arXiv:2601.06009v1 [stat.ML] 9 Jan 2026

利用非参数游程定理检测离散信号中的随机性

Sunia Tanweer[1], [2*] Firas A. Khasawneh[2]

1. 密歇根州立大学机械工程系 2. 密歇根州立大学计算数学、科学与工程系

摘要

我们提出一个实用框架，仅利用单条离散时间序列区分扩散随机过程与确定性信号。我们的方法基于连续半鞅的经典越界与穿越定理，该定理将幅度至少为ε 的游程数 N_ε 与过程的二次变差 $[X]_T$ 联系起来。对于所有具有有限二次变差的连续半鞅，该标度律普遍成立，其中包括具有非线性或状态相关波动率的一般伊藤扩散；但对于确定性系统，该定律则明显失效。因此，相较于依赖主观熵或复现的当前先进方法，我们的方法提供了一种具有理论保证的手段，用于区分这两类动力学。我们构建了一种稳健的数据驱动扩散检验。该方法将经验游程计数与理论期望进行比较。随后，通过双对数斜率偏差概括所得比率 $K(\varepsilon) = N_\varepsilon^{\mathrm{emp}}/N_{\text{理论}\varepsilon}$，以衡量 ε^{-2} 律，并据此将系统分类为扩散型或非扩散型。我们在典型随机系统、若干周期映射和混沌映射、含加性白噪声的系统以及随机杜芬系统上展示了该方法。此方法是非参数、无模型的，仅依赖连续半鞅普遍存在的小尺度结构。

关键词： 随机扩散、离散时间序列、二次变差、半鞅、游程统计

1 引言

判断离散时间信号究竟源于确定性混沌还是随机动力学，这一问题数十年来一直受到研究 [1–3]。早期方法，如关联维数、李雅普诺夫指数和经典替代数据检验，奠定了理论基础，但如今人们认识到，这些方法在数据较短、存在噪声和非平稳性的情况下并不可靠 [3, 4]。因此，现代研究着重于有限样本、抗噪的诊断方法，直接针对观测序列开展分析 [5, 6]。

近期的研究成果可归纳为若干方法类别。序数模式与排列熵方法量化秩序排列的统计特性，通常通过熵-复杂度表示区分混沌动力学与随机动力学。这类方法包括多尺度扩展、模糊排列熵，以及神经网络辅助排列熵映射 [3, 5, 7]。基于复现的方法利用复现结构中的几何或时间不对称性，其中包括近期运用复现图检测随机性的研究

*tanweer1@msu.edu

[8]。基于网络的方法将时间序列映射为图，例如序数转移网络以及可见性图／水平可见性图，并通过非均匀转移模体或偏离普适随机图统计量的现象来检测确定性特征 [9–11]。信息论与高维扩展包括局部结构熵（LSE），它将序数分析扩展至相关系统或多变量系统，并已在区分混沌与结构化随机过程方面展现出优异表现 [12]。最后，基于机器学习的分类器，包括基于序数特征构建的人工神经网络模型，以及直接使用原始信号训练的深度神经网络，在短序列的判别准确率方面表现出色，但往往需要以牺牲可解释性为代价，并依赖具有代表性的训练语料库 [5, 6]。

尽管在经验上取得了成功，现有区分混沌与随机性的方案在方法论上有一个共同特点：它们本质上是数据驱动的诊断方法，而非由理论决定的方法。序数模式 [3], 排列熵 [5], 复现 [1], 以及基于网络的 [9, 10] 方法，都依赖于辅助构造——例如时间延迟嵌入、符号划分、复现阈值或图表示——这些构造引入了多个超参数，其选择带有主观性，且往往取决于具体系统。在实践中，分类结果可能随嵌入维数、延迟时间、尺度或阈值的选择而显著变化，尤其是在信号较短、含噪或非平稳时。符号方法和图形方法还需要对图表或聚类趋势作出主观解读，而基于机器学习的分类器则依赖有代表性的训练数据、架构选择，以及测试信号与训练语料库属于同一分布类别这一假设。因此，即使是准确率很高的经验方法，通常也缺乏普适性、可解释性，以及跨系统迁移的可迁移性保证。

这些局限促使人们开发直接立足于随机过程理论的互补方法。与基于经验模式的诊断方法不同，本文提出的方法以关于连续半鞅及其游程统计的严格结果为依据 [13]。该方法直接作用于观测到的时间序列，无需嵌入、符号离散化、图形表示或模型训练，其理论预测由二次变差等内在的路径量决定。因此，这一框架提供了一种有理论依据且与系统无关的判据，用于检测随机扩散，并为现有的经验方法提供了一种具有理论可解释性的替代方案。随机过程中的游程理论在数学上十分丰富 [14, 15], ，经典结果描述了在各种结构假设下水平穿越或游程的期望数量。奠基性贡献包括 Rice公式（用于计算平稳高斯过程中水平穿越的期望数量） [16], 、Ito [17] 和 Ylvisaker [18], 对其所作的扩展，以及 Leadbetter 和 Cryer 将其推广至平稳和非平稳情形 [19, 20]。后续研究还探讨了其他随机过程，例如 Ivanov 的工作 [21], ， 以及离散时间一阶马尔可夫序列；针对后者，Zekai Sen 推导出了向上穿越分布的递归刻画 [22]。这些经典的游程结果构成了随机系统中水平穿越行为的统计基础。本文将采用近期发表的 Ito过程游程结果 [13]。

2 数学背景

2.1 随机动力系统

常微分方程（ODE）是对连续变化建模的主要工具。它们描述系统状态在任意给定时刻的变化率，使我们能够预测其确定性演化。然而，许多现实世界的系统会受到随机波动的影响，因此其行为本质上具有随机性，需要使用随机微分方程。

随机微分方程（SDEs）通过引入将随机性纳入模型的项，弥合了常微分方程（ODEs）与随机性之间的差距。不同于只有一条解轨迹的常微分方程（ODEs），随机微分方程（SDEs）

具有一族可能的解。每个解都代表系统以一定概率可能采取的一条路径。我们用向量 $X_t \in \mathbb{R}^n$ 表示系统在时间 t 的状态。漂移项 μ_t 捕捉系统演化中的确定性分量，类似于常微分方程（ODE）的右端，而扩散项 Ω_t 乘以标量布朗运动 W_t（标准维纳过程 $W_t \sim N(0,\ t)$），将随机性注入方程中。

在方程中引入随机性项，会导致对所得随机微分方程的两种主要数学解释——Ito 解释和斯特拉托诺维奇解释，其定义分别依据

$$dX_t = \mu_t\,dt + \Omega_t\,dW_t \quad \text{(Ito)}; \qquad\qquad dX_t = \mu_t\,dt + \Omega_t \circ dW_t \quad \text{(Stratonovich)}.$$

这两种解释只是采用了具有不同数学性质的不同方法来求解数学方程，通常会得到不同的结果。例如，斯特拉托诺维奇解释在进行变量替换时遵循普通的链式法则，而 Ito 公式则会产生二阶项。另一方面，与 Ito 积分不同，斯特拉托诺维奇积分不是鞅（见第 2.2 节），因此 Ito 解释具有重要的计算优势。本文仅采用 Ito 解释。

2.2 局部鞅与半鞅

设 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个滤过概率空间，并设 $\mathcal{F}^*:=(\mathcal{F}_t)_{(t\geq 0)}$ 是 $\mathcal{F}$ 的滤过。若 $M\colon [0,\infty]\times\Omega \to \mathbb{R}$ 是一个 $\mathcal{F}^*$-适应过程，则称其为 $\mathcal{F}^*$-局部鞅，如果存在一列停时 τ_k，使得

1. τ_k 几乎必然递增，即 $\mathbb{P}(\tau_k < \tau_{k+1}) = 1$;
2. τ_k 几乎必然发散，即 $\mathbb{P}(\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty) = 1$;
3. 过程 $M_{t\wedge\tau_k}$是一个 $\mathcal{F}^*$-鞅，即对于所有 $s < t$， $\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau_k} \mid \mathcal{F}_s] = M_{s\wedge\tau_k}$。

另一方面，半鞅 X_t 是一种可分解为局部鞅 M_t 与有限变差过程 A_t之和的过程。半鞅是能够定义 Ito 积分和斯特拉托诺维奇积分的最大一类过程。所有 Ito 过程都是半鞅，但斯特拉托诺维奇过程未必是半鞅。

2.3 连续半鞅的游程理论

设 $(X_t)_{t\ \in[0,T]}$ 是一个实值连续半鞅，其典范分解为

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

其中， X_0 是初始值， M_t 是连续局部鞅， A_t 是有限变差漂移。其二次变差为 $[X]_T = \langle M\rangle_T$

令 $N_\varepsilon(X)$ 表示振幅至少为 ε 的游程或振荡的数量。则有如下结果。

定理 2.1 (连续半鞅的游程定律 [13])。 设 X 是一个具有有限二次变差 $[X]_T < \infty$ 的连续半鞅。那么

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 N_\varepsilon(X) = \frac{[X]_T}{2} \qquad in\ L^1.$$

