–66:15页，德国达格施图尔，2024年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。doi:10.4230/LIPIcs.MFCS.2024.66.[34] John H. Muller 和 Jeremy Spinrad。增量模分解。《*ACM*学报》，36(1)：1–19，1989年1月。 doi:10.1145/58562.59300.[35] Martin Otto。有界变量逻辑与计数：有限模型研究。逻辑讲义。剑桥大学出版社，2017年。 doi:10.1017/9781316716878。[36] Sang-il Oum 和 Paul D. Seymour。团宽度与分支宽度的近似。《组合理论*B*辑》，96(4)：514–528，2006年。 doi:10.1016/J.JCTB.2005.10.006.[37] B. A. Reed。树宽与缠结：一种新的连通性度量及其若干应用，第87–162页。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，1997年。 doi:10.1017/CBO9780511662119.006。

[38] Martin Vatshelle。图的新宽度参数。博士论文，2012 年。网址：
https://hdl.handle.net/1956/6166。

附录

A. 定义 3.3 的证明

我们首先介绍逻辑解释，它本质上是算法归约在逻辑上的对应形式。为此，我们先固定一些记号。

定义 A.1。 A 签名 τ 是由符号组成的元组 $(R_1, \ldots, R_k)$，其元数为 $(r_1, \ldots, r_k)$。对于签名 $\tau = (R_1, \ldots, R_k)$ 及其元数 $(r_1, \ldots, r_k)$，一个 τ- 结构 $\mathfrak{A}$ 是一个元组 $(A, R_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_k^{\mathfrak{A}})$，其中 $R_i^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{r_i}$。对于结构 $\mathfrak{A}$ 和公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$，

$$\varphi[\mathfrak{A}] \coloneqq \{\mathbf{a} \in A^r \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi(\mathbf{a})\}.$$

在此设定下，无色图可以视为一种结构，其中包含一个表示边集的对称、反自反二元关系。对于彩色图，可以通过有限个额外的一元关系来定义颜色。本节将考虑讨论图的 C_k-公式。我们需要以下术语：

定义 A.2 ([35])。 元数为 r 的全局关系 是一个映射 $R : \mathfrak{A} \mapsto R^{\mathfrak{A}}$，其中 $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^r$，并且对于所有同构 $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$，都有 $\pi(R^{\mathfrak{A}}) = R^{\mathfrak{B}}$。公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ 定义 一个全局关系 R，如果对于所有结构 $\mathfrak{A}$

$$R^{\mathfrak{A}} = \varphi[\mathfrak{A}].$$

定义 A.3 (商结构)。 对于一个结构 $\mathfrak{A} = (A, R_1, \ldots, R_k)$，其关系元数为 $(r_1, \ldots, r_k)$，以及 A 上的一个等价关系 $\sim$，

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}/{\sim} &\coloneqq (A/{\sim}, R_1/{\sim}, \ldots, R_k/{\sim}) \text{ where} \\ R_i/{\sim} &\coloneqq \{(a_1/{\sim}, \ldots, a_{r_i}/{\sim}) \mid (a_1, \ldots, a_{r_i}) \in R_i\}. \end{aligned}$$

定义 A.4 (限制)。 对于一个结构 $\mathfrak{A} = (A, R_1, \ldots, R_k)$ 和一个集合 $D \subseteq A$，

$$\mathfrak{A}|_D \coloneqq (D, R_1|_D, \ldots, R_k|_D).$$

逻辑解释是一个由公式元组定义的结构映射：

定义 A.5 (逻辑解释)。 广义的 s 维 (σ, τ)-解释 记为元组 $\mathcal{I} = (\varphi_{\mathrm{dom}}, \varphi, \varphi_{\sim})$，其中在一个 τ-结构 $\mathfrak{A}$ 上解释得到的 σ-结构为

$$\mathcal{I}(\mathfrak{A}) = \big((A^s, \overline{\varphi}[\mathfrak{A}])|_{\varphi_{\mathrm{dom}}[\mathfrak{A}]}\big)/\varphi_{\sim}[\mathfrak{A}]$$

对我们而言，最重要的是以下结果：

引理 A.6 ([35])。 对于所有 C_{sk}-可定义的 s-维 (σ,τ)-解释 I，以及所有在有限 σ-结构上的 C_k-可定义全局关系 R，在所有满足 $I(R)$ 有定义的 τ-结构上，有限 τ-结构上的全局关系 $I(R)^{\mathfrak{A}} = R^{\mathcal{I}(\mathfrak{A})}$ 都是 C_{sk}-可定义的。

我们将使用以下变体:

推论 A.7。 对于所有由 C_{sk} 定义的 s 维(σ,τ)解释 I，以及所有关于 r 个变量的 C_k 公式 φ，都存在一个关于 sr 个变量的 C_{sk} 公式 ψ，使得对于所有 $\mathfrak{A}$,

$$\mathcal{I}(\mathfrak{A}), (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r) \vDash \varphi \textit{ if and only if } \mathfrak{A}, (x_1, \ldots, x_{sr}) \vDash \psi.$$

我们将这个公式 ψ 称为 $I(\varphi)$。

证明。 公式 φ 定义了一个全局关系 R。根据定义 A.6，存在某个 ψ，它定义了$\mathcal{I}(R)$。 □

由此可见，如果我们取一个图 G，并能通过一个由 C_{sk} 定义的 s 维解释，从 G 得到一个图 H，且 H 的 Weisfeiler-Leman 维数为 sk，那么 G 的 Weisfeiler-Leman 维数为 k。现在，我们可以证明引理了。

证明。 我们定义一个二维解释$\mathcal{I} = (\varphi_{\mathrm{dom}}, \varphi_E, \varphi_\sim)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{dom}}(x,y) &:= Exy \vee x = y \\
\varphi_E(x,y,x',y') &:= (x = y \wedge y = x' \wedge Ex'y') \\
&\quad \vee (x = y \wedge y = y' \wedge Ex'y') \\
&\quad \vee (x = x' \wedge x' = y' \wedge Exy) \\
&\quad \vee (y = x' \wedge x' = y' \wedge Exy) \\
\varphi_\sim(x,y,x',y') &:= x = y' \wedge y = x'
\end{aligned}$$

在图 G 上的解释结构中，顶点对 $(x,\ x)$ 表示原图的顶点，而顶点对 $(x,\ y)$ 表示一个细分从 x 到 y 的边的顶点。由于 $\varphi_\sim$ 标识了细分一条边的顶点对 $(x,\ y)$ 和 $(y,\ x)$，对于所有图 G，我们都有 $\mathcal{I}(G) \cong G^1$。现在，设 $G,\ H$ 为满足 $G \equiv_{C_{2k}} H$ 的图。设 $\varphi \in C_k$ 是一个含有 r 个自由变量的公式。那么

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}(G) \vDash \varphi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r) \\
\text{if and only if} \quad &G \vDash \mathcal{I}(\varphi)(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_r) \\
\text{if and only if} \quad &H \vDash \mathcal{I}(\varphi)(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_r) \\
\text{if and only if} \quad &\mathcal{I}(H) \vDash \varphi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)
\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{I}(G) \equiv_k \mathcal{I}(H)$。又因为 $G^1 \cong \mathcal{I}(G)$ 和 $H^1 \cong \mathcal{I}(H)$，所以也有 $G^1 \equiv_k H^1$。 □

