arXiv:2601.05915v1 [math.DS] 9 Jan 2026

p进整数上的施耐德映射的李雅普诺夫谱 $p\mathbb{Z}_p$

´ ´Matias Alvarado 和 Nicolas Arevalo-Hurtado

Abstract. 我们研究了 p 进整数 $p\mathbb{Z}_p$ 上施耐德映射相关的热力学形式主义。通过引入一种几何势函数来刻画该映射生成的柱集的扩张，我们定义了一个适用于这种非阿基米德情形的李雅普诺夫指数。我们考察相应的李雅普诺夫谱，并证明它在其自然定义域上是实解析的。此外，我们还得到了该谱的显式闭式公式。由此，我们重新获得并细化了关于由连分数数字的指定渐近算术平均所定义集合的豪斯多夫维数的已知结果。最后，我们将李雅普诺夫指数与施奈德连分数展开的截断所产生的有理逼近的指数收敛速率联系起来。这为丢番图逼近的经典结果提供了一个 p 进类比，并为相应的水平集给出了精确的维数公式。

1. Introduction

多重分形分析中的一个核心问题涉及动力系统定义的函数的水平集的分形分解，通常通过其豪斯多夫维数来刻画。设 $f\colon M \to M$ 是紧流形 M 上的一个 C^1 映射。f 在点 $x \in M$ 处的李雅普诺夫指数定义为

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)\|, \tag{1.1}$$

只要该极限存在。该量刻画了邻近轨道相互发散的指数速率。对于每个实数 α，定义

$$J_\alpha = \{x \in M : \lambda(x) = \alpha\}.$$

根据链式法则，$\lambda(x)$ 可以表示为 $\log \|Df\|$ 的伯克霍夫平均的逐点极限。因此，对于任意遍历测度，李雅普诺夫指数几乎处处为常数。特别地，单个遍历测度无法刻画不同水平集 J_{α_1} 和 J_{α_2} 的几何性质。这促使我们通过这些集合的豪斯多夫维数来研究它们。α 的李雅普诺夫谱定义为

$$L(\alpha) = \dim_{\mathrm{H}} (J_\alpha),$$

只要 $J_\alpha \neq \emptyset$，其中 $\dim_{\mathrm{H}}(\cdot)$ 表示豪斯多夫维数。

对于导数为 H¨older 连续的光滑流形上的共形扩张映射，这个问题可以追溯到 Weiss [Wei99] 的研究。借助马尔可夫划分和吉布斯测度等工具，Weiss 证明了 L 在有界区间 $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ 上有定义，是实解析的，并且满足

$$L(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \inf \{P(-t \log \|Df\|) + t\alpha : t \in \mathbb{R}\}, \tag{1.2}$$

Date: 2026年1月12日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：37C45；次要分类：11J70、37P30。*Key words and phrases.* *p*-进连分数、李雅普诺夫谱、热力学形式主义。

其中， $P(-t\log\|Df\|)$ 表示与势函数 $-t\log\|Df\|$ 相关的拓扑压力。对于区间映射，Pollicott 和 Weiss [PW99], ，以及后来 Kesseb¨ohmer 和 Stratmann [KS07]„ 将这一结果推广到了高斯映射 G。由于该映射与实数的连分数展开密切相关，因此得到了广泛研究。

高斯映射 $G:(0,1]\to[0,1]$ 定义为

$$G(x)=\frac{1}{x}-\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor,$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示整数部分。每个无理数 $x\in(0,1)$ 都有唯一的连分数展开，形式为

$$x=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}=[a_1,a_2,a_3,\ldots], \tag{1.3}$$

其中每个 a_i 都是正整数，且 $a_i=\left\lfloor\frac{1}{G^{i-1}x}\right\rfloor$。$x$ 的第 n 个有理逼近为

$$\frac{P_n}{Q_n}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots+\frac{1}{a_n}}}}}=[a_1,a_2,\ldots,a_n].$$

李雅普诺夫指数的定义可自然地推广到高斯映射。对于 $x\in(0,1]$，我们定义 $\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|(G^n)'(x)|$，只要此极限存在。此外， $\lambda(x)$ 可写为（见 [PW99，第 160] 页）

$$\lambda(x)=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{P_n}{Q_n}\right|. \tag{1.4}$$

由方程 (1.4)， $\lambda(x)$ 量化了有理逼近 P_n/Q_n收敛到 x的指数速率，从而将李雅普诺夫指数与经典丢番图逼近理论联系起来。对于 Lebesgue 几乎处处的 $x\in(0,1)$，有 $\lambda(x)=\frac{\pi^2}{6\log 2}$，因为 $\lambda(x)$ 是伯克霍夫平均的逐点极限。高斯映射的李雅普诺夫谱定义域 L 为 $\left(2\log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),\infty\right)$。由于 $(0,1)\setminus\mathbb{Q}$ 是非紧空间，这与 Weiss 所考虑的情形有所不同。尽管如此， L 是实解析函数，并且对于该定义域中的每个 α，都存在一个支撑在 J_α上的唯一遍历测度。

本文将李雅普诺夫谱及其丢番图含义的研究扩展到 $p\mathbb{Z}_p$上的施耐德映射。

令 p 为一个素数，并令 v_p 表示 $\mathbb{Q}$上的 p-进赋值，其定义为：对每个 $x\in\mathbb{Q}$，存在唯一的整数 $v_p(x)$，使得 $x=p^{v_p(x)}\frac{m}{n}$，且 $(p,mn)=1$。 $\mathbb{Q}$ 上的 p-进绝对值定义为 $|0|_p=0$,一并且当 $x\neq0$时，$|x|_p=p^{-v_p(x)}$。 $\mathbb{Q}_p$ 域中的p-进数，是相对于该范数对 $\mathbb{Q}$ 进行完备化所得。所有满足 $|x|_p\le1$ 的元素 $x\in\mathbb{Q}_p$构成的集合记为 $\mathbb{Z}_p$，其子集 $p\mathbb{Z}_p$ 由满足 $|x|_p<1$的元素组成。具体而言， $\mathbb{Q}_p$ 中的任意元素都可以表示为 $\sum_{n\ge n_0}c_np^n$，其中 n_0 是一个仅依赖于 x 和$c_n\in\{0,1,\ldots,p-1\}$的整数。 $\mathbb{Z}_p$中的元素 x可以写成 $\sum_{n\ge0}c_np^n$。因此， $p\mathbb{Z}_p$由 $\mathbb{Z}_p$ 中满足 $c_0=0.$ 的所有元素组成。由于 $\mathbb{Q}_p$ 是局部紧的，存在一个哈尔测度 μ_p，其归一化方式为 $\mu_p(p\mathbb{Z}_p)=1$。关于哈尔测度的详细介绍可见 [Fol16]。

施耐德映射 $T_p\colon p\mathbb{Z}_p \to p\mathbb{Z}_p$ 定义为 $T_p(0)=0$，而对于 $x\neq 0$

$$T_p(x)=\frac{p^{a_1(x)}}{x}-b_1(x),$$

其中 $a_1(x)=v_p(x)$，且 $b_1(x)\in\{1,2,\dots,p-1\}$ 由同余关系 $b_1(x)\equiv p^{a_1(x)}/x \pmod p$ 唯一确定。在一个可数集之外，$p\mathbb{Z}_p$ 中的每个元素都具有类似于（1.3）的连分数展开。更确切地说，对于 $x\in p\mathbb{Z}_p\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}}T_p^{-k}(0)$ 以及每个 $n\in\mathbb{N}$，可以写成

$$x=\cfrac{p^{a_1(x)}}{b_1(x)+\cfrac{p^{a_2(x)}}{b_2(x)+\cfrac{p^{a_3(x)}}{\ddots+\cfrac{p^{a_n(x)}}{b_n(x)+T_p^n(x)}}}}. \tag{1.5}$$

其中 $a_i(x)=a_1(T_p^{i-1}x)$，且 $b_i(x)=b_1(T_p^{i-1}x)$。注意，当且仅当存在某个 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $T_p^n(x)=0$ 时，点 $x\in p\mathbb{Z}_p$ 具有有限连分数展开。我们将 $p\mathbb{Z}_p$ 中具有有限连分数展开的点的集合记为 F。根据前面的讨论，$F=\bigcup_{k=0}^{\infty}T_p^{-k}(0)$。这种情况类似于经典高斯映射，其中具有有限连分数展开的点为 $\bigcup_{n=0}^{\infty}G^{-n}(0)=\mathbb{Q}$。相比之下，如果 x 是一个具有无限施奈德连分数展开的有理数，则存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $n\geq N$，都有 $a_n(x)=1$ 且 $b_n(x)=p-1$（见 [HW11，定理 1]）。施耐德映射关于 μ_p 上的哈尔测度 $p\mathbb{Z}_p$（见 [HW11，引理 2]）是遍历的，其测度论熵为 $\frac{p}{p-1}\log p$（见 [HN22]）。

——

从分形几何的角度出发，Hu、Yu 和 Zhao（[HYZ18]）研究了由连分数展开中各位数字的渐近算术平均所确定的多重分形分解。最近，Song、Wu、Yu 和 Zeng [SWYZ25]研究了相关水平集的豪斯多夫维数。我们沿着这一研究方向，考察由与施耐德映射相关的有理逼近所诱导的分形分解。

对于每一对整数 $a\geq 1$ 和 $1\leq b\leq p-1$，我们定义柱集

$$I_{(a,b)}:=\{x\in p\mathbb{Z}_p : a_1(x)=a \text{ and } b_1(x)=b\},$$

并引入位势函数

$$\psi(x)=\frac{1}{\left|I_{(a_1(x),b_1(x))}\right|_p}=p^{a_1(x)}.$$

正如下文所示，该势函数所起的作用类似于经典情形中的 $\log\|Df\|$，因为 $\log\psi(x)$ 衡量了 T_p 的局部膨胀率。

对于 $x\in p\mathbb{Z}_p\setminus F$，我们将李雅普诺夫指数定义为

$$\lambda_p(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n\log\psi(x),$$

只要该极限存在，其中 $S_n\log\psi=\sum_{k=0}^{n-1}\log\psi\circ T_p^k$ 表示相对于 T_p 的 $\log\psi$ 的第 n 个比尔霍夫和。由此可得

$$\lambda_p(x)=\lim_{n\to\infty}\log p\cdot\frac{a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)}{n}, \tag{1.6}$$

因此，除一个乘法常数外，李雅普诺夫指数与连分数展开中各位数字的渐近算术平均相同。相应的水平集为

$$J_p(\alpha)=\{x\in p\mathbb{Z}_p\setminus F : \lambda_p(x)=\alpha\},$$

李雅普诺夫谱定义为

$$L_p(\alpha) = \dim_{\mathrm{H}} J_p(\alpha),$$

其中，$\dim_{\mathrm{H}}$ 表示相对于 p进赋范的豪斯多夫维数。对于高斯映射，李雅普诺夫谱可通过几何势 $-t\log|G'|$的拓扑压力计算，从而利用中值定理估算柱集的直径。然而，由于高斯映射作用于一个非紧空间，这一情形下的热力学形式主义需要额外的假设，例如大像性质以及势函数的 H¨older 连续性。我们在为T_p 建立热力学形式主义时面临的主要困难源于两个事实。首先， $p\mathbb{Z}_p$ 中具有无限连分数展开的点集是非紧的。其次， $p\mathbb{Z}_p$ 上的连续函数通常不满足中值定理。这些考量促使我们定义李雅普诺夫指数 λ_p，它直接刻画柱集的直径，并将其与豪斯多夫维数联系起来。

我们的主要定理将 Weiss [Wei99]和 Pollicott-Weiss[PW99] 的结果推广到了 p-进情形（另见 [Iom10, KMS12, AH24]）。

定理1.1。李雅普诺夫谱 L_p 在 $[\log(p)\ \infty)$上实解析。对于每个 $\alpha \geq \log p$

$$L_p(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\inf\left\{P(-t\log\psi) + t\alpha : t > 0\right\}, \tag{1.7}$$

其中 $P(-t\log\psi)$ 是 $-t\log\psi$ 关于 T_p的拓扑压力。下确界在唯一的 $t_\alpha > 0$ 处取得，使得 $\frac{d}{dt}P(-t\log\psi)|_{t=t_\alpha} = -\alpha$。此外，存在唯一的平衡态 μ_{t_α} 对应于 $-t_\alpha\log\psi$，使得 $\mu_{t_\alpha}(J_p(\alpha)) = 1$。