换言之，

$$N_\varepsilon(X) = \frac{[X]_T}{2\varepsilon^2}\big(1 + o(1)\big).$$

该定理适用于所有连续伊藤扩散

$$dX_t = \mu(X_t, t)\, dt + \sigma\Omega(X_t, t)\, dW_t,$$

包括非线性噪声、乘性噪声和状态依赖噪声。确定性系统不满足ε^{-2} 定律，因为其二次变差在连续极限下为零。

3 方法

3.1 二次变差估计

给定离散观测 X_{t_i}，我们估计二次变差和依赖于过程的理论曲线，具体如下

$$\widehat{[X]}_T = \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad \text{and} \quad N_\varepsilon^{\text{theory}} = \frac{\widehat{[X]}_T}{2\varepsilon^2}.$$

同样，给定信号，我们也可以计算越界次数的经验值，即 $N_\varepsilon^{\text{emp}}$。

3.2 越界不变统计量

对于各种 ε，我们计算 $K(\varepsilon) = N_\varepsilon^{\text{emp}}/N_{\text{理论}\varepsilon}$.扩散必须满足 $K(\varepsilon) \approx 1$，且在不同尺度下均成立。我们选取满足此条件的一段 ε ，然后计算 s——通过拟合 $\log N_\varepsilon \sim s \log \varepsilon$. 伊藤驱动随机信号必须满足 $s \approx -2$, 而确定性信号的值通常较小，因为与扩散驱动信号相比，其游程更少。图1 展示了纯布朗运动蒙特卡洛模拟所得斜率的分布。直方图证实，斜率主要集中在 -2附近，表明所提出的方法能够正确识别伊藤扩散。我们还根据直方图确定了上下阈值 -2.5 和 -1.0，以应对现实世界信号离散化和数字化特性所引起的误差。

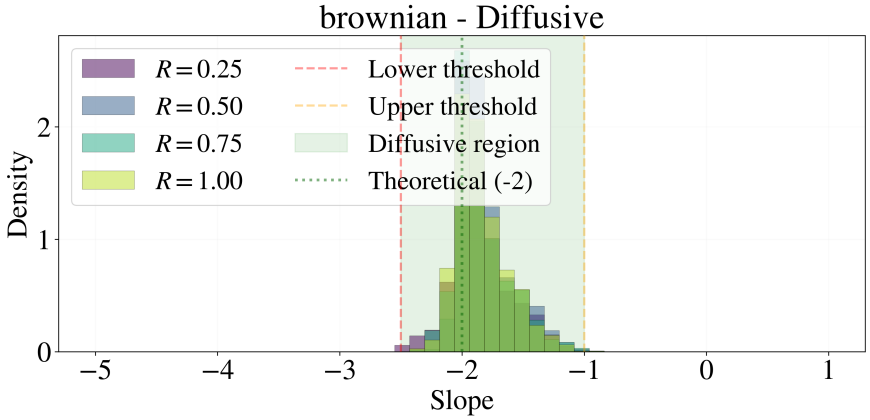


图1：布朗过程的游程次数拟合 log-log 斜率直方图 N_ε 与 ε的关系。

4 结果与讨论

我们在广泛的确定性和随机动力系统上评估所提出的基于越界的扩散检验，其中包括一些现实世界信号。对于每个合成系统，离散时间的系综

算法 1 估计与分类算法

计算二次变差估计 $[X]_T$: 选择一个对数网格，其中 ε: **对于**每个 ε **执行**: 使用游程算法计算经验 $N_\varepsilon^{\text{emp}}$: 使用二次变差计算理论曲线 $N_\varepsilon^{\text{theory}}$: 形成游程比 K（ε），并选择 ε 的范围，使得 K（ε） ~ 1: 计算该范围内的 s ε: 若 $s \in [-2.5, -1]$，则归类为扩散型；否则归类为非扩散

在一系列观测长度 T、采样间隔 Δt和信噪比（$SNR = 10\log(P_{sig}/P_{noise})$ 以及 $R = \langle \int_0^T \mu(X_t,\ t)\ dt\rangle / \langle \int_0^T \sigma\Omega(X_t,\ t)\ dt\rangle$ 下，分别生成了确定性和随机系统的序列）。分类准确率定义为相对于已知真实标签，正确识别为类扩散型或非扩散型的实现所占的比例。附录A给出了所用全部系统和参数的定义。

4.1 典型扩散过程的验证

我们首先研究经典扩散过程，包括奥恩斯坦-乌伦贝克（OU）过程和 Cox-Ingersoll-Ross（CIR）模型。在所有测试的参数范围内，只要离散化充分且样本长度足够，这些系统都能以近乎完美的准确率被分类为扩散型。图 2 和 3 展示了这些系统各自的准确率热力图。对于 OU 过程，分类准确率基本达到 100%。对于 CIR，随着 R、离散化 dt 和信号长度 T，准确率有所提高。

4.2 确定性周期系统

纯确定性振子（例如简谐振子）在低噪声和中等噪声水平下始终被分类为非扩散型。在这些状态下，游程计数的增长速度低于二次方ε^{-1}，因此得到的斜率估计显著大于 -2，且与基于二次变差的预测存在系统性偏差。随着加性噪声增大，这些系统逐渐转变为类似扩散的行为。在低信噪比（通常 SNR ≤ 15）下，噪声成分主导信号的局部结构，游程统计也趋近于扩散过程的统计特性。图 4 展示了游程斜率分布和准确率热力图随噪声水平与采样分辨率的变化，可以观察到这一转变。

4.3 确定性混沌映射

接下来，我们考察确定性混沌映射，包括埃农映射、逻辑斯谛映射，以及以难以处理著称的线性同余生成器（LCG）映射。在没有噪声时，尽管这些系统表面上看似不规则，仍会被稳健地分类为非扩散型。它们的游程统计不符合 ε^{-2} 标度律，反映出其在连续时间极限下不存在有限的二次变差。引入加性噪声后，这些系统会从类确定性分类迅速转变为类扩散分类。值得注意的是，对于混沌映射，准确率会随着 dt 和 T 降低而提高，恰好与预期相反。准确率热力图见图5-7 。