B. 定义 3.4 的证明

在细分图中，我们将集合 $V(G)$ 中的顶点称为原始顶点，而将新添加的顶点称为路径顶点。为了能够更清楚地指代每个路径顶点，我们先定义有序细分。

定义 B.1 (($s, <$)-细分). 设 G 是一个图， $s \in \mathbb{N}$ 和 $<$ 是 $V(G)$ 上的严格全序。 G 的 $(s, <)$-细分 为

$$\begin{aligned} G^{(s,<)} := (V(G) \cup \{s_{vwk} \mid vw \in E(G), v < w, 1 \leq k \leq s\}, \\ \{vs_{vw1} \mid vw \in E(G), v < w\} \\ \cup \{s_{vwk}s_{vw(k+1)} \mid vw \in E(G), v < w, 1 \leq k < s\} \\ \cup \{s_{vws}w \mid vw \in E(G), v < w\}). \end{aligned}$$

显然，图的任何 $(s, <)$-细分也是一个 s-细分。因此，引理可以改述并证明如下。

引理 B.2. 设 $s \in \mathbb{N}$ 和 G、H 是图，且 $V(G) = V(H)$。设 $<$ 是 $V(G)$ 上的某个序。则对所有 k，若 $2k$-*WL* 无法区分 $G^{(3,<)}$ 和 $H^{(3,<)}$，则 k-*WL* 无法区分 $G^{(s,<)}$ 和 $H^{(s,<)}$。

证明。 我们通过将复制者在卵石游戏 $\mathrm{BP}_{2k}(G^{(3,<)}, H^{(3,<)})$ 中采用的策略扩展到卵石游戏 $\mathrm{BP}_k(G^{(s,<)}, H^{(s,<)})$，来证明该引理。我们将前一个游戏中的复制者称为 D，将后一个游戏中的复制者称为 D^s。类似地，我们将 Spoiler 称为 S 和 S^s。

首先，我们将描述 D^s 所维持的不变量，以及她如何通过在 3-细分图中模拟一场游戏并向 D 询问应对方式来进行每一回合。接着，我们证明 D^s 的每一步操作都是有效的，并且能够维持该不变量；最后证明她这样做便能赢得这场游戏。

每个回合开始时都有两个局面： D^s 正在应对的当前局面，我们称之为 p^s；以及 D 正在应对的模拟局面，我们称之为 p。下文中，我们使用辅助函数

$$d(k) := \begin{cases} 1 \text{ if } k \leq \frac{s}{2}, \\ 3 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

这将指明复制者在每条边上进行游戏时所采取的“方向”。 D^s 将维持关于局面 p和 p^s 的以下不变量：

- 局面 p是 D的获胜局面。
- 在 p^s 中出现的所有配对（v， $v\prime$）要么都是原始顶点，要么都是路径顶点。
- 所有出现在 p^s 中的原始顶点对 $(v, v\prime)$ 也出现在 p 中。

- 对于所有出现在 p^s 中的路径顶点对 $(s_{ek}, s_{e'k'})$，顶点对 $(s_{e2}, s_{e'2})$ 和 $(s_{ed(k)}\ s_{e'd(k')})$ 都出现在 p 中。

为保持不变量， D^s 每回合按如下方式行动：

(a) 设 b 为 D 针对位置 p所选的双射。那么 D^s 选择如下定义的双射b^s ：

(i) 设(v, w)为位置 p^s 中的卵石对，该卵石对由 S^s在本回合拾起（如果本回合拾起了卵石）。设(v, w)为索引 i处的卵石对。然后拾起位置 p 中索引为 $2i$ 和 $2i+1$处的卵石对。(ii) 对于原始顶点 $v \in V(G)$，定义 $b^s(v) = b(v)$。(iii) 对于路径顶点 s_{ek}，设 p' 为添加了卵石对$(s_{e2}, b(s_{e2}))$的位置 p 。设 b' 为 D 针对位置 p' 所选的双射。那么

$$b^s(s_{ek}) = \begin{cases} s_{e'k} \text{ if } b'(s_{e1}) = s_{e'1} \text{ for some } e' \in E(H) \\ s_{e'(s-k+1)} \text{ if } b'(s_{e1}) = s_{e'3} \text{ for some } e' \in E(H). \end{cases}$$

(b) 设$(v, b^s(v))$为 S^s的应答卵石对。设 i 为该卵石对的索引。那么，如果 v 是原始顶点，则将卵石对$(v, b(v))$添加到索引 $2i$处的位置 p。如果它是路径顶点，设 $v = s_{ek}$ 和 $b^s(v) = s_{e'k'}$，则将$(s_{e2}, s_{e'2})$放在索引 $2i$ 处，并将$(s_{ed(k)}, s_{e'd(k')})$放在索引 $2i+1$处。

直观地说， D^s 复制了 D 在原始顶点上的双射，然后通过向前看一步，观察 D 将沿哪个“方向”映射路径，并据此扩展该映射。这是 D^s的获胜策略。

首先，注意到 b^s 始终是定义良好的：复制者 D 总会选择一个将原始顶点映射到原始顶点、将路径顶点映射到路径顶点的双射，因为根据我们对 G 和 H的假设，原始顶点的度至少为3，而路径顶点的度为2。其次， D 也始终必须将一个“中间”路径顶点 s_{e2} 映射到另一条边 e'的某个 $s_{e'2}$ ，否则Spoiler可以在下一回合中通过放置卵石于s_{e2} ，然后于 s_{e1} 或 s_{e3}而获胜。见图5。

最后，它是一个双射，因为 b 在原始顶点上是双射，而 b 在“中间”路径顶点上也是双射，因为两张图中的边数必须相同——否则，Spoiler可以通过在一对度数不同的顶点（$v, b(v)$）上放置卵石来赢得$\mathrm{BP}_k(G^{(3,<)}, H^{(3,<)})$，并在下一步将卵石放置在其中一个顶点的邻居、但不是另一个顶点的邻居上。在对某一对（$s_{e2}, s_{e'2}$）放置卵石后， D 必须在下一步将$\{s_{e_1}, s_{e_3}\}$映射到$\{s_{e'1}, s_{e'3}\}$，否则Spoiler会立即获胜。接下来，注意到 D 保持着获胜局面，因为她针对起始位置拥有获胜策略，而添加到位置 p 中的卵石代表了模拟博弈中Spoiler的合法移动。不变量的其余部分根据构造即可满足。因此，通过将 p 和 p^s 初始化为空位置，并在每个回合使用这一协议，D^s 保持上述不变量。