定理 1.2。对于每个 $\alpha \geq \log p$,

$$L_p(\alpha) = \frac{\log(p-1) + \log(\alpha - \log p) - \log\log p + \alpha\log_p\alpha - \alpha\log_p(\alpha - \log p)}{\alpha}. \tag{1.8}$$

这个关于李雅普诺夫谱的显式公式十分引人注目。此类封闭表达式鲜少出现在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射迭代函数系统之外。

最后，我们强调一些算术推论。令 $\widehat{\alpha} = \alpha/\log p$，我们重新得到并改进了关于数字均值的已有结果（见 [HYZ18, 定理 2.2]）：满足条件——数字 $\{a_1(x)\ a_2(x)\ \ldots\}$ 的渐近均值为 $\widehat{\alpha}$ ——的点 x 所构成的集合，其豪斯多夫维数为

$$\frac{\widehat{\alpha}\log\widehat{\alpha} - (\widehat{\alpha}-1)\log(\widehat{\alpha}-1) + \log(p-1)}{\widehat{\alpha}\log p}.$$

我们还精确建立了李雅普诺夫指数与施奈德连分数所产生的有理逼近的收敛速度之间的关系，从而得到高斯映射经典丢番图结果的 p-进类比。这

$$\lambda_p(x) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|_p,$$

其中

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = \cfrac{p^{a_1(x)}}{b_1(x) + \cfrac{p^{a_2(x)}}{b_2(x) + \cfrac{p^{a_3(x)}}{b_3(x) + \cdots\cfrac{p^{a_n(x)}}{b_n(x)}}}}.$$

由此，我们得到以下推论。

推论 1.3。 对于每个 $\alpha \geq$ 对数 p，集合

$$\left\{ x \in p\mathbb{Z}_p \setminus F : -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right|_p = \alpha \right\}$$

具有豪斯多夫维数

$$\frac{\log(p-1) + \log(\alpha - \log p) - \log\log p + \alpha \log_p \alpha - \log_p(\alpha - \log p)}{\alpha}.$$

我们主要定理的证明结合了若干关键要素。首先，我们通过分析数字有界点所在的截断子系统，采用一种紧致逼近方案。其次，我们运用热力学形式主义，证明相关几何势函数族的平衡态存在且唯一。最后，我们利用吉布斯测度和多重分形分析，通过逐点维数和勒让德变换推导维数公式，并将结果推广到整个系统。

本文概述。第 2 节汇集了符号动力系统、施耐德映射和热力学形式主义的预备知识。第 3 节研究 $(T_p,\ p\mathbb{Z}_p)$ 的紧致逼近，并推导这些子系统的多重分形谱。第 4 节专门讨论施耐德映射的热力学形式主义，并在此确立本文的主要结果。第 5 节将几何势与有理逼近联系起来，并证明推论 1.3。最后，为了使论述清晰聚焦，我们将技术引理放在第 6 节。

2. Preliminaries

我们简要回顾豪斯多夫维数的定义。更多细节请参见 [Fal14，第 2 节2]。设 Q 是 $p\mathbb{Z}_p$ 的一个子集，且设 $s \geq 0$ 和 $\delta > 0$。我们定义

$$\mathcal{H}^s_\delta(Q) := \inf \left\{ \sum_i |U_i|_p^s : \begin{array}{c} \{U_i\} \text{ is a countable cover of } Q \text{ such that for every } i \\ |U_i|_p < \delta. \end{array} \right\},$$

其中，$|U_i|_p$ 表示相对于 p-进度量，U_i 的直径。接着，我们将 $\mathcal{H}^s(Q) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(Q)$ 定义为 Q 的豪斯多夫维数：

$$\dim_{\mathrm{H}}(Q) := \inf\{s : \mathcal{H}^s(Q) = 0\}. \tag{2.1}$$

现在我们定义与映射 T_p相关的符号框架。设 $E = \mathbb{N} \times \{1, ..., p-1\}$和 $\Sigma = E^{\mathbb{N}}$。我们考虑 (Σ, σ)，即 Σ上的全移位，其中 $\sigma((a_i, b_i)_{i=1}^\infty) = (a_{i+1}, b_{i+1})_{i=1}^\infty$。这是标准的可数符号全移位。 Σ 上的拓扑由形如 $[(a, b)] = \{(a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}}$的柱集生成： $a_1 = a$ 且 $b_1 = b\}$，其中 $(a, b) \in E$。对于有限序列$\{(a_0, b_0)$ ..., $(a_1, b_1)\}$，我们定义柱集

$$[(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)] = \bigcap_{k=0}^{n-1} \sigma^{-k}[(a_{k+1}, b_{k+1})].$$

对于每个 $(a,\ b) \in E$，令 $I_{(a,b)}$ 表示满足 $a_1(x) = a$ 且 $b_1(x) = b$ 的点集 $x \in p\mathbb{Z}_p$。类似地，

$$I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n} = \bigcap_{k=0}^{n-1} T_p^{-k} \left(I_{(a_{k+1},b_{k+1})} \right).$$

注意，对于任意 x， $y \in I_{(a,b)}$，我们有

$$|T_p(x) - T_p(y)|_p = \left| p^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right|_p = p^{-a} \frac{|y-x|_p}{|xy|_p}. \tag{2.2}$$

由于 $|x|_p = |y|_p = p^{-a}$，可得 $|T_p(x) - T_p(y)|_p = p^a |x-y|_p$。因此，施耐德映射是局部扩张的，在每个柱集 $I_{(a,b)}$ 上的扩张因子为 p^a。由此，可数划分 $\{I_{(a,b)}\}_{(a,b)\in E}$ 生成了 $p\mathbb{Z}_p \setminus F$ 上的拓扑。定义映射 $\pi\colon \Sigma \to p\mathbb{Z}_p \setminus F$，其定义如下:

$$(a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \bigcap_{i=0}^{\infty} T_p^{-i} \left(I_{(a_{i+1}, b_{i+1})} \right).$$

由于 $\pi([a,b]) = I_{(a,b)}$，且每个 $I_{(a,b)}$ 在 p-进拓扑下既开又闭， π 定义了 Σ 与 $p\mathbb{Z}_p \setminus F$之间的同胚。特别地，$(\Sigma, \sigma)$ 与 $(p\mathbb{Z}_p \setminus F, T_p)$ 在拓扑上共轭（[Wal00]）。此后，对于实值函数 $f\colon p\mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ 和 $g\colon \Sigma \to \mathbb{R}$，我们分别用 $S_n f(x)$ 和 $S_n g(x)$ 表示比尔霍夫和 $\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T_p^k(x)$ 与 $\sum_{k=0}^{n-1} g \circ \sigma^k(x)$。

函数 $\rho\colon p\mathbb{Z}_p \setminus F \to \mathbb{R}$ 被称为具有指数 $0 < \alpha \leq 1$ 的*H¨older* 连续函数，如果存在常数 $C > 0$，使得对所有 x， $y \in p\mathbb{Z}_p$,

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq C|x-y|_p^{\alpha}.$$

对于任意 $n \geq 1$，我们将 ρ 在长度为 n 的柱集上的变差定义为

$$\mathrm{Var}_n(\rho) := \sup\{|\rho(x) - \rho(y)| : a_i(x) = a_i(y) \text{ and } b_i(x) = b_i(y) \text{ for } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

If $\rho\colon p\mathbb{Z}_p \setminus F \to \mathbb{R}$ 是 H¨连续的， ρ 的拓扑压力定义为

$$P(\rho) := \sup \left\{ h_\mu + \int \rho \, d\mu : \mu \in \mathcal{M}(p\mathbb{Z}_p \setminus F, T_p), -\int \rho \, d\mu < \infty \right\}, \tag{2.3}$$

其中， h_μ 表示 μ的测度论熵， $\mathcal{M}(p\mathbb{Z}_p \setminus F, T_p)$ 表示 T_p-不变概率测度的集合。达到上确界的任意测度都称为 ρ的平衡态。如果 $\sum_{k\geq 1} \mathrm{Var}_k(\rho) < \infty$，那么 $P(\rho)$ 可利用周期点（[BS03，推论 1]）计算得到

$$P(\rho) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{T_p^n x = x} e^{-S_n \rho(x)} \right). \tag{2.4}$$

3. Restricting the Schneider map to bounded valuations

将 Schneider 映射限制在点集 $x \in p\mathbb{Z}_p$ 上，其中数字 $a_i(x)$ 被一个固定整数 $n \geq 1$所界定。我们将此子集记为 $p\mathbb{Z}_{p,\ n}$，并将 T_p 限制在 $p\mathbb{Z}_{p,\ n}$上的映射写作 $T_{p,\ n}$。令 $E_n = \{1, ..., n\} \times \{1, ..., p-1\}$ 和 $\Sigma_n = E_n^{\mathbb{N}}$。类似于（$T_p$， $p\mathbb{Z}_p$），子系统（$T_{p,\ n}$， $p\mathbb{Z}_{p,\ n}$）通过映射与全移位（Σ_n， σ）拓扑共轭

$$\pi_n : \Sigma_n \longrightarrow p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$$
$$(a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}} \longmapsto \bigcap_{i=0}^{\infty} T_{p,n}^{-i} \left(I_{(a_{i+1}, b_{i+1})} \right).$$

为简便起见，无论是在 Σ_n 还是在 $p\mathbb{Z}_{p\text{上},\ n} \setminus F$计算，我们都用 P_n 表示拓扑压力。对于 H¨ölder 连续势函数， P_n 可以像式 (2.4) 那样利用周期点计算。我们对定理1.1的证明遵循 [Iom10 定理 4.1] 和 [AH24 定理 5.1]的思路。为此，我们首先针对 $T_{p\text{上的}n}$李雅普诺夫谱建立一个类似的结果。事实上，我们对这些动力系统得到了完整的多重分形描述，概述于下文的定理 3.2 中。

设 ν 是任意一个 T_p 上n-不变测度。对于 $x \in p\mathbb{Z}_{p,\ n}$，$\nu$ 在 x 处的上和下点态维数定义为

$$\overline{d}_\nu(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \nu(B(x,r))}{\log r}, \text{ and } \underline{d}_\nu(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \nu(B(x,r))}{\log r}.$$

如果这两个极限相同，则将其共同值记为 $d_\nu(x)$，并称为 x 处 ν 的点态维数。它刻画了测度 ν 在不同尺度下的分布情况（参见 [Fal14，第 17] 章和 [PW97b]）。若 $d_\nu(x)$ 存在，且在 $p\mathbb{Z}_{p,n}$ 上几乎处处相对于 ν 为常数，则称测度 ν 为精确维数测度。精确维数测度通过由水平集给出的分形分解描述精细尺度几何（参见 [PW97b]）

$$K_\alpha = \{x \in p\mathbb{Z}_{p,n} : d_\nu(x) = \alpha\}.$$

相应的维数谱定义为

$$f_\nu(\alpha) = \dim_{\mathrm{H}}(K_\alpha). \tag{3.1}$$

设 K_∞ 表示点态维数不存在的点集。则

$$p\mathbb{Z}_{p,n} = K_\infty \cup \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} K_\alpha.$$

给定定义在 (Σ_n, σ) 上的 Hölder 连续函数 ζ。称 μ 是 Σ_n 上的一个 σ-不变概率测度，且为 ζ 的吉布斯测度，如果存在常数 $C \geq 1$，使得对所有 $m \in \mathbb{N}$、$w \in E_n^m$ 以及所有 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [w]$

$$C^{-1} \leq \frac{\mu([w])}{\exp\left(S_m\zeta(x_i) - mP_n(\zeta)\right)} \leq C.$$