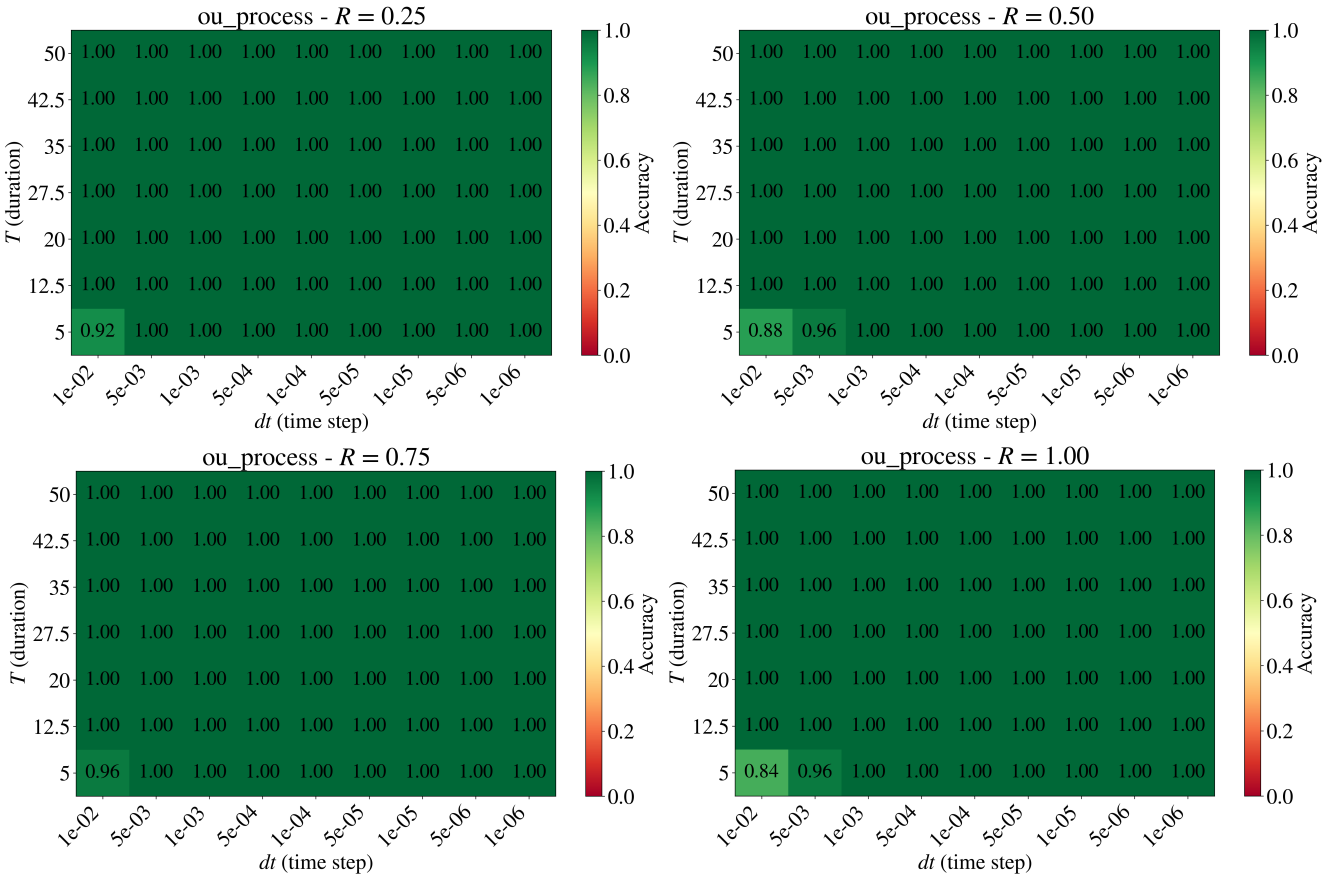


图 2：OU 过程在不同 R 下的准确率热力图。

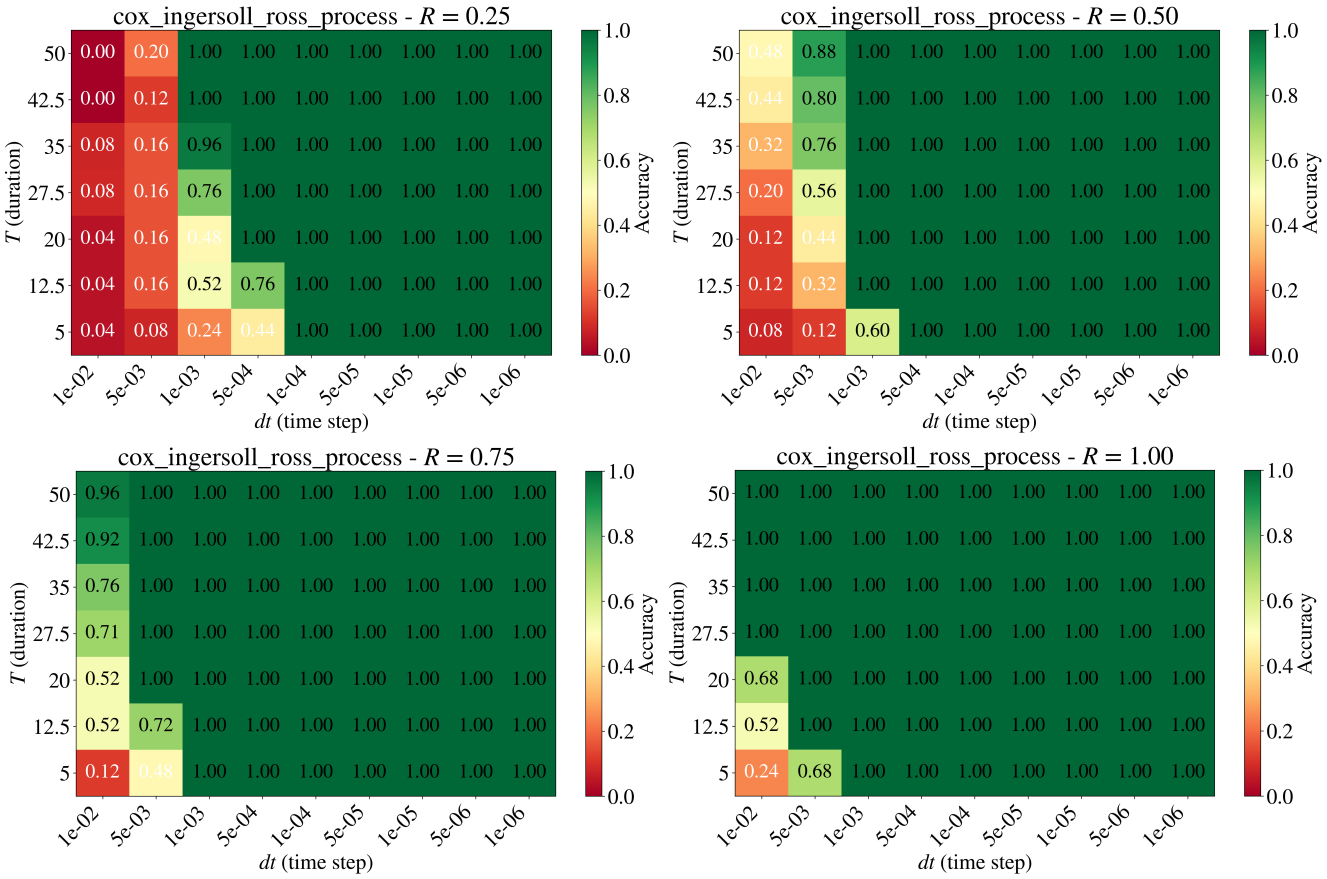
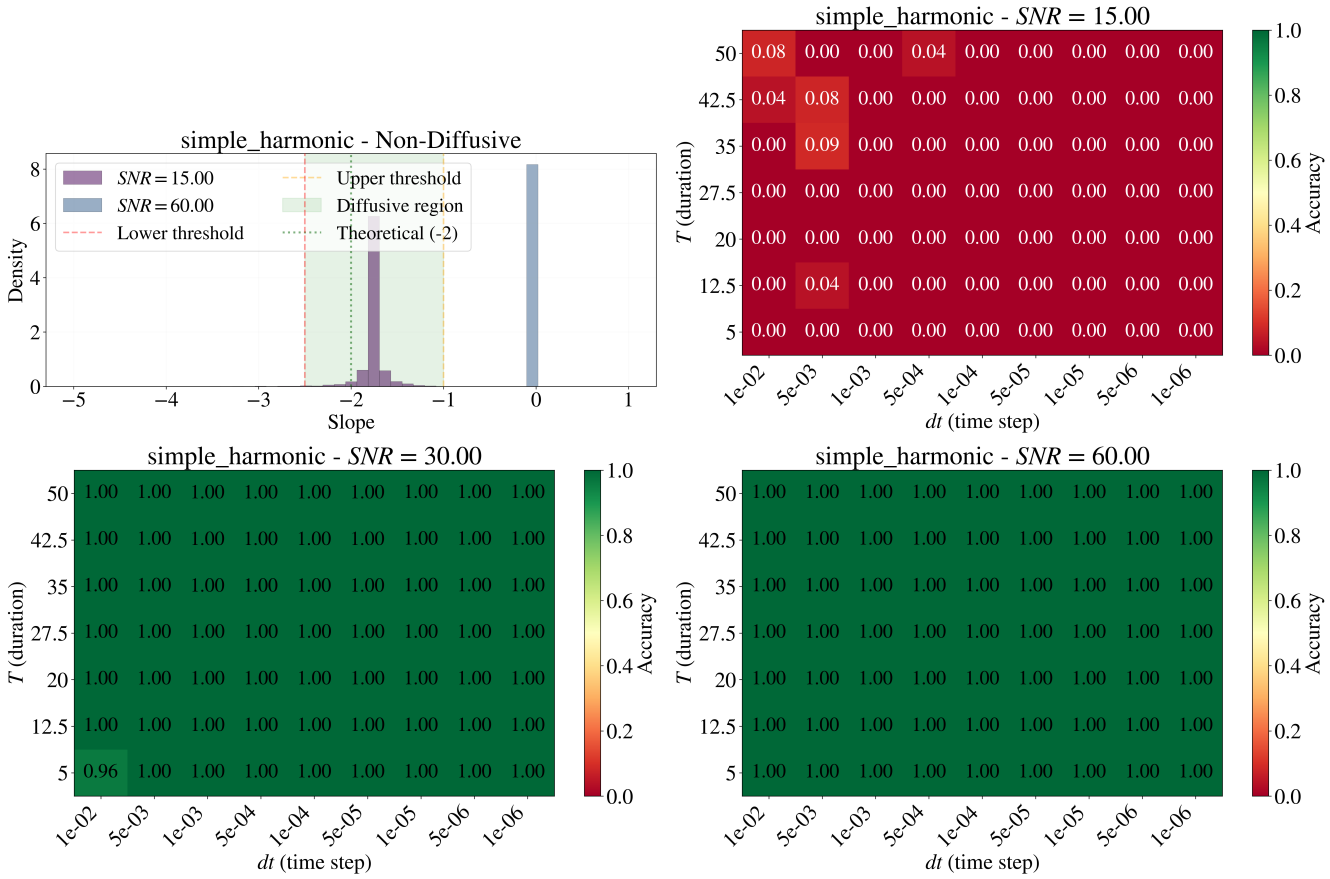


图3：CIR过程在各种 R下的准确率热力图。



Fig图 4：简谐运动在不同 SNR 下的准确率热力图 .

