arXiv:2601.05910v1 [stat.ML] 9 Jan 2026

稀疏数据下工程应用的多任务建模

Yigitcan Comlek*
GE 航空航天研究中心
纽约州尼斯卡尤纳。

R. MuraliKrishnan*GE 航空航天研究中心 纽约州尼斯卡尤纳。

Sandipp KrishnanRavi*GE 航空航天研究中心 纽约州尼斯卡尤纳。

Amin Moghaddas爱迪生焊接研究所，俄亥俄州哥伦布。

Rafael Giorjao
爱迪生焊接研究所
俄亥俄州哥伦布。

Michael Eff爱迪生焊接研究所，俄亥俄州哥伦布。

Anirban Samaddar阿贡国家实验室，伊利诺伊州芝加哥。

Nesar S. Ramachandra
阿贡国家实验室
伊利诺伊州芝加哥。

Sandeep Madireddy
阿贡国家实验室
伊利诺伊州芝加哥。

Liping Wang
GE 航空航天研究中心
纽约州尼斯卡尤纳。
*

摘要

现代工程和科学工作流程通常需要同时对相关任务和保真度层级进行预测，其中高保真数据稀缺且成本高昂，而低保真数据则更为充足。本文提出了一种针对具有多源多保真度数据的工程系统而设计的多任务高斯过程（MTGP）框架，旨在应对数据稀疏性和任务相关性变化带来的挑战。该框架利用不同输出和保真度层级之间的任务间关系，以提升预测性能并降低计算成本。我们在三个具有代表性的场景中验证了该框架：Forrester 函数基准、三维椭球形空洞建模和搅拌摩擦焊。通过量化并利用任务间关系，所提出的 MTGP 框架为计算与实验成本高昂的领域提供了稳健且可扩展的预测建模方案，有助于支持明智决策并提高资源利用效率。

关键词 多任务　ask 高斯过程 · 稀疏数据建模 · 跨任务数据融合 · 搅拌摩擦焊　ng

1 引言

现代工程和科学工作流程经常需要对相关任务和保真度层级进行同步预测 [1–6]。在此类情境中，有些输出稀缺且获取成本高昂，而另一些则成本较低且数量充足。多任务高斯过程（MTGP），也称为多输出高斯过程，提供了一种原理清晰的贝叶斯框架，可利用任务间相关性，实现知识共享，从而提高预测准确度，并减少对大型高保真数据集的需求 [7–9]。经过数十年的发展，MTGP 已应用于众多领域，包括时间序列预测、多任务优化和多保真度分类，展现了其广泛的实用价值，尤其适用于存在数据成本不对称性和跨任务依赖关系的场景[10–16]。MTGP 的核心动机是利用相关任务之间的依赖关系，在高保真信息有限时提升预测质量 [17]。例如，利用有限且成本高昂的高保真计算流体力学（CFD）仿真预测翼型的升力系数，可以从充足的低保真仿真中获益 [3]。近期关于联合多目标和多保真度优化的研究也采用了多任务高斯过程，在不同任务间平衡探索与利用，通过显式建模输出和保真度之间的关系，提升预测性能与决策水平 [12]。

*共同贡献

在方法层面，多任务高斯过程将单输出高斯过程回归扩展到向量值函数，借助矩阵值协方差结构编码跨输出关系。奠基性研究包括多任务高斯过程预测和协同多输出形式，这些研究对任务间共享信息进行了形式化，并提供了可扩展的建模方法。一个关键构件是共区域化：内在共区域化模型（ICM）和线性共区域化模型（LMC）定义了半正定的跨任务协方差构造，广泛应用于协同克里金和多输出高斯过程研究 [18]。在多任务高斯过程方法中，ICM 使用共区域化矩阵表示任务间依赖关系，通常通过参数化主成分分析（PPCA）或相关低秩分解进行参数化，以保持数值稳定性 [18]。重要的细节包括自克里金能力效应：在特定设置下（例如输出无噪声且数据为同位数据），ICM 的预测可能退化为各输出相互独立的预测，从而实际上抵消任务间迁移。除共区域化之外，多输出核的发展也扩展了多任务高斯过程的表达能力。卷积多输出高斯过程通过将潜在过程与输出特定平滑核进行卷积来引入依赖关系，从而实现结构化且可解释的跨输出相关性。谱混合核及其多输出扩展能够捕捉不同输出之间丰富的周期性和非平稳行为，而稀疏近似和变分方法则提高了大型数据集的可扩展性 [19, 20]。半参数潜因子模型（SLFM）从另一个角度诠释了 LMC：它通过参数矩阵混合潜在高斯过程，得到相关输出；与正则化理论的联系则为向量值函数的多任务核提供了更坚实的理论基础。随着应用范围扩大，输入域的异质性日益普遍，任务可能定义在不同的特征空间或不同维度上。为解决这一问题，近期研究提出了异质随机变分 LMC 框架，可在学习高斯过程参数的同时学习域映射，从而实现有效的输入对齐，并通过残差建模捕捉相对于先验映射的偏差。这一方向补充了递归协同克里金和迁移学习等成熟的多保真度策略，形成了一个更广泛的工具集，用于在不同任务和保真度之间迁移知识。

本文提出了一种面向具有多源多保真度数据的工程系统的多任务高斯过程（MTGP）框架，旨在应对数据稀疏性和任务相关性各异所带来的挑战。通过利用不同输出和保真度层级之间的任务间关系，MTGP 提高了预测准确度，并降低了对高成本高保真数据的依赖。多任务建模框架的高级示意图如图1所示。该框架通过三个具有代表性的场景进行了验证：Forrester基准测试展示了与单任务高斯过程相比，MTGP 降低主任务预测误差的能力；三维椭球形空洞建模中，MTGP 整合低成本弹性模拟，预测成本高昂的塑性应力输出，从而在保持准确度的同时降低计算成本；搅拌摩擦焊接中，MTGP 将实验变形数据与低成本温度仿真相结合，从而降低误差并节约成本。我们的方法以共区域化的理论基础为根基，并融入多输出核设计和稀疏推断方面的进展，为从业者在复杂场景中部署多任务高斯过程提供了切实可行的途径。通过量化并利用任务间关系，该框架旨在提升预测性能、降低数据需求，从而支持计算与实验成本高昂领域中的明智决策。

本文结构安排如下：第 1 节介绍工程系统中多任务高斯过程（MTGP）的研究动机与背景，重点阐述其利用任务间相关性提高预测准确性、减少对高保真数据依赖的能力。第 2 节概述研究方法，包括向量值函数的 MTGP 构建、共区域化方法以及多输出核设计的进展。第 3 节介绍基于 Forrester函数并扩展至双任务设置的解析基准测试，并评估 MTGP 在不同相关性水平和数据条件下的表现。第 4 节介绍 MTGP 在三维椭球形空洞建模中的应用，重点说明如何整合弹性与塑性仿真任务，以改进对计算成本高昂的输出的预测。第 5 节展示 MTGP 在搅拌摩擦焊接过程中的有效性，通过结合实验变形数据与低成本温度仿真，显著降低误差并节约成本。最后，第 6 节总结本文的贡献，强调 MTGP 在数据稀疏的多保真工程应用中用于预测建模时的可扩展性、鲁棒性和成本效率。

2 方法论

2.1 用于概率回归的高斯过程

高斯过程（GP）回归为未知函数建模提供了一种严谨的贝叶斯框架 [21]。与将函数空间限制在有限维函数族中的参数模型不同，高斯过程直接在函数上设定先验，使其复杂度能够适应数据。从形式上说，高斯过程是一组随机变量

