Draft version January 12, 2026 使用 LaTeX 双栏样式排版，采用 AASTeX7.0.1

arXiv:2601.05996v1 [physics.space-ph] 9 Jan 2026

可压缩等离子体湍流中局部流线结构与能量传递率的自组织

Simone Benella [1], Virgilio Quattrociocchi [1], Emanuele Papini [1], Andrea Verdini [2], Simone Landi [2], Maria Federica Marcucci [1] and Giuseppe Consolini [1]

[1] INAF - Institute for Space Astrophysics and Planetology, Via del Fosso del Cavaliere, 100, 00133, Rome, Italy
[2] Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Firenze, Via G. Sansone 1, Sesto Fiorentino (Firenze), 50019, Italy

摘要

我们考察了等离子体湍流在可压缩和不可压缩状态下，局部流线拓扑与能量级联率如何自组织。我们采用全可压缩 Hall 磁流体动力学模拟，量化亚网格尺度能量传递，并借助速度场梯度张量的几何不变量，分析其与流线结构的关系。结果表明，流线拓扑对于诊断湍流至关重要：对于近不可压缩涨落，能量主要通过应变主导结构和稳定涡旋结构传递至更小尺度，而通过不稳定涡旋结构向更大尺度回传。相反，可压缩涨落并未表现出明确的能量传递拓扑选择性，因为局部级联率的总体方向被 $-\nabla \cdot \boldsymbol{u}$（等离子体体积压缩或膨胀）的符号所决定。

关键词：空间等离子体 (1544) — 行星际湍流 (830) — 日球层 (739) — 太阳风 (1534)

1. 引言

尽管理论取得了重大进展、航天器原位测量得到改进且数值模拟不断发展，空间等离子体中的湍流仍是一个重大的未解问题（R. Bruno & V. Carbone 2016）。在湍流等离子体中，大尺度能量预算通过级联过程穿过磁流体力学（MHD）惯性区向离子尺度传递，并在所有尺度上生成层级结构。观测和数值研究表明，尽管能量传递的平均方向主要是正向的，但所有尺度上也可能发生反向能量传递。例如，在不可压缩等离子体中，反向级联的出现与反向传播的 Alfv´én 波之间的不平衡有关，这表明局域能量传递可能取决于湍流涨落的大尺度组织形态（C. W. Smith 等人（2009）；J.E. Stawarzet al.2010；J. T. Coburn 等人（2014））。除了与非线性相互作用相关的局域能量传递外，在离子尺度上，动力学不稳定性和其他非局域过程也可能对能量传递。例如，研究表明，亚离子尺度上发生的磁重联会诱发向磁流体力学尺度的逆能量传递（L. Franci 等，2017年；D. Manzini 等，2023年；R. Foldes 等，2024年）。一种启发式的能量传递率代理量在时间（空间）上具有局域性，因此称为局域能量传递（LET），由 L. Sorriso-Valvo 等人（2018年）在数值模拟研究中提出。该量有助于深入了解与小尺度间能量传递相关的不规则脉冲式活动，并可能构成湍流结构的间接代理量。LET 的操作性定义基于亚格洛姆定律（H. Politano 和 A. Pouquet，1998年；R. Marino 和 L. Sorriso-Valvo，2023年），该定律在固定的短时间窗口内取平均，从而能够评估能量传递在时间上的局域性。文献（L. Sorriso-Valvo 等，2019）强调了 LET 与等离子体动力学性质之间的紧密联系；该研究基于磁层多尺度（MMS；J. L. Burch 等，2016年）测量数据估算了 LET。

随着能量在不同尺度间传递，湍流会组织成由相干多尺度结构构成的层级体系。研究这类行为局部性质的一种有效方法，是基于梯度张量

电子邮件：simone.benella@inaf.it

几何不变量（GTGIs）的统计特性。P. Vieillefosse（1982）首次研究了 GTGIs 的性质及其拉格朗日动力学，并为受限欧拉系统引入了 GTGIs 的演化方程（另见 P. Vieillefosse 1984）。后来，这一简单的理论框架被扩展到更复杂的模型，例如 L. Biferale 等人（2007年）（综述见C. Meneveau 2011）。GTGIs 统计中能量耗散的典型标志，是一种称为 *Vieillefosse* 尾的不对称特征。除了 GTGIs 的拉格朗日时间演化，进一步的研究还揭示了 GTGI 统计的尺度依赖行为。M. Chertkov 等人（1999年）发现，对速度场进行粗粒化后，随着尺度趋近惯性区，Vieillefosse 尾会逐渐消失。在磁流体力学模拟框架下，V. Dallas 和 A. Alexakis（2013）利用磁流体力学直接数值模拟研究了速度场和磁场的 GTGIs 统计特性，拓展了早期的流体力学理论。

关于空间等离子体中 GTGI 统计存在 Vieillefosse 尾的首个观测证据，由 G. Consolini 等人 (2015) 利用 Cluster 航天器星座提供的多点测量（C. P. Escoubet 等人 1997）报告。在该研究中，作者指出，流体力学中常见的速度场梯度典型不对称性在太阳风中同样存在。相反，V. Dallas & A. Alexakis (2013) 在磁流体力学模拟中报告的磁场 GTGI 中缺少这一特征，已得到基于 Cluster 和磁层多尺度（MMS）任务所采集数据的众多研究证实（V. Quattrociocchi 等人 2019；B. Hnat 等人 2021年；J. Zhang 等人 2023年；V. Quattrociocchi 等人 2025年）。所有这些研究通过量化局部结构形成的统计特征，为了解湍流系统的性质提供了重要线索，但这些结构与能量传递之间的关系尚未得到充分评估。关于能量传递率与 GTGI 之间相关性的证据揭示了流线结构的局部拓扑如何与局部湍流级联相联系；这一关联已在流体力学领域得到介绍（F. van der Bos 等人（2002）；A.Vela-Martín & J. Jiménez2021；H. Yao 等人（2024））。在空间等离子体领域，B. Hnat 等人 (2025) 评估了磁场中磁力线拓扑与 LET 之间的关键相互作用。他们表明，正 LET（即正向能量级联）与应变主导的磁场结构的出现显著相关，这表明基本过程发挥着关键作用例如磁重联等过程会推动能量级联。所有这些介绍空间等离子体中 GTGI 统计特征的研究还有一个关键之处：它们都依赖不可压缩性假设，而这一假设体现在数据分析所用的 GTGI方程中。在此背景下，本研究旨在实现两个目标：揭示局部流线拓扑与能量传递率之间的密切关系，并考察和比较这种联系在可压缩情形和不可压缩情形中的表现。以上工作均通过分析等离子体湍流的三维霍尔磁流体数值模拟来完成。