接下来，我们证明 D^s 遵循获胜策略。根据b^s 的定义可知，双射总会尊重已有的卵石：一旦路径上的某个路径顶点在对应于某条边 D^s 的路径上被放置了卵石，

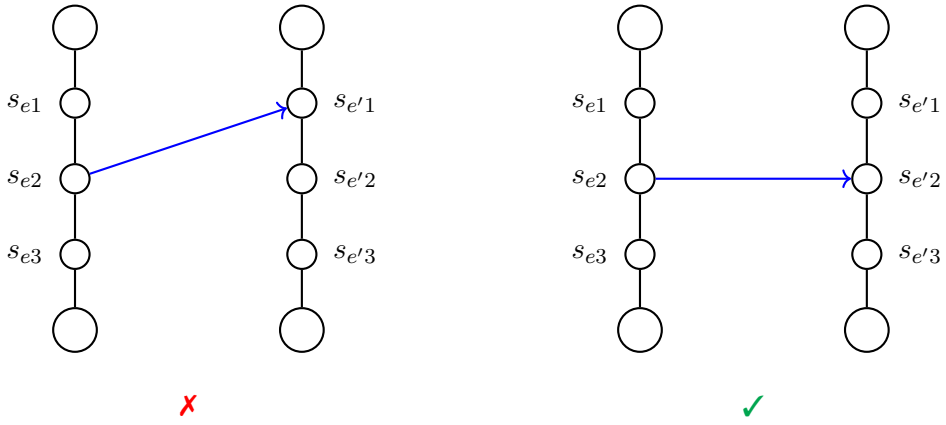

图5： D 必须将中间路径顶点映射到中间路径顶点。 D 所选的双射由箭头标示。

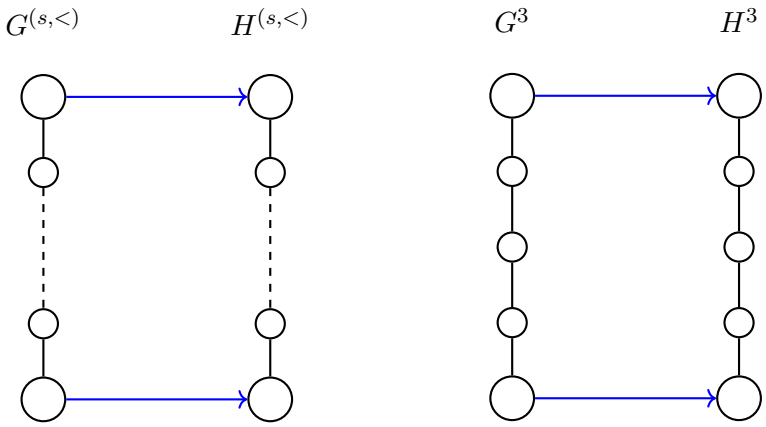

图6：定义 B.2 的证明中情形1的示意图。D 和 D^s 所选的双射由箭头标示。

对于该卵石而言， b^s 就被“固定”了，因为s_{e2} 以及 s_{e1} 或 s_{e3} 之一都已被放置了卵石，从而确定了 D 在该路径上必须选取的双射。现在，假设在某一回合中，复制者在位置 $p^s = (\mathbf{v}\ b^s(\mathbf{v}))$ 选取了双射 b^s，而Spoiler选取了一个新的顶点对 $(v,\ v')$，使得原子类型$_{G^{(s,<)}}(\mathbf{v}v) \neq$原子类型$_{H^{(s,<)}}(b^s(\mathbf{v})\ v')$。令 w 为$\mathbf{v}$ 中“不一致”的顶点，也就是说，$vw \in E(G^{(s,<)})$，而 $b^s(v)\ b^s(w) \notin E(H^{(s,<)})$，或反之。根据对称性，不妨设 $v,\ w$ 为相邻顶点对。我们进行分类讨论。

- 情形*1*： v 和 w 都是原始顶点。那么， $b^s(v)$ 和 $b^s(w)$ 也都是原始顶点。因此，在这两个细分图中， $v,\ w$ 和 $b^s(v)\ b^s(w)$ 都不相邻，因为它们由一条路径连接。参见图6。

- 情形*2*： v 和 w 都是路径顶点。根据 b^s 的定义， v 和 w

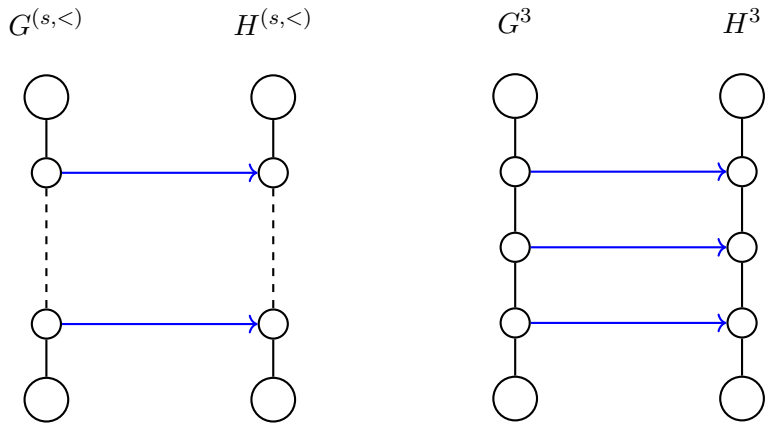

图7：定义 B.2 证明中情形2的示意图。

相邻，当且仅当 b^s（v）和 b^s（w）相邻。见图7。

- 情况 3：顶点 v 是路径顶点，而 w 是原始顶点。那么， v 是从 w 到某个原始顶点 x 的一条路径上的第一个顶点。根据对称性，不妨假设$w < x$ ，因此 $v = s_{wx1}$。否则，证明过程类似，只需将$v = s_{wxs}$替换为相应对象。现在，对于某个 y， $b(s_{wx2}) = s_{yz2}$ ，且 $z \in V(H)$。有以下两种情况： $b(w) = y$，或 $b(w) = z$ ；否则，Spoiler 可以先将 s_{wx2} 放置为卵石，然后获胜，因为 s_{wx1}同时与 w 和 s_{wx2}相邻，（w， $b(w)$)在此位置已被放置为卵石，并且若 $b(w)$既不是 y 也不是 z，那么 H^3 中没有顶点同时与 $b(w)$和s_{yz2} 相邻。因此，不失一般性，设 $b(w) = y$。现在，在（s_{wx2}， s_{yz2}）已被放置为卵石的游戏中，复制者必须将 s_{wx1} 对应到 $b(w)$和$s_{b(w)z2}$之间的顶点，因此， b^s 将 $v = s_{wx1}$ 映射到从 $b^s(w) = b(w)$到 z的路径上的第一个顶点，这意味着 $b^s(v)$和 $b^s(w)$确实相邻。见图 8。

- 情况 *4*：顶点 v 是一个原始顶点，而 w 是一个路径顶点。于是， w 是从 v 到某个原始顶点 x的路径上的第一个顶点。由对称性， $v < x$，因此 $w = s_{vx1}$；否则 $w = s_{vxs}$ ，证明过程类似。根据 b^s 的定义，我们知道，对于某个 y， $z \in V(H)$，要么 $b^s(s_{vx1}) = s_{yz1}$ ，要么$b^s(s_{vx1}) = s_{yzs}$。

  – 情况 4.1：假设 $b^s(s_{vx1}) = s_{yz1}$。根据 D^s 所维持的不变量，(s_{vx1},s_{yz1}) 和 (s_{vx2}, s_{yz2}) 在 $\mathrm{BP}_{2k}(G^{(3,<)}, H^{(3,<)})$ 中被放置了卵石，因此本回合中必须满足 $b(v) = y$ ，否则 Spoiler 会立即获胜。因此， $b^s(v) = y$ ，所以 $b^s(v) = y$ 和 $b^s(w) = s_{yz1}$ 相邻。参见图 8 左半部分。– 情况 4.2：否则， $b^s(s_{vx1}) = s_{yzs}$。论证类似，只是现在 (s_{vx2},s_{yz2}) 和 (s_{vx1},s_{yz3}) 在 $\mathrm{BP}_{2k}(G^{(3,<)}, H^{(3,<)})$ 中被放置了卵石，因此必须满足 $b(v) = z$。参见图 8 右半部分。

