arXiv:2601.06012v1 [eess.SP] 9 Jan 2026

协作式差分GNSS定位：估计器与界

Helena Calatrava，IEEE 学生会员，美国马萨诸塞州波士顿东北大学，邮编 02115

Daniel Medina，IEEE 高级会员德国航空航天中心（DLR），德国诺伊施特雷利茨

Pau Closas，IEEE 高级会员，美国马萨诸塞州波士顿东北大学，邮编 02115

摘要——**在差分全球导航卫星系统（差分GNSS）定位中，对用户与参考站之间的测量值作差可以抑制共模误差，但也会引入参考站噪声，从根本上限制定位精度。对于高等级参考站，这一限制影响较小；但当使用质量参差不齐的参考基础设施时，影响便会变得显著。本文研究大规模用户协作如何减轻参考站噪声对传统（非协作）差分GNSS系统的影响。我们为协作DGNSS（C-DGNSS）和协作实时动态定位（C-RTK）建立统一估计框架，并推导出其费舍尔信息矩阵的参数化表达式，将其表示为网络规模、卫星几何构型和参考站噪声的函数。该表述使估计性能的理论分析成为可能，并揭示了协作可渐近恢复至采用理想（无噪声）参考站的差分GNSS精度的情形。仿真验证了这些理论结果。**

索引词—**全球导航卫星系统、差分全球导航卫星系统、实时动态定位、克拉美–罗下界、协作定位**

一、引言

全球导航卫星系统（GNSS）仍是室外导航的基石，能够提供全球可用、可靠且无漂移的定位能力 [1]–[3]。然而，由于码测量精度有限，且不完美的轨道和大气建模会产生残余偏差，独立GNSS定位的精度仅达到米级

稿件收到日期：XXXXX 00, 0000；修订日期：XXXXX 00, 0000；录用日期：XXXXX 00, 0000。本研究部分得到了美国国家科学基金会的资助，项目编号为 1845833、2326559 和 2530870。（通讯作者：*Helena Calatrava*）。Helena Calatrava 和 Pau Closas 任职于美国马萨诸塞州波士顿东北大学电气与计算机工程系。电子邮箱：{calatrava.h,closas}@northeastern.edu。Daniel Medina 任职于德国诺伊施特雷利茨德国航空航天中心（DLR）通信与导航研究所。电子邮箱：daniel.ariasmedina@dlr.de。

0018-9251 © 2025 IEEE

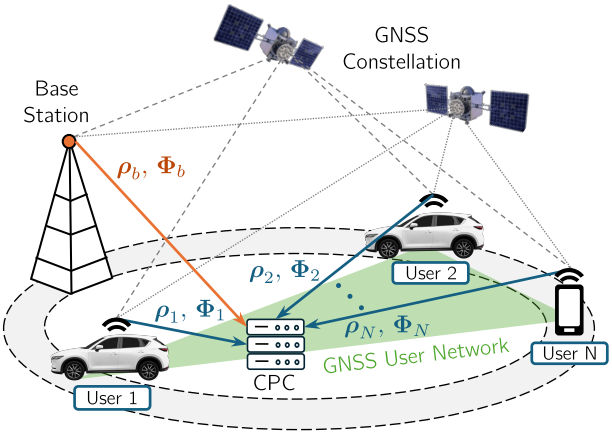


图 1：本文所考虑的协作DGNSS架构概览。附近的用户 $r \in 1,\ldots,N$ 将码（$\boldsymbol{\rho}_r$）和载波相位（$\boldsymbol{\Phi}_r$）测量值发送至 CPC，CPC 将这些测量值与基站DGNSS改正数联合处理。协作采用集中式、以基站为锚点的架构，且不涉及用户间测距。

[4, Ch. 21]。

虽然米级精度足以满足大多数消费类应用的需求，但智能交通系统和车联网（V2X）通信等新兴领域 [5], [6] 需要厘米级精度 [7], [8]。精密单点定位（PPP） [4, Ch. 25]通过引入精密轨道和钟差改正，提供了实现此类精度的途径；然而，其较长的收敛时间限制了它在实时应用中的适用性 [9], [10]。

差分全球导航卫星系统（DGNSS） [4, Ch. 26] 支持实时精密定位。在这种架构中，位于已测定坐标位置、由专业人员维护的连续运行参考站（CORSs） [31, Ch. 6] 播发改正数，以减轻参考站和附近用户接收机所共有的误差 [32]。基于码的DGNSS实现仅依赖伪距测量，通常可达到分米级精度。进一步结合载波相位测量后，实时动态定位（RTK）可解算整周模糊度，实现厘米级精度 [33,Ch. 2]。

值得注意的是，大多数参考站网络均为专有网络，由国家或私营运营商管理，这推动了让更多用户能够获得精密定位服务的不断努力 [34]。这包括支持实时动态定位和精密单点定位级能力的低成本全球导航卫星系统接收机的出现 [35]–[37], , 商业供应商为扩大精密改正服务的获取范围所作的努力 [38],, 以及提供开放获取实时精密单点定位改正的公共服务。后者包括法国国家空间研究中心产品 [39] 和伽利略高精度服务（HAS） [40]。

在精确定位持续普及的过程中，我们将利用低成本参考基础设施实现连续运行参考站级性能确定为一项关键研究目标。低成本接收机虽然降低了部署成本，但其有限的硬件质量会降低差分全球导航卫星系统和实时动态定位改正的精度。应对这一挑战的一种方法是利用日益普及的

表 I：按测量来源分类的代表性 GNSS 协作定位方法概览；综述请见 [11] 。我们重点关注 C-DGNSS 和 C-RTK 方法（蓝色行），它们依赖于将 GNSS 测量值与已测量基准站的测量值进行差分，且不使用辅助感知。

测量值	协作机制	是否具有地理参照?
仅 GNSS [12]–[15], [15]–[17]	通过 GNSS 差分构建用户间约束（DGNSS-CP）以消除共模误差	除非重复使用GNSS测量值，否则不能重复使用
GNSS +用户间感知（例如，距离、坐标-差） [18]–[21]	绝对GNSS信息与用户间感知的融合来自辅助感知的约束	Yes，通过绝对（无差分）全球导航卫星系统观测值
全球导航卫星系统 + 参考信息（例如，概率概率先验、测量站） [22]–[30]	用于消除共模误差	是，通常通过参考实体

数据共享基础设施，并采用协作定位（*CP*）技术 [11]（简要回顾见第II 节）。当多个接收机依赖同一个参考站获取差分全球导航卫星系统改正时，其差分观测值会因共享参考噪声而产生统计相关性。考虑这些相关性，尤其是在使用低成本参考站时尤为明显的相关性，有助于提高定位精度。

在本研究中，我们采用估计理论的视角来探讨以下问题：大规模用户协作能否补偿标准（非协作）差分全球导航卫星系统中的差分操作所传播的参考站噪声？如果能，需要满足哪些条件，补偿程度又有多大？相较于我们先前的会议论文（其中初步探讨了这种协作定位方法的潜力） [29], [30],，本文的主要贡献如下：

- 我们提出了一种统一估计框架，适用于协作差分 *GNSS* ，该框架整合了基于伪距和载波相位的技术，并考虑噪声方差任意的参考站。
- 我们基于费 Fisher 信息矩阵（FIM），对协作 DGNSS（C-DGNSS） [30] 和协作实时动态定位（C-RTK） [29]的渐近性能进行了全面的理论分析，并研究了其与接收机数量、卫星可见性和测量方差之间的关系。
- 我们通过具有代表性的多用户网络场景仿真验证了所提出的框架，例如图 1.所示的场景。

本文其余部分安排如下：第 II 节回顾相关工作；第 III 节对 C-DGNSS 和 C-RTK 方法进行形式化描述；第 IV节分析其理论性能极限；第 V 节展示仿真结果；第 VI 节总结全文。

II. 全球导航卫星系统协作定位背景

本节概述表 I中总结的全球导航卫星系统载波相位定位代表性方法，并介绍本文研究的协作架构，如图1所示。

人们对 GNSS 载波相位的兴趣始于 2000 年代初期 [41],，这得益于无线传感器网络和短距离通信技术的发展，使接收机之间能够交换信息 [42]。值得注意的是，载波相位最初是为大众市场设备和室内环境开发的；在这些场景中，外部定位基础设施稀缺，设备必须依靠接收机间协作来应对低信噪比和发射机可用性有限的问题 [43], [44]。自 2010 年代末以来，原始GNSS测量值在大众市场设备上的普及 [15], [45]–[47]以及 V2X 通信 [48], [49]的兴起，再度引发了人们的关注。