2. 梯度张量的几何不变量

本文采用的方法依赖于速度场梯度张量$\boldsymbol{A} = \nabla \boldsymbol{u}$的几何不变量。为定义不变量，我们引入梯度张量的特征多项式。从该多项式的表达式出发，可以定义在 $SO(3)$ 群变换（即旋转和反射）下保持不变的特征量。这些量与矩阵的迹和行列式有关。因此，三个梯度张量几何不变量（GTGIs）为

$$P = -\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \tag{1}$$

$$Q = \frac{1}{2}(P^2 - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^2)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \tag{2}$$

$$R = -\det(\boldsymbol{A}) = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \tag{3}$$

其中 $\lambda_i,\ i = 1 \ldots 3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其中编码了局部流动拓扑的基本信息。将 λ_1 记为实特征值，剩余的一对特征值 $\lambda_2,\ \lambda_3$ 则可能为实数（纯应变）或共轭复数（涡旋运动）。在后一种情况下，$\mathrm{Re}\lambda_{i=2,\ 3}$ 的符号决定局部拓扑是稳定的（$\mathrm{Re}\lambda_{i=2,\ 3} < 0$）还是不稳定的（$\mathrm{Re}\lambda_{i=2,\ 3} > 0$）。当所有特征值均为实数时，稳定性则由 $\lambda_2 + \lambda_3$ 的符号表示，即与主方向正交的平面上的净收缩或膨胀。主特征值 λ_1 的符号表示拓扑是压缩型（$\lambda_1 < 0$）还是拉伸型（$\lambda_1 > 0$）。对于不可压缩流（$P = 0$），无散度约束 $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3)$ 将主方向上的动力学与横向平面耦合起来。因此，不稳定的横向拓扑（$\lambda_2 + \lambda_3 > 0$）必然意味着主方向上以 $-(\lambda_2 + \lambda_3)$ 的速率发生压缩，反之亦然。换言之，所有方向同时发生收缩（“汇”）或膨胀（“源”）的流动构型是不允许的。对于可压缩流（$P \neq 0$），这一约束有所放宽，

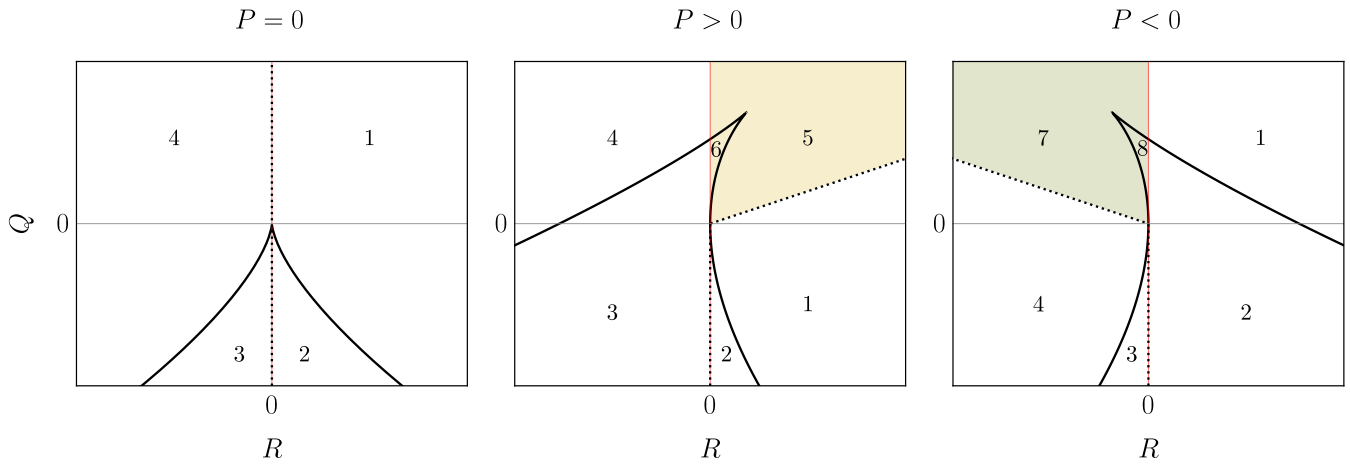

图1。 RQ平面中三种情形下的局部流线拓扑示意图： $P=0$ （左）、 $P>0$ （中）和 $P<0$ （右）。粗线表示判别曲面 Δ。红线标示拉伸区域与压缩区域之间的分界，虚线表示稳定拓扑与不稳定拓扑之间的分界。阴影区域表示仅在可压缩情形下出现的、与局部体积收缩（黄色）和膨胀（绿色）相关的拓扑。

额外的拓扑，例如沿所有方向发生局部体积膨胀或收缩，因而成为可能（S. Suman & S. S. Girimaji 2010；L. Wang &X.-Y. Lu 2012；N.S. Vaghefi & C. K. Madnia 2015；Q. Zheng et al. 2022年）。考虑负散度的情形（$P>0$），可写出条件$\lambda_1 < -(\lambda_2+\lambda_3)$，这意味着不稳定的横向拓扑总是与主方向上强于 $-(\lambda_2+\lambda_3)$ 的压缩相关联，从而阻止局部源的形成。相反，在正散度情形（$P<0$）下，由于此时条件 $\lambda_1 > \lambda_2+\lambda_3$ 成立，沿所有方向同时收缩在局部是不允许的。换言之，稳定的横向拓扑总是与主方向上大于 $\lambda_2+\lambda_3$ 的拉伸速率相关联 λ_1，从而有效防止局部汇的形成。

实解与复解之间的分界面由判别线给出

$$\Delta = 27R^2 + (4P^3 - 18PQ)R + (4Q^3 - P^2Q^2) = 0, \quad (4)$$

在不可压缩情形下，该式化简为

$$\Delta|_{P=0} = 4Q^3 + 27R^2 = 0. \quad (5)$$

该曲面将 RQ平面分为两部分（见图1左图），即 $\Delta|_{P=0} > 0$ 区域，其中存在涡旋式压缩（1）和拉伸（4）结构（一个实特征值和两个共轭复特征值）；以及 $\Delta|_{P=0} < 0$ 区域，其中流线受到纯压缩（2）或纯拉伸（3）应变（三个实特征值）。在 $R=0$ 线上的压缩/拉伸分界，在不可压缩情形下与稳定/不稳定分界线 $PQ-R=0$重合。当 $P>0$时，除（1）至（4）之外， Δ 曲面与稳定/不稳定分界线同时发生改变，后者偏离直线 $R=0$，由此产生两种新的拓扑结构：稳定压缩型涡旋（5）和应变（6）结构，即局部汇（图1 中图）。类似的分析可以解释在 $P<0$ 情形下两种相反拓扑结构的出现（图1右图）：不稳定拉伸型涡旋（7）和应变（8）结构，因此它们充当局部源（N. S. Vaghefi &C. K. Mad-nia 2015）。