这样， D^s 在 $\mathrm{BP}_k(G^{(s,<)}, H^{(s,<)})$ 中获胜。 □

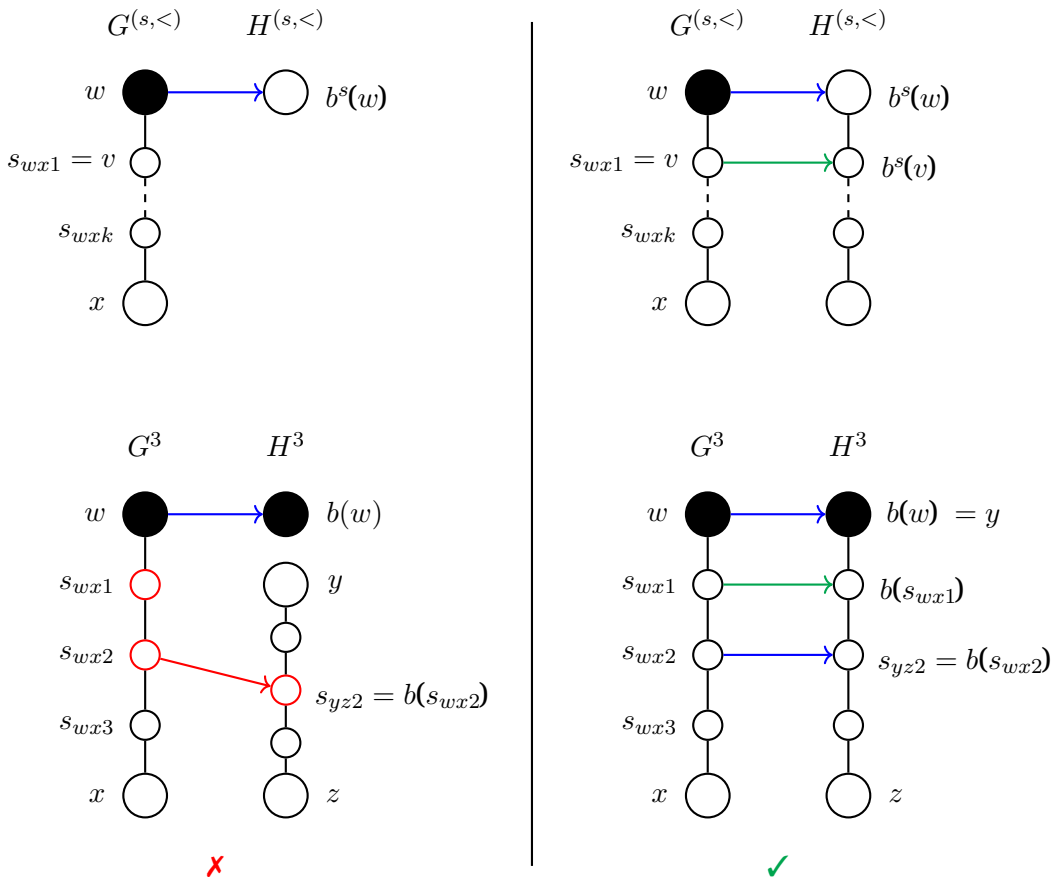

图 8：定义 B.2 的证明中情况 3 的示意图。带有卵石的顶点以黑色绘制。

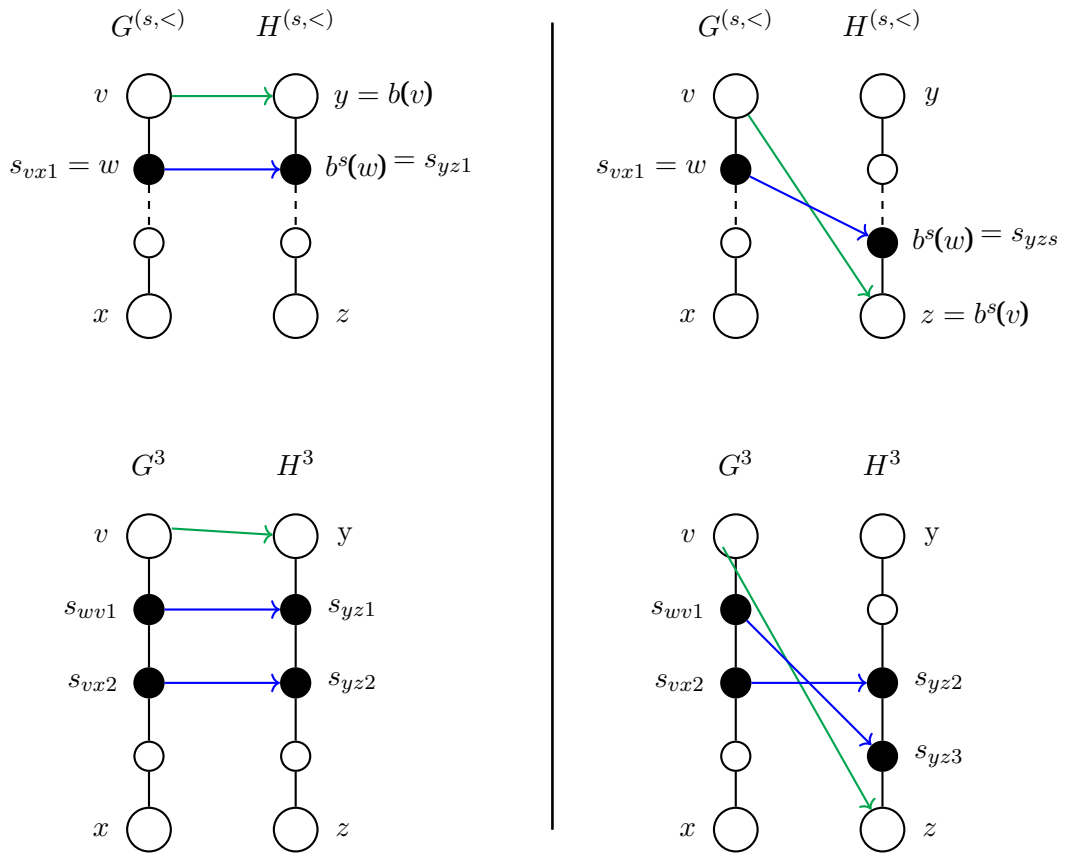

图 9：定义B.2的证明中的情况 4 的示意图。

C. 定义 4.4 的证明

证明。对于正向，设 $f\colon G^c \cong H^c$ 是一个同构，并且 $u, v \in V(G)$ 满足 $\mathsf{cs}(G^c, u, v) \neq \mathsf{f}$，那么显然 $\mathsf{cs}(G^c, u, v) = \mathsf{cs}(H^c, f(u)\ f(v))$。对于反向，可以沿着 $\mathsf{cs}(G^c, u, v)$ 中给出的规范收缩序列定义一个同构 $f\colon G^c \cong H^c$。考虑在 $\mathsf{cs}(G, u, v)$ 和 $\mathsf{cs}(H, u', v')$ 的计算中所描述的图序列 G_i, H_i 及顶点 $u_{G,i}, v_{G,i}, u_{H,i}, v_{H,i}$。那么，同构可以定义如下：