μ_ζ 是 ζ 的唯一平衡态（关于μ_ζ的存在性和唯一性，见 [PU10] ）。

现在令 ρ： $p\mathbb{Z}_p \setminus F \to \mathbb{R}$ 为 H¨older 连续函数，并定义 $\zeta = \rho \circ \pi_n$。令$\nu_\rho = (\pi_n)_*\mu_\zeta$ 为μ_ζ的推前测度。于是，ζ 在 Σ_n上是 H¨older 连续的，μ_ζ 是 ζ的吉布斯测度，因此ν_ρ 是 ρ的平衡态。在 Σ_n 上定义 H¨older 连续函数 ϑ 为 $\log\vartheta = \zeta - P_n(\zeta)$。根据构造，$P_n(\log\vartheta) = 0$，且$\mu_\zeta$ 也是 $\log\vartheta$的平衡态。此外，对于所有 $q \in \mathbb{R}$ [PU10，第 5 节6]，映射 $q \mapsto P_n(q\log\vartheta)$均可微且严格凸。热力学形式主义中的一个经典结果是，对于每个 $q \in \mathbb{R}$，存在唯一的$\mathcal{T}(q) \in \mathbb{R}$，使得势函数

$$\phi_{q,n} = \mathcal{T}(q)\log(\psi\circ\pi_n) + q\log\vartheta,$$

满足 $P_n(\phi_{q,\ n}) = 0$。单参数族 $\{\phi_{q,n}\}_{q\in\mathbb{R}}$ 中的每个势函数都是 H¨lder 连续的，并且存在唯一的吉布斯测度 μ_q。

定理 3.2 表明，势函数 $\log\psi$ 在紧流形上的共形扩张映射理论中，与 $\log\|Df\|$ 发挥相同的作用（[PW97a，定理 1]）。尽管证明遵循相同的总体策略，但仍需进行若干技术性调整。首先，$\log\psi(x) = a_1(x)\log p$ 控制柱集的直径；对于所有 $x \in p\mathbb{Z}_{p,\ n}\setminus F$乘积 $\prod_{k=0}^n p^{-a_{1+k}(x)}$呈指数衰减。其次，以下鲍恩型公式给出了吸引子的豪斯多夫维数。引理 3.1 和定理 3.2 的完整证明见最后一节。

引理 3.1. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\mathcal{T}(0) = \text{维数}_{\mathrm{H}}\left(p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F\right)$，也就是说，

$$P_n\left(-\dim_{\mathrm{H}}\left(p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus F\right)\log\psi\right) = 0.$$

此外，维数$_{\mathrm{H}}$ $(p\mathbb{Z}_{p,\ n}\setminus F)$是满足下列条件的唯一正实数 $\tilde{s}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^{k\tilde{s}}} = \frac{1}{p-1}.$$

定理 3.2。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，以下结论成立：

(1) 该 测度 ν_ρ 是精确维数的。此外，对于 ν_ρ-几乎处处的 $x \in p\mathbb{Z}_{p,\ n} \setminus F$

$$d_{\nu_\rho}(x) = \frac{\int_{\Sigma_n} \log \vartheta \ d\mu_\zeta}{-\int_{\Sigma_n} \log(\psi \circ \pi_n) \ d\mu_\zeta}.$$

(2) 函数 $q \mapsto \mathcal{T}(q)$ 是实解析的， $\mathcal{T}(1) = 0$ 且 $\mathcal{T}''(0) \geq 0$。(3) 函数 $\alpha(q) := -\mathcal{T}'(q)$ 取值于 $[\log p、\ n \log p]$，且 ν_ρ 在$p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$中是全支撑的。此外，

$$f_{\nu_\rho}(\alpha(q)) = \mathcal{T}(q) + q\alpha(q).$$

(4) 对于任意 $q \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{T}(q) = -\lim_{r \to 0} \frac{\log \left(\inf_{\mathcal{V}} \sum_{B \in \mathcal{V}} \nu_\rho(B)^q\right)}{\log r},$$

其中，下确界取遍 $p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$ 的所有有限覆盖 $\mathcal{V}$，这些覆盖由半径为 r 的开球 B 构成。

现在我们重新陈述 Weiss 的一个结果，该结果将这一形式体系与 Lyapunov 指数联系起来；在我们的设定中，该结果可由相同的证明得到（见 [Wei99，定理 2.3]）。

定理 3.3。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及对于 ν_ρ-几乎处处的 $x \in p\mathbb{Z}_{p,\ n} \setminus F$ 我们有

$$d_{\nu_\rho}(x) = \frac{P_n(\rho) - \overline{\rho}(x)}{\lambda_p(x)} = \frac{h_{\nu_\rho} + \int \rho d\nu_\rho - \overline{\rho}(x)}{\lambda_p(x)},$$

其中 $\overline{\rho}(x) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \rho\left(T_{p,n}^k(x)\right)$。

由于 ρ 和 λ_p 都是ν_ρ-几乎处处为常数，这就得到所需的关系，类似于方程 (1.2)。令 $L_{p,\ n}$ 表示与 $(T_{p,\ n}, p\mathbb{Z}_{p,\ n} \setminus F)$ 相关联的李雅普诺夫谱，即 $L_{p,\ n}(\alpha) = \dim_{\mathrm{H}}(J_{p,\ n}(\alpha))$，其中 $J_{p,\ n}(\alpha) = \{x \in p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F : \lambda_p = \alpha\}$。

定理 3.4。对于每个 $\alpha \in [\log p,\ n\log p]$,

$$L_{p,n}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \inf_{t \in \mathbb{R}} \{P_n(-t \log \psi) + t\alpha\} = \frac{1}{\alpha} P_n(-t_\alpha \log \psi) + t_\alpha, \tag{3.2}$$

其中 t_α 是满足以下条件的唯一实数 t

$$-\alpha = \log p \cdot \left(\frac{n}{p^{tn} - 1} - \frac{p^t}{p^t - 1}\right). \tag{3.3}$$

此外，存在唯一的平衡态 ν_{t_α}，它对应于势函数 $-t_\alpha \log \psi$，并且支撑在 $\{x \in p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F : \ \lambda_p(x) = \alpha\}$ 上。

证明。方程 (3.2) 中的中间项已知是 P_n 的勒让德变换。对于每个 $t \in \mathbb{R}$，考虑 Hölder 连续势函数 $-t \log \psi(x)$，并令 $\nu_{t,n}$ 表示其唯一的平衡态。根据定理 3.3，对于 $\nu_{t,n}$-几乎处处的 $x \in p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$，有

$$\lambda_p(x) = \frac{P_n(-t \log \psi)}{d_{\nu_{t,n}}(x) - t}, \tag{3.4}$$

其中 $\overline{\rho}(x) = -\overline{t\log \psi}(x) = t\lambda_p(x)$。由于 $\nu_{t,\ n}$ 具有精确维数，因此 $\lambda_p(x)$ 几乎处处为常数（相对于 $\nu_{t,\ n}$）。此外， $\lambda_p(x) = -\frac{d}{dt} P_n(-t \log \psi)$（见 [PU10，第 5] 章）。因此，由于函数 $t \mapsto P_n(-t \log \psi)$ 严格凸，其导数是单射，而函数$L_{p,\ n}(\alpha)$ 由 $P_n(-t \log \psi)$ 的勒让德变换给出（见 [PW97a]）。这给出了方程（3.2）中的下确界。由于几何势函数 $-t \log \psi$ 的平衡态支撑李雅普诺夫指数的水平集

李雅普诺夫指数，因此定义域 λ_p 中的值 α 恰好对应于 $-\frac{d}{dt}P_n(-t\log\psi)$ 的值域。由于 $P_n(-t\log\psi)=\log(p-1)+\log\binom{p^{tn}-1}{p^{tn}\ p^t-1}$，我们得到

$$\frac{d}{dt}P_n(-t\log\psi)=\log p\cdot\left(\frac{n}{p^{tn}-1}-\frac{p^t}{p^t-1}\right).$$

该导数的值域决定了$L_{p,n}$的定义域，即 $[\log p,n\log p]$。由 $t\mapsto P_n(-t\log\psi)$的凸性可知，方程 (3.2) 中的下确界在 t_α处取得，其中 t_α是$\frac{d}{dt}P_n(-t\log\psi)|_{t=t_\alpha}=-\alpha$的唯一实数解。□

注 3.5. 注意到 $P_n(-t\log\psi)=\log(p-1)+\log\binom{p^{tn}-1}{p^{tn}\ p^t-1}$意味着拓扑熵 $h(T_{p,n})=\log(p-1)+\log n$，因为 $P(0)=h(T_{p,n})$。

例1. 我们来显式计算 t_α，其中 $n=2$. 令 $X=p^t$，且 $k=-\alpha\log p$。根据方程(3.3)，我们必须求解

$$k=\frac{2}{X^2-1}-\frac{X}{X-1},\tag{3.5}$$

化简后得到

$$(k+1)X^2+X-(k+2)=0.$$

Thus

$$X=\frac{-1\pm\sqrt{(2k+3)^2}}{2(k+1)}=\frac{-1\pm|2k+3|}{2(k+1)}.$$

方程 *(3.5)* 的唯一可行解是 $X=-\frac{k+2}{k+1}$，于是 $p^{t_\alpha}=-\frac{k+2}{k+1}$。注意，当$\alpha=-\frac{3}{2}\log p$时，方程 *(3.5)* 无解；但由于 $\frac{d}{dt}P(-t\log\psi)|_{t=0}=-\frac{3}{2}\log p$，由 $\frac{d}{dt}P_2(-t\log\psi)$的单射性可得$t_{\frac{3}{2}\log p}=0$。利用 $P_2(-t\log\psi)=\log(p-1)+\log\binom{p^{2t}-1}{p^{2t}\ p^t-1}$，并代入 $k=-\alpha\log p$，得到

$$\begin{aligned}P_2(-t_\alpha\log\psi)&=\log(p-1)+\log\left(\frac{-k-1}{(k+2)^2}\right)\\&=\log(p-1)+\log\log p+\log(\alpha-\log p)-2\log(2\log p-\alpha).\end{aligned}$$

由直接计算可知，定理 *3.4* 意味着

$$L_{p,2}(\alpha)=\frac{\log(p-1)+\log\log p}{\alpha}+\log(\alpha-\log(p))\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\log p}\right)+\log(2\log p-\alpha)\left(\frac{1}{\log p}-\frac{2}{\alpha}\right),$$

并且 $L_{p,2}(\frac{3}{2}\log p)=\frac{2}{3}\left(\log(p-1)+\log\log p\right)$。由此可估计得 $L_{p,2}(\log p)=\log(p-1)\log p$，且$L_{p,2}(2\log p)=\log(p-1)\,2\log p$。$L_{p,2}$ 的最大值（见引理 *3.1*）是唯一满足$p^{2s}=(p-1)p^s+(p-1)$的实数 s，其值为

$$\dim_{\mathrm{H}}(p\mathbb{Z}_{p,2})=\log_p\left(\frac{p-1+\sqrt{p^2+2p-3}}{2}\right).$$

根据定理 *3.4*，该值在以下位置取到

$$\alpha=\log p\cdot\left(\frac{p-1+\sqrt{D}}{p-3+\sqrt{D}}-\frac{2}{D+(p-1)\sqrt{D}}\right),$$

其中 $D=p^2+2p-3$。

注记 3.6。与定理 1.2 不同，要在定理 3.4 中得到 Lyapunov 谱 $L_{p,\ n}$ 的显式表达式，必须求出以下方程的正根

$$X^n(K+1)+X^{n-1}+\cdots+X+K-n=0,$$

其中 $K=\frac{-\alpha}{\log p}$。类似地，由引理 3.1 可知，豪斯多夫维数 $\dim_{\mathrm{H}}(p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus F)$ 是下式的正根：

$$X^{n+1}+pX^n+p-1=0.$$

此外，对于显式值 $\alpha=\frac{n+1}{2}\log\ p$，我们有 $t_\alpha=0$，因为 $\frac{d}{dt}P_n(-t\log\ \psi)|_{t=0}=-\frac{n+1}{2}\log\ p$。因此，

$$L_{p,n}\left(\frac{n+1}{2}\log p\right)=\frac{2}{n+1}\left(\frac{\log(p-1)+\log n}{\log p}\right).$$

4. Proof of main theorems

本节首先构建与施耐德映射相关的热力学形式主义。回顾一下，$\log\psi$ 在长度为 1 的柱集上是局部常值的。因此，由方程 (2.4) 可得

$$P\left(-t\log\psi\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{(a_i,b_i)_{i=1}^n\in E^n}\prod_{k=1}^n(p^{a_k})^{-t}\right)=\log\left(\frac{p-1}{p^t-1}\right). \tag{4.1}$$

根据 Sarig 关于可数马尔可夫移位的结果（见 [Sar99]），当 $n\to\infty$ 时，$P_n(-t\log\ \psi)\to P(-t\log\ \psi)$。回顾 $\lim_{t\to0^+}P(t)=\infty$，则对于每个 $\alpha>\log\ p$，当 $n\in\mathbb{N}$ 足够大时，存在唯一的 $t_{\alpha,n}\in\mathbb{R}$，使得 $-\alpha=\frac{d}{dt}P_n(-t_{\alpha,n}\log\ \psi)$。令 $\nu_{\alpha,n}$ 表示 $-t_{\alpha,n}\log\psi$ 的平衡态。