3. 粗粒化与能量传递率

为了研究跨越尺度 ℓ的局部能量级联率，我们采用基于空间滤波方法的粗粒化（CG）（M. Germano 1992；G. L.Eyink2005；H. Aluie& G. L. Eyink 2010；H. Aluie 2017；E. Camporeale etal. 2018；D. Manzini etal. 2022；R.Foldes et al. 2024），其中粗粒化采用高斯核 $G_\ell(\boldsymbol{x}) = \ell^{-3}G(\boldsymbol{x}/\ell)$，其均值为零、方差为单位值，即

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{r} G_\ell(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}). \quad (6)$$

由于我们关注的是分析可压缩模拟，对于速度场，我们采用 Favre平均$\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = \overline{\rho u}(\boldsymbol{x})/\bar{\rho}(\boldsymbol{x})$, (A. Favre1975；H. Aluie 2011）。对场 f 进行尺度为 ℓ 的粗粒化后，会产生两种贡献：大尺度场 f_ℓ和亚尺度场$f' = f - \bar{f}_\ell$；后者是原始场中未解析的亚格子尺度（SGS）部分 f。将粗粒化应用于以阿尔芬单位表示的一组 Hall-MHD 方程(H. Aluie 2011，2017年；D. Manzini 等，2022年)，可得到以下亚格子尺度能量传递项（见附录

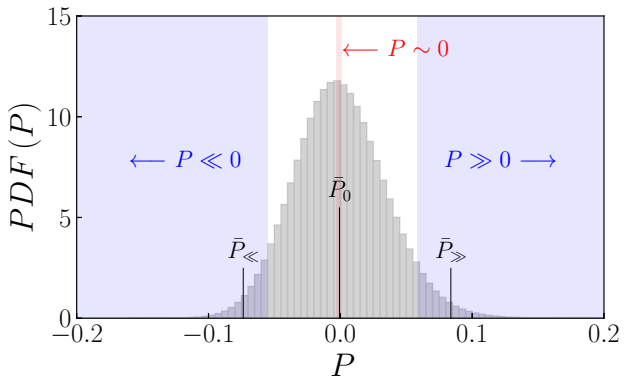

图2. 第一种 GTGI $P = -\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ 的概率密度函数。阴影区域表示 $P \ll 0$、$P \gg 0$（蓝色）和 $P \sim 0$（红色）状态。垂直线表示每个子集内的中位数值 $\bar{P}_{\ll} = -0.06$、$\bar{P}_0 = -1.2\times10^{-3}$ $\bar{P}_{\gg} = 0.07$ 。

A):

$$\pi^{\mathrm{RM}}_{sgs} = -\left[\bar{\rho}\,\tilde{\tau}(u_j,u_k) - \bar{\tau}(b_j,b_k)\right]\partial_k\tilde{u}_j \tag{7}$$

$$\pi^{\mathrm{BPY}}_{sgs} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\,\partial_j\bar{p}\,\bar{\tau}(\rho,u_j) \tag{8}$$

$$\pi^{\mathrm{MHD}}_{sgs} = -\,\mathcal{E}^{\mathrm{MHD}}_j\,\bar{J}_j \tag{9}$$

$$\pi^{\mathrm{Hall}}_{sgs} = -\,d_i\mathcal{E}^{\mathrm{Hall}}_j\,\bar{J}_j, \tag{10}$$

其中 ρ为密度，$\bar{\tau}(f,\ g) = \overline{fg} - f\bar{g}$为尺度 ℓ下的亚格子应力张量，b_k 为磁场，p 为等离子体压力，J_k 为电流密度，d_i 为离子惯性长度，$\mathcal{E}^{\mathrm{MHD}}_k = \epsilon_{jkl}(u_k b_l - \tilde{u}_k\bar{b}_l)$和$\mathcal{E}^{\mathrm{Hall}}_k = \epsilon_{jkl}(J_k b_l/\rho - \bar{J}_k\bar{b}_l/\bar{\rho})$ 分别为磁流体力学和霍尔电动势。雷诺–麦克斯韦（RM）、磁流体力学和霍尔能量传递项与不可压缩情形相同（例如，见 D. Manzini 等，2022年），但需针对密度涨落作适当修正（即 Favre 滤波，以及霍尔项中的 $\bar{\rho}^{-1}$ 因子）。与之不同，斜压功（BPY）是可压缩情形特有的项，源于大尺度压力梯度对湍流质量通量的作用（例如，见 H. Aluie2011）。

4. 结果

我们分析了一个霍尔磁流体力学模拟的三维盒，其中 $b_{rms} = u_{rms} = 0.25$，统计上趋于消失的 u-b 相关性，分辨率为 $d_i/8$，并取固定时刻。数值设置见附录 B。为了区分可压缩涨落与不可压缩涨落的不同性质，我们首先给出第一个速度 GTGI 的统计特征 P，其定义为 $-\nabla\cdot\boldsymbol{u}$，见公式（1）。概率分布函数（概率密度函数）见图2。所得概率分布函数峰值位于 $P\sim0$附近，且略微偏向该不变量的正值（$skew = 0.23$）。我们将其分为三个不同区域：一个代表近不可压缩涨落，另外两个涵盖概率分布函数负尾和正尾中可压缩性最强的涨落。这些阈值设定为 $P \ll 0$ 低于概率分布函数第 5 百分位数，$P \gg 0$高于第 95 百分位数，以及 $P\sim0$ 处于第 47.5 至第 52.5 百分位数之间，如图 2中的阴影区域所示，三种情况的样本量相同。

为评估能量传递率，我们需要设定一个尺度 ℓ，用于对场进行粗粒化。下文将 $\ell = d_i$ 视为特征尺度；湍流级联在该尺度上将能量从大于 d_i 的尺度传递出去，而霍尔项效应和能量耗散则存在于小于 d_i 的尺度。通过这种方式，我们可以评估湍流级联向亚离子尺度传递的直接能量，以及来自与亚离子动力学和霍尔效应相关的亚格子尺度的局部能量。从不可压缩情形出发，我们在图3a中报告了速度场经 $\ell = d_i$ 粗粒化后计算得到的 Q 和 R 的联合概率分布函数。尽管滤除了最小尺度上的耗散动力学，联合概率分布函数仍呈现出显著的不对称性，并倾向于沿判别线 $\Delta|_{P=\bar{P}_0}$（公式（4））向平面中的 $Q<0$ 和 $R>0$ 区域形成长尾。由于 $\bar{P}_0 = -1.2\times10^{-3}$ 相当小，通过计算稳定拓扑 ¯与不稳定拓扑 $P_0Q - R = 0$ 之间的分界线，我们得到一条非常接近 $R=0$ 的曲线，这对应于不可压缩情形（图 3）。随后，我们估算了在 $\ell = d_i$ 下，RQ 平面上的总能量传递率 $\pi_{sgs} = \pi^{\mathrm{RM}}_{sgs} + \pi^{\mathrm{BPY}}_{sgs} + \pi^{\mathrm{MHD}}_{sgs} + d_i\pi^{\mathrm{Hall}}_{sgs}$ 分箱平均值。结果见图3b。联合概率分布函数中仅纳入计数超过 10 的分箱。我们观察到，湍流能量通量相对于局部流线拓扑表现出显著的自组织。直接能量级联以拓扑选择性的方式组织在压缩应变（片状）结构和稳定的拉伸涡旋结构中。相反，负传输率主要与不稳定的压缩型涡结构相关。这些结果与 H. Yao 等人（2024年）报告的近期水动力湍流数值模拟发现十分相似。