- 令 $f(u) = u'$ 和 $f(v) = v'$。
- 对于第一次迭代 $i = 0$ 以及所有发生红边收缩的迭代 i，令 $f(v_{G,\ i+1}) = v_{H,\ i+1}$。
- 对于每隔一次迭代 i，以如下方式定义 f，使得对于所有 T 和 c，都有

$$f(\mathrm{ntw}_{G_i}^{T,u_{G,i},c}(u_{G,i}, v_{G,i})) = \mathrm{ntw}_{H_i}^{T,u_{H,i},c}(u_{H,i}, v_{H,i})$$

and

$$f(\mathrm{ntw}_{G_i}^{T,v_{G,i},c}(u_{G,i}, v_{G,i})) = \mathrm{ntw}_{H_i}^{T,v_{H,i},c}(u_{H,i}, v_{H,i})$$

以任意一种保持颜色的双射方式。这种情况发生在两个顶点属于同一收缩阶段时，因此定义良好，因为在每次迭代中，每种颜色及每对原子类型所对应的近孪生点数量始终相同。

为了证明这确实是一个同构，首先注意到 f 保持图的颜色。假设 f 不是同构。我们证明，若存在 $w_1,\ w_2 \in V(G)$，使得 $w_1w_2 \in E(G)$，但 $f(w_1)f(w_2) \notin E(H)$，便会导出矛盾。对于 $w_1w_2 \notin E(G)$，但 $f(w_1)f(w_2) \in E(H)$的情况，利用对称性可得类似证明。我们进行分类讨论。

- 情形*1*：顶点 w_1 和 w_2 在第一次收缩中被收缩，也就是说$w_1 = u$，且 $w_2 = v$。那么，由于 $\mathsf{cs}(G^c, u, v)$ 和 $\mathsf{cs}(H^c, u'v')$ 的首个符号相同，$uv \in E(G)$当且仅当 $u'v' \in E(H)$，而这当且仅当 $f(u)f(v) \in E(H)$。
- 情形2：顶点 w_1 和 w_2 属于同一个收缩阶段。令 i为满足 $w_1, w_2 \in \mathsf{ntw}^{T,x\ c}_{G_i}$，($u_{G,i}$,$v_{G,i}$) 的迭代，其中 T, x, c。那么我们知道，对于对应的顶点 x'，$f(w_1)\ f(w_2) \in \mathsf{ntw}^{T,x\ \ c}_{H_i}{}'(u_{H,i}, v_{H,i})$。注意，$w_1x \in E(G_i)$ 和 $w_2x \in E(G_i)$ 成立，否则收缩其中任意一个都会产生一条额外的红边。因此，为了得到相应的原子类型，必须有 $f(w_1)x' \in E(H_i)$ 且 $f(w_2)x' \in E(H_i)$。但此时，在 H_i 中将 $f(w_1)$ 或 $f(w_2)$ 收缩到 x' 都会产生一条红边，因此它们不可能属于 $\mathsf{ntw}^{T,x\ \ c}_{H_i}{}'(u_{H,i}, v_{H,i})$。见图 10。
- 情况 *3*：顶点 w_1 和 w_2 是在不同的收缩阶段中选取的。设 $i \in \mathbb{N}$ 满足 $w_1 \in \mathsf{ntw}^{T_1,\ G_i\ \ x_1\ c_1}_{x_2\ c_2}{}'(u_{G,\ i},\ v_{G,\ i})$，其中 $T_1,\ x_1,\ c_1$；再设 $\mathsf{Let} j \in \mathbb{N}$ 满足 $w_2 \in \mathsf{ntw}^{T_2,\ G_j}{}'(u_{G,\ j},\ v_{G,\ j})$，其中 $T_2,\ x_2,\ c_2$。那么存在

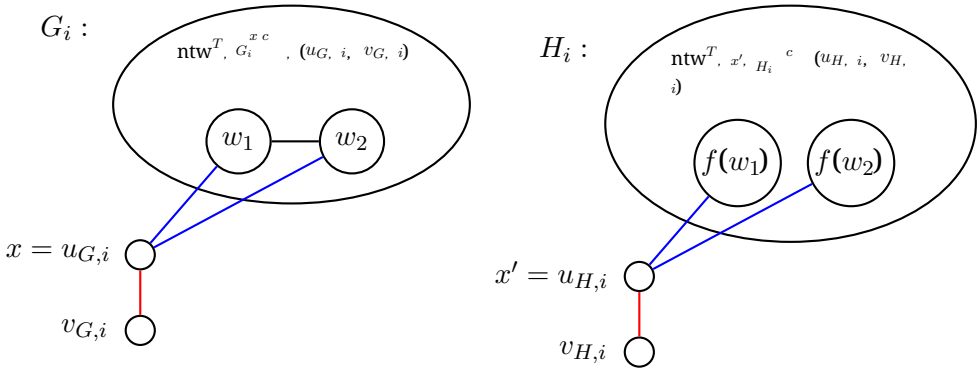

图 10：情形2的示意图，其中 $x = u_{G,\ i}$。

对应的顶点 x_1' 和 x_2'，使得 $f(w_1) \in \text{ntw}^{T_1,x_1',H_i\ \ c_1}(u_{H,i}, v_{H,i})$ 且 $f(w_2) \in \text{ntw}^{T_2,x_2',H_i\ \ c_2}(u_{H,i}, v_{H,i})$。由对称性，不妨设 w_2 是属于较晚收缩阶段的顶点，因此，要么 $i < j$，要么 T_2, x_2, c_2 在近孪生集的枚举中晚于 T_1, x_1, c_1 出现。那么，在收缩之前必须满足 $w_2x_1 \in E(G_i)$，否则，将 w_1 收缩到 x_1 中会在 G_i 中产生一条额外的红边。现在，假设 $f(w_2)x_1' \notin E(H_i)$。

– 情况 3.1：顶点 w_1 和 w_2 属于同一次迭代，即 $i = j$。在这种情况下，$f(w_2)$ 永远不可能与 w_2 处于同一个收缩阶段，因为 w_2 与 x_1 相邻，而 $f(w_2)$ 与 x_1' 不相邻。参见图 11。– 情况 3.2：顶点 w_1 和 w_2 并非在同一次迭代中收缩，即 $i < j$，因此 $u_{G、\ i}$ 和 $v_{G、\ i}$ 在 w_2 之前已被收缩。由于这次收缩没有生成与 w_2 相连的红边，因此 w_2 与由收缩 $u_{G、\ i}$ 和 $v_{G、\ i}$ 得到的顶点相邻，而 $f(w_2)$ 与由收缩 $u_{H、\ i}$ 和 $v_{H、\ i}$ 得到的顶点不连通。现在可以用类似的方式重复这一论证，直到 w_2 和 $f(w_2)$ 再次无法处于同一收缩阶段，因为 w_2 与 u_G 连通，而 $_j$ 和 $f(w_2)$ 与 $u_{H、\ j}$ 不连通。参见图 12。