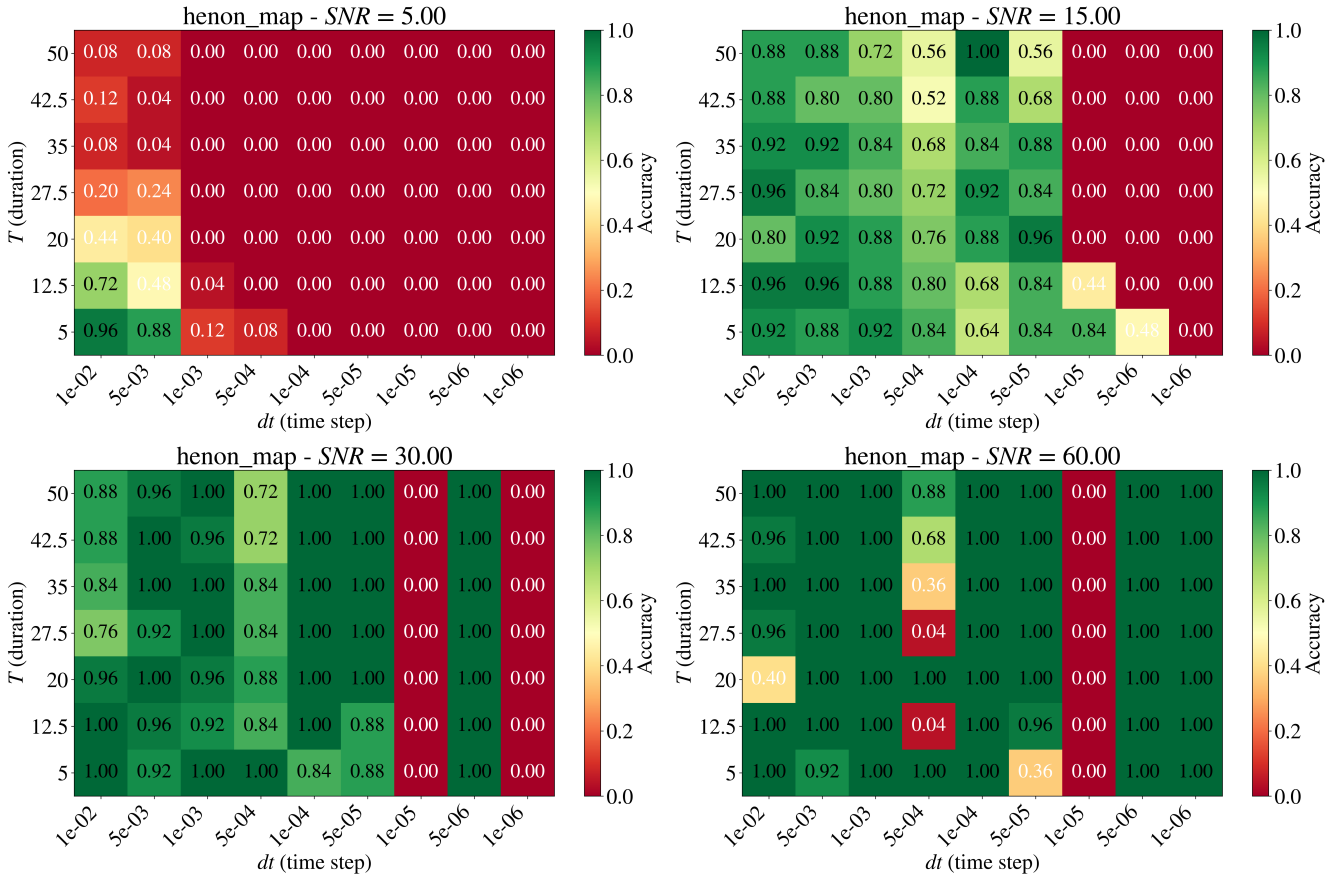


图5：海农映射在不同 SNR 下的准确率热力图。

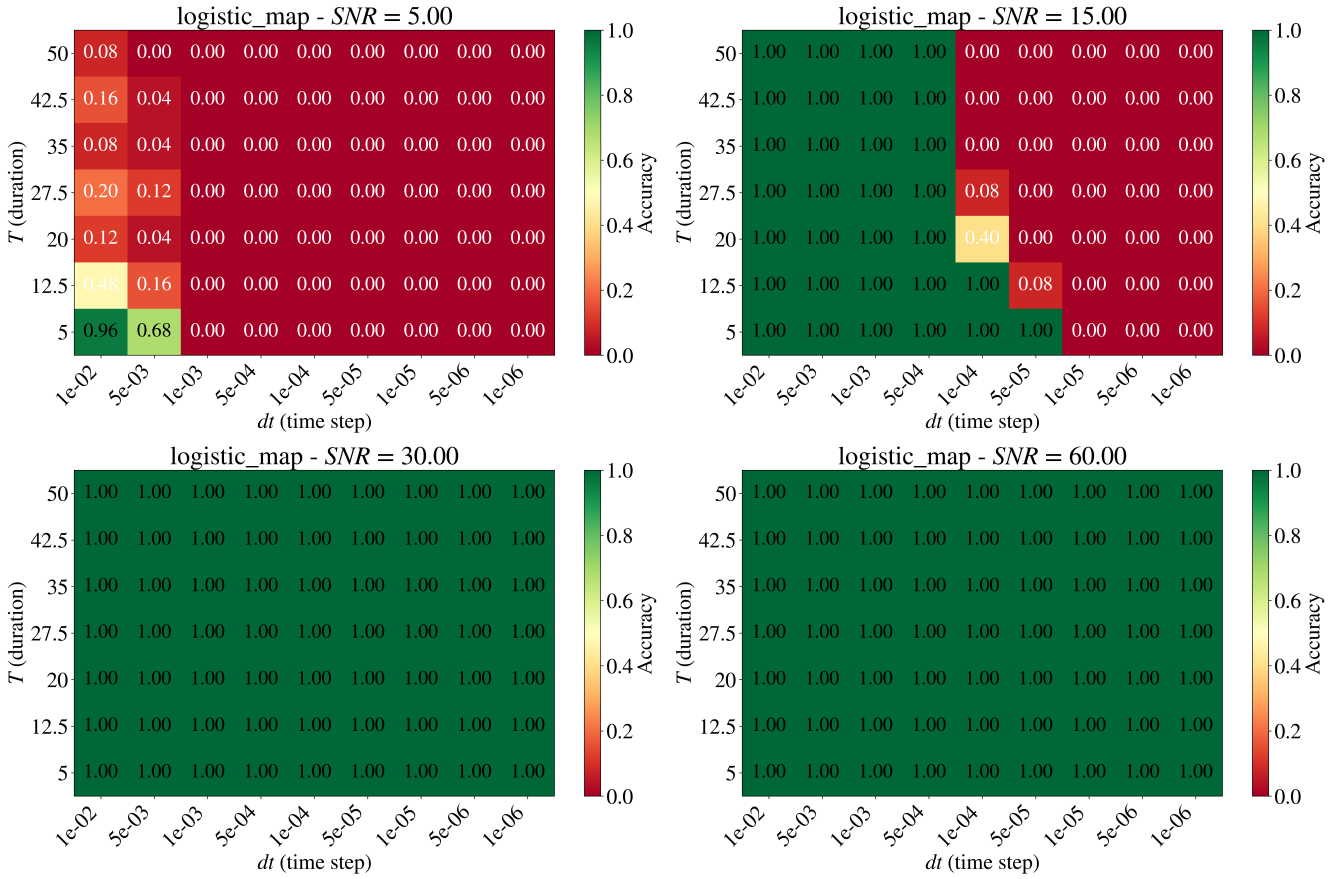


图6：逻辑斯蒂映射在不同 SNR下的准确率热力图。

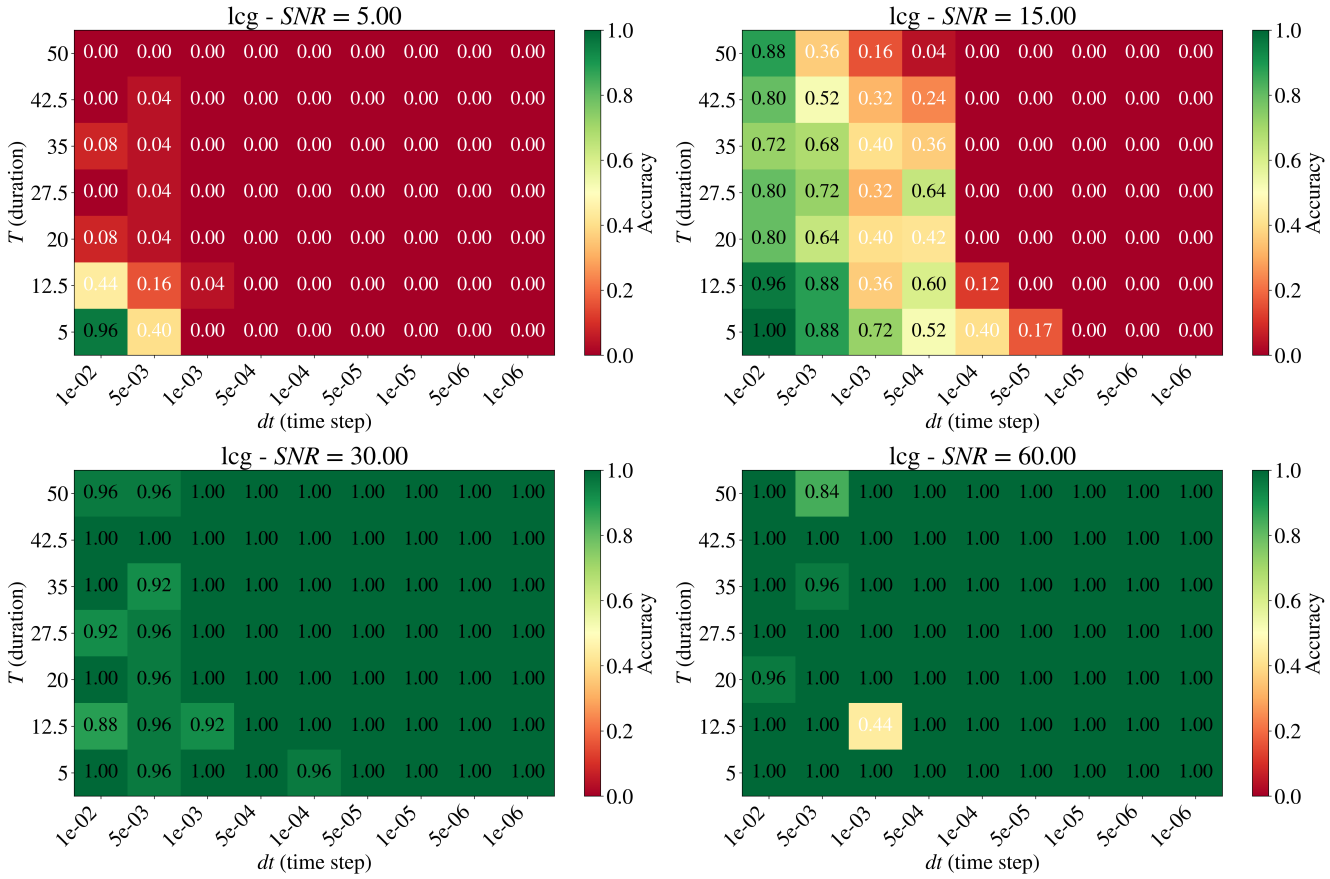


图7：LCG映射在各种 SNR 下的准确率热力图。

4.4 确定性混沌系统

接下来，我们研究包括 Duffing系统、Rayleigh-Duffing系统、Chen系统和 Lu系统在内的确定性混沌系统。图8 展示了 Chen系统和 Lu系统的准确率热力图。这两个系统的表现相似，即使在低信噪比下，只要 dt 和 T 足够大，其分类准确率也相当高。图 9 展示了 Duffing 系统和 Rayleigh-Duffing 系统的准确率热力图；这两个系统呈现相同的趋势——超过临界信噪比后，分类准确率较高。