一种成熟的方法是 DGNSS-CP [12]–[14],，它无需任何参考，通过对多个接收机的测量值进行差分，消除共模误差并推断节点间距离 [11, §IV.C]。随后，可将这些协作测距结果作为附加约束纳入 PVT求解器 [15], [16],，从而改善卫星可见性有限的用户的绝对定位 [15], [17]。

另一方面，混合GNSS协作定位直接处理原始全球导航卫星系统测量值，同时融合来自独立测距技术的相对信息 [18],[19]。这包括根据接收信号强度（RSS）或到达时间（TOA）测量获得的接收机间距离，其中前者对环境高度敏感。采用超宽带（UWB）技术时，TOA测距可实现厘米级精度 [50]。值得注意的是，一些研究采用基于视觉或其他相对位姿感知方式，提供向量值约束，从而显著增强网络可观测性 [20]。混合架构的理论分析最早在 [21], 中得到正式阐述，而 [18] 引入了CDOP指标，以展示提高网络连通性和几何多样性的益处。

一些方法通过参考点（也称为网络锚点）或为选定用户进行位置初始化，将网络定位锚定到全局坐标系中 [22]–[24]。我们此前提出了一种大规模差分方法 [27], ，其中目标用户与邻近接收机形成差分测量，并通过概率先验对这些接收机的位置建模，使其充当虚拟参考点。假设这些先验均值为零，因而无偏，该方法无需物理基站 [28]，即可达到渐近的 DGNSS/RTK 级性能。

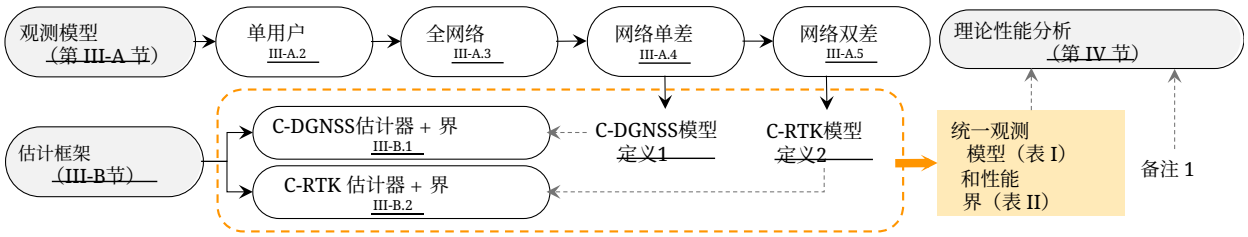


图 2：第 III 节推导流程概览，最终为 C-DGNSS 和 C-RTK 建立统一观测模型和性能界，汇总于表 II 和III。由此得到的统一费 Fisher 信息矩阵表述支持第 IV节的理论分析，这也是本文的主要贡献。实线箭头表示章节流程，虚线箭头表示不同推导过程中结果的复用。

协作式差分全球导航卫星系统架构：本文研究一种 C-DGNSS [30] 和 C-RTK [29]架构，其中网络由一个已测量参考站（索引为 b）和 N 个用户接收机（索引为 $r \in \{1,\dots,N\}$）组成。该参考站观测一组 K 颗卫星（索引为 $s \in \{p,1,\dots,K-1\}$），其中 p 表示用于差分的枢轴卫星。根据可见性，每个用户接收机观测这些卫星中的全部或一部分。该架构通过集中式处理实现协作：所有接收机（以及参考站）都将其原始伪距和载波相位测量值共享给同一个中央处理中心（CPC），由其执行联合状态估计。重要的是，不存在用户间测距；所有差分测量均在每个用户与参考站之间形成，从而提供共享的差分锚点，并能够对网络内测量间的相关性进行显式建模。

由于多路径和非视距效应（NLOS）取决于每个用户的局部几何结构和环境，因此在载波相位中处理这些效应仍然具有挑战性，并会导致观测之间大多不相关 [11,§IV.B]。基于地图的 [26] 和基于机器学习的 [51]方法展现出良好前景，其中一些方法利用了具有相似几何结构的用户之间的空间相关性 [46]，或受益于传感器融合 [52]。本文则针对所有接收机以及在短基线条件下运行的低成本参考站所共有的大气效应进行缓解（通常为 <10 km）。多路径、非视距效应、隐私保护 [53]，和时间同步问题 [15] 不在本文讨论范围内。C-DGNSS 框架对离群值的鲁棒性在 [54]中进行了研究。

III. 协作DGNSS与实时动态定位方法

本节介绍C-DGNSS和C-RTK方法的统一估计框架，适用于噪声方差任意的参考站，涵盖其线性化观测模型（第III-A节）以及相关的估计问题和性能界（第III-B节）。关于本节概述，请参见图2。

符号说明：粗体小写和大写字母分别表示向量量和矩阵量，而普通小写字母表示标量。全 1 向量为 $1_p \in \mathbb{R}^p$；$\mathbf{I}_p$ 为 $p \times p$ 单位矩阵；矩阵 $\mathbf{1}_{p,q}$、$\mathbf{0}_{p,q} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ 分别由 1 和 0 组成，简写为 $\mathbf{1}_p \triangleq \mathbf{1}_{p,p}$ 和 $\mathbf{0}_p \triangleq \mathbf{0}_{p,p}$；$\otimes$ 表示克罗内克积；$\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$ 表示关于$\mathbf{x}$的梯度。

A. 观测模型

本节将在统一的高斯模型下，对C-DGNSS和C-RTK方法进行建模：

$$\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}),\, \boldsymbol{\Sigma}),\ \boldsymbol{\theta}^{\mathsf{T}} = [\boldsymbol{\omega}^{\mathsf{T}},\ \mathbf{z}^{\mathsf{T}}], \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{M_y}$ 表示测量向量，$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{M_\theta}$ 是未知的（确定性）参数向量，由连续参数 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{M_\omega}$ 和整数参数 $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^{M_z}$组成，且满足 $M_\theta = M_\omega + M_z$。函数$\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{M_y}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{M_y \times M_y}$ 分别表示测量模型均值和协方差。

除非第IV-A节另有说明，否则我们采用以下简化假设：

A1）所有用户 $r \in \{1,\dots,N\}$和基站都跟踪相同的一组 K 卫星 $s \in \{p,1,\dots,K-1\}$。A2）所有用户的随机测量模型具有相同的结构。A3）用户彼此距离很近，因此网络中卫星-接收机的视线（LOS）向量相同。

接下来，我们推导 $\boldsymbol{\theta}$、$\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})$以及 $\boldsymbol{\Sigma}$在 C-DGNSS模型和 C-RTK模型中的显式形式，如表II所总结。推导分为四个步骤，详见第III-A.2 节至III-A.5节：*(1)* 定义并线性化单用户观测模型；*(2)* 引入紧凑符号以叠置所有网络观测值；*(3)* 相对于参考站应用单差（SD）算子，得到 C-DGNSS模型（定义1）；以及*(4)*通过选取参考卫星扩展到双差（DD）情形，得到C-RTK模型（定义2）。请注意，扩展公式见《补充材料》第 S1 节。

1. 协作算子的定义

我们首先介绍三个算子，用以简洁地表示后续推导中使用的堆叠和差分运算。在本节中，令 m表示应用了堆叠或差分运算的向量维度。实际中，m可以是

卫星数量（用于测量差分）或状态向量维度。

a) 协作堆叠算子：为对整个网络的观测值进行堆叠，我们定义

$$\tilde{\mathbf{u}} \triangleq [\,\mathbf{u}_b^\top,\ \mathbf{u}_1^\top,\ \ldots,\ \mathbf{u}_N^\top\,]^\top \in \mathbb{R}^{m(N+1)}, \tag{2}$$