因此，$f(w_2)x_1' \in E(H_i)$。但随后，x_1' 与 $f(w_1)$ 在 $f(w_2)$ 上意见不一致，因此 $f(w_1)$ 不会被选入该收缩阶段。

•情况 *4*：对于某个 $i \in \mathbb{N}$，顶点 $u_{G、\ i}$ 和 $v_{G、\ i}$ 被收缩，从而与 w_1 或 w_2 之间产生一条红边。不失一般性，设 w_1 是该顶点。那么 $w_2v_{G、\ i+1} \in G_{i+1}$，但 $f(w_2)v_{H、\ i+1} \notin H_{i+1}$。两种情况均见图 13。

– 情况 *4.1*：顶点 $u_{G、\ i+1}$ 和 $v_{G、\ i+1}$ 在 w_2 之前没有被收缩。于是，这种情况与情况 3.1 类似，w_2 和 f（w_2）不能属于同一个收缩序列。– 情况 *4.2*：顶点 $u_{G、\ i+1}$ 和 $v_{G、\ i+1}$ 在 w_2 之前已被收缩。如果不存在 $j > i$ 使得收缩 $u_{G、\ j}$ 和 $v_{G、\ j}$ 会与 w_2 之间产生红边，

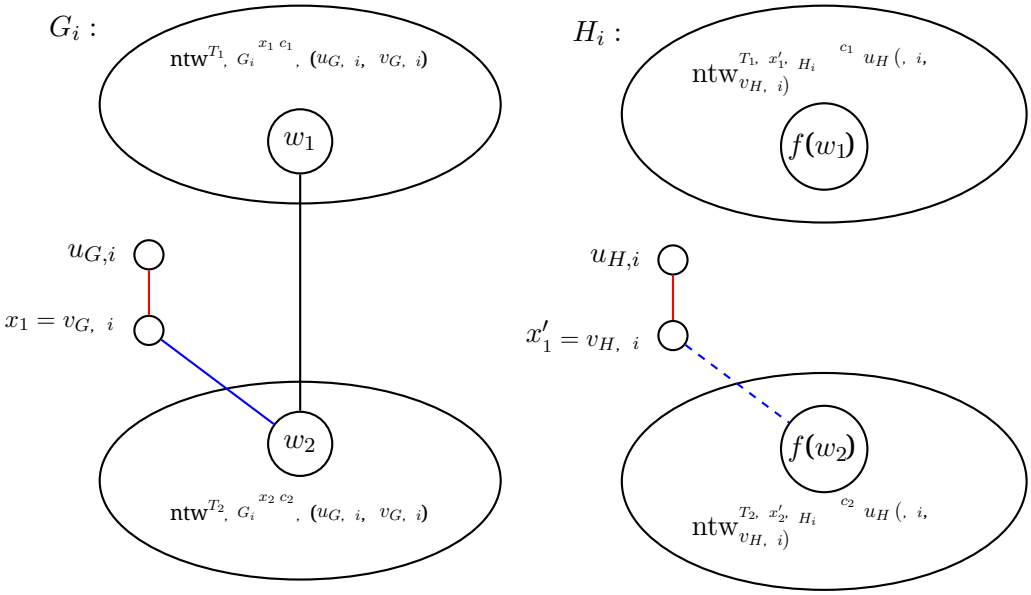

图 11：情况 3.1 的示意图，其中 $x_1 = v_{G,\ i}$。

那么论证与情况 3.2 类似。如果存在这样的 $w_2 u_{G,\ j} \in G_j$，则可以看出 $f(w_2)\ u_{H,\ j} \notin H_j$，因此这些收缩序列彼此不同。

因此，双射 f: $G^c \to H^c$ 实际上是一个同构。 □

D. 孪生宽度 1 的图的可定义规范化

有关 FP+C 的预备知识以及 FP+C 中可定义规范化的详细说明，请参见 [24]。与该工作一样，本文将以算法方式而非直接在逻辑中描述该方法，但其实现于 FP+C 中的方式是明确的。同样，我们首先考虑带色素图。对于每个起始收缩对 u, v，我们首先定义一个边关系，并附带一个数值标志，用于指示是否存在相应的收缩序列，由此得到一个五元关系：4 个顶点变量和 1 个数值变量。给定起始收缩对 u, v，相应地初始化起始收缩，将边集设为空，并将标志设为 0。如果原图中存在边 u, v，则首先将其加入。然后，我们以与带色素图的规范化算法并联的方式，在收缩阶段中定义其余部分。为此，跟踪集合 U 和 V，并分别为每个集合设置一个收缩阶段计数器，初始值为 $(\{u\}, 0)$ 和 $(\{v\}, 0)$。如果在某个收缩阶段标志为 1，则不执行任何操作。如果标志为 0：

- 在每个偶数收缩阶段 i，定义集合 W：其中的顶点与上一收缩阶段的集合 U, V 中的恰好一个齐次邻接。若这样的顶点多于一个，则将标志设为 1。否则，将相应的边添加到