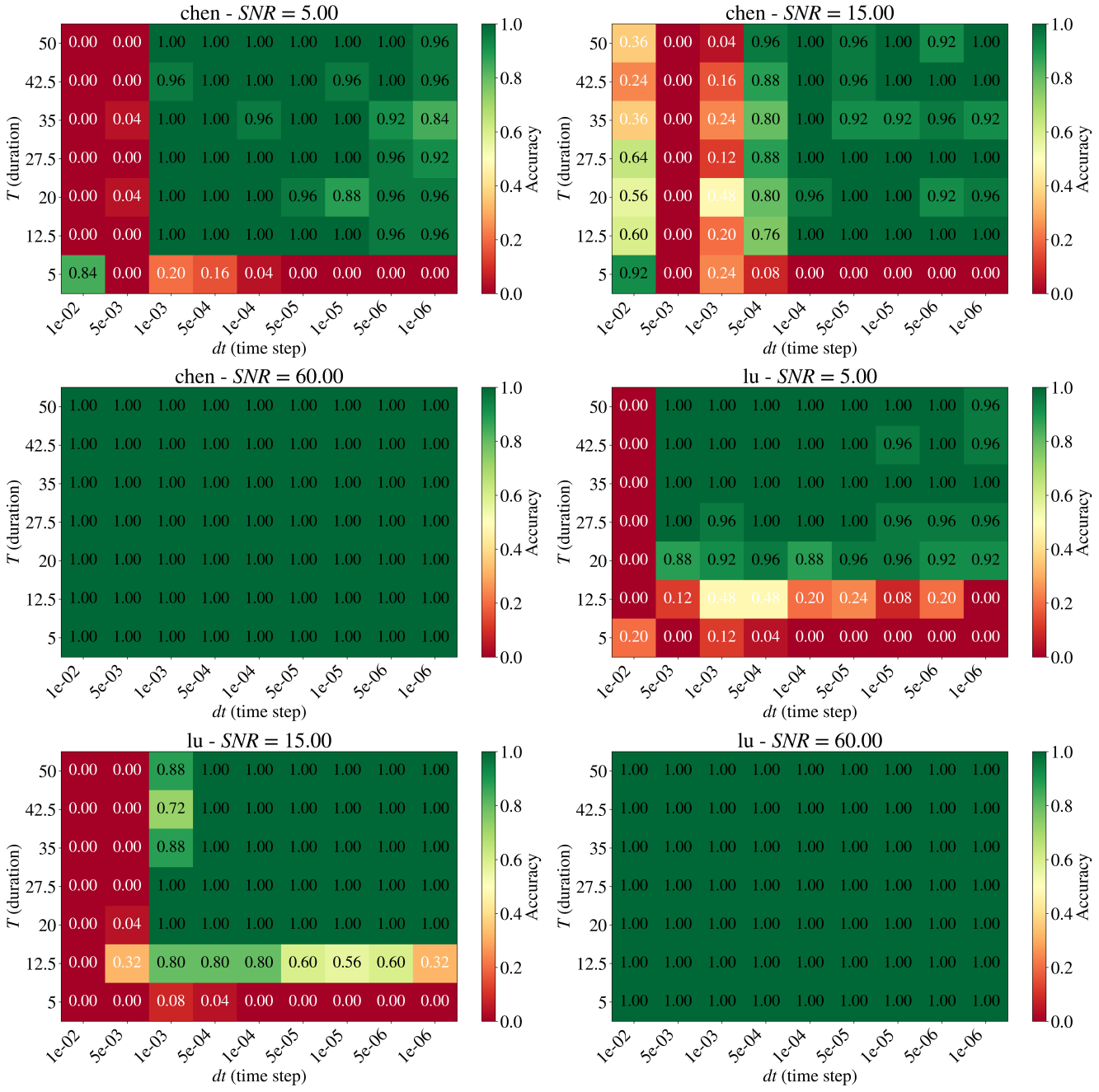


图 8：Chen系统和 Lu系统在不同 SNR 下的准确率热力图。

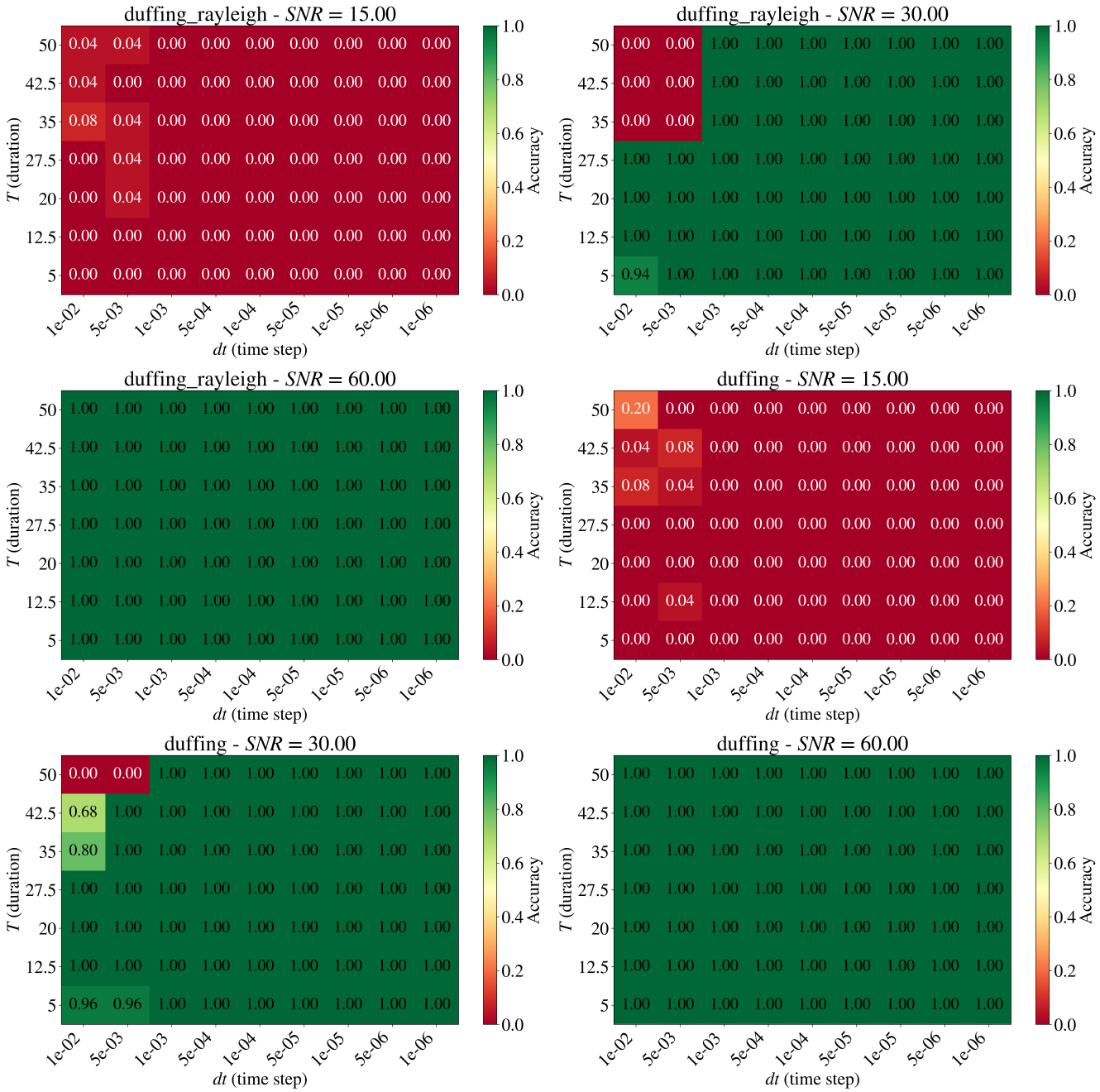


图9：热图　　展示了不同 SNR 下 Duffing系统和 Rayleigh-Duffing系统的准确率。

4.5 随机混沌系统

此外，我们考察了一个具有内在随机驱动的确定性混沌系统——随机杜芬振子。随着噪声强度增加，随机杜芬系统的扩散分类准确率呈现明显的单调上升趋势。相应地，斜率直方图逐渐收窄至 -2，表明其趋向扩散行为。斜率分布及准确率热力图见图10 。

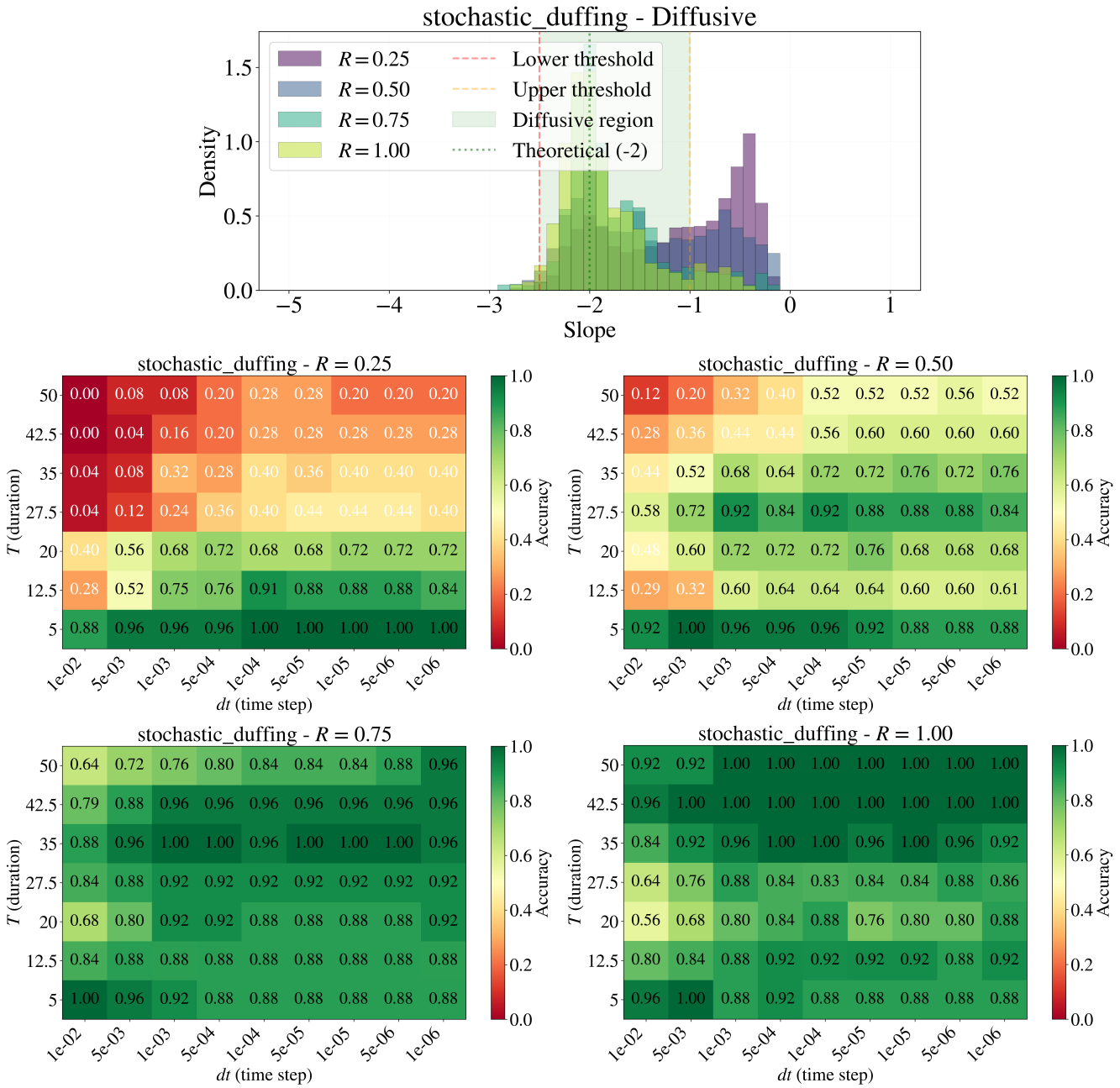


图10：随机杜芬系统在不同 R 下的斜率分布和准确率热力图。

4.6 真实世界数据集

4.6.1 金融时间序列

为展示该方法在实际观测场景中的实用价值，我们还将其应用于金融市场数据；在这一领域，区分由扩散驱动的价格波动与确定性可预测性具有根本意义。我们分析了为期30天的比特币（BTC-USD）分钟级收益率，以及过去十年标准普尔500指数交易所交易基金（SPY）的日收益率，相关信号见图11。对于每个数据集，经验收益率按如下方式计算

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-\Delta t}}{P_{t-\Delta t}},$$