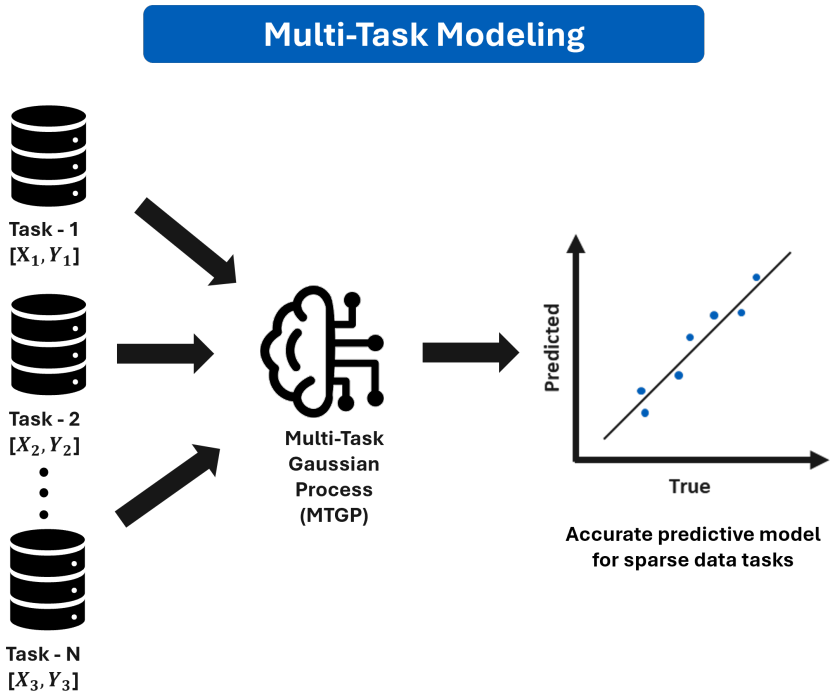

图1：面向稀疏数据应用的多任务建模框架

其任意有限子集都服从联合高斯分布。如果

$$f \sim \mathcal{GP}\big(m(\cdot),\, k(\cdot,\cdot)\big), \tag{1}$$

那么，对于任意有限的输入点集合 $X = \{x_i\}_{i=1}^{N}$，函数评估值向量 $(f(x_1)\ldots, f(x_N))^\top$ 服从联合高斯分布，其均值为 $m(X)$，协方差矩阵 K_{XX} 由核函数 $k(\cdot,\cdot)$ 定义，即

$$(f(x_1),\ldots,f(x_N))^\top \sim \mathcal{N}\big(m(X), K_{XX}\big), \qquad [K_{XX}]_{ij} = k(x_i, x_j)]. \tag{2}$$

核函数在决定从先验中抽取的函数的属性方面起着核心作用，例如平滑度、周期性或平稳性。常见的选择包括平方指数核、Matérn 核、有理二次核和周期核，以及能够捕捉多尺度和非平稳函数行为的复合核函数。

在回归问题中，假设观测值带有噪声：

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{3}$$

其中 σ^2 表示噪声方差。将此似然与高斯过程先验相结合，可得到高斯过程后验

$$f \mid X, Y \sim \mathcal{GP}\big(\bar{m}(\cdot), \bar{k}(\cdot,\cdot)\big), \tag{4}$$

其均值函数和协方差函数为

$$\begin{aligned} \bar{m}(x) &= m(x) + k_{xX}\big(K_{XX} + \sigma^2 I_N\big)^{-1}\big(Y - m(X)\big), \\ \bar{k}(x, x') &= k(x, x') - k_{xX}\big(K_{XX} + \sigma^2 I_N\big)^{-1} k_{Xx'}. \end{aligned} \tag{5}$$

这里， k_{xX} 表示测试输入 x 与训练输入 X之间的核函数评估向量， I_N 是大小为 N的单位矩阵。这些后验表达式既给出了预测均值（用作点估计），也给出了预测协方差（用于量化不确定性）。高斯过程回归能够在计算过程中自然地量化不确定性，这是其一项关键优势；在科学与工程应用中，决策不仅取决于预测结果，也取决于预测的置信水平 [21]。

经典高斯过程回归适用于标量输出，但许多问题涉及多个相关输出——例如，在多个位置测量的物理过程、传感器融合，或多个场相互作用的多物理场系统。对每个输出单独建模会忽略输出之间的相关性，可能导致数据利用效率低下，以及不确定性校准不佳。多任务高斯过程通过显式建模多个输出之间的依赖关系，弥补了这一不足。

2.2 基于向量值高斯过程的多任务学习

考虑一个向量值函数 $\mathbf{f}(x) = \big(f_1(x)\ f_2(x) \ldots, f_D(x)\big)^\top \in \mathbb{R}^D$, 其中 D 是输出或任务的数量。多任务高斯过程在这 D 个函数上设定联合高斯过程先验:

$$\mathbf{f} \sim \mathcal{GP}\big(\mathbf{m}(\cdot), \mathbf{K}(\cdot,\cdot)\big), \tag{6}$$

其中，$\mathbf{m}(x) \in \mathbb{R}^D$ 是由均值函数构成的向量，而$\mathbf{K}(x, x') \in \mathbb{R}^{D\times D}$ 是一个矩阵值核，用于编码输入空间相关性和跨任务依赖关系。对于一组 N 输入点 $X = \{x_i\}_{i=1}^N$，所有任务和所有输入的联合先验为

$$\mathrm{vec}(\mathbf{F}) \sim \mathcal{N}\big(\mathrm{vec}(\mathbf{M}), \mathbf{K}(X, X)\big), \tag{7}$$

其中，$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N\times D}$ 包含潜在函数取值，$\mathbf{M}$ 是对应的均值矩阵，而 $\mathrm{vec}(\cdot)$ 将各列堆叠为一个向量。观测值建模为

$$\mathrm{vec}(\mathbf{Y}) = \mathrm{vec}(\mathbf{F}) + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}\big(0, \Sigma \otimes I_N\big), \tag{8}$$

其中，$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_D^2)$ 表示任务特定噪声方差。该公式自然推广了标准高斯过程回归，并可通过将标量核和协方差矩阵替换为分块结构的多任务对应形式来进行后验推断。

关键在于，$\mathbf{K}(x, x')$ 的结构决定了信息如何在各输出之间共享。如果输出在统计上相互独立，$\mathbf{K}$ 就是块对角的。然而，在许多物理系统中，输出通过共享的底层机制紧密耦合，此时结构化的$\mathbf{K}$ 使模型能够利用这些耦合关系，从而提高数据效率和预测性能。

2.3 协同区域化模型多任务建模

构建用于多任务建模的$\mathbf{K}$ ，一种广泛采用的方法是通过共区域化，显式分解任务间依赖关系和输入空间依赖关系。线性共区域化模型 （LMC）将$\mathbf{K}$（即用于编码的矩阵值核）表示为

$$\mathbf{K}(x, x') = \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{B}^{(q)}\, k_q(x, x'), \qquad \mathbf{B}^{(q)} \succeq 0, \tag{9}$$

其中，每个标量核 k_q 都捕捉输入空间中的一种独特潜在结构（例如平滑趋势、周期分量或短尺度变异），而每个半正定矩阵$\mathbf{B}^{(q)} \in \mathbb{R}^{D\times D}$ 则编码各潜在结构在每个输出中的表达强度。由核编码$\mathbf{K}$ 生成的协方差矩阵保证为半正定，且具有很强的表达能力，能够捕捉丰富的任务间依赖关系模式，但代价是复杂度增加。一般的 LMC 形式可以结合低秩分量和对角分量，以表示更复杂的潜在空间相关性。因此，共区域化矩阵可写为:

$$\mathbf{B}^{(q)} = W^{(q)} {W^{(q)}}^\top + \mathrm{diag}(\gamma^{(q)}), \tag{10}$$