其中$\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$ 表示与参考站（$i=b$）或用户接收机（$i \in \{1,\ldots,N\}$）相关联的任意向量。

b) 协作单差算子：相对于参考站 b，我们定义

$$\tilde{\mathbf{u}}_b \triangleq \tilde{\mathbf{D}}_b\tilde{\mathbf{u}} = \left[\mathbf{u}_{b1}^\top,\ \ldots,\ \mathbf{u}_{bN}^\top\right]^\top \in \mathbb{R}^{mN}, \tag{3}$$

其中 $\mathbf{u}_{br} \triangleq \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_b \in \mathbb{R}^m,\ \ \forall r \in \{1,\ldots,N\}$表示每个用户的单差量，单差矩阵的形式为

$$\tilde{\mathbf{D}}_b = [-\underline{1}_N \otimes \mathbf{I}_m,\ \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_m] \in \mathbb{R}^{mN\times m(N+1)}. \tag{4}$$

c) 协作双差算子：相对于枢轴卫星 p，我们定义

$$\tilde{\mathbf{u}}_b^p \triangleq \tilde{\mathbf{D}}_p\tilde{\mathbf{u}}_b = \left[(\mathbf{u}_{b1}^p)^\top,\ \ldots,\ (\mathbf{u}_{bN}^p)^\top\right]^\top \in \mathbb{R}^{(m-1)N}, \tag{5}$$

being $(\mathbf{u}_{br}^p)^\mathsf{T} = (\mathbf{D}_p\mathbf{u}_{br})^\mathsf{T} \triangleq \left[u_{br}^{p1},\ \ldots,\ u_{br}^{p(m-1)}\right] \in \mathbb{R}^{m-1}$ the per-user DD vector, and $u_{br}^{ps} \triangleq u_{br}^s - u_{br}^p = u_r^s - u_r^p - (u_b^s - u_b^p) \in \mathbb{R}$ the per-user per-satellite differentiation scalar. The DD matrices are defined as

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}}_p &= \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{D}_p \in \mathbb{R}^{(m-1)N\times mN},\\ \mathbf{D}_p &= [-\underline{1}_{m-1}, \mathbf{I}_{m-1}] \in \mathbb{R}^{(m-1)\times m}.\end{aligned} \tag{6}$$

请注意，单用户双差矩阵$\mathbf{D}_p$已在文献 [4, 第 26]章中给出。

2. 单用户模型

在给定历元，接收机 r 测量相对于卫星 s 的伪距和载波相位，如下所示

$$\begin{aligned}\rho_r^s &= \varrho_r^s + T_r^s + I_r^s + c(dt_r - dt^s) + \varepsilon_r^s \in \mathbb{R},\\ \Phi_r^s &= \varrho_r^s + T_r^s - I_r^s + c(dt_r - dt^s) + \lambda N_r^s + \epsilon_r^s \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\varrho_r^s \triangleq \|\mathbf{p}^s - \mathbf{p}_r\|$ 表示真实的卫星-接收机距离，其中$\mathbf{p}^s$ 和$\mathbf{p}_r$ 分别为卫星和接收机位置向量； dt^s 和 dt_r 分别为卫星和接收机时钟偏差； c 为光速； ε_r^s 和 ϵ_r^s 表示未建模误差（例如热噪声、多路径、大气残差、星历误差）； I_r^s 和 T_r^s 分别表示电离层延迟和对流层延迟； λ为载波波长； N_r^s 为整周模糊度 [33, 第 2]章。为简单起见，我们省略频率和时间参考标签，并忽略星历误差。

对于接收机 r，收集未知位置和钟差参数的状态向量表示为

$$\mathbf{x}_r = [\mathbf{p}_r^\top,\ c\,dt_r]^\top \in \mathbb{R}^4, \qquad \delta\mathbf{x}_r \triangleq \mathbf{x}_r - \mathbf{x}_{r,0}, \tag{8}$$

其中$\mathbf{x}_{r,\,0}$表示下文使用的线性化（假定参考）状态。

为获得局部线性且易于处理的模型，通过在初始估计$\mathbf{p}_{r,0}$处进行一阶泰勒展开，将真实距离 ϱ_r^s 关于$\mathbf{p}_r$ 线性化：

$$\varrho_r^s \approx \|\mathbf{p}^s - \mathbf{p}_{r,0}\| - (\mathbf{e}_r^s)^\top\delta\mathbf{p}_r, \tag{9}$$

其中， $\delta\mathbf{p}_r = \mathbf{p}_r - \mathbf{p}_{r,0}$ 为位置线性化增量， $\mathbf{e}_r^s = -(\mathbf{p}^s - \mathbf{p}_{r,0})/\|\mathbf{p}^s - \mathbf{p}_{r,0}\|$ 为卫星-接收机视线单位向量。为简洁起见，符号说明中省略了$\mathbf{e}_r^s$ 对$\mathbf{p}_{r,0}$ 的依赖关系。

将线性化后的距离代入（7），并将结果表示为观测值减计算值（O-C）形式，可得接收机 r 针对全部 K 可见卫星 [4, Ch. 21]的伪距和载波相位残差：

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\rho}_r &= \mathbf{H}_r\,\delta\mathbf{x}_r + c\,d\mathbf{t} + \boldsymbol{T}_r + \boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{\varepsilon}_r \in \mathbb{R}^K,\\ \Delta\boldsymbol{\Phi}_r &= \mathbf{H}_r\,\delta\mathbf{x}_r + c\,d\mathbf{t} + \boldsymbol{T}_r - \boldsymbol{I}_r + \lambda\mathbf{N}_r + \boldsymbol{\epsilon}_r \in \mathbb{R}^K,\end{aligned} \tag{10}$$

其中$\mathbf{H}_r = [\mathbf{E}_r,\ \ \underline{1}_K] \in \mathbb{R}^{K\times 4}$ 为观测模型矩阵，其中$\mathbf{E}_r = -[\mathbf{e}_r^1,\ \ \ldots, \mathbf{e}_r^K]^\top$ 表示几何矩阵。在假设A3下，对于所有有 r， $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}$ 和$\mathbf{H}_r = \mathbf{H}$。项 $c\,d\mathbf{t}$ 仅包含卫星钟，因为接收机钟已包含在状态中。

注意，上述单频模型可通过堆叠不同频率的观测，并将相应的载波相位模糊度纳入状态向量进行扩展，从而适用于多频情形。

3. 多用户模型

将（2）中的堆叠算子应用于（10），可得完整网络的O-C观测方程：

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}} &= \tilde{\mathbf{H}}_{N+1}\delta\tilde{\mathbf{x}} + c\,\tilde{d\mathbf{t}} + \tilde{\boldsymbol{T}} + \tilde{\boldsymbol{I}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathbb{R}^{K(N+1)},\\ \Delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}} &= \tilde{\mathbf{H}}_{N+1}\delta\tilde{\mathbf{x}} + c\,\tilde{d\mathbf{t}} + \tilde{\boldsymbol{T}} - \tilde{\boldsymbol{I}} + \lambda\tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \in \mathbb{R}^{K(N+1)},\end{aligned} \tag{11}$$

~与 $\mathbf{H}_N = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{H}$。为清晰起见，我们根据（2）明确写出以下堆叠量：

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}} &\triangleq [\,\Delta\boldsymbol{\rho}_b^\top,\ \Delta\boldsymbol{\rho}_1^\top,\ \ldots,\ \Delta\boldsymbol{\rho}_N^\top\,]^\top \in \mathbb{R}^{K(N+1)},\\ \delta\tilde{\mathbf{x}} &\triangleq [\,\delta\mathbf{x}_b^\top,\ \delta\mathbf{x}_1^\top,\ \ldots,\ \delta\mathbf{x}_N^\top\,]^\top \in \mathbb{R}^{4(N+1)}.\end{aligned}$$

相同的堆叠约定适用于（11）中的所有其他带波浪号的量。

注意，堆叠残差向量$[\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}^\top, \Delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^\top]^\top$具有相应的误差向量 $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = [\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\top, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^\top\,]^\top$，其协方差为

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbb{E}\{\tilde{\boldsymbol{\eta}}\,\tilde{\boldsymbol{\eta}}^\mathsf{T}\} = \begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_\rho & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\rho,\Phi}\\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\Phi,\rho} & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_\Phi\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2K(N+1)\times 2K(N+1)}. \tag{12}$$