然而，如果我们仅考虑可压缩涨落，这种情形就会改变。在图4a-b 中，我们给出了 Q 和 R 以及传输率 π_{sgs} 在 $P \gg 0$情形下的联合概率分布函数。与 $P\sim0$ 情形相比，此处的联合概率分布函数发生了畸变，并沿着判别¯线 $\Delta|_{P=\bar{P}_{\gg}}$变化，其中 $P_{\gg} = 0.07$取为 $P \gg 0$ 区域右尾部的中位数值，如图2所示。在 RQ平面上按区间求平均的能量传递率大多呈正值

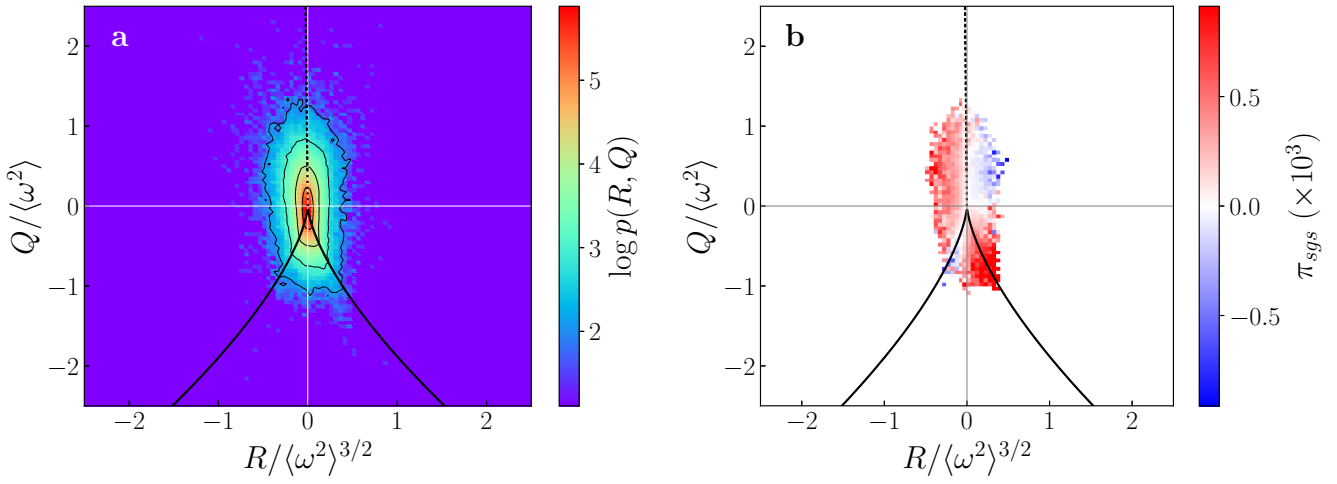

图3. Q和 R几何张量梯度不变量的联合概率密度函数 (a)，以及 $P \simeq 0$条件下 RQ平面上的平均能量传递率 (b)。GTGI 数值按涡量平方 $\langle\omega^2\rangle$ 的幂次归一化。粗黑线表示 $\bar{P}_0 = -1.2 \times 10^{-3}$ 的判别式，点线表示 $\bar{P}_0 Q - R = 0$ 曲线。

，而不可压缩情形中观察到的拓扑选择明显减弱（即，在 RQ平面上拓扑的变化并不对应能量传递方向的逆转）。π_{sgs} 的最小值沿着 $PQ - R = 0$ 判别线排列，该线将不稳定压缩型涡结构（1）与体积收缩拓扑（5）分隔开来。在 $P \ll 0$ 情形下也得到类似但相反的结果。在图 4c-d 中，我们展示了 Q 和 R 以及传输率π_{sgs}的联合概率分布函数；相对于 $P \gg 0$ 情形，该概率密度函数向相反方向发生畸变。其形状沿着判别线 $\Delta|_{P=\bar{P}_{\ll}}$，方程（4），变化，其中 $P_{\ll} = -0.06$ 是图 $P \ll 0$ 2 中所示区域左尾部的中位数值。总传递率也表现出相反的行为：在平面上几乎处处趋于形成逆向传递，但沿着 $PQ - R = 0$ 分界线时明显减弱。我们还观察到，沿着 Vieille-fosse 尾部，π_{sgs} 的值几乎为零，其中还有少数区间的值略为正。在可压缩区域，由P 主导级联方向可解释为一种几何效应：容纳一定能量的体积局部收缩（膨胀），会将这部分能量推向较小（较大）尺度。换言之，体积压缩本身就充当了跨尺度传递机制。

5. 讨论与结论

在这封信中，我们阐明了不可压缩和可压缩等离子体区域中局部流线拓扑与亚格子尺度能量传输率之间的联系。在近不可压缩区域，SGS能量传递会与 RQ平面内的流线拓扑自组织：应变压缩结构和涡旋拉伸结构与朝向小尺度的正向传递率相关，而应变拉伸结构和涡旋压缩结构则显示出能量从小尺度净反向传递。这些结果针对特定的 $\ell = d_i$选择给出，但在向惯性尺度或亚离子尺度推进时，也能观察到类似特性。事实上，空间滤波方法中对传输率π_{sgs} 的精确计算并不依赖亚格洛姆定律或其他模型，因此适用于任意粗粒化尺度（H. Aluie 2017年；D. Manzini 等，2022年）。我们的结果清楚地凸显了速度场在驱动大尺度能量传递率方面的首要作用；对于近不可压缩涨落，其组织方式呈现出明显的拓扑选择性。

对于可压缩子集，自组织作用减弱，传递方向主要由局部体积压缩（$P > 0$）或膨胀（$P < 0$）控制，因此压缩区域中以正向传递（$\pi_{sgs} > 0$）为主，而膨胀区域中则以逆向传递（$\pi_{sgs} < 0$）为主。尽管第一不变量 P 的符号决定了总体积压缩或膨胀，但它不能唯一确定局部流线拓扑，后者取决于各个特征值。因此，压缩子集和膨胀子集仍以不同拓扑构型共存为特征，例如图 1中的类型（1）至（4）；不过，能量传递方向主要由P的符号控制。以往研究表明，在动理学尺度上，整体能量和磁能的转换由压力-应变相互作用驱动（Y. Yang 等人 2016年，2017年；D. Del Sarto 和 F. Pegoraro 2018年；W. H. Matthaeus 等人 2020年；O. Pezzi 等人 2021年；Y. Yang 等人 2022年；S.