其中，$W^{(q)} \in \mathbb{R}^{D\times R_q}$ 捕捉共享潜在因子，$\gamma^{(q)}$ 编码任务特定贡献。这种结构使模型能够捕捉任务间共享的全局趋势，以及各输出特有的局部变化，因此非常适合对复杂的物理过程 [22]进行建模。

该半参数潜在因子模型 （SLFM）将每个共区域化矩阵约束为秩一矩阵。因此，共区域化矩阵$\mathbf{B}^{(q)}$ 可以表示为两个向量的外积。在这种情况下,

$$\mathbf{B}^{(q)} = w_q w_q^\top, \qquad w_q \in \mathbb{R}^D \tag{11}$$

从而得到

$$\mathbf{K}_{\mathrm{SLFM}}(x, x') = \sum_{q=1}^{Q} (w_q w_q^\top) k_q(x, x'). \tag{12}$$

这可以解释为一种因子模型，其中每个潜在核定义一种共享的输入结构，而因子载荷 w_q 则决定任务如何依赖各个因子。SLFM 将参数数量从 $\mathcal{O}(QD^2)$（完整 LMC 的参数数量）减少到 $\mathcal{O}(QD)$，当任务数 D 较大时，这一优势尤为明显。本文研究了 SLFM 在多任务建模中的表现，因为它在表征能力与模型复杂度之间实现了恰当的平衡。

2.4 共区域化模型中的后验推断与学习

定义了耦合各任务的 LMC/SLFM 核函数后，我们现在说明贯穿所有实验所采用的精确推断与训练方案。对于训练输入 X 和测试输入 X_*，以及向量化目标 $\mathbf{y} = \mathrm{vec}(\mathbf{Y})$，联合先验为多元高斯分布，其形式为

$$\mathbf{K}(X,X) = \sum_{q=1}^{Q} \mathbf{B}^{(q)} \otimes K_q(X,X), \tag{13}$$

在给定噪声协方差 $\Sigma \otimes I_N$ 后，可得到向量化的标准高斯过程后验，其后验均值和协方差分别表示为:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{f}_* \mid \mathbf{y}] &= \mathbf{K}(X_*,X)\big(\mathbf{K}(X,X) + \Sigma \otimes I_N\big)^{-1}\big(\mathbf{y} - \mathbf{m}(X)\big), \\ \mathrm{Cov}[\mathbf{f}_* \mid \mathbf{y}] &= \mathbf{K}(X_*,X_*) - \mathbf{K}(X_*,X)\big(\mathbf{K}(X,X) + \Sigma \otimes I_N\big)^{-1}\mathbf{K}(X,X_*). \end{aligned} \tag{14}$$

该公式将标量高斯过程回归推广到多任务场景，并支持对所有任务进行联合预测和不确定性量化。核函数的超参数 $\{k_q\}$、$\{\mathbf{B}^{(q)}\}$ 因子载荷w_q的元素以及噪声方差 $\{\sigma_d^2\}$ 通常通过最大化对数边际似然 $\log\, p(\mathbf{y} \mid X,\theta) = -\frac{1}{2}\mathbf{y}^\top K_\theta^{-1}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\log|K_\theta| - \frac{ND}{2}\log(2\pi)$,来估计，其中 $K_\theta = \mathbf{K}(X,X)\Sigma \otimes I_N$。在线性模型协同（LMC）中，可通过 Cholesky 参数化或低秩分解确保共区域化矩阵（$\mathbf{B}^{(q)} \succeq 0$）的正定性，并通过对数变换确保核函数超参数为正。我们采用基于 Adam 的基于梯度的优化方案，即使对于中等规模的 N 和 D，也能实现高效训练。

本研究所考察的搅拌摩擦焊接过程涉及多个物理耦合的输出，这些输出在相同的输入配置下观测得到。它们源自共同的底层机制，但呈现出不同的平滑度和特征尺度。采用多任务高斯过程框架，可在数据支持的情况下让模型在各输出之间共享信息，同时保留对不同任务差异进行建模的灵活性。采用多任务高斯过程框架，可让模型在数据支持的输出之间共享信息，同时保留对不同任务差异进行建模的灵活性。线性模型协同区域化核族（包括内核协同区域化模型和 SLFM）提供了一种有理论依据且计算上易于处理的方法，用于捕捉这些依赖关系。通过分离输入相关性与输出相关性，多任务高斯过程能够在多响应问题中实现高数据效率、改善不确定性校准，并增强泛化能力 [23]。

3 基准测试 - Forrester函数

首先将多任务高斯过程模型应用于一个解析问题，即 Forrester函数 [24], ，以展示其在多任务系统中的功能与适用性。Forrester函数是一种广为人知的数学基准，因其非线性特征且适用于测试预测模型，常用于优化和机器学习任务。它是一个一维函数，其定义形式如下:

$$f(x) = \mathbf{a}\left((6x-2)^2 \sin(12x-4)\right) + \mathbf{b}\,(x - 0.5) \tag{15}$$

其中 x 通常受限于 $[0,1]$，参数 a 和 b 是决定函数尺度和形式的系数。该函数呈现复杂的模式，包括多个局部极小值和极大值，因此非常适合用于评估高斯过程或神经网络等先进建模技术的性能。

在本研究中，通过引入各任务输出特征的变化，将Forrester函数扩展到多任务场景。研究旨在评估多任务高斯过程模型在特定目标任务上的预测性能，并与仅基于该任务构建的单任务高斯过程模型进行比较。为此，研究构建了Forrester函数的不同实例来表示不同任务，并使用多任务高斯过程对这些任务进行联合建模。这种方法可以评估多任务高斯过程利用相关任务信息来提升目标主任务预测效果的能力。

为设定问题，本文考虑一个双任务场景，其中一个任务被指定为预测的主要关注对象（任务1），另一个任务（任务2）则作为辅助相关任务。为涵盖多样化的现实场景，测试案例设置了不同的任务间相关性水平，并为每个任务设置了不同的样本量。具体而言，本文考察基于皮尔逊相关的三个相关性水平——高（r=0.89）、中（r=0.53）和低（r=0.33）——以了解任务关系对模型性能的影响。此外，还考虑了两种数据可用性情景：低数据可用性（每个任务5个样本）和高数据可用性（每个任务10个样本）。图2也展示了这三个相关性水平。该设置为评估多任务高斯过程在不同条件下的鲁棒性和适应性提供了全面的框架。

在建模过程中，单任务高斯过程模型仅基于任务1构建，而多任务高斯过程模型则同时使用任务1和任务2进行训练。另为任务1创建独立的测试集，以评估两个模型的预测准确度。通过比较单任务高斯过程模型和多任务高斯过程模型的性能，本研究旨在量化多任务学习在误差降低和预测可靠性方面的益处。在多任务高斯过程模型中纳入任务2，使其能够利用共享信息和任务间相关性，从而有望显著改进对任务1的预测。