设 $\varepsilon>0$。则

$$\alpha=\int_{p\mathbb{Z}_{p,n}}\log\psi\ d\nu_{\alpha,n}=\int_{p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus B(0,\varepsilon)}\log\psi\ d\nu_{\alpha,n}+\int_{B(0,\varepsilon)}\log\psi\ d\nu_{\alpha,n}.$$

定义 $M_\varepsilon:=\inf\{\log\ \psi(x):\ x\in B(0,\varepsilon)\}$。由于 $a_1(x)\le n$ 对 $x\in p\mathbb{Z}_{p,n}$ 成立，我们有 $M_\varepsilon\le n\log(p)$。因此

$$\alpha\ge\int_{p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus B(0,\varepsilon)}\log\psi\ d\nu_{\alpha,n}+M_\varepsilon\cdot\nu_{\alpha,n}(B(0,\varepsilon)),$$

这意味着

$$\frac{\alpha}{M_\varepsilon}\ge\nu_{\alpha,n}(B(0,\varepsilon)).$$

因此，对于每个 $\delta>0$，当 n 充分大时，存在 $\varepsilon(\delta)>0$ 使得

$$\nu_{\alpha,n}\left(p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus B(0,\varepsilon)\right)=1-\nu_{\alpha,n}(B(0,\varepsilon))\ge1-\frac{\alpha}{M_\varepsilon}\ge1-\frac{\alpha}{n\log(p)}\ge\delta.$$

换言之，$\{\nu_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个概率测度的紧序列。根据普罗霍罗夫定理，它存在一个弱-* 收敛子列。若 ν_α 是一个聚点，则 $\nu_\alpha(p\mathbb{Z}_p\setminus F)=1$。事实上，$\{t_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 也存在一个收敛子列，因为 $\{\frac{d}{dt}P_n(-t\log\ \psi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个递减的函数序列，并且对所有 n，$\frac{d}{dt}P_n(-\overline{t}\log\ \psi)\ge\frac{d}{dt}P(-t\log\ \psi)$。若 t_α 是 $\{t_{\alpha,n}\}$的一个聚点，则 ν_α 是势函数 $-t_\alpha\log\overline{\psi}$ 的平衡态（见 [Iom10，第6]节）。结合方程 (2.4) 与可数马尔可夫移位的热力学形式主义（见[Sar99]），我们得到以下结果。

定理 4.1. 对于所有 $t \in \mathbb{R}$

$$P(-t\log\psi) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{p-1}{p^t-1}\right) & \text{if } t > 0 \\ \infty & \text{if } t \le 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

并且，对每个 $t>0$，都存在唯一的 $-t$对数 ψ平衡态 ν_t。若 $\alpha = -\frac{d}{dt}P(-t\text{对数 }\psi)|_{t=t_\alpha}$，则 ν_{t_α} 是序列 $\{\nu_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$的一个弱-* 聚点。

注 4.2. 在此情形下，当 $t=1$时，–log ψ 的平衡态与哈尔测度重合。事实上，$P(-\log\psi)=0$，且 μ_p 在方程 (2.3) 中达到上确界，因为

$$h_{\mu_p} - \int \log\psi \, d\mu_p = \frac{p}{p-1}\log p - \frac{p}{p-1}\log p = 0, \tag{4.3}$$

其中 $h_{\mu_p} = \frac{p}{p-1}\log p$ ([HW11，定理1.1])，且 $\int \log\psi \, d\mu_p = \frac{p}{p-1}\log p$ ([HW11，定理 3])。此外，L_p在 $\alpha = \frac{p}{\text{对数}}{}_{p-1}{}^{p}$ 处达到其最大值 $\dim_{\mathrm{H}}(p\mathbb{Z}_p \setminus F) = 1$。

定理*1.1*的证明。 根据定理 3.4，对每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha \in [\log p,\ n\log p]$

$$L_{p,n}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\inf\{P_n(-t\log\psi) + t\alpha\}. \tag{4.4}$$

由于对每个 $n\ge 1$，$p\mathbb{Z}_{p,\ n} \setminus F \subset p\mathbb{Z}_{p,\ n+1} \setminus F$，因此序列 $\{L_{p,n}(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递增，且以上界为 $p\mathbb{Z}_p$的豪斯多夫维数，而该维数等于一。由方程 (4.4)，对于每个 $\alpha \ge \log p$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha}\inf_{t\in\mathbb{R}}\{P_n(-t\log\psi)+t\alpha\} \le L_p(\alpha), \tag{4.5}$$

因为对所有 $n\in\mathbb{N}$，$J_{p,\ n}(\alpha) \subset J_p(\alpha)$。为了证明 P 的勒让德变换有上界 $L_p(\alpha)$，我们采用下确界收敛的概念。我们称序列 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 下确界收敛到 P，如果对于每个 $t\in\mathbb{R}$

$$\lim_{\beta\to 0}\liminf_{n\to\infty}\inf\{P_n(-s\log\psi) : |t-s|<\beta\} = \lim_{\beta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\inf\{P_n(-s\log\psi) : |t-s|<\beta\} = P(-t\log\psi). \tag{4.6}$$

回顾一下，映射 $t\mapsto P_n(-t\log\psi)$ 是单调不增的。因此，对于任意 $\beta>0$,

$$\inf\{P_n(-s\log\psi) : |t-s|<\beta\} = P(t+\beta).$$

另一方面，由 [Sar99 定理 2], ，对于所有 $t\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(-t\log\psi) = P(-t\log\psi). \tag{4.7}$$

我们得到，方程 (4.5) 中的 $\limsup_{n\to\infty}$ 和 $\liminf_{n\to\infty}$ 对每个 $\beta>0$ 都相同。因此，$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 下确界收敛到 P。

根据 Wijsman 关于下确界收敛的研究（见 [Wij66, 定理 6.2]），$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 到 P 的下确界收敛等价于它们的勒让德变换下确界收敛。特别地，函数序列 $\{\frac{1}{\alpha}\inf_{t\in\mathbb{R}}\{P_n(-t\log\psi) + t\alpha\}\}_{n\in\mathbb{N}}$作为定义在 α 上的函数，下确界收敛到 $\frac{1}{\alpha}\inf_{t\in\mathbb{R}}\{P(-t\log\psi)+t\alpha\}$。此外，逐点收敛所得的函数支配下确界收敛所得的函数（见 [Wij66, 第 5]节）。这意味着

$$\frac{1}{\alpha}\inf_{t\in\mathbb{R}}\{P(-t\log\psi)+t\alpha\} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha}\inf_{t\in\mathbb{R}}\{P_n(-t\log\psi)+t\alpha\}.$$

结合不等式 (4.5)，我们得到

$$\frac{1}{\alpha}\inf_{t\in\mathbb{R}}\{P(-t\log\psi)+t\alpha\} \le L_p(\alpha). \tag{4.8}$$

现在我们证明反向不等式。固定 $t>0$ 和 $\varepsilon>0$。由于函数 $t\mapsto P(-t\log\psi)$ 在 $[0,\infty)$ 上严格递减，根据拓扑压力的定义，我们得到

$$P_\varepsilon := P(-(t+\varepsilon)\log\psi) - P(-t\log\psi) = P(-(t+\varepsilon)\log\psi) - P(-t\log\psi) < 0.$$

方程 (2.4) 蕴含存在 $M\in\mathbb{N}$，使得对所有 $k\geq M$

$$\sum_{x:T_p^k x=x} e^{-(t+\varepsilon)S_k\log\psi - kP(-t\log\psi)} < e^{\frac{P_\varepsilon k}{2}} < 1.$$

令 $\delta>0$，使得 $\frac{P_\varepsilon}{2} = \delta^{P(-t\log\psi)}{\alpha} < 0$。另一方面，对于每个 $y\in J_p(\alpha)$，存在$N_y\in\mathbb{N}$，使得对所有 $k\geq N_y$

$$\left|\frac{S_k\log\psi}{k} - \alpha\right| < \delta.$$

利用这一事实，我们为每个 $k\in\mathbb{N}$ 构造一个柱集的可数覆盖，其直径至多为 p^{-k}。注意，每个区间 $I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}$ 都满足

$$N[(a_i,b_i)_{i=1}^n] := \min\{N_y : y\in J_p(\alpha)\cap I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}\} < \infty.$$

我们定义

$$\overline{A_k} := \{I_{(a_i,b_i)_{i=1}^k} : N[(a_i,b_i)_{i=1}^n]\leq k\},$$

并且对每个 $n>k$，我们令

$$A_n := \{I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n} : N[(a_i,b_i)_{i=1}^n] = n\}.$$

令 $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k\cup\bigcup_{n>k}A_n$。集合 $\mathcal{A}_k$ 是 $J_p(\alpha)$ 的一个可数覆盖，因为每个 A_n 都是柱集的可数集。另一方面，回忆一下，T_p 是距离扩张的，因此对于任意柱集$I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}\in\mathcal{A}_k$，我们有$|I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}|_p\leq p^{-n}$。

回想一下，对于所有 $y\in I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}$，都有$|I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}|_p = e^{-S_n\log\psi(y)}$。因此，根据豪斯多夫维数的定义，对于 $l = t+\varepsilon+{P(-t\log\psi)}{\alpha}$，我们得到

$$\mathcal{H}^l_{p^{-k}}(J_p(\alpha)) \leq \sum_{I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}\in\mathcal{A}_k} e^{-lS_n\log\psi(x_{(a_i,b_i)})},$$

其中 $x_{(a_i,b_i)}$ 是 $I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}$ 的周期点，周期为 n。由于 $N[I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}]\leq n$,

$$\begin{aligned}-lS_n\log\psi(x_{(a_i,b_i)}) &= -\left(t+\varepsilon+\frac{P(-t\log\psi)}{\alpha}\right)S_n\log\psi(x_{(a_i,b_i)})\\ &\leq -(t+\varepsilon)S_n\log\psi(x_{(a_i,b_i)})) - n\frac{P(-t\log\psi)}{\alpha}(\delta-\alpha).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^l_{p^{-k}}(J_p(\alpha)) &\leq \sum_{I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}\in\mathcal{A}_k} e^{-(t+\varepsilon)S_n\log\psi(x_{(a_i,b_i)})-n\frac{P(-t\log\psi)}{\alpha}(\delta-\alpha)}\\ &= \sum_{n=k}^\infty e^{-\frac{n\delta P(-t\log\psi)}{\alpha}}\sum_{I_{(a_i,b_i)_{i=1}^n}\in\mathcal{A}_k} e^{-(t+\varepsilon)S_n\log\psi(x_{(a_i,b_i)}))+nP(-t\log\psi)}\\ &= \sum_{n=k}^\infty e^{-\frac{n\delta P(-t\log\psi)}{\alpha}}\sum_{x:T_p^n x=x} e^{-(t+\varepsilon)S_n\log\psi(x)+nP(-t\log\psi)}.\end{aligned}$$

因此，对于所有 $k \geq M$，我们都有

$$\mathcal{H}^l_{p^{-k}}(J_p(\alpha)) \leq \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\frac{n\delta P(-t\log\psi)}{\alpha}+\frac{P_\varepsilon n}{2}} = \sum_{n=k}^{\infty} e^{n(\frac{P_\varepsilon}{2}-\frac{\delta P(-t\log\psi)}{\alpha})}. \tag{4.9}$$

由于 $\frac{P_\varepsilon}{2} - \frac{\delta P_{(-t\log(\psi))}}{\alpha} < 0$，不等式（4.9）右端构成一个几何级数。因此，

$$\mathcal{H}^l(J_p(\alpha)) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^l_{p^{-k}}(J_p(\alpha)) = 0.$$

这意味着，对于所有 $t > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，$\dim_{\mathrm{H}}(J_p(\alpha)) = L_p(\alpha) \leq t + \varepsilon + P_{(-t\log(\psi))\alpha}$。因此，

$$L_p(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\inf\{P(-t\log(\psi)) + t\alpha : t \in \mathbb{R}\},$$