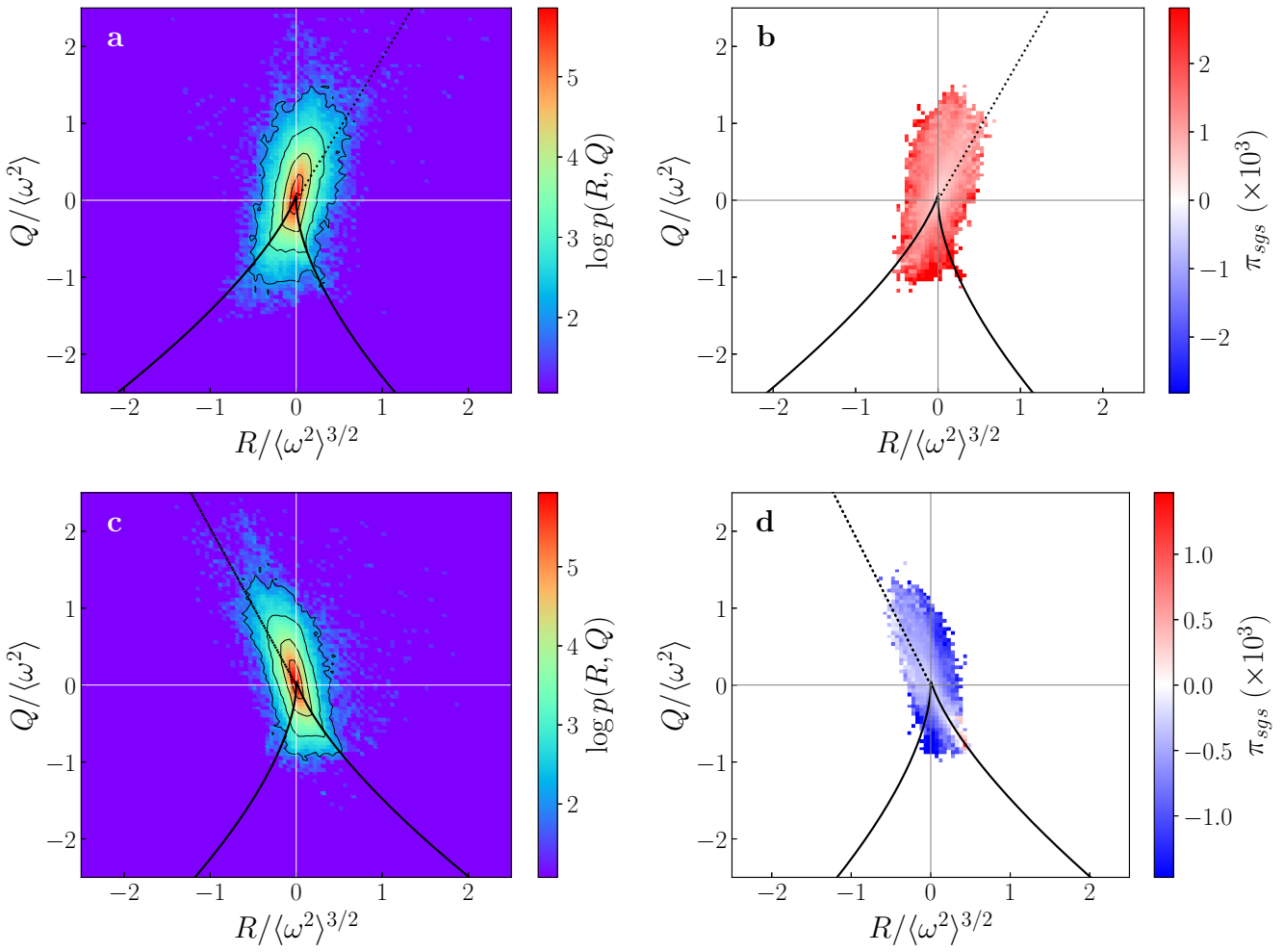

图 4. $P \gg 0$对应的 RQ平面中 Q 和 R 几何张量梯度不变量的联合概率密度函数 (a) 及平均能量传递率 (b)。粗黑线为 $\bar{P}_{\gg} = 0.07$ 得到的判别线，虚线表示 $\bar{P}_{\gg}Q - R = 0$ 曲线。 $P \ll 0$对应的 RQ平面中 Q 和 R 几何张量梯度不变量的联合概率密度函数 (c) 及平均能量传递率 (d)。粗黑线为 $\bar{P}_{\ll} = -0.06$ 得到的判别线，虚线表示 $\bar{P}_{\ll}Q - R = 0$ 曲线。几何张量梯度不变量的取值按涡量平方的 $\langle\omega^2\rangle$次幂归一化。

Roy 等人（2025）；P. Hellinger 和 S. Landi 2025年），其中可压缩部分通常起次要作用。本文通过展示在磁流体/离子尺度上可压缩涨落变得显著的区域，补充了相关信息：这些涨落可作为湍流能量的跨尺度传递机制。

从更广泛的角度来看，我们的研究结果表明，速度广义拓扑几何指标包含有关近不可压缩涨落的能量通量符号的预测信息，这与近不可压缩阿尔芬流中通常观察到的正向和逆向能量传递共存现象有关´（C. W. Smith 等人（2009）；J. T. Coburn 等人（2014））。流线拓扑与能量传递率之间观察到的强相关性，与此前在不可压缩水动力湍流情形中的观测结果高度相似（F. van der Bos 等人（2002）；H. Yao 等人（2024）），从而将其推广到了更一般且仍未被探索的可压缩情形下的霍尔磁流体等离子体湍流。在可压缩区域中，我们确实观察到能量传递的拓扑选择减弱，因为π_{sgs} 的总体符号由 P 的符号决定（或等价地，由 $-\nabla\cdot\boldsymbol{u}$决定）。

从实验角度研究与磁力线拓扑相关的级联率需要多点探测星座，并且原则上可以通过 Cluster 或 MMS 等任务进行评估。最近，B. Hnat 等人（2025年）基于 Cluster 数据开展了此类工作，作者通过展示正级联率与应变主导的磁场结构占优势相关联，得出结论认为磁场拓扑在能量传递率中发挥着作用。这一结果支持了重联电流片在驱动能量级联向小尺度发展的重要性，并得到了数值研究的进一步支持，从而推动了能量级联向小尺度发展。