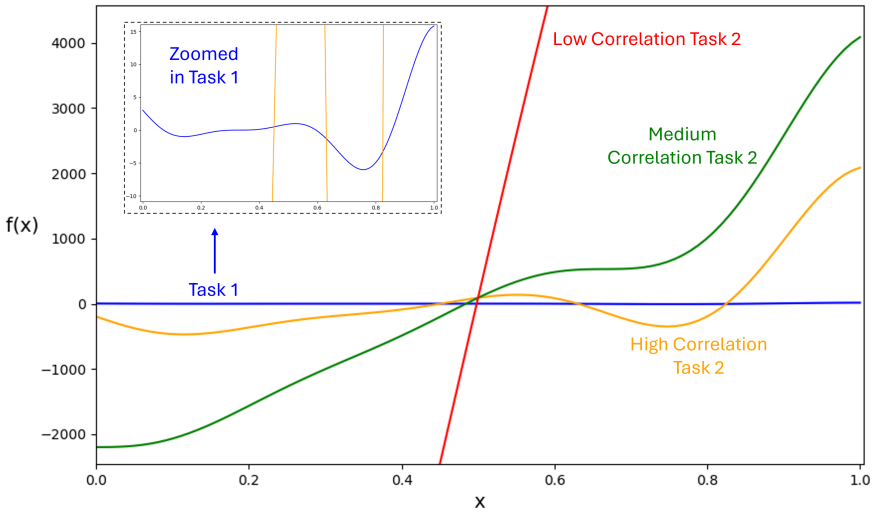

图2：低相关性（r = 0.33）、中等相关性（r = 0.55）和高相关性（r = 0.89）的 Forrester函数

Ta表 1：中等相关性情况（r=0.85）下多任务高斯过程与高斯过程预测性能对比

任务对	多任务高斯过程 \高斯过程均方根误差	% 改进
低 T1–低 T2	3.68 \ 4.44	17.1
低 T1–高 T2	3.08 \ 4.44	77.48
高 T1–低 T2	1.15 \ 1.47	21.77
高 T1–高 T2	0.84 \ 1.47	42.86

表 2：中等相关性情况下（r=0.55）的多任务高斯过程与高斯过程预测性能比较

任务对	多任务高斯过程 \高斯过程均方根误差	% 改进
低 T1–低 T2	4.08 \ 4.44	8.10
低 T1–高 T2	4.00 \ 4.44	9.91
高 T1–低 T2	1.18 \ 1.47	19.73
高 T1–高 T2	1.07 \ 1.47	27.21

表1、表2、表3分别展示了在高、中、低三种不同相关性场景下，针对任务1测试集的比较结果。研究结果清楚地表明，将任务2数据纳入多任务高斯过程模型会产生影响，尤其是在任务间相关性较高的场景中。在高相关性情况下，加入任务2可显著提升模型的预测性能，显著的百分比改进充分证明了这一点。这凸显了多任务高斯过程能够有效利用较强的任务关系，改进主任务预测的能力。此外，结果显示，无论任务1数据量是低还是高，随着更多任务2数据被纳入模型，改进幅度都会越来越明显。在任务1数据量较高的场景中，尽管单任务高斯过程模型的表现已经不错，但纳入任务2的相关信息仍能进一步提升多任务高斯过程模型的预测能力，展现出其提取和利用辅助任务信息以取得更优结果的能力。在中相关性情况下，无论任务1数据量低还是高，都能观察到显著改进，这表明多任务高斯过程能够灵活处理相关性适中的任务，

表 3：中等相关性情况下，多任务高斯过程与高斯过程预测性能对比（r=0.31）

任务对	多任务高斯过程 \高斯过程均方根误差	% 改进
低 T1–低 T2	4.27 \ 4.44	3.82
低 T1–高 T2	4.33 \ 4.44	2.48
高 T1–低 T2	1.19 \ 1.47	19.05
高 T1–高 T2	1.23 \ 1.47	16.33

随着任务间相关性降低，百分比改进幅度也随之减小，这反映出任务2对任务1预测的影响减弱。最后，在低相关性情形下，尽管改进幅度不如高相关性和中相关性情况明显，加入任务2仍能使预测性能优于单任务高斯过程模型。这表明，即使任务关系较弱，多任务高斯过程仍能从辅助任务中提取有用信息，从而改进预测。值得注意的是，在所有相关性场景中，任务1和任务2拥有更多数据都会显著提升模型性能。这是因为随着数据量增加，多任务高斯过程模型能够更有效地学习和利用任务之间的关系。

总之，将 Forrester函数应用于此项研究，展示并阐释了 MTGP 处理多任务系统的能力。此外，本研究突出了 MTGP 在多任务场景中的优势，尤其是在任务表现出不同程度的相关性且数据可用性不一时。结果表明，MTGP 能够有效利用辅助任务信息来增强对主任务的预测；在任务相关性高且数据有限的情况下，其性能优于单任务高斯过程模型。这种方法凸显了 MTGP 作为多任务建模强大工具的潜力，能够在相关任务可提供有价值的上下文信息的应用中提高准确性和效率，并为其应用于更复杂的现实世界问题铺平道路。

4 椭球形空洞

椭球形空洞建模对于理解和预测材料在各种结构和力学条件下的行为至关重要 [25–27]。空洞是材料内部的缺陷或空腔，会显著影响其力学性能，例如强度、耐久性和变形特性。其中，三维椭球形空洞由于其复杂的几何形状，以及在航空航天部件、汽车零部件和结构材料等现实应用中的普遍存在，尤为重要。准确地对这些空洞进行建模，对于优化材料设计、提升性能以及确保关键应用中的安全性至关重要。

本研究聚焦于三维椭球形空洞的建模，其中各任务在结构仿真的输出和保真度方面均有所不同，具体包括弹性分析和塑性分析。空洞问题的示意图见图3，直观展示了问题设置以及三个设计变量 r_x、r_y 和 r_z，它们定义了材料体积内三维椭圆的半径。本文分析了两种不同的多任务场景，以评估多任务高斯过程处理不同保真度任务的有效性。
在第一种场景中，采用三任务建模方法，所有输出均仅来自弹性仿真。这为评估任务保真度一致时的预测性能提供了基准。在第二种场景中，则结合了弹性仿真和塑性模拟中的任务。该场景的主要目标是利用成本较低、速度较快的弹性仿真任务，改进对计算开销较大的塑性模拟输出的预测。这种方法展示了多任务高斯过程在多保真度场景中的潜力，能够在保持高预测准确度的同时减少计算开销。表4总结了本研究采用的具体任务。

4.1 弹性情形

对于全弹性任务情形，我们开展了详细研究，将多任务高斯过程与单任务高斯过程模型的性能进行了比较。在这一情形中，最大冯·米塞斯应力被指定为主任务（任务1 - T1），其余两项任务——最大冯·米塞斯应变（任务2 - T2）和最大弹性能（任务3 - T3）——则作为辅助任务，为应力预测提供额外信息。本研究旨在评估纳入辅助任务数据对多任务高斯过程模型预测准确度的影响。

表4：椭球形空洞案例建模所用的任务

案例	任务
弹性	最大弹性冯·米塞斯应力（T1），最大弹性冯·米塞斯应变（T2），最大弹性应变能 (T3)
塑性/弹性	最大塑性冯·米塞斯应力 (T1)，最大-小弹性冯·米塞斯应变 (T2)，最大弹性应变能 (T3)