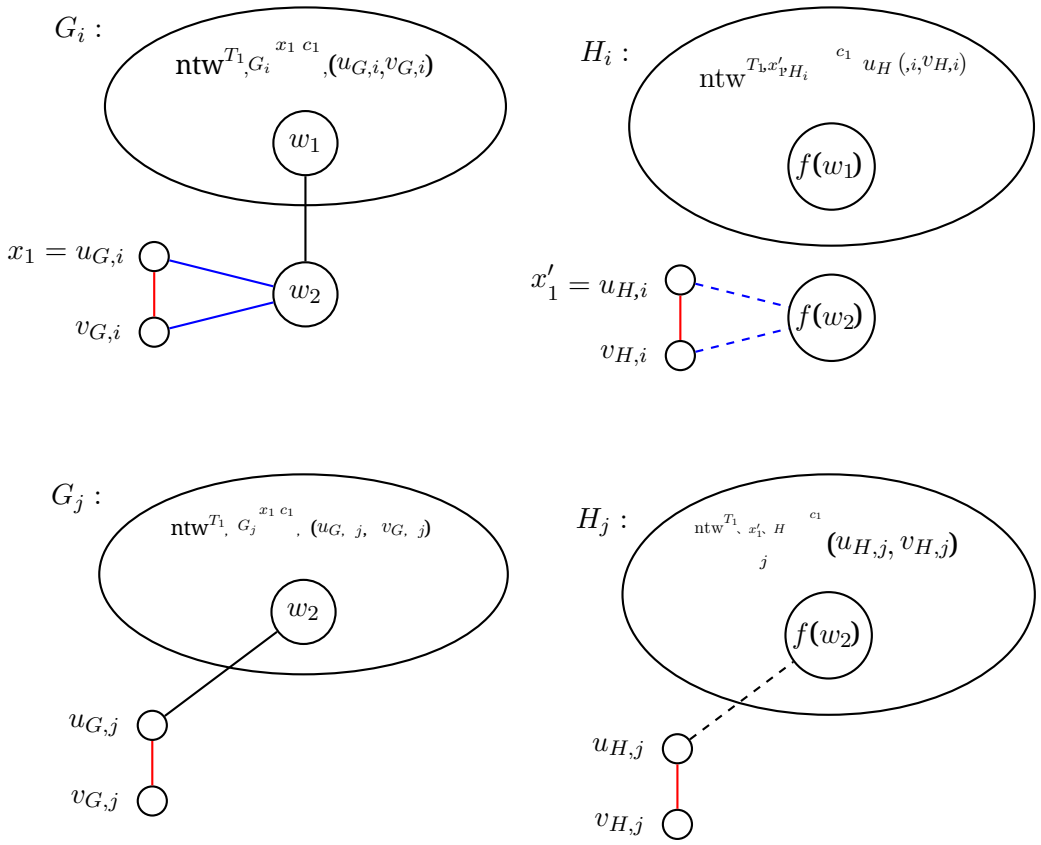

图 12：情况 3.2 的示意图，其中 $x_1 = u_{G,i}$。

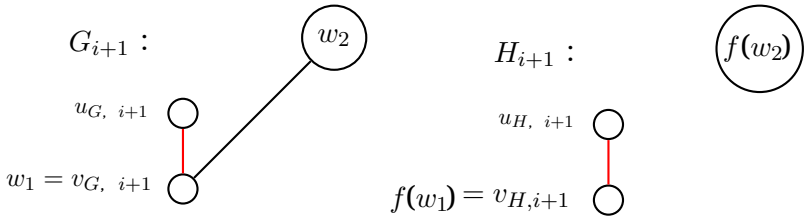

图 13：情况 4 的示意图。

边集。将 V 中的所有顶点添加到 U，并将收缩阶段计数器加 1。令 W 中的顶点为 V，并将其收缩阶段计数器加 1。这正是我们需要计数器的原因，因为 U 和 V 并不会在每一步中单调递增。

- 在每个奇数收缩阶段 i，针对每一种原子类型和颜色的组合，依据上一收缩阶段的集合 U，V确定近孪生点集合 W。由于颜色和原子类型已有固定顺序，而近孪生点集合内部的顺序无关紧要（因为它们与先前选定顶点的连接方式相同），因此这就确定了该阶段可安全收缩顶点的顺序。按此顺序将它们添加到相应的顶点集中。如果至少添加了一个顶点，则将收缩阶段计数器加 1。

最终，该过程会终止：要么标志被设为 1，要么集合 U 包含所有顶点且计数器不再递增。如果标志始终未被设为 1，则原图的所有边都会按照所选起始收缩对，依照孪生宽度 1 的素图规范化算法中定义的规范顺序添加。为了得到唯一的规范边集，我们遍历所有不会使标志被设为 1 的收缩对，并取所得边集的字典序最小值。这在 FP+C 中是可行的，如 [24]所示。

接下来，需要将这一结果推广到所有孪生宽度为 1 的图。为此，我们在 FP+C 中定义图的模分解树。具体来说，用一个三元关系来编码模的集合，其中包含两个顶点变量和一个数值变量：数值变量表示这些模在树中的层级，相应的二元关系则是一个等价关系，用来指明哪些顶点属于同一个模。用一个四元关系来编码边集，其中包含两个顶点变量和两个数值变量，用以指明树中不同层级的哪些模之间存在一条边。用一个三元关系来编码标记函数，其中包含一个顶点变量和两个数值变量：顶点变量和第一个数值变量表示该模，第二个数值变量取值为 0 到 3，用来表示该模的标签。要用这种编码定义模分解树，首先将每个顶点置于第0层的独立模中，并标记为单一。然后，按照引理 4.10 的证明中的方法，自底向上构造这棵树。这样，树的顶层就定义了

包含每个顶点的极大模，从而也能确定该图是否为素图。利用这一点，可以完全按照定义 4.9 中的方法，使用模分解树和字典序来定义孪生宽度 1 的图的规范副本。

E. 孪生宽度 2 的稀疏图具有有界树宽 h

在本节中，我们要说明，用于证明定义 5.7 的技巧与 [6] 中的技巧可以结合起来，从而证明孪生宽度为 2 的图的树宽受其最大半诱导完全二部图的规模线性有界。由于完全二部图本身的孪生宽度为 0，且树宽与其阶呈线性关系，因此这一结果在渐近意义上是最优的。

我们从定义 5.5 的类似结论开始：每个包含大型良连接集的图，在划分序列的某个阶段都必须包含一条高度连通的红路径。

引理 E.1. 设 $t \geq 0$ 为一个整数，且 $k := 7t - 6$。设 G 为一个不含 $K_{t,\,t}$-子图的图，其中包含一个大小为 $11k - 5$ 的 mm-良连接集 W，并且 G 有一个 $(P_i)^{i\in[n]}$ a2-划分序列。

那么存在某个 $i \in [n]$ 以及四个部分 X_1、X_2、X_3、$X_4 \in P_i$，使得

- $X_1X_2X_3X_4$ 按此顺序在 G/P_i 中构成一条红4-路径，
- 不存在红边 X_1X_4，
- $\kappa_{G[X_1\cup X_2\cup X_3\cup X_4]}(X_1, X_4) \geq 2t - 1.$

证明。取 $i \in [n]$ 为极小值，使得 $\mathcal{P}_i$ 的每个部分至多包含 $2k - 1$ 个 W 的顶点。由极小性可知，$\mathcal{P}_i$ 包含一个部分 Z，其中至少包含 k 个 W 的顶点。

对于某些 $d \in \mathbb{N}$ 和 $R \in \{=,\ <,\ >,\ \leq,\ \geq\}$，令 $N^{Rd}_{\text{red}}(Z)$ 表示 $\mathcal{P}_i$ 中与 Z 在 $G/\mathcal{P}_i$ 的红图中具有指定距离的部分的集合。为方便起见，我们也用 $N^{Rd}_{\text{red}}(Z)$ 表示包含在这些部分中的 G 的顶点集。

由于红图的最大度至多为 2，$N^{\leq d}$ 红(Z) 至多包含$2d + 1$个部分，而 $N^{=d}$红(Z) 至多包含 2 个部分。特别地，$N^{\leq 2}$红 至多由五个部分组成，它们总共至多包含 $10k - 5$ 个来自 W 的顶点。因此，集合$W_3 := W \cap \bigcup N^{\geq 3}(Z)$ 至少包含 k 个顶点。

由于 W 是良好连通的，因此我们可以在 G 中找到一组$\mathcal{P}$ 由 k 条顶点不相交的 Z-W_3-路径组成。现在，$P \in \mathcal{P}_i$ 中与 W_3 相交的每个部分，要么是 $N^{=3}{}_{\text{red}}(Z)$ 中至多两个部分之一，要么与 $N^{\leq 2}{}_{\text{red}}(Z)$ 中的所有部分齐次连接。

由于 $|Z| \geq k$ 和 G 是 $K_{t,\,t}$-自由的，至多有 $t - 1$ 个与 Z齐次连接的顶点。对 $N^{\leq 2}$ 红(Z) 中各部分进行类似论证（根据其大小至多为 $t-1$还是至少为 t进行分类讨论）可得，至多有 $5(t-1)$ 条顶点不交路径能够通过与其他部分的齐次连接离开 $N^{\leq 2}$红(Z)。但是由于$|\mathcal{P}| - 5(t - 1) = k - 5t + 5 = 2t - 1$，与$N^{\leq 2}_{red}(Z)$关联的至多 2 条红边中，至少有一条必须包含 Z-W_3-路径中的至少 t 条。于是，从该边开始并在 Z 结束的红色 4-路径满足该结论。 □