~这里， $\boldsymbol{\Sigma}_\rho = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,\,b},\ \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,\,1},\ \ldots,\ \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,\,N})$，其中$\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,\,r} = \sigma_{\rho,\,r}^2\mathbf{W}_r^{-1}$是接收机 r的伪距协方差，$\sigma_{\rho,\,r}^2$ 是已知的标称伪距噪声方差。~也适用类似的定义。通常认为（12）中的交叉协方差项可以忽略，但基线超过 50 km 时除外 [33, 第 2] 章。最后，对角加权矩阵 $\mathbf{W}_r$ 采用基于卫星仰角 [55] 或信噪比 [56]的标准GNSS方差模型。

4. 协作式*DGNSS*模型（仅码）

通过将式(3)中的单差算子应用于式(11)，可得到全网络单差观测方程，形式如下：

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b &= \tilde{\mathbf{D}}_b\,\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \tilde{\mathbf{H}}_N\,\delta\tilde{\mathbf{x}}_b + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b \in \mathbb{R}^{KN},\\ \Delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b &= \tilde{\mathbf{D}}_b\,\Delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \tilde{\mathbf{H}}_N\,\delta\tilde{\mathbf{x}}_b + \lambda\,\tilde{\mathbf{N}}_b + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_b \in \mathbb{R}^{KN},\end{aligned} \tag{13}$$

表 II: 各协作式 GNSS 模型参数的统一表示，映射到（1）中的高斯形式。

方法	模型	$\boldsymbol{y}$	M_y	$\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})$	$\boldsymbol{\Sigma}$	$\boldsymbol{\omega}$	M_ω	$\mathbf{z}$	M_z
C-DGNSS	(16)	$\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b$	KN	$\tilde{\mathbf{H}}_N\boldsymbol{\theta}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}$	$\delta\tilde{\mathbf{x}}_b$	$4N$	$\varnothing$	0
C-RTK	(20)	$\left[\Delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b^{p\top},\ \Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b^{p\top}\right]^\top$	$2(K-1)N$	$\mathbf{B}\mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_b^p$	$\tilde{\mathbf{b}}$	$3N$	$\tilde{\mathbf{a}}$	$N(K-1)$

其中，共模误差（包括卫星钟差和大气延迟）通过单差运算得到了大幅消除。

$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_b = [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^\top,\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_b^\top]^\top$ 的协方差为

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_b = \mathbb{E}\{\tilde{\boldsymbol{\eta}}_b\,\tilde{\boldsymbol{\eta}}_b^\top\} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho} & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho,\Phi} \\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi,\rho} & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2KN\times 2KN}, \tag{14}$$

与伪距相关的协方差块 ge
测量值可表示为

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho} = \tilde{\mathbf{D}}_b\,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_\rho\,\tilde{\mathbf{D}}_b^\top = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,1}+\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,N}+\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

其中所有非对角项对应于 $\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,\,b}$ 类似地，˜对于 $\boldsymbol{\Sigma}_{b,\,\Phi}$ 也有类似的表达式。关于式（13）中观测模型的更多细节，请参见补充材料第 S1-C 节。

定义 1 （C-DGNSS模型）。介绍了所有相关术语后，现给出完整的 *C-DGNSS*观测模型（见表 *II*）：

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b|\delta\tilde{\mathbf{x}}_b \sim \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{H}}_N\,\delta\tilde{\mathbf{x}}_b, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}),\ \delta\tilde{\mathbf{x}}_b \in \mathbb{R}^{4N}. \tag{16}$$

这里，$\delta\mathbf{x}_{bi} = \delta\mathbf{x}_i - \delta\mathbf{x}_b \overset{(a)}{=} \delta\mathbf{x}_i$，其中 *(a)* 使用 $\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_{b,\,0}$（已测量基站）$\Rightarrow \delta\mathbf{x}_b = \mathbf{0}$。因此，在 *C-DGNSS* 中，相对状态增量简化为用户绝对状态增量，即 $\delta\mathbf{x}_{bi} = [\delta\mathbf{p}_{bi}^\top,\ c\,\delta t_{bi}]^\top \overset{(a)}{=} [\delta\mathbf{p}_i^\top,\ c\,\delta t_i]^\top$。

5. 协作式实时动态定位模型（码和相位）

对式（5）应用双差算子，再应用于（13），可得全网络双差测量方程：

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b^p = \tilde{\mathbf{D}}_p\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b = \tilde{\mathbf{D}}_p\tilde{\mathbf{E}}_N\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^p \in \mathbb{R}^{(K-1)N} \tag{17}$$
$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b^p = \tilde{\mathbf{D}}_p\Delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b = \tilde{\mathbf{D}}_p\tilde{\mathbf{E}}_N\tilde{\mathbf{b}} + \lambda\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_b^p \in \mathbb{R}^{(K-1)N}$$

其中，除了式（13）中的单差误差抵消外，双差还消除了接收机时钟偏差。˜ ˜
这里，$\mathbf{E}_N = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}$，我们使用简写 $\mathbf{b} = \delta\tilde{\mathbf{p}}_b$˜和 ˜$\mathbf{a} = \mathbf{N}_b^p$ 分别表示全网络基线向量和整周模糊度向量。注意，根据式（5）中的双差算子，我们有

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{N}}_b^p = [\mathbf{N}_{b1}^{p\top},\ \ldots,\ \mathbf{N}_{bN}^{p\top}]^\top \in \mathbb{R}^{(K-1)N}, \tag{18}$$
$$\mathbf{N}_{br}^{p\top} = [N_{br}^{p1},\ \ldots,\ N_{br}^{pK}]^\top \in \mathbb{R}^{K-1}, \forall r \in \{1,\ldots,N\},$$
$$N_{br}^{ps} = N_r^s - N_r^p - (N_b^s - N_b^p) \in \mathbb{R}, \forall s \in \{1,\ldots,K-1\},$$

˜对于 $\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b^p$和 $\Delta\boldsymbol{\Phi}_b^p$，也有类似的表达式。

我们将堆叠误差向量$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_b^p = [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^{p\top},\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_b^{p\top}]^\top$ 的协方差写作

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_b^p = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}^p & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho,\Phi}^p \\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi,\rho}^p & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi}^p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(K-1)N\times 2(K-1)N}, \tag{19}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\,\rho}^p = \tilde{\mathbf{D}}_p\,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\,\rho}\,\tilde{\mathbf{D}}_p^\top$ 以及 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\,\Phi}^p = \tilde{\mathbf{D}}_p\,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\,\Phi}\,\tilde{\mathbf{D}}_p^\top$。关于式（17）中观测模型的更多细节，请参阅补充材料第 S1-D 节。

定义 2 （C-RTK模型）。完整的 *C-RTK*观测模型（见表 *II*）如下：

$$\begin{bmatrix}\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b^p \\ \Delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b^p\end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{a}}\end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}},\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_b^p\right), \tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{3N}, \tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{N(K-1)}, \tag{20}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{A}}_\rho \\ \tilde{\mathbf{A}}_\Phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{N(K-1)} \\ \lambda\cdot\mathbf{I}_{N(K-1)}\end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}}_\rho \\ \tilde{\mathbf{B}}_\Phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{D}}_p\tilde{\mathbf{E}}_N \\ \tilde{\mathbf{D}}_p\tilde{\mathbf{E}}_N\end{bmatrix}, \tag{21}$$

˜ ˜其中 $\mathbf{D}_p\mathbf{E}_N = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{D}\mathbf{E}$ 是由于接收机之间共享卫星几何关系。根据定义*1*中的假设（*a*）（已测量基站），可知 *C-RTK* 联合估计用户位置，即 ˜$\mathbf{b} = \delta$˜$\mathbf{p}_{b\,(a)} = [\delta\mathbf{p}_1^\top,\ \ldots\ldots,\ \delta\mathbf{p}_N^\top]^\top$，并根据式 (18)估计相对于枢轴卫星的双差模糊度。

第1节（C-DGNSS/C-RTK模型协方差结构）。下文将推导出*C-DGNSS*和*C-RTK*模型的简化协方差表达式，这些表达式构成了第*IV*节理论推导的基础。