并将其视为采样间隔为 $\Delta t = 1$ 分钟（BTC）或 $\Delta t = 1$ 天（SPY）的随机过程的离散观测。

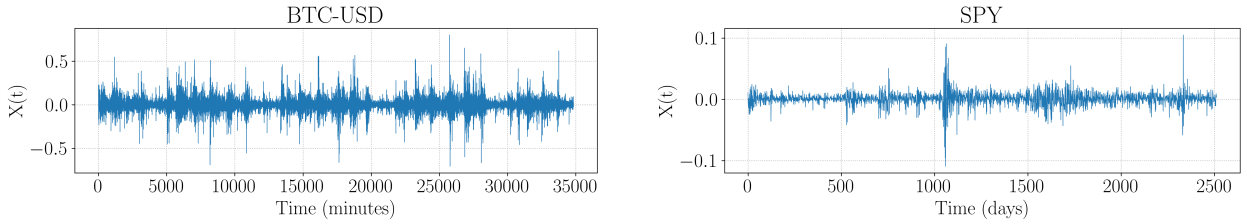


图11：于2025年12月25日从 yfinance 获取的 BTC-USD 和 SPY 金融时间序列。

对于这两种资产，越界计数标度律的拟合双对数斜率均落在扩散区间内。具体而言，BTC：$\hat{s} \approx -2.11$，以及 SPY：$\hat{s} \approx -1.61$。这两个数值均落在 $-2.5 < \hat{s} < -1.0$ 以内，表明存在非平凡的局部鞅分量。比特币数据所呈现的行为与布朗标度高度一致，而 SPY 则表现出轻微偏离，这可能是由于较低的离散化程度所致。

重要的是，我们的方法在不作平稳性、无漂移或高斯增量等任何假设的情况下，也能取得这些结果。不同于依赖模型的扩散诊断，越界检验观测的是路径特征，从而能够得出直接结论：在所观测的尺度上，BTC-USD 和 SPY 的收益均具有局部扩散型结构，且二次变差有限。

4.6.2 真实世界音频信号

我们进一步在一个包含多种真实世界短音频信号 [23] 的数据集上评估了所提出的基于越界的扩散检测器。该数据集包含 50 种常见的研究对象声音类别（环境、人类、机械和动物声音），每种声音类别均由 40 个相互独立的样本表示，每个样本时长为 5 秒，采样率统一为 44.1 kHz。我们将每个样本的振幅包络视为观测轨迹 X_t，并使用我们的算法将每个独立样本分类为扩散型或非扩散。由于这些音频信号均没有已知的真实标签，我们计算并报告每种声音类型中被分类为扩散型的样本所占百分比。

大多数声音都检测到了扩散行为，包括雨声（82.5% 的样本被归类为扩散型）、雷暴声（90.0%）、风声（77.5%）、海浪声（97.5%）等自然环境声，以及羊叫声（92.5%）、猪哼声（95.0%）和蛙鸣（80.0%）等生物发声。人为噪声源也经常被归类为扩散型，包括吸尘器（95.0%）、发动机运行声（92.5%）、链锯（100.0%）、火车（95.0%）和直升机（87.5%）。这些结果与气动过程和燃烧过程中存在宽带随机成分的情况相符。

结构性更强或以瞬态为主的信号，其扩散型分类比例较低：鼠标点击声（52.5%）、时钟滴答声（50.0%）、开罐声（50.0%）、玻璃破碎声（70.0%）和教堂钟声（97.5%）处于从确定性周期性到随机激励的广阔连续区间内。笑声（82.5%）、婴儿哭声（95.0%）和咳嗽声（90.0%）等发声也主要被归类为扩散型，这反映了语音产生过程中的湍流气流。

有趣的是，闹钟声（45.0%）和敲门声（37.5%）这类简单且有节奏的事件序列，表现出的扩散特征较弱，这可能是由于其重复的确定性结构。总体而言，结果表明，所提出的方法能够区分物理过程中的细微差异。即使在复杂的真实声学环境中，呈现湍流或噪声动力学的信号也会系统性地触发特征性的 $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2}$ 标度行为，而脉冲型或有组织的声音则不会。因此，该检验提供了一种无需模型的途径，可将高维多媒体信号划分为扩散驱动型和确定性机制型，并有望应用于许多领域。

5 局限性

所提出的偏离标度检验广泛适用于具有有限二次变差的连续半鞅。然而，若干实际因素限制了它的普遍应用。首先，可靠的游程统计需要较高的分辨率：较大的采样间隔 dt 会抑制较小的游程，并使估计偏向确定性行为。同样，在低信噪比环境中，真正的确定性信号可能会被误分类。该方法不适用于跳跃过程、脉冲动力学或具有无限活跃度不连续性的 Lévy 型模型，因为它们的游程结构不属于理论适用范围。分数布朗运动也缺乏实现正确标度所需的有限二次变差。这些限制表明，该方法在底层动力学随时间连续、采样分辨率充分且方差足以揭示半鞅理论所预测的标度律时，效果最佳。

6 结论

我们为 Ito 类型的连续半鞅提出了一条有理论依据的偏离渐近定律，并展示了如何将其用作稳健的诊断工具，以区分随机扩散与确定性／混沌动力学。与许多现有的混沌与噪声判别方法不同，这些方法需要大量调整超参数、训练多个模型，或对替代指标作主观解读；我们的方法完全自足，并利用了游程计数所遵循的、具有理论保证的标度律。在涵盖多种系统的广泛基准测试中，该方法表现出色：在布朗运动、Ornstein-Uhlenbeck 动力学和 Cox-Ingersoll-Ross 扩散等典型随机过程中，准确率接近完美。当时间分辨率足够精细、时间跨度足以捕捉吸引子动力学，且信噪比保持在中等或较高水平时，该方法能够可靠地对确定性振子和离散映射进行分类。只要时间分辨率和持续时长足够，在广泛的噪声强度范围内，该方法也能正确识别随机混沌系统。在真实世界的金融数据上，包括分钟级加密货币收益率和每日股票收益率，该方法完美识别出与市场理论相符的扩散行为。对较短的环境音频和人类生成的音频片段进行测试，进一步揭示了自然信号呈现随机性的方式存在有趣差异。总的来说，这些发现凸显了所提出的诊断工具在实践中的巨大潜力：它简单且以理论为依据，可用于区分物理、生物和工程系统中的随机性与混沌决定性。

7 致谢

本材料基于美国空军科学研究办公室通过编号为FA9550-26-1-0011的奖项提供支持的研究，以及授予 ST 的 2025—2026 年 NSF Frontera 计算科学奖学金。

参考文献

[1] N. P. Subramaniyam、J. F. Donges 和 J. Hyttinen。《利用 ε-复现网络揭示混沌与随机动力学的特征》。载于：英国皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学 471.2183（2015 年 11 月），第 20150349 页。 ISSN：1471-2946。 DOI：10. 1098/rspa.2015.0349。 URL：http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2015.0349。[2] D. M. Mateos、L. E. Riveaud 和 P. W. Lamberti。《利用 Jensen-Shannon 散度检测时间序列中的动力学变化》。载于：混沌：非线性科学跨学科期刊 27.8（2017 年 8 月），第 083118 页。 ISSN：1089-7682。 DOI：10.1063/1.4999613。 URL：http://dx.doi.org/ 10.1063/1.4999613。[3] Massimiliano Zanin 和 Felipe Olivares。《基于序数模式的方法：区分离散时间序列中的混沌与噪声》。载于：通讯物理 4.1（2021 年 8 月）。 ISSN：2399-3650。 DOI：10.1038/s42005- 021- 00696- z。 URL：http://dx.doi.org/10.1038/s42005- 021-00696-z。[4] Thiago Lima Prado、Bruno Rafael Reichert Boaretto、Gilberto Corso、Gustavo Zampier dos Santos Lima、J¨urgen Kurths 和 Sergio Roberto Lopes。《一种检测数据确定性与随机属性的直接方法》。载于：New Journal of Physics 24.3（2022 年 3 月），第 033027 页。 ISSN：1367- 2630。 DOI：10.1088/1367-2630/ac5057。 URL：http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/ac5057。[5] B. R. R. Boaretto、R. C. Budzinski、K. L. Rossi、T. L. Prado、S. R. Lopes 和 C. Masoller。《利用排列熵和人工神经网络区分混沌与随机时间序列》。载于：科学报告 11.1（2021 年 8 月）。 ISSN：2045-2322。 DOI：10.1038/s41598-021-95231-z。 URL：http://dx.doi.org/10.1038/s41598-021-95231-z。[6] Massimiliano Zanin。《深度学习能否区分混沌与噪声？数值实验与一般性考量》。载于：非线性科学与数值模拟通讯 114（2022 年 11 月），第 106708 页。 ISSN：1007-5704。 DOI：10.1016/j.cnsns.2022.106708。 URL：http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106708。[7] L. Zunino、M. C. Soriano 和 O. A. Rosso。《利用多尺度符号方法从时间序列中区分混沌与随机动力学》。载于：物理评论 E 86.4（2012 年 10 月）。 ISSN：1550-2376。 DOI：10.1103/physreve.86.046210。 URL：http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.86.046210。[8] Yoshito Hirata。《用于表征随机动力系统的复现图》。载于：非线性科学与数值模拟通讯 94 （ 2021 年 3 月），第 105552 页。 ISSN：1007-5704。DOI：10.1016/j.cnsns.2020.105552。 URL：http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105552。[9] F. Olivares、M. Zanin、L. Zunino 和 D. G. P´erez。《通过序数转移网络对比混沌与随机动力学》。载于：混沌：非线性科学跨学科期刊 30.6（2020 年 6 月）。 ISSN：1089-7682。 DOI：10.1063/1.5142500。 URL：http://dx.doi.org/10.1063/1.5142500。