这一结果也得到了多项数值研究的支持（L. Franci 等人 2017年；D. Manzini 等人 2023年；R. Foldes 等人 2024 年）。关于磁重联在数值模拟中磁力线结构自组织过程中的具体作用，将作为未来的研究课题。

本文所阐述的能量级联的全部动力学过程，都将极大受益于对不同空间尺度的同步探测。要在不同尺度上检验我们的结果，唯一的途径是研制未来的多尺度星座，例如 Helioswarm（K. G. Klein 等，2023年）以及提议中的等离子体观测站任务（J. Rae 等，2022年；A. Retin`o 等，2022年），以便在日球层和磁层等离子体中原位同步探测不同尺度。面对未来多点、多尺度星座不断扩充的趋势，我们强调，应将借助 GTGI 研究流线拓扑作为等离子体湍流研究的一项标准诊断手段，其重要性至关根本。事实上，LET 虽然能够提供有关能量级联局部方向的重要见解，但对几何张量梯度不变量的研究还补充了一个根本信息，即哪些类型的结构正在局部传递能量，从而能够更全面地认识空间等离子体中的湍流级联。

致谢

本研究部分得到意大利航天局（ASI）根据协议 ASI-INAF“等离子体观测站任务 A 阶段活动” F83C24000690001 的资助。A.V. 和 G.C. 感谢欧盟“下一代欧盟”国家复苏与韧性计划（NRRP）M4C2 投资 1.1—PRIN 2022（D.D. 104 del 2/2/2022）项目“行星际日冕物质抛射建模”提供的部分经费支持，大学与研究部代码为 31. 2022M5TKR2，统一项目代码为 B53D23004860006 和 C53D23001190006。本研究还获得了佛罗伦萨储蓄银行基金会 HIPER-CRHEL 项目的部分资助。E.P. 感谢 CINECA 和意大利国家天体物理研究所授予其使用高性能计算资源的权限，该资源由“新天体物理前沿：新一代高性能计算与数据探索联合研究活动框架协议谅解备忘录”协调（项目 INA23 C9A10）。

-

参考文献

Aluie, H. 2011年，《Physical Review Letters》，106，174502，doi：10.1103/PhysRevLett.106.174502Aluie, H. 2017年，《New Journal of Physics》，19，025008，doi：10.1088/1367-2630/aa5d2fAluie, H.，& Eyink, G. L. 2010，《Physical Review Letters》，104，081101，doi：10.1103/PhysRevLett.104.081101Biferale, L.，Chevillard, L.，Meneveau, C.，& Toschi,F. 2007年，《Physical Review Letters》，98，214501，doi：10.1103/PhysRevLett.98.214501Bruno, R.，& Carbone, V. 2016年，《太阳风中的湍流》，第928卷，doi：10.1007/978-3-319-43440-7Burch, J. L.，Moore, T. E.，Torbert, R. B.，& Giles, B. L. 2016年，《Space Science Reviews》，199，5，doi：10.1007/s11214-015-0164-9Camporeale, E.，Sorriso-Valvo, L.，Califano, F.，& Retin`o, A. 2018年，《Physical Review Letters》，120，125101，doi：10.1103/PhysRevLett.120.125101Chertkov, M.，Pumir, A.，& Shraiman, B. I. 1999年，《流体物理学》，11，2394，doi：10.1063/1.870101Coburn, J. T.，Smith, C. W.，Vasquez, B. J.，Forman, M. A.，& Stawarz, J. E. 2014年，《天体物理学杂志》，786，52，doi：10.1088/0004-637X/786/1/52

Consolini, G., Materassi, M., Federica Marcucci, M., & Pallocchia, G. 2015,《天体物理学杂志》, 812, 84, doi: 10.1088/0004-637X/812/1/84Dallas, V., & Alexakis, A. 2013,《流体物理学》, 25, 105106, doi: 10.1063/1.4824195Del Sarto, D., & Pegoraro, F. 2018,《皇家天文学会月刊》, 475, 181, doi: 10.1093/mnras/stx3083Escoubet, C. P., Schmidt, R., & Goldstein, M. L. 1997,《Space Science Reviews》, 79, 11, doi:10.1023/A:1004923124586Eyink, G. L. 2005,《物理学 D：非线性现象》, 207, 91, doi: 10.1016/j.physd.2005.05.018Favre, A. 1975, 载于：CANCAM 75；第五届加拿大应用力学大会论文集，G3–G34 Foldes, R.,Cerri,S. S., Marino, R., & Camporeale, E.2024,《Physical Review E》, 110, 055207, doi: 10.1103/PhysRevE.110.055207Franci, L., Landi, S., Verdini, A., Matteini, L., & Hellinger, P. 2018,《天体物理学杂志》, 853, 26, doi: 10.3847/1538-4357/aaa3e8Franci, L., Cerri, S. S., Califano, F., et al. 2017,《天体物理学杂志快报》, 850, L16, doi: 10.3847/2041-8213/aa93fbGermano, M. 1992,《流体力学杂志》, 238, 325, doi: 10.1017/S0022112092001733Hellinger, P., & Landi, S. 2025,《天文学与天体物理学》, 704, A131, doi: 10.1051/0004-6361/202556752