结合不等式（4.8），即可得到等式。最后，根据构造，很容易看出，L_p 的定义域为 $[\log(p), \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\log(p), n\log(p)]$。下确界在唯一的 $t_\alpha > 0$ 处取得，且满足 $\frac{d}{dt}P(-t\log(\psi))|_{t=t_\alpha} = -\alpha$，这一事实是定理 3.4 的推论；此外，$\{\frac{d}{dt}P_n(-t\log(\psi))\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $\frac{d}{dt}P(-t\log(\psi))$。□

定理 *1.2* 的证明 令 $\alpha \geq \log p$。由于 $\frac{d}{dt}P(-t\log\psi) = -\log p \cdot \frac{p^t}{p^t-1}$，$t_\alpha$ 是满足 $\alpha = \log p \cdot \frac{p^{t\alpha}}{p^{t\alpha}-1}$ 的唯一正实数，也就是说，

$$t_\alpha = \log_p\left(\frac{\alpha}{\alpha - \log p}\right).$$

直接计算可得

$$P(-t_\alpha \log\psi) = \log(p-1) + \log(\alpha - \log p) - \log\log p.$$

将这些值代入方程（1.7），恰好得到方程（1.8）。 □

例 2. 若 $x \in p\mathbb{Z}_p \setminus F$ 是周期为 n 的 T_p 的周期点，则存在正整数 $a_1, ..., a_n$，使得 $\lambda_p(x) = \log p \cdot \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \log p \cdot A(\{a_i\})$，其中 $A(\{a_i\})$ 表示数字 $\{a_1, ..., a_n\}$ 的算术平均数。若 x 是 $I_{(a,b)}$ 中 T_p 的不动点，则 $\lambda_p(x) = a\log p$，由定理 *1.2* 可得

$$L_p(a\log p) = \begin{cases} \dfrac{\log(p-1)+\log(a-1)}{a\log p} + \dfrac{\log\left(1+\frac{1}{a-1}\right)}{\log p} & if\ a \neq 1 \\ \dfrac{\log(p-1)}{\log p} & if\ a = 1 \end{cases}.$$

若 x 是周期点，且 $\lambda_p(x) = \log p \cdot A(\{a_i\})$ 满足 $a_i \neq a_j$，其中 $1 \leq i, j \leq n$，则

$$L_p\left(\log p \cdot A(\{a_i\})\right) = \frac{\log(p-1)+\log(A(\{a_i\})-1)}{A(\{a_i\})\log p} + \frac{\log\left(1+\frac{1}{A(\{a_i\})-1}\right)}{\log p}.$$

注记 4.3。值得注意的是，T_p 的不动点 x 满足

$$x^2 + b_1(x)x - p^{a_1(x)} = 0. \tag{4.10}$$

相比之下，高斯映射的不动点对应于所谓的金属比例（见 [dS99]）。这些是不等式 $y^2 + ny - 1 = 0$ 的正解。例如，当 $n = 1$ 时，黄金比例 g 满足 $g - 1$ 是高斯映射的不动点。

5. Rational approximation for continued fraction expansions

现在我们转而讨论由 Schneider 连分数展开中的截断得到的有理逼近。对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in p\mathbb{Z}_p \setminus F$，我们考虑极限

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right|_p, \tag{5.1}$$

只要它存在。定义 $\psi_2 \colon\ p\mathbb{Z}_p \setminus F \to \mathbb{R}$ 为

$$\psi_2(x) = p^{-a_1(x)} \left| x - \frac{p^{a_1(x)}}{b_1(x)} \right|_p^{-1}.$$

接下来，我们引入 实值函数 $\varphi \colon\ p\mathbb{Z}_p \setminus F \to \mathbb{R}$ 定义为 $\varphi(x) = p^{a_2(x)} \psi_2(T_p(x)) / \psi_2(x)$.

引理 5.1. 方程 (5.1) 中的极限与$\log \varphi$的伯克霍夫平均的逐点极限一致。事实上，

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right|_p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \varphi \left(T_p^k x \right)$$

证明。 设 $x \in p\mathbb{Z}_p \setminus F$。根据定义，第二有理逼近满足

$$\begin{aligned} \psi_2(T_p(x)) &= p^{-a_1(T_p(x))} \left| \frac{p^{a_1(T_p(x))}}{b_1(T_p(x)) + T_p^2(x)} - \frac{p^{a_1(T_p(x))}}{b_1(T_p(x))} \right|_p^{-1} \\ &= p^{-a_2(x)} \left| \frac{p^{a_2(x)}}{b_2(x) + T_p^2(x)} - \frac{p^{a_2(x)}}{b_2(x)} \right|_p^{-1}, \end{aligned}$$

并且由方程 (2.2) 得到 $\psi_2(T_p(x)) = p^{-a_2(x)-a_1(x)} \left| x - \frac{p_2(x)}{q_2} \right|_{p^{\circ}}$ 因此

$$\varphi(x) = \frac{\psi_2(T_p(x))}{\psi_2(x)} = \frac{\left| x - \dfrac{p_2(x)}{q_2(x)} \right|_p^{-1}}{\left| x - \dfrac{p_1(x)}{q_1(x)} \right|_p^{-1}}.$$

因此，

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \log \varphi(x) &= -\sum_{k=0}^{n-1} \log \left| x - \frac{p_{k+1}(x)}{q_{k+1}(x)} \right|_p - \log \left| x - \frac{p_k(x)}{q_k(x)} \right|_p \\ &= -\log \left| x - \frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)} \right|_p + \log \left| x - \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \right|_p. \end{aligned}$$

两边除以 n 并取极限，得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \varphi \left(T_p^k x \right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)} \right|_p.$$

□

命题 5.2. 势函数 $\log \varphi$ 在长度为 *3* 的柱集上局部恒定。此外，对于每个 $x \in p\mathbb{Z}_p \setminus F$,

$$\log \varphi(x) = v_p \left(T_p^2(x) \right) \log p = a_3(x) \log(p).$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned}\frac{\psi_2(T_p(x))}{\psi_2(x)} &= \frac{p^{-a_1(T_p(x))}\left|T_p(x)-\dfrac{p^{a_1(T_p(x))}}{b_1(T_p(x))}\right|_p^{-1}}{p^{-a_1(x)}\left|x-\dfrac{p^{a_1(x)}}{b_1(x)}\right|_p^{-1}}\\ &= p^{a_1(x)-a_1(T_p(x))}\frac{\left|\dfrac{b_1(T_p(x))T_p(x)-p^{a_1(T_p(x))}}{b_1(T_p(x))}\right|_p^{-1}}{\left|\dfrac{xb_1(x)-p^{a_1(x)}}{b_1(x)}\right|_p^{-1}}\\ &= p^{a_1(x)-a_1(T_p(x))}\left|\frac{b_1(T_p(x))T_p(x)-p^{a_1(T_p(x))}}{xb_1(x)-p^{a_1(x)}}\right|_p^{-1}.\end{aligned}$$

根据 T_p 的定义，可得 $\left|b_1(x)x+T_p(x)b_1(x)-p^{a_1(x)}\right|_p = |T_p(x)|_p|x|_p$，因此

$$\begin{aligned}\frac{\psi_2(T_p(x))}{\psi_2(x)} &= p^{a_1(x)-a_2(x)}\left|\frac{T_p(x)T_p^2(x)}{xT_p(x)}\right|_p^{-1}\\ &= p^{a_1(x)-a_2(x)}\cdot p^{v_p(T_p^2(x))-v_p(x)}\\ &= p^{v_p(T_p^2(x))-v_p(T_p(x))}.\end{aligned}$$

因此，若 x 和 y 属于同一个长度为 3 的柱集（即，对于 $1\le i\le 3$，$a_i(x)=a_i(y)$ 且 $b_i(x)=b_i(y)$），则

$$\begin{aligned}|\log\varphi(x)-\log\varphi(y)| &= \left|\log\left(p^{a_2(x)}\frac{\psi_2(T_p(x))}{\psi_2(x)}\right)-\log\left(p^{a_2(y)}\frac{\psi_2(T_p(y))}{\psi_2(y)}\right)\right|\\ &= |a_2(x)+v_p(T_p^2(x))-v_p(T_p(x))-a_2(y)-v_p(T_p^2(y))+v_p(T_p(x))|\\ &= |v_p(T_p^2(x))-v_p(T_p^2(y))|\\ &= |a_3(x)-a_3(y)|=0.\end{aligned}$$

因此，$\log\varphi$ 局部 在这类柱集上为常数，并且对所有 $x\in p\mathbb{Z}_p\setminus F$，$\log\varphi(x)=a_3(x)\log p$。 □

令 $x\in J_p(\alpha)$。由于 $J_p(\alpha)$ 是一个 T_p-不变集，我们有 $\alpha=\lambda_p(x)=\lambda_p(T_p^2(x))$。于是，根据引理 5.1 和命题 5.2,

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\log p\cdot\frac{a_1(T_p^2(x))+\cdots+a_n(T_p^2(x))}{n}=\lim_{n\to\infty}\log p\cdot\frac{a_3(x)+\cdots+a_3(T_p^{n-1}(x))}{n}.$$

因此

$$\lambda_p(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\varphi(T_p^k(x))=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|_p.$$

因此，x 的李雅普诺夫指数与 p进有理逼近 x的平均指数收敛速率一致。因此，定理 1.2 推出推论 1.3。事实上，定理 3.4 对每个子系统（$T_{p,\,n}$，$p\mathbb{Z}_{p,\,n}\setminus F$）都给出了类似的结论。这使我们能够根据有理逼近的收敛速率，从维数理论的角度刻画$p\mathbb{Z}_{p,\,n}$ 中 p进整数的集合。

定理 5.3。 设 $n \in \mathbb{N}$。对于每个 $\alpha \in [\log\, p,\ n\log\, p]$，满足以下条件的$p\mathbb{Z}_{p,\ n} \setminus F$ 中的点集x 的豪斯多夫维数

$$-\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \left| x - \frac{p_m(x)}{q_m(x)} \right|_p = \alpha,$$

等于 $\frac{1}{\alpha} P_n(-t_\alpha \log\, \psi) + t_{\alpha,n}$，其中 $P_n(-t_{\alpha,n} \log\, \psi)$ 表示势函数$-t_{\alpha,n} \log \psi$ 的拓扑压力，而 $t_{\alpha,n}$ 是满足下列条件的唯一实数 t

$$-\alpha = \log p \cdot \left(\frac{n}{p^{tn} - 1} - \frac{p^t}{p^t - 1} \right).$$

6. Proof of technical results.

6.1. **引理 3.1 的证明**。

证明。 设 $\delta > 0$ 和 $N_\delta = \min\{n \in \mathbb{N} :\ p^{-n} \le \delta\}$。那么，这个族

$$\left\{ I_{(a_i,b_i)} : (a_i, b_i) \in E_n, \text{where } i \in \{1, ..., N_\delta\} \right\}$$

是 $p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$ 的一个开可数覆盖。对于任意 $s > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta \left(p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F \right) \le \sum_{(a_i,b_i)_{i=1}^{N_\delta} \in E_n^{N_\delta}} \left| I_{(a_i,b_i)_{i=1}^{N_\delta}} \right|_p^s = \sum_{(a_1,...,a_{N_\delta}) \in \{1,2,...,n\}^{N_\delta}} (p-1) p^{-s\sum_{i=1}^{N_\delta} a_i},$$

因为对于每个 b_i，每个 a_i 都被计数 $p-1$ 次。由于每个 a_i 都属于 $\{1, ..., n\}$，因此我们得到

$$\mathcal{H}^s_\delta \left(p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F \right) \le (p-1)^{N_\delta} \left(\sum_{k=1}^{n} p^{-ks} \right)^{N_\delta}.$$

回顾 $\sum_{k=1}^{n} p^{-ks} \to 0$ as $s \to \infty$，且 $\sum_{k=1}^{n} p^{-ks} \to n$ as $s \to 0$，由连续性可知，存在 $\tilde{s} > 0$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^{k\tilde{s}}} = \frac{1}{p-1}. \tag{6.1}$$

这样，对于所有 $\delta > 0$

$$\mathcal{H}^{\tilde{s}}_\delta (p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F) \le (p-1)^{N_\delta} \left(\sum_{k=1}^{N} p^{-k\tilde{s}} \right)^{N_\delta} = 1.$$

我们推得 $\dim_{\mathrm{H}}(p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F) \le \tilde{s}$。此外，我们得出 $\tilde{s} \le 1$，因为

$$(p-1)^{N_\delta} \left(\frac{p^n - 1}{p^n (p-1)} \right)^{N_\delta} = \left(1 - \frac{1}{p^n} \right)^{N_\delta} \le 1.$$