假设所有接收机具有相同的误差特性，即$\sigma_{\rho,\,r}^2 = \sigma_\rho^2$，$\sigma_{\Phi,\,r}^2 = \sigma_\Phi^2$，且$\mathbf{W}_r = \mathbf{W}\ \forall r \in \{1,\ldots,N\}$，因此所有接收机的$\boldsymbol{\Sigma}_\rho = \sigma_\rho^2\mathbf{W}^{-1}$和$\boldsymbol{\Sigma}_\Phi = \sigma_\Phi^2\mathbf{W}^{-1}$均相同。假设基站使用相同的加权矩阵，即$\mathbf{W}_b = \mathbf{W}$，但其误差方差不同：$\sigma_{\rho,\,b}^2 \neq \sigma_\rho^2$，$\sigma_{\Phi,\,b}^2 \neq \sigma_\Phi^2$。在这些假设下，（15）中的协方差矩阵可简化为

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}^\alpha = \begin{bmatrix}(1+\alpha)\boldsymbol{\Sigma}_\rho & \cdots & \alpha\boldsymbol{\Sigma}_\rho \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha\boldsymbol{\Sigma}_\rho & \cdots & (1+\alpha)\boldsymbol{\Sigma}_\rho\end{bmatrix} = \mathbf{C}_N^\alpha \otimes \boldsymbol{\Sigma}_\rho, \tag{22}$$

$$\mathbf{C}_N^\alpha = \mathbf{I}_N + \alpha\mathbf{1}_N, \tag{23}$$

其中$\alpha = \sigma_{\rho,\,b}^2/\sigma_\rho^2$ 表示网络中基站与接收机之间的观测误差方差比。对于˜，也有类似的表达式。假设码观测与载波相位观测不相关，则（14）可简化为

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_b^\alpha = \begin{bmatrix}\mathbf{C}_N^\alpha \otimes \boldsymbol{\Sigma}_\rho & \mathbf{0}_{KN} \\ \mathbf{0}_{KN} & \mathbf{C}_N^\alpha \otimes \boldsymbol{\Sigma}_\Phi\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2KN\times 2KN}. \tag{24}$$

且（19）可归结为

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_b^{p,\alpha} = \begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}^{p,\alpha} & \mathbf{0}_{(K-1)N} \\ \mathbf{0}_{(K-1)N} & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi}^{p,\alpha}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(K-1)N\times 2(K-1)N}, \tag{25}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}^{p,\alpha} = \mathbf{C}_N^\alpha \otimes \mathbf{D}_p\boldsymbol{\Sigma}_\rho\mathbf{D}_p^\top, \tag{26}$$

表 III：各协作式 GNSS 模型的估计性能界参数的统一表示，映射至（29）中的通用 FIM 表达式。

方法	模型	$\tilde{\mathbf{G}}$	$\tilde{\mathbf{R}}$
C-DGNSS（仅码）	(34)	$\tilde{\mathbf{H}}_N$	$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{\alpha}_{b,\rho}$
C-RTK浮点解	(35)	$\tilde{\mathbf{D}}_p\tilde{\mathbf{E}}_N$	$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{p,\alpha}_{b,\rho}$
C-RTK固定解	(37)	$\mathbf{D}_p\mathbf{E}_N$	$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{p,\alpha}_{b,\Phi}$

~， $\mathbf{\Sigma}^p$的类似表达式为 $\mathbf{\Sigma}^{p,\alpha}_{b,\Phi}$ 。

请注意，对于 $N=1$，协作模型可归结为传统RTK定位所采用的经典观测模型：

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\rho}^p_b\\ \Delta\boldsymbol{\Phi}^p_b\end{bmatrix}\Bigg|\begin{bmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{bmatrix}\sim\mathcal{N}\big(\mathbf{B}\mathbf{b}+\mathbf{A}\mathbf{a},\,\mathbf{\Sigma}^p_b\big),\quad \mathbf{b}\in\mathbb{R}^{n_x},\,\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{K-1},\tag{27}$$

其中，$\mathbf{b}=\delta\mathbf{p}_b$ 表示**用户**与参考站之间的基线，而 $\mathbf{a}=\mathbf{N}^p_b$ 是双差整数模糊度向量。模型矩阵可简化为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_\rho\\ \mathbf{A}_\Phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{K-1}\\ \lambda\mathbf{I}_{K-1}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_\rho\\ \mathbf{B}_\Phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_p\mathbf{E}\\ \mathbf{D}_p\mathbf{E}\end{bmatrix}.\tag{28}$$

同样，只考虑 $\Delta\boldsymbol{\rho}^p_b$ 即可得到标准差分全球导航卫星系统模型。

B. 估计器与性能界

本节介绍 C-DGNSS（第III-B.1节）和 C-RTK（第III-B.2节）估计器，以及相应的克拉美–罗下界（CRB），该下界给出了估计方差的理论下限。

将所研究的两个模型的费舍尔信息矩阵（FIM）统一表示为以下形式较为方便：

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega})=\tilde{\mathbf{G}}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{G}},\tag{29}$$

~ ~其中，$\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{R}$ 针对不同模型的定义汇总于表 III。

注 2（可解性条件）。最小二乘解的一个充分条件是，独立测量的总数必须大于或等于系统中的未知数个数。对于 *C-DGNSS* 和 *C-RTK* 估计器，这对应于 *[18]*

$$\sum_{r=1}^{N}K_r\geq 4N\qquad K_r\leq K\qquad,$$

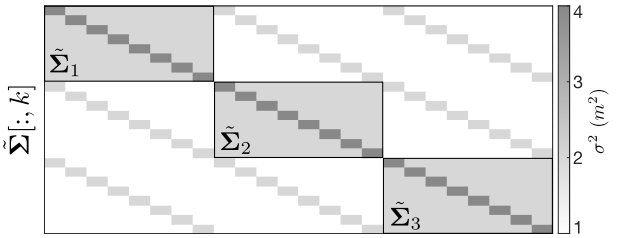
其中表示用户 r可见的卫星数量。若场景中的每个用户都至少能看到 *4* 颗卫星，则可保证满足此条件。

1. 协作式差分全球导航卫星系统估计器及界

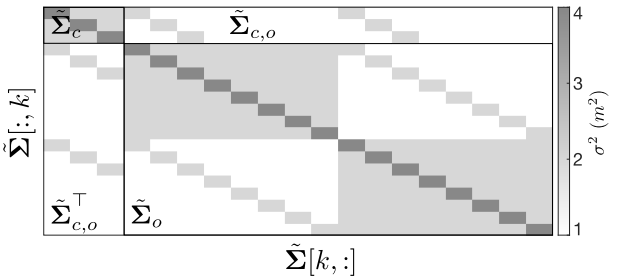
根据（16）中的仅码观测模型，且满足备注2 中的条件时，C-DGNSS 可构建为加权最小二乘（WLS）问题：

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}=\underset{\hat{\boldsymbol{\omega}}\in\mathbb{R}^{M_y}}{\arg\min}\left\{(\boldsymbol{y}-\tilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{\omega})^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(\boldsymbol{y}-\tilde{\mathbf{G}}\boldsymbol{\omega})\right\}.\tag{30}$$

请注意，表格中详细列出了该公式中各项在 C-DGNSS模型中的具体内容 II 和 III。



(a) 所有接收机均观测到相同的 $K=9$ 颗可见卫星。矩阵下标表示用户索引。



(b) 一台接收机观测到的卫星数量少于其他接收机（$K_c=4$）；受约束用户和开阔天空用户的符号说明见第IV-A节。

图 3：在备注1 的假设下（参见（25））， 伪距测量对应的 C-RTK协方差矩阵热力图，$\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{p,\alpha}_{b,\rho}$，其中 $\mathbf{W}=\mathrm{I}$，$\sigma_\rho=1\,\mathrm{m}$，$N=3$，以及 $\alpha=1$。对于 $\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{p,\alpha}_{b,\Phi}$，也可得到类似的模式。 $[k,:]$ 和 $[:k]$ 表示行切片和列切片。关于 $\alpha=1$ 条件下的 C-DGNSS 情形，参见 [30, 图 3]。关于 C-RTK 中逐元素噪声贡献的详细说明，请参见补充材料（第 S1-D 节）。