Hnat, B., Chapman, S. C., Liptrott, C. M., & Watkins, N. W. 2025, 《Physical Review Research》, 7, 043058, doi: 10.1103/9wb2-r437 Hnat,B., Chapman,S. C.,& Watkins, N. W.2021, 《Physical Review Letters》, 126, 125101, doi: 10.1103/PhysRevLett.126.125101 Klein, K. G., Spence, H., Alexandrova, O., et al. 2023, 《Space Science Reviews》, 219, 74, doi: 10.1007/s11214-023-01019-0 Manzini, D., Sahraoui, F., & Califano, F. 2023, 《Physical Review Letters》, 130, 205201, doi: 10.1103/PhysRevLett.130.205201 Manzini, D., Sahraoui,F., Califano, F.,&Ferrand, R. 2022, 《Physical Review E》, 106, 035202, doi: 10.1103/PhysRevE.106.035202 Marino, R., & Sorriso-Valvo, L. 2023, 《Physics Reports》, 1006, 1, doi: 10.1016/j.physrep.2022.12.001 Matthaeus, W. H., Yang, Y., Wan, M., et al. 2020, 《天体物理学杂志》, 891, 101, doi: 10.3847/1538-4357/ab6d6a Meneveau, C. 2011, 《流体力学年度评论》, 43, 219, doi: 10.1146/annurev-fluid-122109-160708 Montagud-Camps, V., Nˇemec, F., ˇSafr´ankov´a, J., et al. 2021, 《At mosphere》, 12, 1162, doi: 10.3390/atmos12091162 Pezzi, O., Liang, H., Juno, J. L., et al. 2021, 《皇家天文学会月刊》, 505, 4857, doi: 10.1093/mnras/stab1516 Politano, H., & Pouquet, A. 1998, 《Physical Review E》, 57, R21, doi: 10.1103/PhysRevE.57.R21 Quattrociocchi, V., Consolini, G., Marcucci, M. F., & Materassi, M. 2019, 《天体物理学杂志》, 878, 124, doi: 10.3847/1538-4357/ab1e47 Quattrociocchi, V., Consolini, G., Materassi, M., Verdini, A., & Papini, E. 2025, 《混沌、孤子与分形》, 191, 115900, doi: 10.1016/j.chaos.2024.115900 Rae, J., Forsyth, C., Dunlop, M., et al. 2022, 《实验天文学》, 54, 391, doi: 10.1007/s10686-022-09861-w Retin`o, A., Khotyaintsev, Y., Le Contel, O., et al. 2022, 《实验天文学》, 54, 427, doi: 10.1007/s10686-021-09797-7 Roy, S., Bandyopadhyay, R., Adhikari, S., Yang, Y., & Matthaeus, W. H. 2025, 《等离子体物理学》, 32, 112302, doi: 10.1063/5.0278907 Smith, C. W., Stawarz, J. E., Vasquez, B. J., Forman, M. A., & MacBride, B. T. 2009, 《Physical Review Letters》, 103, 201101, doi: 10.1103/PhysRevLett.103.201101 Sorriso-Valvo, L., Perrone, D., Pezzi, O., et al. 2018, 《等离子体物理学杂志》, 84, 725840201, doi: 10.1017/S0022377818000302 Sorriso-Valvo, L., Catapano, F., Retin`o, A., et al.2019,《Physical Review Letters》, 122, 035102, doi: 10.1103/PhysRevLett.122.035102Stawarz, J. E., Smith, C. W., Vasquez, B. J.,Forman, M. A., & MacBride,B. T.2010, 《天体物理学杂志》, 713, 920, doi: 10.1088/0004-637X/713/2/920Suman, S., & Girimaji, S. S.2010, 湍流杂志, 11, 2, doi:10.1080/14685241003604751Vaghefi, N. S., & Madnia, C. K. 2015, 《流体力学杂志》, 774, 67, doi:10.1017/jfm.2015.235van der Bos, F., Tao, B., Meneveau, C., & Katz,J. 2002, 《流体物理学》,14, 2456,doi: 10.1063/1.1472506Vela-Mart´ın, A.,& Jim´enez, J. 2021, 《流体力学杂志》, 915, A36, doi:10.1017/jfm.2021.105Vieillefosse, P.1982, 物理学杂志, 43, 837, doi: 10.1051/jphys:01982004306083700Vieillefosse, P.1984, Physica A统计力学及其应用, 125, 150, doi: 10.1016/0378-4371(84)90008-6Wang, L.,& Lu, X.-Y. 2012, 《流体力学杂志》, 703, 255, doi: 10.1017/jfm.2012.212Yang, Y., Matthaeus, W. H., Roy, S., et al. 2022,《天体物理学杂志》, 929, 142, doi: 10.3847/1538-4357/ac5d3eYang, Y., Matthaeus, W. H., Shi,Y., Wan, M.,& Chen,S. 2017, 《流体物理学》, 29,035105, doi: 10.1063/1.4979068Yang, Y., Shi, Y., Wan, M., Matthaeus, W. H.,& Chen,S. 2016, 《Physical Review E》, 93, 061102, doi: 10.1103/PhysRevE.93.061102Yao, H., Schnaubelt, M., Szalay, A. S., Zaki, T. A.,& Meneveau, C. 2024, 《流体力学杂志》, 980, A42, doi: 10.1017/jfm.2023.1066Zhang, J., Huang, S.Y., Sahraoui, F., etal. 2023, Journalof Geophysical Research(Space Physics), 128,e2022JA031064,doi: 10.1029/2022JA031064Zheng, Q., Yang, Y., Wang,J., & Chen, S. 2022, 《流体力学杂志》, 950, A21, doi: 10.1017/jfm.2022.742

附录

A. 粗粒化可压缩霍尔磁流体力学方程

在本研究中，我们使用可压缩霍尔磁流体力学方程经粗粒化后产生的亚格子尺度能量传递项。本节总结所有能量传递项的推导过程，这些项记作 π_{sgs}。可压缩霍尔磁流体力学方程组包括连续性方程

$$\partial_t \rho + \partial_j(\rho u_j) = 0, \tag{A1}$$

动量方程

$$\partial_t(\rho u_j) + \partial_k\left[\rho u_j u_k + \left(p + \frac{b^2}{2}\right)\delta_{jk} - b_j b_k\right] = \mathcal{D}_j^{(u)}, \tag{A2}$$

以及感应方程

$$\partial_t b_j = \epsilon_{jkl}\partial_k\left[\epsilon_{lmn}u_m b_n - d_i\epsilon_{lmn}\frac{J_m b_n}{\rho}\right] + \mathcal{D}_j^{(b)}. \tag{A3}$$

在这些方程中， d_i 表示离子惯性长度，而 $\mathcal{D}_j^{(u)}$ 、 $\mathcal{D}_j^{(b)}$ 表示未明确写出的耗散项，因为它们不会对亚格子尺度（SGS）能量传递产生贡献。通过使用高斯核对方程进行滤波，¯我们用 f 表示场 f 的滤波版本，用 $\tilde{u}_i = \rho u_i/\bar{\rho}$ 表示速度¯场的Favre滤波版本。接着，我们定义应力张量 $\bar{\tau}(f,\ g) = fg - \overline{f}\,\overline{g}$以及速度场$\tilde{\tau}$的Favre滤波版本$(u_i,\ u_j) = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i\tilde{u}_j$。可压缩霍尔磁流体力学方程的粗粒化形式为

$$\partial_t\bar{\rho} + \partial_j(\bar{\rho}\,\tilde{u}_j) = 0 \tag{A4}$$

对于连续性方程，则有

$$\partial_t(\bar{\rho}\,\tilde{u}_j) + \partial_k\left[\bar{\rho}\,\tilde{u}_j\tilde{u}_k + \left(\bar{p} + \frac{\bar{b}^2}{2}\right)\delta_{jk} - \bar{b}_j\bar{b}_k\right] = -\partial_k[\bar{\rho}\,\tilde{\tau}(u_j,u_k) - \bar{\tau}(b_j,b_k)] + \overline{\mathcal{D}}_j^{(u)} \tag{A5}$$