另一方面，设 $\mathcal{U}$ 为一个可数覆盖，使得 $|\mathcal{U}_i|_p < \delta.$。由于 $p\mathbb{Z}_{p,n}$ 是一个紧空间，我们可以考虑该覆盖中的有限个元素。假设这个子覆盖包含 M 个元素。对于每个 $1 \le i \le M$，设 k_i 为满足下述条件的唯一正整数

$$p^{-(k_i+1)} \le |\mathcal{U}_i|_p \le p^{-k_i}.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们定义开覆盖

$$B_k = \left\{ B\left(x_{(a_i,b_i)}, p^{-k} \right) : (a_i, b_i)_{i=1}^{N_\delta} \in E_n^{N_\delta} \right\},$$

其中 $x_{(a_i,b_i)}$ 表示 $I_{(a_i,b_i)_{i=1}^{N_\delta}}$ 中周期为 N_δ 的周期点。若 $j \geq k_i$，则 $\mathcal{U}_i$ 至多与 $n\cdot(p-1)$ 个 B_j 的球相交。根据 $\tilde{s}$ 的定义

$$(n(p-1))^{j-k_i} = n^{j-k_i}(p-1)^j \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^{k\tilde{s}}}\right)^{k_i} \leq n^j(p-1)^j \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p^{-k\tilde{s}}\right)^{k_i} p^{\tilde{s}}|\mathcal{U}_i|_p^{\tilde{s}}.$$

此外，$p^{-k\tilde{s}} \leq 1$ 因为 $\tilde{s} \geq 0$。于是

$$(n\cdot(p-1))^{j-k_i} \leq (n(p-1))^j p^{\tilde{s}}|\mathcal{U}_i|_p^{\tilde{s}}.$$

若选择 $j \geq \max\{k_i\}$，则可用与 $\mathcal{U}$ 中每个元素相交的球的数量 B_j 来作上界

$$(n(p-1))^j \leq \sum_{i=1}^{M}(n\cdot(p-1))^{j-k_i} \leq \sum_{i=1}^{M}(n(p-1))^j p^{\tilde{s}}|\mathcal{U}_i|_p^{\tilde{s}}.$$

因此，$p^{-\tilde{s}} \leq \sum_{i=1}^{M}|\mathcal{U}_i|_p^{\tilde{s}}$ 与 δ 无关，所以 $\mathcal{H}^{\tilde{s}}(p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus F) \geq 0$。根据豪斯多夫维数的定义 $\tilde{s} \leq \dim_{\mathrm{H}}(p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus F)$。最后，按照方程 (2.4) 的方法计算压力，得到

$$\begin{aligned} P_n(-\tilde{s}\log\varphi) &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\left(\sum_{T_{p,n}^m x=x} e^{-\tilde{s}S_m\log\varphi(x)}\right) \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\left(\sum_{(a_i,b_i)_{i=1}^m\in E_n^m}\prod_{k=1}^{m} p^{-\tilde{s}a_k}\right) \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\left((p-1)^m\left(\sum_{k=1}^{n} p^{-\tilde{s}k}\right)^m\right), \end{aligned}$$

其中最后一个表达式根据方程 (6.1) 等于零。

□

6.2. **定理 3.2 的证明**。回顾一下，若 $\mathcal{V}$ 是 $p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus F$ 的一个覆盖，且存在 $M>0$，使得对每个 $x\in p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus F$ 及任意 $r>0$，都有

$$\#\{V_i\in\mathcal{V} : V_i\cap B(x,r)\neq\emptyset\} \leq M.$$

设 $x\in p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus F$。由于 $\psi(x) = p^{a_1(x)}$，因此对每个 $m\in\mathbb{N}$

$$0 \leq \left(\prod_{k=0}^{m-1}\psi(a_{1+k}(x))\right)^{-1} \leq p^{-m}. \tag{6.2}$$

给定任意元素 $w\in\Sigma_n$ 和 $r>0$，存在唯一的 $m(w)\in\mathbb{N}$ 使得 t

$$\prod_{k=0}^{m(w)-1} p^{-a_{1+k}(\pi_n(w))} > r > \prod_{k=0}^{m(w)} p^{-a_{1+k}(\pi_n(w))}. \tag{6.3}$$

由不等式 (6.2) 可知，当 $r\to 0$ 时，$m(w)\to\infty$。固定 $w\in\Sigma_n$，并考虑柱集

$$C(w) = [(a_i(\pi_n(w)), b_i(\pi_n(w))) : 1\leq i\leq m(w)],$$

其中 $m(w)$ 满足不等式 (6.3)。注意，若 $w''\in C(w)$，则对每个 $0\leq k\leq m(w)-1$，都有 $a_{1+k}(\pi_n(w'')) = a_{1+k}(\pi_n(w))$。因此，$m(w'') = m(w)$，从而 $C(w) = C(w'')$。此外，集族 $\{C(w)\}_{w\in\Sigma_n}$ 是 Σ_n 的一个划分。另一方面，由不等式 (6.2)，存在 $N_r\in\mathbb{N}$，使得对每个 $w\in\Sigma_n$，都有 $m(w)\leq N_r$。因此，覆盖 $\mathcal{C}_r = \{C(w)\}_{w\in\Sigma_n}$ 是一个有限

且是 Σ_n 的开覆盖。因此，我们将 $\mathcal{C}_r$ 写作 $\{C_r^j\}_{j=1}^{M_r}$，其中 $M_r \in \mathbb{N}$。我们将 R_r^j 定义为 C_r^j 经由 π_n 的像，即

$$\mathcal{R}_r = \pi_n(\mathcal{C}_r) = \{R_r^i\}_{i=1}^{M_r}$$

是 $p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$ 的有限开覆盖。

引理 6.1。设 $r > 0$。那么 $\mathcal{R}_r$ 是 $p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$ 的莫兰覆盖。

证明。根据划分 $\mathcal{R}_r$ 的定义，对于每个 R_r^j 以及任意 $x \in R_r^j$

$$R_r^j = B\left(x, \prod_{k=0}^{m(\pi_n^{-1}(x))} p^{-a_{1+k}(x)}\right) \subseteq B(x,r) \subseteq B\left(x, \prod_{k=0}^{m(\pi_n^{-1}(x))-1} p^{-a_{1+k}(x)}\right).$$

现在设 $x \in p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$。若对于某个 $R_r^j \in \mathcal{R}_r$ 和 $y \in R_r^j \cap B(x,r)$，有 $R_r^j \cap B(x,r) \neq \emptyset$，根据 p-进度量的超度量性质

$$B\left(y, \prod_{k=0}^{m(\pi_n^{-1}(y))} p^{-a_{1+k}(y)}\right) = R_r^j.$$

因此 $B(y,r) = B(x,r)$，于是

$$B\left(y, \prod_{k=0}^{m(\pi_n^{-1}(y))} p^{-a_{3+k}(y)}\right) \subseteq B(x,r) \subseteq B\left(y, \prod_{k=0}^{m(\pi_n^{-1}(y))-1} p^{-a_{3+k}(y)}\right).$$

此外，对于每个 $1 \le k \le m(\pi_n^{-1}(x)) - 1$，我们有 $a_k(x) = a_k(y)$ 且 $b_k(x) = b_k(y)$。由于 $(a_k(y)\ b_k(y)) \in E_n$，因此得到

$$\#\{R_r^j \in \mathcal{R}_r : R_r^j \cap B_p(x,r) \neq \emptyset\} \le n(p-1).$$

□

设 $0 < r < 1$。令 $\mathfrak{m}$ 为 $-\tilde{s}\log\psi$ 的平衡态。回忆一下，μ_q 是 $\phi_{q,\,n}$ 和 $\nu_q = (\pi_n)_*\mu_q$ 的平衡态。此外，$\mathfrak{m}$、ν_q 和 ν_ρ 都是吉布斯测度，因此对每个 $q \in \mathbb{R}$，存在正实常数 C_1 和 C_2，使得对每个集合 R_r^j（见 [PW97a，引理 1]）

$$C_1 \le \frac{\nu_q(R_r^j)}{\mathfrak{m}(R_r^j)^{T(q)\tilde{s}} \cdot \nu_\rho(R_r^j)} \le C_2. \tag{6.4}$$

对每个 $\alpha \ge 0$，我们定义

$$\tilde{K}_\alpha = \left\{ w \in \Sigma_n : \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \log(\vartheta \circ \sigma^k(w))}{\sum_{k=0}^{m-1} \log(\psi \circ \pi_n(\sigma^k(w)))} = \alpha \right\},$$

以及相应的谱 $\tilde{f}_{\nu_\rho}(\alpha) = \text{维数}_{\mathrm{H}}\left(\tilde{K}_\alpha\right)$。对每个 $q \in \mathbb{R}$，令

$$\alpha(q) = \frac{\int_{\Sigma_n} \log\vartheta(w)\ d\mu_q}{\int_{\Sigma_n} \log(\varphi \circ \pi_n(w)) d\mu_q}.$$

引理 6.2。对每个 $q \in \mathbb{R}$，我们得到

(1) $\nu_q(\pi_n(K_{\alpha(q)})) = 1$。(2) $d_{\nu_q}(x) = \mathcal{T}(q) + q\alpha(q)$ 对于 ν_q 几乎处处的点 $x \in \pi_n(K_{\alpha(q)})$。(3) $\dim_{\mathrm{H}} \pi_n(K_{\alpha(q)}) = \mathcal{T}(q) + q\alpha(q)$。

证明。第 1 项由比尔霍夫遍历定理得出，因为 μ_q 是遍历的，即对于 μ_q-几乎处处的点 $w \in \Sigma_n$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \log(\vartheta \circ \sigma^k(w))}{\sum_{k=0}^{m-1} \log(\varphi \circ \pi_n(\sigma^k(w)))} = \lim_{m\to\infty} \frac{S_m \log(\vartheta(w))}{S_m \log(\varphi \circ \pi_n(w))} = \alpha(q).$$

˜此外，固定 $\varepsilon > 0$，对于每个 $w \in K_{\alpha(q)}$，都存在一个正整数 $N(w)$，使得对所有$n > N(w)$

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \log(\vartheta \circ \sigma^k(w))}{\sum_{k=0}^{n-1} \log(\varphi \circ \pi_n(\sigma^k(w)))} - \alpha(q) \right| \le \varepsilon. \tag{6.5}$$

˜ ˜我们根据 $N(w)$ 截断 $K_{\alpha(q)}$ 中的元素。记 $Q_l = \{w \in K_{\alpha(q)} : \ N(w) \le l\}$ 对于每个$l > 0$。这些集合按包含关系 $Q_l \subset Q_{l+1}$ 和 $K_{\alpha(q)} = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l$串接。因此，存在某个 $l_0 > 0$，使得 $\mu_q(Q_l) > 0$ 对所有 $l \ge l_0$均成立。

给定 $0 < r < 1$，现在考虑 Q_l的莫兰覆盖 $\{C_{r,l}^j\}$。因此，对于每个 j，都存在 $w_j \in Q_l \cap C_{r,\,l}^j$，使得 $C_{r,\,l}^j = C(w_j)$。此外，如果 r 足够小，我们可以假设$m(w_j) \ge l$ 对所有 j均成立。另一方面，由于 μ_q 是吉布斯测度，对于每个 $w \in \Sigma_n$ 和 $m > 0$

$$C_9 \le \frac{\mu_q(C(w))}{\prod_{k=0}^{m-1} |\varphi(\pi_n \circ \sigma^k(w))|^{-\mathcal{T}(q)} (\vartheta(\sigma^k(w)))^q} \le C_{10}, \tag{6.6}$$