（30）中的估计器可通过迭代过程求得，该过程在每一步重新线性化系统模型，等价于高斯–牛顿优化方法 [57]。在第 k次迭代中，有

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{k+1}=\hat{\boldsymbol{\omega}}^{k}+\left(\tilde{\mathbf{G}}^{k\top}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{G}}^{k}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{G}}^{k\top}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(\boldsymbol{y}-\tilde{\mathbf{G}}^{k}\hat{\boldsymbol{\omega}}^{k}),\tag{31}$$

其中，几何矩阵 ~$\tilde{\mathbf{G}}^k$ 在^$\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 处计算，但为简洁起见，^符号中省略了这种依赖关系。值得注意的是，所提出的（31）中的估计器，其计算成本主要由(~$\tilde{\mathbf{G}}^{\top}$ ~$\tilde{\mathbf{R}}^{-1}$ ~$\tilde{\mathbf{G}}$)的求逆决定，其计算量随 $\mathcal{O}(N^3)$增长；随着用户数量增加，计算量迅速上升，因此有必要在未来研究分布式建模以提高可扩~展性。

根据（16）中的高斯假设，（30）中的估计器是最优的，且等价于最大似然估计器（MLE），其估计精度在理论上受克拉美–罗下界限制。为了评估特定用户 r的克拉美–罗下界，我们提取费舍尔信息矩阵中与该用户三维位置参数相关的3×3 子矩阵。为此，我们引入算子 [30], [54]

$$\mathrm{block}_r(\mathbf{X})=\mathbf{X}[3(r-1)+1:3r,\;3(r-1)+1:3r],\tag{32}$$

其中 $[i:\;j,\;\;k:\;l]$ 表示由第i 至 j 行以及第 k 至 l列构成的子矩阵，索引采用从 1 开始的计数方式，其中 $r\in\{1,2,\ldots,N\}$。

CRB 给出了第 i 个参数估计方差的下界：

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_i)\geq\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\omega}_i)=[\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\omega})]_{ii},\tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_i = [\boldsymbol{\omega}]_i$，且 FIM 定义为

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega})]_{i,j} = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\omega}_i \partial \boldsymbol{\omega}_j}\right] = [\tilde{\mathbf{G}}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{G}}]_{i,j}. \quad (34)$$

作为接收机 r 三维定位性能的标量指标，我们计算其位置估计的均方根误差（RMSE），单位为米，表示为$\sqrt{\mathrm{Tr}\,[\mathbf{block}_r\,(\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\omega}))]}$。

2. 协作式*RTK*估计器与界

式（1）所定义的模型属于混合线性回归问题，涉及实值参数 $\boldsymbol{\omega}$ 和整数值参数 $\boldsymbol{z}$，这是GNSS载波相位定位的一个典型特征 [58]。由于 $\boldsymbol{z}$具有整数性质，该估计问题没有闭式解。按照标准RTK实践，采用三阶段流程（即浮点估计、整周模糊度解算和固定解估计），并将这一架构扩展至协作场景 [29]。

在 [58], 中，这一混合实数—整数估计问题的性能由基于有限测试点集合构造的McAulay-Seidman界（MSB）刻画。该框架对浮点状态和固定状态均进行了严格处理，但其表达式难以纳入本文提出的统一C-DGNSS/C-RTK分析。因此，我们着重讨论相应的Cram´er–Rao型界，用于描述C-RTK的浮点区域和固定解区域；这些界可视为MSB的极限情形，即模糊度尚未解算（浮点）或已正确固定。为完整起见，我们在下文简要概述这些界，并请读者参阅 [58]了解完整的MSB表述。

请注意，除了克拉美–罗下界之外，整周模糊度解算的成功概率（即正确整数向量被固定的可能性）也可以像 [29,式（17）]那样给出上界。

C-RTK 浮点解： 当整周模糊度被视为实数值时，即 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{K_\omega}$，$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{K_z}$，C-RTK 处于浮点状态。在这种情况下，$\boldsymbol{\theta}$的费舍尔信息矩阵为（非协作情形见 [58,式（26）] ）：

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}}^\top \\ \tilde{\mathbf{A}}^\top\end{bmatrix}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_b^{p,\alpha})^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{A}}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}}_\rho^\top & \tilde{\mathbf{B}}_\Phi^\top \\ \tilde{\mathbf{A}}_\rho^\top & \tilde{\mathbf{A}}_\Phi^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}^{p,\alpha})^{-1} & \\ & (\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi}^{p,\alpha})^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}}_\rho & \tilde{\mathbf{A}}_\rho \\ \tilde{\mathbf{B}}_\Phi & \tilde{\mathbf{A}}_\Phi\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{B}}_\rho^\top\left((\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}^{p,\alpha})^{-1}+(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi}^{p,\alpha})^{-1}\right)\tilde{\mathbf{B}}_\rho & \lambda\tilde{\mathbf{B}}_\rho^\top(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi}^{p,\alpha})^{-1} \\ \lambda(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi}^{p,\alpha})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_\rho & \lambda^2(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi}^{p,\alpha})^{-1}\end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (35)$$

此处，我们纳入 Remark 1 中定义的 α，假设载波相位和码测量互不相关，并采用（25）所遵循的 $\tilde{}$ $\tilde{}$，以及从（21）中采用 $\mathbf{A}_\Phi = \lambda\mathbf{I}^{N(K-1)}$、$\mathbf{A}_\rho = \mathbf{0}$、$\tilde{}$ $\tilde{}$ 和 $\mathbf{B}_\rho = \mathbf{B}_\Phi$。令 $\mathbf{U}$、$\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ 分别表示（35）的左上块、非对角块和右下块。$\boldsymbol{\omega}$ 的克拉美–罗下界对应于 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ 的 (1,1) 块，根据舒尔补可得

$$\mathbf{CRB}(\hat{\boldsymbol{\omega}}) = \left(\mathbf{U}-\mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}^\top\right)^{-1} = \left(\tilde{\mathbf{B}}_\rho^\top(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}^{p,\alpha})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_\rho\right)^{-1}. \quad (36)$$

在浮点状态下，由于模糊度尚未解算，精度主要取决于码测量。实时动态定位浮点解下界对应于将观测矩阵投影到与模糊度空间正交的子空间后所获得的信息 [33，式（2.16）]。

C-RTK 固定解： 当模糊度被正确解算并作为整数处理后，性能会进一步提升。在此固定解区域内，$\boldsymbol{\omega}$ 的费舍尔信息矩阵由 [58, 式（25a）]给出

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}) = \tilde{\mathbf{B}}^\top(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_b^{p,\alpha})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}_\rho^\top\left((\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}^{p,\alpha})^{-1}+(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi}^{p,\alpha})^{-1}\right)\tilde{\mathbf{B}}_\rho, \quad (37)$$

其中，(35)中的假设和矩阵定义仍然适用。在标准假设$\sigma_\Phi \ll \sigma_\rho$下，近似关系$(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{p,\,b}_{\Phi,\,\Phi})^{-1} + (\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{p,\,b}_{\rho,\,\rho})^{-1} \approx (\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{p,\,b}_{\Phi,\,\Phi})^{-1}$成立，因此估计精度主要由载波相位测量决定，其界为

$$\mathbf{CRB}(\hat{\boldsymbol{\omega}}) \approx \left(\tilde{\mathbf{B}}_\rho^\top(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi}^{p,\alpha})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_\rho\right)^{-1}. \quad (38)$$

因此，截至目前，我们已为协作DGNSS和协作RTK引入了统一的观测模型，以及相应的位置估计问题和基于克拉美–罗下界的性能界。

IV. 理论性能分析

本节将针对本文所考虑的协作定位场景，全面分析C-DGNSS和C-RTK估计器的渐近性能如何随三个关键参数变化，如图1所示：*(i)* 网络中的辅助用户数量 N_o；*(ii)* 这些用户独占可见的卫星数量 K_o；以及*(iii)* 方差比 α，该参数在注释1中引入。

第 IV-A 介绍了本文所考虑的双簇可见性模型。在IV-B中，我们给出了式（29）中费舍尔信息矩阵的闭式表达式，该表达式以 N_o、K_o 和 α为参数，详细推导步骤见补充材料第 S2 节。第IV–C节给出了理论渐近分析。