接下来，我们要证明，在前一个引理中证明其存在的红色 4-路径，必然会导致一个大型半诱导半图的存在。

引理 E.2. 设 G 是一个图，其具有一个2-划分序列$(P_i)^{i\le n}$，并假设对于某个 $m \in [n]$，存在四个部分 X_1、X_2、X_3、$X_4 \in P_m$，使得

- 按此顺序，这四个部分 X_1、X_2、X_3 和 X_4 在三图G/P_m中构成一条红路径，并且不存在红边 X_1X_4，
- 在 $G[X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4]$中，存在 $3t-2$ 条顶点不相交的 X_1-X_4-路径。

那么 G 包含一个半诱导完全二部图$K_{t,\ t}$。

证明。我们首先说明，除非 G 包含一个半诱导$K_{t,\ t}$，否则这四个部分X_1、X_2、X_3和 X_4中任意两者都不完全连通。事实上，由于存在 $2t-1$ 条顶点不相交的X_1-X_4-路径，部分 X_1 和 X_2 的大小都至少为 $3t-2$。因此，它们要么没有共同边，要么诱导出一个大的完全二部图；后一种情况下结论成立。但如果 X_1 和 X_4没有共同边，那么 $X_2 \cup X_3$ 就是 $G[X]$ 中的一个 X_1-X_4-分隔集，因此其大小至少为$3t-2 \ge 2t-1$。这意味着不妨设 $|X_3| > t$。然而，$G[X_1, X_3]$ 要么诱导出一个大的完全二部图，此时结论成立；要么不含边。但这样一来，X_2 也是一个X_1-X_4-分隔集，这也意味着 $|X_2| \ge 2t-1$。如果 $G[X_2, X_4]$ 没有诱导出一个大的完全二部图，那么部分 X_2 和 X_4 也必定不连通。特别地，这意味着所有顶点不相交的 X_1-X_4-路径都经过割 X_2-X_3。

现在，令 $i > m$ 为最小的，使得不存在四个部分 Y_1、Y_2、Y_3、$Y_4 \in \mathcal{P}_i$ 满足以下性质：

- 这四个部分 Y_1、Y_2、Y_3 和 Y_4 在三图 $G/\mathcal{P}_i$ 中按此顺序构成一条红路径，
- $Y_2 \subseteq X_2$ 并且 $Y_3 \subseteq X_3$。

注意，这样的 i 存在，因为图 $G = G/\mathcal{P}^{|G|}$ 不含红边，因此肯定不含红色 4-路径。

由于 i 是最小的，我们知道 $G/\mathcal{P}_{i-1}$ 确实包含这样一条红色 4-路径 $Y_1Y_2Y_3Y_4$。在 $G/\mathcal{P}_i$ 中，这四个部分之一（设为 Y_i）会分裂成两个部分 Y_i^1 和 Y_i^2，使得以下情况之一成立：$i \in \{2, 3\}$，且 Y_i^1 与 Y_i^2 之间没有红边相连；或者 Y_i 的某个红邻点 Y_j 与 Y_i^1 和 Y_i^2 均不以红边相连。在后一种情况下，我们称红边 Y_iY_j 被破坏；在前一种情况下，我们称部分 Y_i 被破坏。

由对称性可知，我们不妨假设 Y_3 或边 Y_2Y_3 或 Y_3Y_4 中的一条边被断开 .
如果红边 Y_2Y_3 被断开，那么考虑二分图 $G[X_2, X_3]$。

断言。 二分图 $G[X_2, X_3]$ 存在一个1-划分序列，其最后两个部分为 X_2 和 X_3。

证明。考虑由划分序列 $(\mathcal{P}_j)^{m\le j\in[n]}$ 在$X_2 \cup X_3$上诱导的划分序列。我们声称，在该序列的每个阶段，至多有一条红边跨越割 (X_2, X_3)。事实上，这在 $G/\mathcal{P}_j$ 中对每个 $j \ge i$显然成立，因为没有红边跨越 $G/\mathcal{P}_i$ 中的 (X_2, X_3)，因此在任何更早的三图中也没有。

此外，这在 $G/\mathcal{P}_m$中显然成立，此时这条单一红边就是 X_2X_3 本身。现在，假设对某个 $m \leq j < i$，该断言在 $G/\mathcal{P}_j$ 中成立。我们证明该断言在 $G/\mathcal{P}_{j+1}$中也成立。假设划分$\mathcal{P}_{j+1}$是由$\mathcal{P}_j$ 将某个部分P 拆分为两个部分 P_1 和 P_2得到的。如果 P 不与跨越割 (X_2, X_3) 的红边关联，那么 P_1 和 P_2也都不与之关联。因此，假设 P 与跨越该割的唯一红边 PQ 关联，而该红边被拆分为两条红边 P_1Q 和 P_2Q。但由于 $j < i$， i 的选择意味着 P 和 Q 在 $G/\mathcal{P}_j$中都与第二条红边关联。然而，这将意味着 Q在 $G/\mathcal{P}_{j+1}$中的红度为 3，这与假设矛盾。

□

因为我们还已经论证过，所有 $3t-2$ 个顶点互不相交的 X_1-X_4-路径都必须穿过割(X_2, X_3)，所以图 $G[X_2, X_3]$ 包含一个大小为 $3t-2$的匹配，因此根据定义 5.4，得到一个半诱导的$K_{t,t}$。

因此，剩下的情况是部分 Y_3 或边 Y_3Y_4 被破坏。在前一种情况下，假设 Y_2 通过一条红边与 Y_3^1相邻，但与 Y_3^2不相邻。接着，改为考虑二分图 $G[X_2, X_3 \setminus Y_3^1]$。由于 $G/\mathbf{P}_i$中已没有红边穿过割$(X_2, X_3 \setminus Y_3^1)$，我们可以像证明前一个断言那样论证，存在 $G[X_2, X_3 \setminus Y_3^1]$ 的一个 1-划分序列，其最后两个部分分别为 X_2 和 $X_3 \setminus Y_3^1$。接着，由于在 $G/\mathbf{P}_i$中， Y_3^1没有通过红边与 $X_3 \setminus Y_3^1$中的任何部分相邻，因此至多有 $t-1$ 条顶点互不相交的 X_1-X_4-路径可以经过 Y_3^1。因此，我们在 $G[X_2, X_3 \setminus Y_3^1]$ 中找到一个大小为 $2t-1$ 的匹配，进而根据定义 5.4 得到一个半诱导的$K_{t,t}$。

最后，如果边 Y_3Y_4 被断开，我们考虑二部图 $G[X_2, X_3 \setminus Y_3]$。根据前面的相同推理，这个图的孪生宽度为 1，且包含一个大小为 $2t-1$ 的匹配，因此依据定义 5.4，它含有一个半诱导 $K_{t,t}$。

□

结合前两个引理，可得出所需的结果强化，这与 [6],的证明完全类似。

推论 E.3. 每个孪生宽度至多为2 且不以 $K_{t,t}$为子图的图 G ，其树宽至多为 $231(t-1)+6$。