其中 $C_9 > 0$ 和 $C_{10} > 0$。由不等式 (6.5) 和 (6.6)，以及莫兰覆盖的有界性，我们得到对所有 $m \ge l$ 和 $x \in \pi_n(Q_l)$

$$\nu_q(B(x,r) \cap \pi_n(Q_l)) \le \sum_{i=1}^{N(x,l)} \mu_q(C_{r,l}^{j_i}),$$

其中 $N(x,\ l) \le n(p-1)$ 是 $\{C_{r,l}^j$ 的基数: $C_{r,\,l}^j \cap B(x,\ r) \ne \emptyset\}$。Thu s

$$\begin{aligned}
\nu_q(B(x,r) \cap \pi_n(Q_l)) &\le C_{10} \sum_{i=1}^{N(x,l)} \prod_{k=0}^{m-1} |\psi(\pi_n \circ \sigma^k(w_i))|^{-\mathcal{T}(q)} (\vartheta(\sigma^k(w_i)))^q \\
&\le C_{10} \sum_{i=1}^{N(x,l)} \prod_{k=0}^{m-1} |\psi(\pi_n \circ \sigma^k(w_i))|^{-\mathcal{T}(q) - q(\sigma(q)-\varepsilon)} \\
&\le C_{11} \cdot r^{\mathcal{T}(q) + q(\alpha(q)-\varepsilon)},
\end{aligned}$$

其中 $w_i \in C_{r\,,l}^{j_i}$ 在每个加数中，且 $C_{11} > 0$。回想 $\nu_q = (\pi_n)_* \mu_q$，因此对 ν_q-几乎处处的 p. $x \in \pi_n(Q_l\ )$

$$\nu_q(B(x,r)) \le \nu_q(B(x,r) \cap \pi_n(Q_l)),$$

因为 $B(x,\ r) \subseteq \pi_n(Q_l)$。于是，对任意 $l > l_0$ 且对 ν_q-几乎处处的 p. $x \in \pi_n(Q_l)$

$$\begin{aligned}
\underline{d}_{\nu_q}(x) &= \liminf_{r\to 0} \frac{\log \nu_q(B(x,r))}{\log r} \\
&\ge \liminf_{r\to 0} \frac{\log(\nu_q(B(x,r) \cap \pi_n(Q_l)))}{\log r} \\
&\ge \mathcal{T}(q) + q(\alpha(q) - \varepsilon).
\end{aligned}$$

˜由于集合 Q_l 是嵌套的，对于 ν_q-几乎处处的点 p，有 $x \in \pi_n(K_{\alpha(q)})$

$$\underline{d}_{\nu_q}(x) \ge \mathcal{T}(q) + q(\alpha(q) - \varepsilon).$$

另一方面，固定 $0<r<1$。对于每个 $w\in Q_l$，回忆我们有

$$R_r(\pi_n(w))\subseteq B(x,r)\subseteq B(x,2r),$$

因为 $R_r(\pi_n(w))$ 至多与以 x 为中心、半径为 r 的 $n(p-1)$ 个球相交。因此，由方程 (6.5) 和 (6.6)，对每个 $x\in Q_l$，我们得到

$$\begin{aligned}
v_q(B(x,2r)) &\geq v_q(R_r(\pi_n(w)))\\
&\geq C_9\prod_{k=0}^{m(w)}\psi(\pi_n\circ\sigma^k(w))^{-\mathcal{T}(q)}(\vartheta(\sigma^k(w)))^q\\
&\geq C_9\prod_{k=0}^{m(w)}\psi(\pi_n\circ\sigma^k(w))^{-\mathcal{T}(q)-q(\alpha(q)+\varepsilon)}\\
&\geq C_9 r^{\mathcal{T}(q)+q(\alpha(q)+\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\overline{d}_{\nu_q}(x)&=\limsup_{r\to 0}\frac{\log\nu_q(B(x,2r))}{\log 2r}\\
&\leq\limsup_{r\to 0}\frac{\log C_9 r^{\mathcal{T}(q)+q(\alpha(q)+\varepsilon)}}{\log(2r)}\\
&\leq\mathcal{T}(q)+q(\alpha(q)+\varepsilon).
\end{aligned}$$

这就得到了引理的第二个结论。此外，

$$\dim_{\mathrm{H}}(\tilde{K}_{\alpha(q)})\geq\mathcal{T}(q)+q\alpha(q),$$

~，并且由 [Fal14，命题 2.3]，我们得到 $\dim_{\mathrm{H}}(K_{\alpha(q)})\leq\mathcal{T}(q)+q\alpha(q)$。 □

现在我们证明，符号模型中的点态维数与 $p\mathbb{Z}_{p,\ n}\setminus F$ 中的点态维数一致。

命题 6.3。

~(1) 对于每个 $q\in\mathbb{R}$、$w\in K_{\alpha(q)}$ 和 $x\in\pi_n(w)$，我们有 $d_{\nu_q}(x)=\alpha(q)$。~(2) 对于每个 $q\in\mathbb{R}$，以及每个 $x\in K_{\alpha(q)}$，都存在 $w\in K_{\alpha(q)}$，使得 $\pi_n(w)=x$。换~言之，对于每个 $q\in\mathbb{R}$，我们有 $\pi_n(K_{\alpha(q)})=K_{\alpha(q)}$。

证明。首先回顾，对于满足 $|x-y|_p<r_0$ 且 $r_0=p^{-(n+1)}$ 的 $x,y\in p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus F$，我们有

$$|T_{p,n}(x)-T_{p,n}(y)|_p\geq p|x-y|_p.$$

事实上，对于任意 $0<r<r_0$，存在 $N（r）>0$，以及正实常数 C_{12} 和 C_{13}，使得若$0\leq m\leq N（r）$，则对所有 $x\in p\mathbb{Z}_{p,n}\setminus F$

$$C_{12}r\prod_{k=0}^{m-1}\psi(T_{p,n}^k(x))\leq|T_{p,n}^m(B(x,r))|_p\leq C_{13}r\prod_{k=0}^{m-1}\psi(T_{p,n}^k(x)).\tag{6.7}$$

这可由下式推出

$$|T_{p,n}^m(B(x,r))|_p\geq p^{a_1+\cdots+a_m}r\geq p^m r\frac{\prod_{k=0}^{m-1}\psi(T_{p,n}^k(x))}{\prod_{k=0}^{m-1}\psi(T_{p,n}^k(x))}\geq C_{12}r\prod_{k=0}^{m-1}\psi(T_{p,n}^k(x)),$$

其中 $C_{12}=p^{m(1-n)}$，且

$$|T_{p,n}^m(B(x,r))|_p\leq 1\cdot\frac{r\prod_{k=0}^{m-1}\psi(T_{p,n}^k(x))}{r\prod_{k=0}^{m-1}\psi(T_{p,n}^k(x))}\leq C_{13}r\prod_{k=0}^{m-1}\psi(T_{p,n}^k(x)),$$

其中 $C_{13} = r^{-1}p^{-m}$。类似地，存在正实常数 C_{14} 和 C_{15}，使得对所有 $x \in p\mathbb{Z}_{p,\ n} \setminus F$ 以及所有 $(a,\ b) \in E_n$

$$C_{14}r \prod_{k=0}^{m-1} \psi(T_{p,n}^k(x))^{-1} \le |h_{a,b}^m(B(x,r))|_p \le C_{15}r \prod_{k=0}^{m-1} \psi(T_{p,n}^k(x))^{-1}, \tag{6.8}$$

其中，$h_{a,\ b}$ 是 $T_{p\,n}^{-m}$的逆分支，其像包含于 $I_{a,\ b}$。固定 $x \in p\mathbb{Z}p_n \setminus F$ 并定义$N = N(x,\ r)$，使得

$$C_{13}r \prod_{k=0}^{N-1} \psi(T_{p,n}^k(x)) \le r_0 \le C_{13}r \prod_{k=0}^{N} \psi(T_{p,n}^k(x)).$$

因此，$N(x,\ r)$ 是 $B(x,\ r)$ 增长且直径仍小于 r_0 所需的迭代次数。因此，由方程 (6.7) 和 (6.8) 可得

$$\left|T_{p,n}^N(B(x,r))\right|_p \le C_{13}r \prod_{k=0}^{N-1} \psi(T_{p,n}^k(x)) \le r_0 = \left|B(T_{p,n}^N(x), r_0)\right|_p.$$

因此，$B(x,\ r) \subset h(B(T_{p\ ,\ n}^N(x)\ r_0))$，其中 h是$T_{p\,n}^{-N}$的逆分支，对应于 x。此外，由方程 (6.8) 可得

$$\left|h(B(T_{p,n}^N(x), r_0))\right|_p \le C_{15}r_0 \prod_{k=0}^{N-1} \psi(T_{p,n}^k(x))^{-1} \le C_{16}r = |B(x, C_{16}r)|_p,$$

其中 $C_{16} > 0$ 是一个常数。因此,

$$B(x,r) \subset h(B(S^N(x), r_0)) \subset B(x, C_{16}r).$$

回忆一下，存在 $M_{r_0} \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{R}(T_{p\ ,\ n}^N(x)) = h_0(I_{a,\ b})$，其中 h_0 是 $T_p^{-M_{r_0}}$在 $I_{(a,b)}$处对应的分支。有正实常数 C_{17} 和 C_{18} 使得

$$B(T_{p,n}^N(x), C_{17}r_0) \subset \mathcal{R}(T_{p,n}^N(x)) \subset B(T_{p,n}^N(x), C_{18}r_0).$$

这意味着

$$h(B(T_{p,n}^N(x), C_{17}r_0)) \subset h(\mathcal{R}(T_{p,n}^N(x))) \subset h(B(T_{p,n}^N(x), C_{18}r_0)),$$

因此

$$\nu_q(B(T_{p,n}^N(x), C_{17}r_0)) \subset \nu_q(\mathcal{R}(T_{p,n}^N(x))) \subset \nu_q(B(T_{p,n}^N(x), C_{18}r_0)). \tag{6.9}$$

另一方面，根据引理 6.2 以及 ν_q 是吉布斯测度这一事实，我们得到它是直径正则的。事实上，对于 $C_{19} = C^2p^{-1}e^{2P(\rho)}$，任意给定 $r_1 > 0$ 和 $y \in p\mathbb{Z}_{p,\ n} \setminus F$，都有

$$\nu_q(B(r, pr_1)) \le C_{19}\nu_q(B(x, r_1)).$$

Thus

$$\begin{aligned}\nu_q(B(T_{p,n}^N(x), C_{18}r_0)) &\le C_{20}\nu_q(B(T_{p,n}^N(x), r_0)) = C_{17}\nu_q(h(B(T_{p,n}^N(x), r_0))) \\ &\le C_{20}\nu_q(B(x, C_{16}r)) \\ &\le C_{21}\nu_q(B(x,r)),\end{aligned}$$

其中 $C_{20} > 0$ 和 $C_{21} > 0$ 是常数。类似地

$$\nu_q(B(T_{p,n}^N(x), C_{17}r_0)) \ge C_{22}\nu_q(B(T_{p,n}^N(x), r_0)) = C_{22}\nu_q(h(B(T_{p,n}^N(x), r_0))) \ge C_{23}\nu_q(B(x,r)),$$

其中 $C_{22} > 0$ 和 $C_{23} > 0$。因此，由方程 (6.9)

$$C_{23}\nu_q(B(x,r)) \le \nu_q(h(R(T_{p,n}^N(x)))) \le C_{21}\nu_q(B(x,r)).$$

由于 ν_q 是 log ϑ 的吉布斯测度，且 $h(R(T_p^N,\ n(x)))$ 是莫兰覆盖中的一个元素，我们得到

$$d_v(x)=\lim_{r\to 0}\frac{\nu_q(B(x,r))}{\log r}=\lim_{N(r)\to\infty}\frac{\log\prod_{k=0}^{N(r)-1}\vartheta(\sigma^k(w))}{\log\prod_{k=0}^{N(r)-1}\psi(\pi_n\circ\sigma^k(w))^{-1}},$$

其中 $\pi_n(w)=x$。现在假设 $d_v(x)=\alpha(q)$，我们需要证明存在一个子序列极限 $N(r)\to\infty$，它蕴含 $n\to\infty$ 的极限。考虑 $r_k=p^{-k}$，由 $N(r)$ 的定义以及 T_p^N 的一致扩张性可得，n

$$N(r_{k+1})-N(r_k)=\begin{cases}0 & \text{if } N(x,r_{k+1})=N(x,r_k)\\ 1 & \text{if } N(x,r_{k+1})>N(x,r_k)\end{cases}.$$