A. 网络聚类

针对实际GNSS部署中卫星可见性固有的异质性，我们将协作网络划分为两个簇。

第一组由 N_c 受限可见性用户 （也称为 辅助用户）组成，他们在可见性受限的条件下（例如城市环境中）运行，可接收 K_c 颗卫星的信号。第二组由其余的 $N_\mathrm{o} = N - N_\mathrm{c}$ 开阔天空用户（也称为 辅助用户）组成，他们总共观测到 $K = K_\mathrm{c} + K_\mathrm{o}$ 颗卫星，其中 $K_\mathrm{o} \geq 0$ 表示仅该组可见的卫星数量。

图3 展示了定义 1 和 2中所阐述的协方差结构在同质网络与聚类网络之间的变化，后者包含可见性受限的用户。

为将聚类几何结构纳入式（1）中的统一协作模型，我们定义

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathrm{blkdiag}(\mathbf{G}_c, \mathbf{I}_{N_o} \otimes \mathbf{G}),\ \mathbf{G} = [\mathbf{G}_c^\top\ \mathbf{G}_o^\top]^\top, \quad (39)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} (1+\alpha)\mathbf{R}_c & \underline{1}_{N_o}^\top \otimes \begin{bmatrix}\alpha\mathbf{R}_c & \mathbf{0}_{K_c,K_o}\end{bmatrix} \\ \underline{1}_{N_o} \otimes \begin{bmatrix}\alpha\mathbf{R}_c \\ \mathbf{0}_{K_o,K_c}\end{bmatrix} & \mathbf{C}_{N_o}^{\alpha} \otimes \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

其中，blkdiag(·) 表示块对角拼接算子，$\mathrm{R} = \begin{bmatrix}\mathrm{R_c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{R_o}\end{bmatrix}$，且 $\mathrm{C}_{N_o}^{\alpha}$ 如式（23）中所述。将矩阵 R 的各个块记为 $\tilde{\mathrm{R}}_c = (1+\alpha)\mathrm{R}_c$，$\tilde{\mathrm{R}}_{c,o} = \mathbf{1}_{N_o}^\top \otimes [\alpha\mathrm{R}_c \quad \mathbf{0}_{K_c,K_o}]$，和 $\tilde{\mathrm{R}}_o = \mathrm{C}_{N_o}^{\alpha} \otimes \mathrm{R}_o$。此外，在式（40）中，我们采用备注 1 中所述的假设，并考虑情形$N_c = 1$。这便于对协方差表达式进行解析处理，同时仍能有代表性地评估辅助用户的位置估计性能。该性能通过以下量化：

$$\mathbf{CRB}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_c) = \mathrm{block}_1(\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega})^{-1}), \quad (41)$$

其中，$\boldsymbol{\omega}_c \in \mathbb{R}^3$ 表示与辅助用户相关的实值未知数。我们引入

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{G}_c^\top \mathbf{R}_c^{-1}\mathbf{G}_c, \quad \mathbf{J}_o = \mathbf{G}_o^\top \mathbf{R}_o^{-1}\mathbf{G}_o, \quad (42)$$

其中，$\mathbf{J}_c$ 和$\mathbf{J}_o$ 分别表示来自共同观测到的卫星，以及仅由辅助用户观测到的卫星的费 Fisher 信息。

理论基准： 我们考虑两个基准进行比较。第一个是非协作界，反映了标准差分架构（即差分全球导航卫星系统、实时动态定位）的性能，其定义为

$$\mathbf{CRB}_{\text{Non-Coop}} = (1+\alpha)\,\mathbf{J}_c^{-1}. \quad (43)$$

这里，因子 $1+\alpha$ 计入了基站和辅助用户两者的误差方差贡献，这体现在（22）的对角元素中。第二个是理想界，其定义为

$$\mathbf{CRB}_{\text{Ideal}} = \mathbf{J}_c^{-1}. \quad (44)$$

这对应于基站无噪声的差分架构，即 $\alpha = 0$，其性能界由辅助用户的几何结构决定。

B. 参数化费舍尔信息矩阵

根据（29）中的统一线性模型，得益于$\mathbf{R}$的块结构，对于任意 N_o 和 α，费舍尔信息矩阵均可按（45）进行参数化。推导（45）及系数 $\beta_i(\alpha)$，$i \in \{0,1,\ldots,5\}$ 所需的中间步骤见补充材料第 S2 节。$\beta_i(\alpha)$的紧凑定义和完整定义列于表VI；$\beta_3(\alpha)$仅在补充材料中使用。

表 IV：$\beta_i(\alpha)$ 第 IV–B 节中引入的系数定义。请注意 $\beta_1 = \beta_2 + 1$ 和 $\beta_4 = \beta_5 + 1$。这些表达式的推导见《补充材料》S2 节。

系数	紧凑形式	完整形式
$\beta_0(\alpha)$	—	$\frac{1}{1+\alpha N_o}$
$\beta_1(\alpha)$	$(\alpha\beta_0(\alpha)+1)^{-1}$	$\frac{\alpha N_o+1}{\alpha N_o+\alpha+1}$
$\beta_2(\alpha)$	$-\alpha\,\beta_1(\alpha)\,\beta_0(\alpha)$	$-\frac{\alpha}{\alpha N_o+\alpha+1}$
$\beta_3(\alpha)$	$\alpha\,\beta_2(\alpha)\,\beta_0(\alpha)$	$-\frac{(1+\alpha N_o)(\alpha N_o+1)}{(\alpha N_o+\alpha+1)^2(\alpha N_o+\alpha+2)}$
$\beta_4(\alpha)$	$1-\alpha\,\beta_0(\alpha)$	$\frac{1+\alpha(N_o-1)}{\alpha N_o+1}$
$\beta_5(\alpha)$	$-\alpha\,\beta_0(\alpha)$	$-\frac{\alpha}{\alpha N_o+1}$

$\tilde{\mathbf{G}}$ 通过$\mathbf{G}$ 进行左乘或右乘会保持$\mathbf{R}$的块$\tilde{}$结构，将每个协方差块映射到$\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega})$中对应的块。对角块随$\mathbf{J}_c$ 和$\mathbf{J}_o$缩放，反映公共卫星和专属卫星的贡献，而非对角块仅取决于$\mathbf{J}_c$。由此得到（45）中的紧凑表达式，其中子块$\mathbf{M}_{ij}$ （$i,j \in \{1,2\}$）将用于第IV–C节的渐近分析。对于块$\mathbf{M}_{22}$，的紧凑形式，我们利用 $\beta_1 = \beta_2 + 1$ 和 $\beta_4 = \beta_5 + 1$，具体解释见补充材料。

C. 渐近状态研究

本节重点关注式（41）中的项，该项反映了辅助用户的估计性能，可通过对矩阵（45）求舒尔补得到：

$$\mathbf{CRB}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_c) = \left(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21}\right)^{-1}. \quad (46)$$

接下来，我们考察该界在若干关键极限情形下的表现。请注意，对于 $N_o = 0$，该界会退化为非协作情形，因此无需进一步分析。

可以证明，在不存在星历误差或卫星钟差的情况下，基于码的DGNSS与RTK浮点解的克拉美–罗下界等价。因此，基于式（40）中C-DGNSS块结构的渐近分析，也刻画了C-RTK浮点解的渐近情形。此外，由于式（38）中的C-RTK固定解界具有相同的解析形式，仅测量精度不同，因此这些结论也适用于C-RTK固定解。

1. 理想辅助集群卫星可见性

极限 $\mathbf{J}_o \to \infty$ 表示辅助用户的理想卫星可见性，即辅助集群的专属卫星提供任意大的费 Fisher 信息。

考虑到$\mathbf{M}_{22}^{-1} \xrightarrow[\mathbf{J}_o\to\infty]{} \mathbf{0}$[1]，(46) 可简化为

$$\mathbf{CRB}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_c) \xrightarrow[\mathbf{J}_o\to\infty]{} \beta_1(\alpha)^{-1}\mathbf{J}_c^{-1} \le \mathbf{CRB}_{\text{Non-Coop}}, \quad (47)$$

[1]我们将式（45）的右下块写作 $\mathbf{M}_{22}(\lambda) = \mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$，其中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 包含 $\mathbf{J}_c$ 项和 $\mathbf{J}_o$ 项，且 $\lambda > 0$。由于 $\lambda \to \infty$，$\mathbf{B}$ 项占主导地位，从而得到 $\mathbf{M}_{22}^{-1}(\lambda) \to \frac{1}{\lambda}\mathbf{B}^{-1}$。