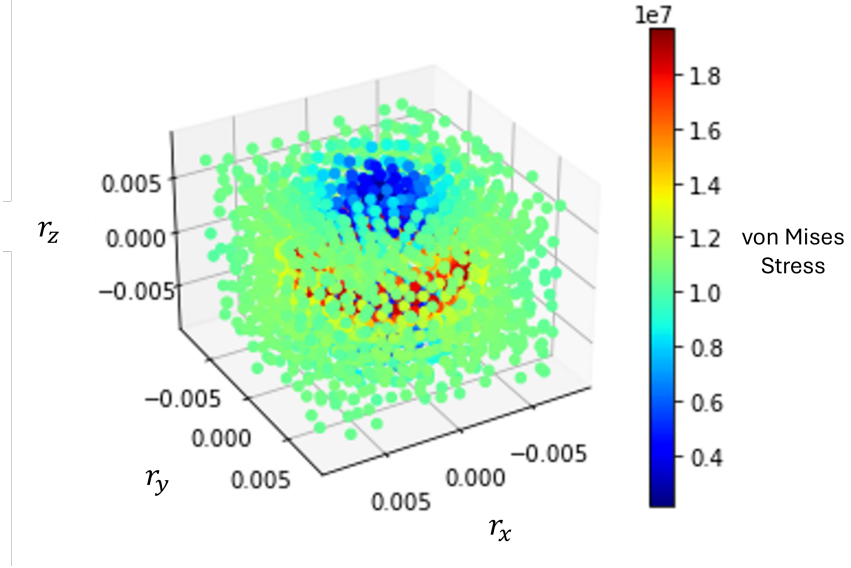

图3：椭球形空洞系统示意图示例

图4展示了在弹性案例研究中，使用多任务高斯过程预测最大冯·米塞斯应力相较于单任务高斯过程的显著优势。借助辅助任务的共享信息，多任务高斯过程的预测性能显著提升，均方根误差的改善幅度为59.21%至76.25%。这项改进归因于多任务高斯过程能够利用主任务（最大冯·米塞斯应力）与辅助任务（最大冯·米塞斯应变和最大弹性能）之间的相关性，从而有效整合相关输出之间的信息。弹性案例研究的结果表明，随着辅助数据可用性的提高，预测准确度持续改善。随着辅助任务（T2：最大冯·米塞斯应变，T3：最大弹性能）样本数增加，多任务高斯过程的均方根误差持续下降，凸显了数据可用性对改善主任务预测的重要性。在T2样本数固定时，增加T3样本数可显著改善均方根误差。例如，T2有5个样本时，将T3样本数从5增加到20，均方根误差从2.44兆帕降至2.57兆帕，对应的改进幅度从60.60%提高到74.19%。同样，在T3样本数固定时，增加T2样本数也能改善均方根误差。例如，T3有5个样本时，将T2样本数从5增加到20，均方根误差从2.44兆帕降至2.20兆帕，对应的改进幅度从60.60%提高到64.71%。当T2和T3均有20个样本时，改进幅度最高，达到76.25%，均方根误差降至2.20兆帕。这一结果凸显了同时提高两项辅助任务数据可用性的协同效应。增加T2和T3的样本数相结合带来了最显著的改进：当T2和T3均有20个样本时，均方根误差降至2.20兆帕，相较于单任务高斯过程模型改善了75.12%。

MTGP 模型还展现出可扩展性：随着纳入更多来自辅助任务的数据，其效果也不断提升。这种可扩展性使 MTGP 能够随着辅助任务数据量的增加不断优化预测并提高准确度。即使在数据稀疏场景下，MTGP 的表现也始终优于单任务高斯过程；对于 T2 和 T3，仅使用 5 个样本就实现了 60.60% 的改进，展现出其处理数据有限情况的鲁棒性。此外，MTGP 通过整合低成本弹性仿真数据（T2 和 T3），有效利用了跨任务关系，减少了对高保真数据的依赖，同时保持了较高的预测性能。

弹性仿真与塑性模拟相比，计算成本较低；它提供了有价值的上下文信息，例如应变和能量分布，这些信息与塑性应力密切相关。通过纳入这些辅助任务，MTGP 减少了对大型高保真塑性模拟输出数据集的依赖，而生成这类数据集往往成本高昂且耗时。

总之，弹性案例研究的结果表明，多任务高斯过程能够利用辅助任务提升主任务预测准确度。对于 T2 和 T3，随着样本量变化，均方根误差值始终降低，这凸显了数据可用性在多任务学习中的重要性。多任务高斯过程能够整合低成本弹性模拟数据，不仅提升了预测质量，还降低了计算成本，使其成为工程应用中可扩展且高效的预测建模方案。这些发现彰显了多任务高斯过程应对数据稀疏场景下多任务和多保真挑战的潜力，能够改进复杂系统中的决策和优化。

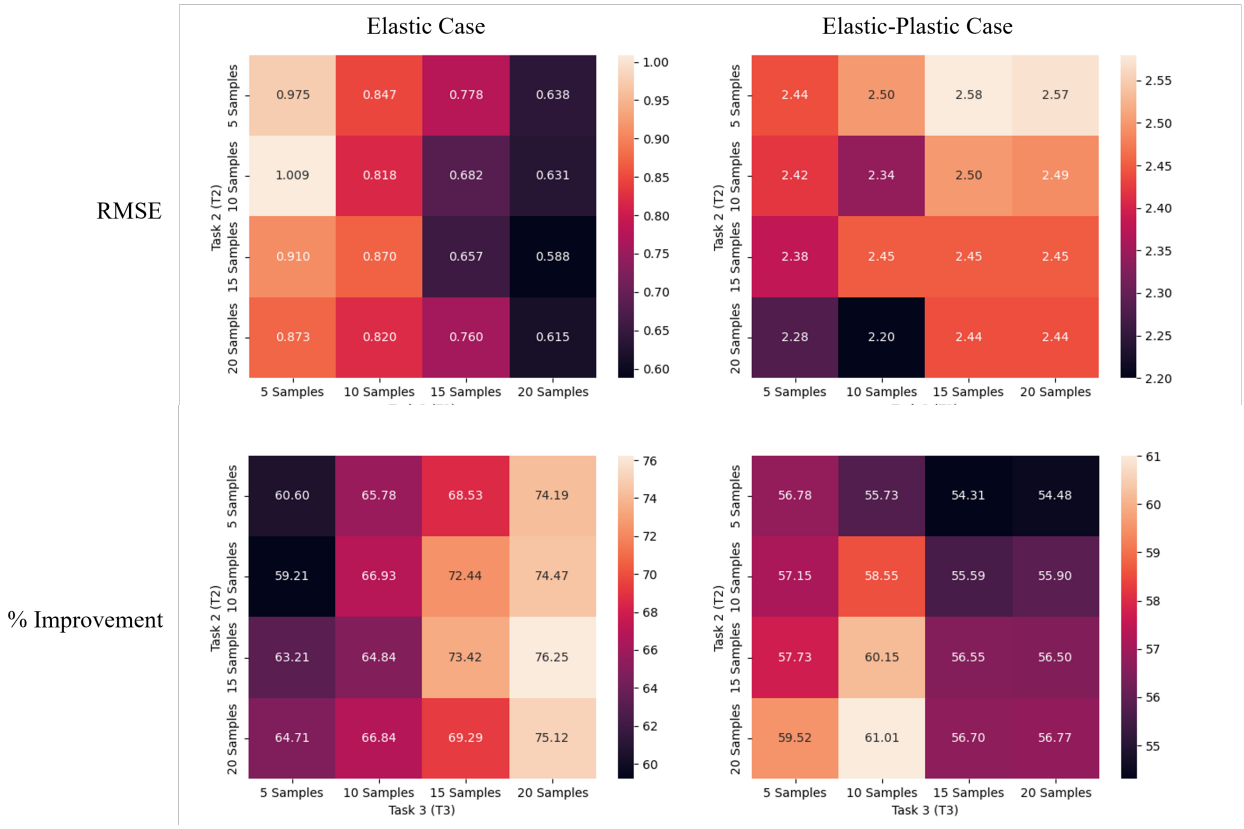

图4：弹性和弹塑性案例研究中，针对冯·米塞斯应力（任务1），多任务高斯过程与高斯过程的预测性能（均方根误差和改进百分比）比较

4.2 弹塑性案例

在弹塑性案例研究中，我们开展了详细调查，以评估多任务高斯过程相较于单任务高斯过程模型的性能。在这一情形下，最大塑性冯·米塞斯应力被指定为主任务（任务1 - T1），而最大弹性冯·米塞斯应变（任务2 - T2）和最大弹性能（任务3 - T3）则作为辅助任务，为应力预测提供额外信息。本研究旨在评估整合辅助任务数据对多任务高斯过程模型预测准确度的影响。