因此命题得证。 □

定理 *3.2* 的证明。对每个 $x\in p\mathbb{Z}_{p,\ n}\setminus F$ 令 $N(x,\ r)$ 表示 $\mathcal{R}$ 中与 $B(x,\ r)$ 相交非空的元素个数。由引理 6.1 可知，$\mathcal{R}=\{\mathcal{R}_r^j\}$ 是 $p\mathbb{Z}_{p,\ n}\setminus F$ 的一个莫兰覆盖，因此对所有 $x\in p\mathbb{Z}_{p,\ n}\setminus F$，都有 $N(x,\ r)\le n(p-1)$。由于 $\mathfrak{m}$ 是吉布斯测度，存在一个常数 $C_4>0$，使得

$$C_4^{-1}\le\frac{\mathfrak{m}(\mathcal{R}_r^j)}{\left(\prod_{k=0}^{n-1}\psi\circ T_{p,n}^k(x)\right)^{-\tilde{s}}}\le C_4.$$

由 $\mathcal{R}$ 的构造（见方程 (6.3)）可得

$$C_4^{-1}r^{\tilde{s}}\le\mathfrak{m}(\mathcal{R}_r^j)\le C_5r^{\tilde{s}},\tag{6.10}$$

其中 $C_5=C_4p^{-n}$。另一方面，鉴于 $\mathcal{R}$ 是 $p\mathbb{Z}_{p,\ n}\setminus F$ 的不交覆盖，我们得到

$$\sum_{\mathcal{R}_r^j}\nu_q(\mathcal{R}_r^j)=1.$$

对 $\mathcal{R}$ 的每个元素求和，并使用（6.4）

$$\begin{aligned}1=\sum_{\mathcal{R}_r^j}\nu_q(\mathcal{R}_r^j)&\le C_2\sum_{\mathcal{R}_r^j}\mathfrak{m}(\mathcal{R}_r^j)^{\mathcal{T}(q)/\tilde{s}}\cdot\nu_\rho(\mathcal{R}_r^j)^q\\&\le C_2\sum_{\mathcal{R}_r^j}C_5^{\mathcal{T}(q)/\tilde{s}}r^{T(q)}\nu_\rho(\mathcal{R}_r^j)^q\\&=C_5^{\mathcal{T}(q)/\tilde{s}}C_2r^{\mathcal{T}(q)}\sum_{\mathcal{R}_r^j}\nu_\rho(\mathcal{R}_r^j)^q.\end{aligned}$$

定义 $C_8=C_4^{-\mathcal{T}(q)/\tilde{s}}C_2^{-1}$，我们得到 $C_8\le r^{\mathcal{T}\ (q)}\sum_{\mathcal{R}_r}\nu_\rho(\mathcal{R}_r^j)^q$。类似地，我们得到 $C_7>0$，使得

$$C_8\le r^{\mathcal{T}(q)}\sum_{\mathcal{R}_r}\nu_\rho(\mathcal{R}_r^j)^q\le C_7.$$

取对数并除以 log r，我们得到

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log\left(\sum_{\mathcal{R}_r^j}\nu_\rho(R_r^j)^q\right)}{\log r}=-\mathcal{T}(q).\tag{6.11}$$

该 fi 定理的第一条陈述由引理 6.2 和命题 6.3 得出。

回忆一下，根据引理 6.2，对于 ν_q-几乎处处的 p，有 $\nu_q(K_{\alpha(q)})=1$，且 $d_{\nu_q}(x)=d_{\nu_q}(x)=\mathcal{T}(q)+q\alpha(q)$。由于 $(p\mathbb{Z}_p,\ |\cdot|_p)$ 是一个具有有限拓扑维数的完备可分度量空间，因此由 [PW97a，命题 3] 可得 $\dim_{\mathrm{H}}(K_{\alpha(q)})=\mathcal{T}(q)+q\alpha(q)$。命题 2

和 3 可利用符号模型，通过热力学形式主义中的经典方法得出（参见 [PW97a，Sar99]）。具体而言，对 $(q,\ r) \mapsto P(\phi_{q,\ r})$ 应用隐函数定理，可证明 $\mathcal{T}(q)$ 是实解析的（ [PW97a，引理 3]）。此外，对于所有 $q \in \mathbb{R}$，函数 $\mathcal{T}(q)$ 是凸的；当且仅当 $\nu_q \neq \mathfrak{m}$ 时，它是严格凸的（参见 [PW97a，引理 5]）。其次，$\alpha(q) = -\mathcal{T}'(q)$（参见 [PW97a，引理 4]）。特别地，由于 $\alpha'(q) = -\mathcal{T}''(q) > 0$，因此 $\alpha(q)$ 的值域是一个非单点区间集。

现在我们证明定理的最后一个断言。令 $r > 0$，并考虑$p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$的莫兰覆盖 $\{R_r^j\}$。存在常数 $C_{23} > 0$ 和 $C_{22} > 0$，使得对所有 $x \in R_r^j$

$$B(x, C_{25}r) \subset R_r^j \subset B(x, C_{26}r). \tag{6.12}$$

对每个 R_j^r固定一个 x_j。由于 ν_q 是直径正则的，因此

$$\sum_j \nu_q(x_j, C_{26}r)^q \leq C_{27} \sum_j \nu_q(B(x_j, C_{25}r))^q \leq C_{27} \sum_j \nu_q(R_r^j)^q, \tag{6.13}$$

其中 $C_{27} > 0$ 是与 j 和 r无关的常数。现在，考虑由半径为 r的球组成的$p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$的可数覆盖 $\mathcal{G}_r$。对每个 $j \geq 0$，存在 $B(y_i, r) \in \mathcal{G}_r$，使得 $B(y_j, r) \cap R_r^j \neq \emptyset$。因此，由方程 (6.11)

$$\mathcal{T}(q) \geq -\lim_{r \to 0} \frac{\log(\sum_{B \in \mathcal{G}_r} \nu_q(B)^q)}{\log r}. \tag{6.14}$$

另一方面，现在考虑由半径为 $2C_{26}r$的球组成的$p\mathbb{Z}_{p,n} \setminus F$ 的另一个开覆盖 $\mathcal{G}_{2C_{26}r}$。根据 (6.12)，每个集合 R_r^j 至少属于 $\mathcal{G}_{2C_{26}r}$中的一个元素。我们在莫兰覆盖的集合之间定义一个等价关系，并称 R_r^i 和 R_r^j 等价，当且仅当它们属于 $\mathcal{G}_{2C_{26}r}$的同一个元素。因此，对每个由 $B_k \in \mathcal{G}_{2C_{26}r}$ 表示的等价类 ξ_k，根据 (6.12)，对每个 $q > 0$

$$\sum_{R_r^j \in \xi_k} \nu_q(R_r^j)^q \leq n(p-1)\nu_q(B_k)^q. \tag{6.15}$$

再次利用 ν_q 是直径正则的这一点，我们对每个 $q < 0$都得到

$$\sum_{R_r^j \in \xi_k} \nu_q(R_r^j)^q \leq C_{28}\nu_q(B_k)^q, \tag{6.16}$$

其中 $C_{28} > 0$。因此，对任意 $q \in \mathbb{R}$，方程 (6.15) 和 (6.16) 蕴含

$$\sum_{R_r^j} \nu_q(R_r^j)^q \leq C_{29} \sum_{B_k \in \mathcal{G}_{2C_{26}r}} \nu_q(B_k)^q \leq C_{30} \sum_{B \in \mathcal{G}_r} \nu_q(B)^q, \tag{6.17}$$

其中 $C_{29} > 0$ 和 $C_{30} > 0$ 是常数。因此，由方程 (6.11) 和不等式 (6.17) 可得 (6.14) 的上界。

□

Acknowledgements

第一作者部分获得了 ANID 国家博士奖学金 21200910 的资助。第二作者部分获得了 ANID 国家博士奖学金 21210037 的资助。我们感谢 Godofredo Iommi 提供宝贵意见并审阅本手稿。我们也感谢 Patricio Perez-Pi˜na 和 Till Hauser 进行富有成效的讨论。

References

[AH24] Nicol ´ ´ *The Lyapunov spectrum as the Newton-Raphson method for countable Markov interval* as Arevalo H., ,《数学分析与应用杂志》（），第 期，论文编号 。数学评论 *maps* **534** 2024 2, 128091, 18 4689329

[BS03] J ´ *Uniqueness of equilibrium measures for countable Markov shifts and mul-* erˆome Buzzi 和 Omri Sarig, 《遍历理论与动力系统》（），第 期，– 。数学评论 *tidimensional piecewise expanding maps* **23** 2003 5, 1383 1400 2018604

[dS99] Vera W. de Spinadel, *The metallic means family and multifractal spectra*, 《非线性分析》36（1999），第 期，– 。数学评论 6, 721 745 1680309

[14] Fal Kenneth Falconer, *Fractal geometry*, 第三版，John Wiley & Sons, Ltd.，奇切斯特，2014，数学基础与应用。数学评论 3236784

[16] Fol Gerald B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*，第二版，数学教材，CRC Press，佛罗里达州博卡拉顿，2016 3444405 。数学评论

[22] HN A. Haddley 和 R. Nair, *On Schneider's continued fraction map on a complete non-Archimedean field*，《阿诺德数学杂志》**8** 2022 1, 19 38 4382702 （），第 期，– 。数学评论

[11] HW Jordan Hirsh 和 Lawrence C. Washington, *p-adic continued fractions* **25** 2011 3, ,《拉马努金杂志》（），第 期，– 。389 403 2819724

[HYZ18] Hui Hu、Yueli Yu 和 Yanfen Zhao, *On the digits of Schneider's p-adic continued fractions*，《数论杂志》187（2018），372–390。数学评论 3766916

[Iom10] Godofredo Iommi, *Multifractal analysis of the Lyapunov exponent for the backward continued fraction map* **30** 2010 1, 211 232 ，《遍历理论与动力系统》（），第 期，– 。数学评论 2586352

[12] KMS Marc Kessebohmer 、 Sara ¨ ¨ *Strong renewal theorems and Lyapunov* Munday 和 Bernd O. Stratmann, *spectra for α-Farey and α-Lüroth systems* **32** 2012 3, 989 1017 ，《遍历理论与动力系统》（），第 期，– 。数学评论

[KS07] Marc Kesseb ¨ ¨ *A multifractal analysis for Stern-Brocot intervals continued* ohmer 和 Bernd O. Stratmann, ,, *fractions and Diophantine growth rates* **605** 2007 133 163 2338129

[PU10] Feliks Przytycki 和 Mariusz Urba´nski, *Conformal fractals: ergodic theory methods*，《纯粹与应用数学杂志》（），– 。数学评论 伦敦数学学会讲义系列，第 371 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2010。数学评论

[PW97a] Yakov Pesin 和 Howard Weiss, *A multifractal analysis of equilibrium measures for conformal expanding maps and Moran-like geometric constructions* **86** 1997 1 2, 233 275 1435198 ，《统计物理学杂志》（），第 - 期，– 。

[PW97b] , *The multifractal analysis of Gibbs measures: motivation, mathematical foundation, and examples*，《混沌》7（1997），第 1 期，89–106。数学评论

[PW99] Mark Pollicott 和 Howard Weiss, *Multifractal analysis of Lyapunov exponent for continued fraction and Manneville-Pomeau transformations and applications to Diophantine approximation* ，《数学物理通讯》207（1999），第 1 期，145–171。数学评论 1439809

[Sar99] Omri M Sarig, *Thermodynamic formalism for countable markov shifts*，《遍历理论与动力系统》19（1999），第 6 期，1565–1593。数学评论 1724859

[SWYZ25] Kunkun Song、Wanlou Wu、Yueli Yu 和 Sainan Zeng, *Multifractal analysis of the growth rate of digits in Schneider's p-adic continued fraction dynamical system* **45** 2025 ，《离散与连续动力系统》（），第 8 期，2431 2445 4893115 – 。数学评论

[Wal00] Peter Walters, *An introduction to ergodic theory*，第 79 卷，Springer Science & Business Media，2000。

[Wei99] Howard Weiss, *The Lyapunov spectrum for conformal expanding maps and axiom-A surface diffeomorphisms* **95** 1999 3 4, 615 632 ，《统计物理学杂志》（），第 - 期，– 。1700863

[66] Wij Robert A Wijsman, , *cones and functions. ii*，《美国数学会汇刊》123（1966），第 1 期，32–45。 *Convergence of sequences of convex sets* 数学评论

Instituto de Matemáticas Universidad de Talca Talca Chile. , , , , M. Alvarado:
Email address
matias.alvarado@utalca.cl

Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito Bogotá Colombia. , , , N. Arevalo:
Email address ´
nicolas.arevalo-h@escuelaing.edu.co*URL*: https://sites.google.com/view/nicolasarevalomath/