[10] Reik V Donner、Yong Zou、Jonathan F Donges、Norbert Marwan 和 Jurgen Kurths。《复现网络——非线性时间序列分析的新范式》。载于：New Journal of Physics 12.3（2010 年 3 月），第 033025 页。 ISSN: 1367-2630。 DOI: 10 . 1088 / 1367 - 2630 / 12 / 3 / 033025。 URL: http : // dx.doi.org/10.1088/1367-2630/12/3/033025。[11] Lucas Lacasa、Bartolo Luque、Fernando Ballesteros、Jordi Luque 和 Juan Carlos Nu˜no。《从时间序列到复杂网络：可见性图》。载于：美国国家科学院院刊 105.13（2008 年 4 月），4972–4975。 ISSN: 1091-6490。 DOI: 10.1073/pnas.0709247105。 URL: http://dx.doi.org/10.1073/pnas.0709247105。[12] Zelin Zhang、Jun Wu、Yufeng Chen、Ji Wang 和 Jinyu Xu。《利用基于局部结构的熵区分随机信号与混沌信号》。载于：Entropy 24.12（2022 年 11 月），第 1752 页。 ISSN: 1099-4300。 DOI: 10.3390/e24121752。 URL: http://dx.doi.org/10.3390/e24121752。[13] Daniel Perez。《几乎必然随机的 C^0 随机过程的持久同调》。载于：Journal of Applied and Computational Topology 7.4（2023 年 7 月），第 879–906 页。 ISSN: 2367-1734。 DOI: 10.1007/s41468-023-00132-x。 URL: http://dx.doi.org/10.1007/s41468-023-00132-x。[14] 随机过程游程分析的应用。爱思唯尔，2013。 ISBN: 9780124095014。 DOI: 10. 1016/c2012-0-06107-8。 URL: http://dx.doi.org/10.1016/C2012-0-06107-8。[15] Robert M. Blumenthal。《马尔可夫过程的游程》。Birkh¨auser Boston，1992。 ISBN: 9781468494129

DOI: 10.1007/978-1-4684-9412-9. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-9412-9.[16] S. O. Rice. “随机噪声的数学分析”。载于：Bell System Technical Journal 23.3（1944年7月），282–332。 ISSN: 0005-8580。 DOI: 10 . 1002 / j . 1538 - 7305 . 1944 . tb00874 . x。 URL: http : // dx.doi.org/10.1002/j.1538-7305.1944.tb00874.x.[17] Kiyosi Ito. “连续平稳高斯过程的零点期望数”。载于：Kyoto Journal of Mathematics 3.2（1963年1月）。 ISSN: 2156-2261。 DOI: 10 . 1215 / kjm / 1250524817。 URL: http://dx.doi.org/10.1215/kjm/1250524817.[18] N. Donald Ylvisaker. “平稳高斯过程的零点期望数”。载于：The Annals of Mathematical Statistics 36.3（1965年6月），1043–1046。 ISSN: 0003-4851。 DOI: 10.1214/aoms/ 1177700077。 URL: http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177700077.[19] M. R. Leadbetter. “某些高斯过程与任意曲线的交叉”。载于：Proceedings of the American Mathematical Society 16.1（1965年2月），60–68。 ISSN: 1088-6826。 DOI: 10.1090/s0002- 9939-1965-0170382-6。 URL: http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-1965-0170382-6.[20] M. R. Leadbetter 和 J. D. Cryer. “非平稳正态过程与曲线交叉的平均次数”。载于：The Annals of Mathematical Statistics 36.2（1965年4月），509–516。 ISSN: 0003- 4851。 DOI: 10.1214/aoms/1177700160。 URL: http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177700160.[21] V. A. Ivanov. “随机过程样本函数与某一水平交叉的平均次数”。载于：Theory of Probability & Its Applications 5.3（1960年1月），319–323。 ISSN: 1095-7219。 DOI: 10.1137/1105031。 URL: http://dx.doi.org/10.1137/1105031.[22] Zekai Sen. “小样本中交叉的概率建模及游程在水文学中的应用”。载于：Journal of Hydrology 124.3-4（1991年5月），第345–362页。 ISSN: 0022-1694。 DOI: 10.1016/0022- 1694(91)90023-b。 URL: http://dx.doi.org/10.1016/0022-1694(91)90023-B.[23] Karol J. Piczak. “ESC：用于环境声音分类的数据集”。载于：第23届ACM年度多媒体会议论文集。澳大利亚布里斯班：ACM Press，2015年10月13日，第1015–1018页。 ISBN: 978-1-4503-3459-4。 DOI: 10 . 1145 / 2733373 . 2806390。 URL: http : / / dl . acm . org / citation.cfm?doid=2733373.2806390。

A 基准系统定义

本研究中使用的所有基准信号，均由标准确定性混沌系统、连续时间随机微分方程（SDE）以及随机与混沌混合动力学生成，作为一维观测量。确定性常微分方程采用自适应 Bogacki-Shampine RK23 方法积分，并使用固定输出网格 dt；所有随机微分方程则采用 Euler-Maruyama 方法离散化。映射直接迭代。在每种情况下，仅记录第一个状态分量 $x(t)$作为输出。此处， W_t 表示标准维纳过程，而 $R > 0$ 通过 $\sigma = 1/R$ 对噪声强度进行缩放。

简谐振子：

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega = 1.0. \tag{2}$$

A.1 混沌吸引子

杜芬振子：

$$\dot{x} = v, \tag{3}$$
$$\dot{v} = -\delta v - \alpha x - \beta x^3 + \gamma \cos(\omega t), \tag{4}$$

其中 $\delta = 0.2,\ \ \alpha = -1,\ \ \beta = 1,\ \ \gamma = 0.3,\ \ \omega = 1.2$。

瑞利-杜芬振子：

$$\dot{x} = v, \tag{5}$$
$$\dot{v} = -\delta v - \varepsilon\left(v - v^3\right) - \alpha x - \beta x^3 + \gamma \cos(\omega t), \tag{6}$$

参数为 $\delta = 0.2,\ \ \alpha = -1,\ \ \beta = 1,\ \ \gamma = 0.3,\ \ \omega = 1.2,\ \ \varepsilon = 0.1$。

陈吸引子：

$$\dot{x} = a(y - x), \tag{7}$$
$$\dot{y} = (c - a)x - xz + cy, \tag{8}$$
$$\dot{z} = xy - bz, \tag{9}$$

其中 $(a,\ \ b,\ \ c) = (35,\ \ 3,\ \ 28)$。

吕吸引子：

$$\dot{x} = a(y - x), \tag{10}$$
$$\dot{y} = -xz + cy, \tag{11}$$
$$\dot{z} = xy - bz, \tag{12}$$

其中 $(a,\ \ b,\ \ c) = (36,\ \ 3,\ \ 20)$。

A.2 混沌映射

对于所有映射， x_{k+1} 均在离散时间点 $t_{k+1} = t_k + dt$ 进行观测。

逻辑斯蒂映射：

$$x_{k+1} = r x_k (1 - x_k), \qquad r = 4.0. \tag{13}$$

海农映射：

$$x_{k+1} = 1 - a x_k^2 + y_k, \tag{14}$$
$$y_{k+1} = b x_k, \tag{15}$$

其中（a，b）=(1。4，0。3)。

线性同余生成器（LCG）：

$$x_{k+1} = (a x_k + c) \bmod m, \qquad a = 1664525,\ c = 1013904223,\ m = 2^{32}. \tag{16}$$

A.3 随机扩散

这些通过伊藤随机微分方程进行模拟,

$$dX_t = f(X_t, t)\, dt + g(X_t, t)\, dW_t, \qquad g = \sigma = \frac{1}{R}.$$

布朗运动：

$$dX_t = \sigma\, dW_t. \tag{17}$$

奥恩斯坦-乌伦贝克过程：

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)\, dt + \sigma\, dW_t, \qquad \theta = 1,\ \mu = 0. \tag{18}$$

考克斯-英格索尔-罗斯过程：

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)\, dt + \sigma \sqrt{X_t}\, dW_t, \qquad X_t \geq 0. \tag{19}$$

随机杜芬系统：

$$dX = V\, dt + \sigma\, dW_t, \tag{20}$$
$$dV = \big(-0.2V + X + X^3 + 0.3\cos(1.2t)\big) dt + \sigma\, dW_t, \tag{21}$$

在两个方程中使用相同的标量维纳增量（秩一扩散）。