图4展示了在弹塑性案例中，使用多任务高斯过程相较于单任务高斯过程预测最大塑性冯·米塞斯应力的显著优势。通过利用辅助任务的共享信息，多任务高斯过程显著提升了预测性能，均方根误差的改善幅度为54.31%至61.01%。这一改进归因于多任务高斯过程能够利用主任务（最大塑性冯·米塞斯应力）与辅助任务（最大弹性冯·米塞斯应变和最大弹性能）之间的相关性，从而有效整合相关输出中的信息。弹塑性案例研究的结果

表明，随着辅助数据可用性的提高，预测准确度也持续提升。随着辅助任务（T2：最大弹性冯·米塞斯应变和T3：最大弹性能）样本数量增加，多任务高斯过程的均方根误差持续下降，凸显了数据可用性对于改进主任务预测的重要性。在T2样本数量固定时，增加T3样本数量可显著降低均方根误差。例如，当T2样本为5个时，将T3样本从5个增加到20个，均方根误差便从 2.44×10 兆帕降至 2.57×10 兆帕，对应的改进幅度从56.78%增至54.48%。类似地，在T3样本数量固定时，增加T2样本数量也能降低均方根误差。例如，当T3样本为5个时，将T2样本从5个增加到20个，均方根误差便从 2.44×10 兆帕降至 2.20×10 兆帕，对应的改进幅度从56.78%增至61.01%。

最高达到61.01%的改进出现在T2有20个样本、T3有10个样本时，此时RMSE降至 2.20×10 兆帕。该结果凸显了提高两个辅助任务的数据可用性所产生的协同效应。当T2和T3的样本数均增加至20个时，二者样本数的增加带来了最显著的改进，使RMSE降至 2.44×10 兆帕；与单任务高斯过程相比，改进达到56.77%。

多任务高斯过程模型还展现出良好的可扩展性：随着纳入的辅助任务数据增多，其效果不断提升。这种可扩展性使多任务高斯过程模型能够随着辅助任务数据量的增加不断优化预测并提高准确性。即使在数据稀疏场景下，多任务高斯过程模型也始终优于单任务高斯过程；当T2和T3各只有5个样本时，改进仍达到56.78%，展现出其应对有限数据可用性的鲁棒性。此外，多任务高斯过程模型通过整合低成本的弹性仿真数据（T2和T3），有效利用了跨任务关系，在保持高预测性能的同时减少了对高保真数据的依赖。与塑性仿真相比，弹性仿真的计算成本较低，能够提供应变和能量分布等有价值的上下文信息，而这些信息与塑性应力密切相关。通过纳入这些辅助任务，多任务高斯过程模型减少了对大型高保真塑性模拟输出数据集的依赖，而此类数据集通常生成成本高、耗时长。

总之，弹塑性案例研究的结果表明，MTGP 能够利用辅助任务提升主任务预测准确度。对于 T2 和 T3，随着样本量变化，均方根误差值持续降低，这凸显了数据可用性在多任务学习中的重要性。MTGP 能够整合低成本弹性模拟数据，不仅提升了预测质量，还降低了计算成本，因此成为一种可扩展且高效的工程应用预测建模方案。这些发现凸显了 MTGP 在数据稀疏场景中应对多任务和多保真挑战的潜力，从而有助于改善复杂系统中的决策和优化。

5 搅拌摩擦焊工艺建模

搅拌摩擦焊（FSW）是一种先进的固态连接工艺，彻底改变了金属部件的制造方式 [28–31]。与传统熔焊技术不同，搅拌摩擦焊通过旋转工具与试样之间摩擦产生的热量来连接金属。这种局部热量会使材料软化，使工具能够搅拌并锻合金属，而不使其熔化。搅拌摩擦焊具有诸多显著优势，例如减少缺陷、改善力学性能以及提高接头强度。尽管具有这些优势，搅拌摩擦焊过程中热、力学和材料行为之间的复杂相互作用仍会导致焊接试样发生变形[32]。这些变形可能会损害焊接部件的尺寸精度和结构完整性，因此了解并预测其发生情况至关重要。图 5 示意了搅拌摩擦焊工艺，并重点标示了影响变形的关键参数。

焊后样品中观察到的变形受工具转速、行进速度、压入深度和工具几何形状的影响。这些参数以高度非线性的方式相互作用，因此使用传统的回归建模方法难以准确预测变形。常用的参数回归方法，如随机森林和神经网络，通常不适合此任务，因为它们依赖大型数据集，且无法为预测提供不确定性估计。

数据稀疏性是制造和工程应用中的常见问题，因为开展实验的成本很高（每次实验的费用高达数千美元）。高昂的成本限制了可收集的实验样本数量，使数据稀疏性成为搅拌摩擦焊工艺建模中的一项重大挑战。为应对这些挑战，本研究旨在开发一种稳健的预测模型，以捕捉工艺参数与由此产生的变形之间的复杂关系。通过采用多任务学习方法，该模型力求利用成本较低的其他任务，降低在给定工艺参数下预测焊接试样变形的复杂度。

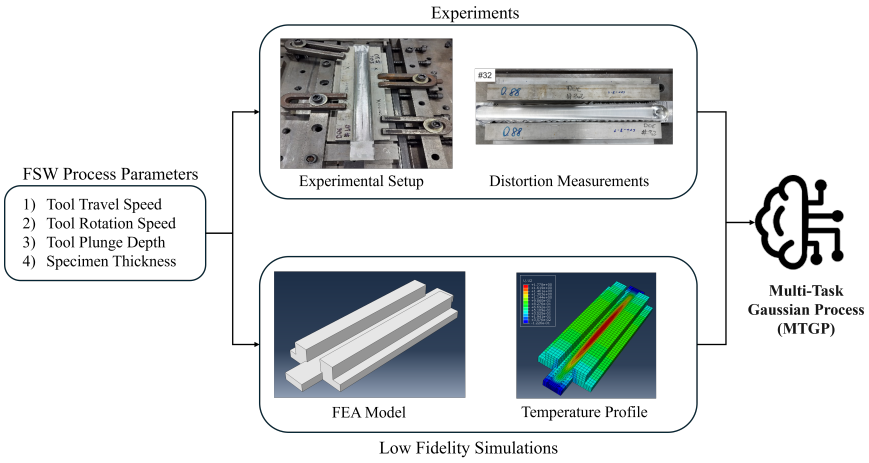

图5：搅拌摩擦焊建模框架

5.1 数据来源

爱迪生焊接研究所（EWI）的工艺专家可通过四个主要工艺参数控制搅拌摩擦焊系统：工具转速、工具行进速度、工具压入深度以及焊接试样的厚度。这些参数对焊接材料的质量和变形起着关键作用，因此，精确控制这些参数对于优化搅拌摩擦焊工艺至关重要。为建模这些参数与由此产生的变形之间的复杂关系，我们采用了两种不同的任务，具体总结见表5。

表5：用于搅拌摩擦焊工艺建模的任务

Task	**描述**	**Cost**	**输出**
T1：实验试验	单个试样的搅拌摩擦焊实验	数千美元	变形（英寸）
T2：低保真仿真	采用 2.3 万个网格的 ABAQUS 仿真单元	6 小时 CPU 时间	温度（K）