对于动量方程，以及

$$\partial_t\bar{b}_j = \epsilon_{jkl}\partial_k\left[\epsilon_{lmn}\left(\tilde{u}_m\bar{b}_n - d_i\frac{\bar{J}_m\bar{b}_n}{\bar{\rho}}\right) + \mathcal{E}_l^{\mathrm{MHD}} - d_i\mathcal{E}_l^{\mathrm{Hall}}\right] + \overline{\mathcal{D}}_j^{(b)} \tag{A6}$$

对于感应方程。其中，$\mathcal{E}_l^{\mathrm{MHD}} = \epsilon_{lmn}u_m b_n - \epsilon_{lmn}\overline{\tilde{u}_m b_n}$和$\mathcal{E}_l^{\mathrm{Hall}} = \epsilon_{lmn}J_m b_n/\rho - \epsilon_{lmn}\overline{\bar{J}_m\bar{b}_n/\bar{\rho}}$分别表示¯磁流体力学和霍尔电动势。将A5式应用于 $\tilde{u}_j$ ，并将A6式应用于 b_j，即可计算动能和磁能的变化率。引入包含所有可写成空间通量（即散度形式）贡献的项 $\mathcal{F}_j$ 后，可得总能量平衡为

$$\partial_t(\bar{E}_u + \bar{E}_b) + \partial_k\mathcal{F}_k = -\bar{p}\,\partial_j\bar{u}_j - \pi_{sgs} + \tilde{u}_j\overline{\mathcal{D}}_j^{(u)} + \bar{b}_j\overline{\mathcal{D}}_j^{(b)}, \tag{A7}$$

其中，空间通量项为

$$\mathcal{F}_k = \bar{E}_u\tilde{u}_k + \bar{p}\bar{u}_j\delta_{jk} + \frac{\bar{b}^2}{2}\tilde{u}_j - \tilde{u}_j\bar{b}_j\bar{b}_k - d_i\epsilon_{jkl}\frac{\epsilon_{lmn}\bar{J}_m\bar{b}_n}{\bar{\rho}}\bar{b}_l + \bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{\tau}(u_j,u_k) - \tilde{u}_j\bar{\tau}(b_j,b_k) - \bar{J}_k(\mathcal{E}_k^{\mathrm{MHD}} + d_i\mathcal{E}_k^{\mathrm{Hall}}) \tag{A8}$$

亚格子尺度能量传递项为

$$\pi_{sgs} = -[\bar{\rho}\,\tilde{\tau}(u_j,u_k) - \bar{\tau}(b_j,b_k)]\,\partial_k\tilde{u}_j - \frac{1}{\bar{\rho}}\,\partial_j\bar{p}\,\bar{\tau}(\rho,u_j) - \mathcal{E}_j^{\mathrm{MHD}}\,\bar{J}_j - d_i\mathcal{E}_j^{\mathrm{Hall}}\,\bar{J}_j = \pi_{sgs}^{\mathrm{RM}} + \pi_{sgs}^{\mathrm{BPY}} + \pi_{sgs}^{\mathrm{MHD}} + d_i\pi_{sgs}^{\mathrm{Hall}}. \tag{A9}$$

上标索引分别表示雷诺-麦克斯韦（RM）应力张量、压强-密度功（BPY）、磁流体力学（MHD）以及霍尔亚格子尺度能量传递率。

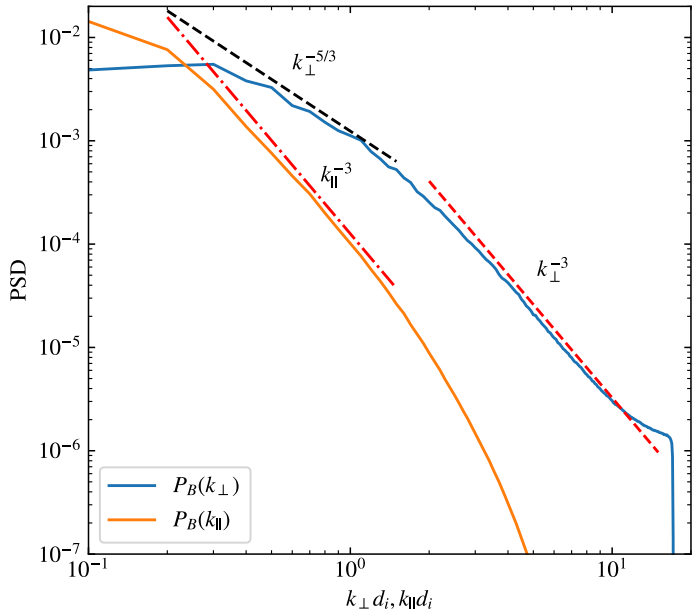

图 5. 相对于平均磁场的磁场涨落的一维垂直和沿平行方向的约化谱。虚线和点划线分别表示惯性区和霍尔区的典型预期斜率，作为参考。

B. 数值设置

在本研究中，我们采用一种伪谱代码来求解可压缩黏性-电阻性霍尔磁流体方程（V. Montagud-Camps 等，2021年）。在该代码中，所有物理量均按照特征长度 $L = d_i$（设为离子惯性长度）、等离子体密度 ρ_0、磁场强度 B_0 和压力 $P_0 = \rho_0 c_A^2$ 进行归一化（其中 $c_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$ 为阿尔芬速度）。动力黏度 μ 和磁电阻率 η 的单位分别为 $d_i c_A \rho_0$ 和 $d_i c_A$。模拟盒为一个边长为 $20\pi d_i$ 的立方体，采用周期性边界。计算使用 512^3 个网格点，对应三个方向上的空间分辨率均为 0.1227 d_i。沿 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向存在一个平均背景磁场，即 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\hat{\boldsymbol{x}}$。模拟初始条件为一个涨落谱，其振幅恒定、相位随机且交叉螺度为零（L. Franci 等，2018年）。磁场和速度涨落的振幅设置为使其均方根为 $B_{rms} = u_{rms} = 0.25$。最后，我们设定等离子体 $\beta = 2P_0/B_0^2 = 2$, $\nu = \eta = 10^{-3}$，对应的雷诺数为 4000。模拟演化过程类似于经典的阿尔芬衰减湍流模拟。本研究所用数据集对应于湍流充分发展时取得的模拟快照。磁场涨落的约化一维功率谱见图 5，其谱性质与 L. Franci 等（2018年）针对湍流开展三维混合数值模拟所得结果相似。具体而言，平行一维约化谱呈现斜率 $\sim k_\parallel^{-3}$；垂直约化一维谱则显示出一个惯性区，$\sim k_\perp^{-5/3}$ 低于 $k_\perp d_i = 1$，随后在亚离子尺度呈现 $\sim k_\perp^{-3}$ 趋势。