第一项任务涉及实验试验，这些试验提供了有关焊接试样中观测到的变形的高保真数据。这些实验结果代表了建模所关注的主任务，因为它们最准确地反映了这一物理过程。实验试验是在受控条件下对实际试样进行搅拌摩擦焊，并系统地改变工具转速、行进速度、压入深度和试样厚度等工艺参数。使用高精度仪器测量焊接试样的变形，以确保数据的可靠性和准确性。然而，实验试验成本高昂且耗时，每次试验的费用都达数千美元。如此高昂的成本限制了可采集的样本数量，使数据稀疏性成为搅拌摩擦焊工艺建模中的一项重大挑战。尽管存在这些限制，实验试验仍是了解搅拌摩擦焊工艺背后物理现象的黄金标准。

第二项任务源自低保真仿真，这类仿真使用包含减缩积分单元（DC3D8R 和 C3D8R）的粗网格来近似搅拌摩擦焊工艺。此类仿真的计算成本较低、执行速度较快，每次仿真约需 6 小时 CPU 时间。尽管低保真仿真与实验试验相比精度较低，但能够捕捉搅拌摩擦焊工艺中的宝贵趋势和关系，因此可作为有用的补充数据来源。低保真仿真在对搅拌摩擦焊工艺的热学和力学行为进行建模方面尤为有效。它们能够揭示温度分布、应力场和变形模式，这些对于理解导致变形的因素至关重要。将这些输出作为辅助任务纳入预测模型后，低保真仿真能够增强模型的泛化能力，并使其能够预测不同工艺条件下的变形。

挑战在于如何有效结合这两项任务，构建兼顾准确性与计算效率的预测模型。通过将低保真仿真的输出用作辅助任务，我们旨在提高对高保真实验试验的预测效果。这种多任务学习方法使我们能够利用

任务之间的共享结构和相关性，从而提升模型在不同工艺条件下的泛化能力和变形预测能力。

5.2 使用 MTGP 建模的结果

在数据稀疏场景下，高斯过程模型通常是系统建模的首选，因为即使数据有限，也能提供准确的预测。然而，本研究通过展示引入相关辅助任务能够提升预测性能，探讨了多任务高斯过程相较于传统高斯过程模型的优势。在此对比中，高斯过程模型仅基于实验数据构建，而多任务高斯过程模型则将低保真仿真中的温度输出作为一项附加任务，与实验数据源中的变形输出结合起来。作为与 EWI 持续合作的一部分，我们开展了 32 次实验试验和 32 次低保真仿真，为本研究提供所需数据。实验试验是在受控条件下对金属试样进行搅拌摩擦焊，系统地改变工具转速、行进速度、压入深度和试样厚度等工艺参数。这些试验提供了焊接试样变形的高保真数据，构成了我们关注的主任务。

除实验试验外，还进行了低保真仿真。这些仿真捕捉了搅拌摩擦焊工艺中的温度分布及其他热变化趋势。低保真仿真的计算成本较低、运行速度较快（每次仿真约需六小时 CPU 时间），同时提供了有价值的背景信息，补充了实验数据。这两项任务相结合，使我们能够开发出兼顾准确性与计算效率的稳健预测模型。两项任务各自的 32 个样本均通过在设计空间内进行全因子抽样获得，从而确保全面覆盖各种参数组合。为评估模型在数据稀疏条件下的性能，我们考虑了不同场景：实验任务的训练样本数为 4 至 16 个，测试样本数则相应为 28 至 16 个。相比之下，多任务高斯过程建模过程中使用了全部 32 个低保真仿真，以最大限度地利用可用的辅助信息。该对比结果汇总于表 6，显示多任务高斯过程模型的预测性能优于高斯过程模型。

表 6：多任务高斯过程与高斯过程模型的预测性能比较

实验训练\ 测试样本数	**多任务高斯过程\ 高斯过程均方根误差（毫米）均值**	**% 改进**
4 \ 28样本	0.0034 \ 0.0040	15.00
8 \ 24个样本	0.0033 \ 0.0041	19.51
12 \ 20 个样本	0.0032 \ 0.0039	17.95
16 \ 16 个样本	0.0031 \ 0.0041	24.40

研究表明，即使在数据极少的情况下，例如只有 4 个实验样本可用时，多任务高斯过程模型的表现也显著优于传统高斯过程模型。这一改进主要归因于纳入了低保真仿真中的温度数据，这些数据提供了宝贵的上下文信息，有助于支持预测。随着实验样本数量增加，多任务高斯过程模型的优势会更加明显。拥有更多实验数据后，多任务高斯过程模型能够更好地学习任务之间的相关性和关系，从而大幅提升预测准确度。这体现了多任务高斯过程方法的可扩展性：随着更多数据的加入，该方法的效果会越来越好。

多任务高斯过程模型在数据稀疏场景中展现出多项关键优势。首先，它始终优于传统高斯过程模型，均方根误差降低了 15% 至 24.40%。这一改进主要归功于整合了辅助任务，例如低保真仿真产生的温度输出，这些信息提供了有价值的上下文信息，有助于提升主任务的预测效果。其次，多任务高斯过程方法具有出色的可扩展性，随着实验数据的增加，其效果也日益显著。在数据采集成本高且耗时的工程应用中，这种可扩展性尤为有益。第三，多任务高斯过程模型通过纳入低保真仿真，显著提升了成本效率；此类仿真仅需六小时 CPU 时间，而实验试验则需要数千美元。这种整合降低了对高成本实验数据的依赖，同时保持了较高的预测准确度。最后，多任务高斯过程模型能够稳健地处理保真度差异，有效结合高保真度实验数据与低保真仿真中的信息。这种灵活性使多任务高斯过程成为应对不同保真度多任务场景的强大工具，从而提升预测性能，并实现复杂工程系统的高效建模。

总之，本研究展示了在数据稀疏场景中使用多任务高斯过程的显著优势，尤其是在能够获取相关任务的辅助信息时。通过将相关任务纳入建模过程，多任务高斯过程模型无论面对何种保真度差异，都能显著提升预测性能。这种方法有望应用于广泛的工程和科学问题，因为数据稀疏性和多保真度数据源是这些领域常见的挑战。多任务高斯过程能够利用有限数据做出更准确的预测，为优化流程和改善复杂系统中的决策提供了强大工具。

6 结论

本研究表明，多任务高斯过程（MTGP）为具有稀疏观测、相关输出和不同任务保真度的工程问题提供了一种有理论依据、数据高效且适用范围广的框架。我们首先基于共区域化方法，为具有结构化跨任务协方差的向量值函数构建了多任务高斯过程。这些构建方式将输入空间结构与输出任务相关性分离，使模型能够在保留任务特定行为的同时，有选择地在任务之间共享信息。在此框架下，后验推断将标量高斯过程回归推广为跨所有输出的联合预测，并提供经过校准的不确定性；超参数则通过边际似然最大化进行学习，同时满足适当的正值性和正定性约束。总体而言，这些建模选择使多任务高斯过程能够利用物理系统中常见的共享潜在机制，从而提升多响应场景下的数据效率和鲁棒性。

我们在一个基于 Forrester函数的可控解析基准上验证了这些能力。该基准扩展为具有可调任务间相关性和可变数据可用性的双任务设置。基准结果凸显了多任务高斯过程如何利用相关的辅助任务，提高感兴趣的主任务的预测准确度。在高、中、低相关性条件下，以及低数据量和高数据量两种情况下，多任务高斯过程的表现始终达到或超过仅使用主任务数据训练的单任务高斯过程。任务间相关性较高，且辅助任务提供了额外数据时，性能提升最为显著。为评估其现实性和工程应用价值，我们将多任务高斯过程应用于一个三维椭球空洞建模问题，涵盖弹性和塑性响应。该案例反映了一种常见的工业场景：多个输出源自共享的底层机制，但其观测保真度和计算成本各不相同。我们考察了两种设置：用于建立同保真度基线的三任务纯弹性案例，以及利用低成本弹性任务辅助预测高成本塑性输出的混合保真度案例。通过联合建模输出，多任务高斯过程方法利用了跨任务和跨保真度结构，提高了数据效率和预测质量，均方根误差降幅超过 50%。最后，我们在搅拌摩擦焊制造过程中展示了该方法的应用。我们将成本较高的高保真实验变形与成本较低的 ABAQUS 温度仿真配对，构建了一个多任务学习问题。在实验数据稀疏的情况下，与仅使用实验数据训练的单任务高斯过程相比，多任务高斯过程始终能够提高预测准确度，均方根误差平均降幅超过 15%。这些提升源于对实验与仿真之间跨任务结构的学习，使多任务高斯过程成为一种有效且注重成本效益的策略，可用于现实约束条件下的过程建模。

总之，本研究展示了多任务高斯过程在数据稀疏场景中的显著优势，尤其是在能够获取相关任务的辅助信息时。通过将相关任务纳入建模过程，多任务高斯过程模型能够显著提升预测性能，且不受保真度差异的影响。这种方法在广泛的工程和科学问题中具有应用前景，因为数据稀疏性和多保真度数据源是这些问题中常见的挑战。多任务高斯过程能够在数据有限的情况下实现更准确的预测，为优化流程和改善复杂系统中的决策提供了有力工具。

7 致谢

GE Aerospace、爱迪生焊接研究所和阿贡国家实验室的研究人员感谢美国能源部能源效率与可再生能源办公室（EERE）旗下先进制造办公室的支持，资助编号为 DE-AC0206H11357。本文所表达的观点不一定代表美国能源部或美国政府的观点。

8 参考文献

[1] Alexander IJ Forrester、Andr´as S´obester 和 Andy J Keane。《通过代理建模实现多保真度优化》。载于：《英国皇家学会学报*A*辑：数学、物理与工程科学》463.2088（2007），第3251–3269页。

[2] Benjamin Peherstorfer、Karen Willcox 和 Max Gunzburger。《不确定性传播、推断与优化中的多保真度方法综述》。载于：SIAM Review 60.3（2018），第550–591页。[3] Paris Perdikaris 等。《用于数据高效多保真度建模的非线性信息融合算法》。载于：《英国皇家学会学报A辑：数学、物理与工程科学》473.2198（2017），第20160751页。[4] Yi-Ping Chen 等。《用于非层级多保真度自适应采样的潜变量方法》。载于：应用力学与工程中的计算机方法 421（2024），第116773页。[5] Yigitcan Comlek 等。《通过输入映射和潜变量高斯过程实现异构多源数据融合》。载于：《机械设计杂志》147.4（2025），第041711页。[6] R´emi Lam、Douglas L Allaire 和 Karen E Willcox。《利用统计代理建模对非层级信息源进行多保真度优化》。载于：第56届AIAA/ASCE/AHS/ASC结构、结构动力学与材料会议。2015，第0143页。[7] Haitao Liu 等。《在异构输入域上学习多任务高斯过程》。载于：IEEE系统、人类与控制论学报：系统 53.10（2023），第6232–6244页。[8] Phillip Boyle 和 Marcus Frean。《相关高斯过程》。载于：神经信息处理系统进展17（2004）。[9] Kai Yu 和 Wei Chu。《用于链接分析和迁移学习的高斯过程模型》。载于：神经信息处理系统进展20（2007）。[10] Keyu Shi 等。《采用物理增强的数据驱动方法对增材制造晶格结构进行工艺-结构多目标逆向优化》。载于：《虚拟与物理原型》18.1（2023），e2266641。[11] Yang Lei、Tengyu Hou 和 Ye Ding。《基于多任务高斯过程回归预测机器人铣削中的姿态相关刀尖动力学》。载于：《机器人与计算机集成制造》81（2023），第102508页。[12] Zhangyuan Wang 等。《基于多任务与多保真度高斯过程的扑翼联合多目标优化》。载于：《海洋工程》294（2024），第116862页。[13] Manan Mehta 和 Chenhui Shao。《制造业中用于高斯过程多任务学习的自适应采样设计》。载于：《制造系统杂志》61（2021），第326–337页。[14] Yuhang Yang 和 Chenhui Shao。《制造业中基于混合多任务学习的响应面建模》。载于：《制造系统杂志》59（2021），第607–616页。[15] Shiduo Cao 等。《通过双重多任务高斯过程评估燃气轮机的迁移状态》。载于：《先进工程信息学》62（2024），第102782页。[16] Edwin V Bonilla、Kian Chai 和 Christopher Williams。《多任务高斯过程预测》。载于：神经信息处理系统进展20（2007）。[17] Loic Le Gratiet 和 Claire Cannamela。《针对多保真度计算机代码，采用快速交叉验证技术的基于协同克里金法的序贯设计策略》。载于：《技术计量学》57.3（2015），第418–427页。[18] Mauricio A Alvarez 和 Neil D Lawrence。《计算高效的卷积多输出高斯过程》。载于：《机器学习研究杂志》12（2011），第1459–1500页。[19] MauricioA Alvarez、Lorenzo Rosasco、Neil D Lawrence 等。《向量值函数核：综述》。载于：机器学习基础与趋势4.3（2012），第195–266页。[20] Andrew Wilson 和 Ryan Adams。《用于模式发现与外推的高斯过程核》。载于：国际机器学习会议。PMLR。2013，第1067–1075页。[21] Carl Edward Rasmussen 和 Christopher K. I. Williams。《机器学习中的高斯过程》。麻省理工学院出版社，2006。[22] Motonobu Kanagawa 等。《高斯过程与核方法：联系与等价性的综述》。载于：arXiv预印本 arXiv:1807.02582（2018）。[23] Mauricio A. Alvarez、Lorenzo Rosasco 和 Neil D. Lawrence。《向量值函数核：综述》。2012。DOI：10.1561/2200000036。[24] Alexander Forrester、Andras Sobester 和 Andy Keane。《通过代理建模进行工程设计：实用指南》。Wiley，2008年7月。URL：https://eprints.soton.ac.uk/64699/。[25] John Douglas Eshelby。《椭球夹杂弹性场的确定及相关问题》。载于：伦敦皇家学会会刊A辑：数学与物理科学241.1226（1957），第376–396页。[26] Thomas Pardoen 和 JW Hutchinson。《空洞生长与聚合的扩展模型》。载于：《固体力学与物理学杂志》48.12（2000），第2467–2512页。

[27] F Scheyvaerts 等：《平面应变条件下复合剪切与拉伸作用时椭球形空洞的增长与聚合》。载于：《固体力学与物理学杂志》59.2（2011），第 373–397 页。[28] Pedro Vilac̦a 和 Wayne Thomas。《搅拌摩擦焊技术》。载于：轻质金属结构连接。Springer，2011，第 85–124 页。[29] Wayne M Thomas、Keith I Johnson 和 Christoph S Wiesner。《搅拌摩擦焊——工具与工艺技术的最新进展》。载于：《先进工程材料》5.7（2003），第 485–490 页。[30] Mandeep Singh Sidhu、Sukhpal Singh Chatha 等。《搅拌摩擦焊——工艺及其变量：综述》。载于：《新兴技术与先进工程国际期刊》2.12（2012），第 275–279 页。[31] B Venu 等。《多种金属的搅拌摩擦焊及其变量综述》。载于：《今日材料：会议录》18（2019），第 298–302 页。[32] Nilesh Kulkarni、Rajiv S Mishra 和 John A Baumann。搅拌摩擦焊中的残余应力。Butterworth-Heinemann，2013。