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} \beta_1(\alpha)\mathbf{J}_c & \begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\mathbf{J}_c & \cdots & \beta_2(\alpha)\mathbf{J}_c\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\mathbf{J}_c \\ \vdots \\ \beta_2(\alpha)\mathbf{J}_c\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\beta_1(\alpha)\mathbf{J}_c+\beta_4(\alpha)\mathbf{J}_o & \cdots & \beta_2(\alpha)\mathbf{J}_c+\beta_5(\alpha)\mathbf{J}_o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_2(\alpha)\mathbf{J}_c+\beta_5(\alpha)\mathbf{J}_o & \cdots & \beta_1(\alpha)\mathbf{J}_c+\beta_4(\alpha)\mathbf{J}_o\end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\beta_1(\alpha)\mathbf{J}_c}_{\mathbf{M}_{11}} & \underbrace{\beta_2(\alpha)\left(\mathbf{1}_{N_o}^{\mathsf{T}}\otimes\mathbf{J}_c\right)}_{\mathbf{M}_{12}} \\ \underbrace{\beta_2(\alpha)\left(\mathbf{1}_{N_o}\otimes\mathbf{J}_c\right)}_{\mathbf{M}_{21}} & \underbrace{\begin{matrix}(\mathbf{I}_{N_o}+\beta_2(\alpha)\,\mathbf{1}_{N_o})\otimes\mathbf{J}_c \\ +\,(\mathbf{I}_{N_o}+\beta_5(\alpha)\,\mathbf{1}_{N_o})\otimes\mathbf{J}_o\end{matrix}}_{\mathbf{M}_{22}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\alpha N_o+1}{\alpha N_o+\alpha+1}\mathbf{J}_c & \begin{bmatrix}-\frac{\alpha}{\alpha N_o+\alpha+1}\mathbf{J}_c & \cdots & -\frac{\alpha}{\alpha N_o+\alpha+1}\mathbf{J}_c\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}-\frac{\alpha}{\alpha N_o+\alpha+1}\mathbf{J}_c \\ \vdots \\ -\frac{\alpha}{\alpha N_o+\alpha+1}\mathbf{J}_c\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{\alpha N_o+1}{\alpha N_o+\alpha+1}\mathbf{J}_c+\frac{1+\alpha(N_o-1)}{\alpha N_o+1}\mathbf{J}_o & \cdots & -\frac{\alpha}{\alpha N_o+\alpha+1}\mathbf{J}_c-\frac{\alpha}{\alpha N_o+1}\mathbf{J}_o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha}{\alpha N_o+\alpha+1}\mathbf{J}_c-\frac{\alpha}{\alpha N_o+1}\mathbf{J}_o & \cdots & \frac{\alpha N_o+1}{\alpha N_o+\alpha+1}\mathbf{J}_c+\frac{1+\alpha(N_o-1)}{\alpha N_o+1}\mathbf{J}_o\end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{45}$$

The 详细的分块矩阵和克罗内克积运算推导延后至补充材料 S2 节。 . al.

其中，该不等式对所有 $N_o \in \mathbb{N}_0$ 以及 $\alpha > 0$均成立。该结果表明，在理想的辅助可见性条件下，协作总能优于式(43)中的非协作界。

项 $\beta_1(\alpha)^{-1}$ 随 N_o单调递减，这表明随着辅助用户数量增加，协作界会越来越紧。 $\frac{\partial \beta_1(\alpha)^{-1}}{\partial N_o} = -\frac{\alpha^2}{\alpha N_o+1)^2}$ 对所有 $\alpha > 0$都严格为负，这证实了这种单调递减趋势。对于固定的 N_o 和 $\alpha_1 > \alpha_2$，有 $\left|\frac{\partial \beta_1(\alpha_1)^{-1}}{\partial N_o}\right| > \left|\frac{\partial \beta_1(\alpha_2)^{-1}}{\partial N_o}\right|$，这意味着当 α 较大时，$\beta_1(\alpha)^{-1}$ 随 N_o 下降得更快。换言之，对于噪声更大的参考站，协作带来的改善更为显著。

2. 簇间卫星可见性的均匀情形

我们考察均匀情形$\mathbf{J}_o = \mathbf{0}$，其中所有用户具有相同的可见性，且没有辅助用户提供额外信息。这可作为基线，用于检验在可见性不提供多样性的情况下，协作是否有所帮助。均匀卫星可见性下的克拉美–罗下界为：

$$\mathbf{CRB}(\hat{\omega}_c)|_{\mathbf{J}_o=\mathbf{0}} = \left(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\left[\mathbf{M}_{22}|_{\mathbf{J}_o=\mathbf{0}}\right]^{-1}\mathbf{M}_{21}\right)^{-1}. \tag{48}$$

接下来计算中间项[2]

$$\left[\mathbf{M}_{22}|_{\mathbf{J}_o=\mathbf{0}}\right]^{-1} = \left[(\mathbf{I}_{N_o}+\beta_2(\alpha)\,\mathbf{1}_{N_o})\otimes\mathbf{J}_c\right]^{-1} \tag{49a}$$

$$= \left[\mathbf{I}_{N_o}+\beta_2(\alpha)\mathbf{1}_{N_o}\right]^{-1}\otimes\mathbf{J}_c^{-1} \tag{49b}$$

$$= \underbrace{\left(\mathbf{I}_{N_o} - \frac{\beta_2(\alpha)}{\beta_2(\alpha)N_o+1}\mathbf{1}_{N_o}\right)}_{\boldsymbol{\Omega}_1}\otimes\mathbf{J}_c^{-1}, \tag{49c}$$

$$\mathbf{M}_{12}\left[\mathbf{M}_{22}|_{\mathbf{J}_o=\mathbf{0}}\right]^{-1} = \beta_2(\alpha)\left(\mathbf{1}_{N_o}^{\mathsf{T}}\otimes\mathbf{J}_c\right)\left(\boldsymbol{\Omega}_1\otimes\mathbf{J}_c^{-1}\right) \tag{50a}$$

$$= \beta_2(\alpha)\left(\mathbf{1}_{N_o}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Omega}_1\right)\otimes\left(\mathbf{J}_c\mathbf{J}_c^{-1}\right) \tag{50b}$$

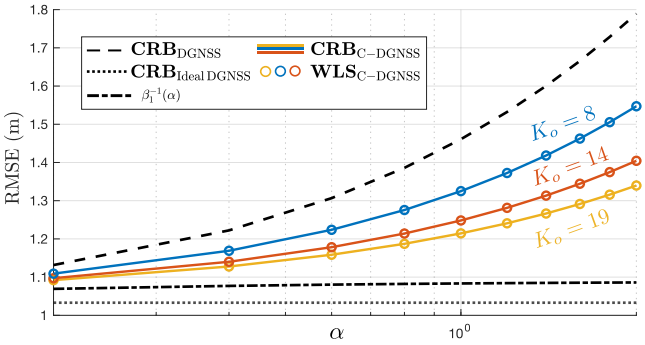
$$= -\frac{\alpha}{\alpha+1}\,\mathbf{1}_{N_o}^{\mathsf{T}}\otimes\mathbf{I}_{K_c}. \tag{50c}$$

[2]在（49）和（50）中，我们使用标准的克罗内克恒等式$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$和$(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD$和（b）中。

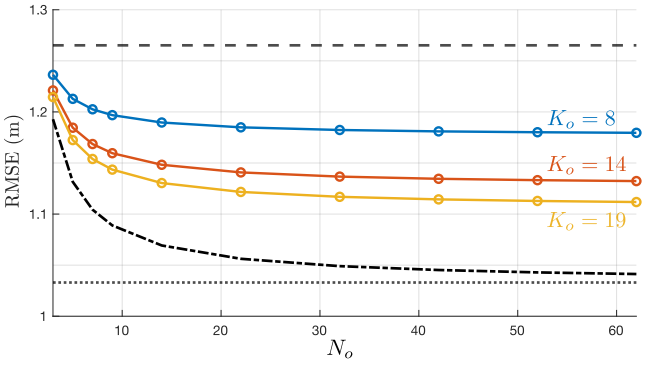
（49c）中的求逆可直接根据 Sherman–Morrison 公式得出：

$$(\mathbf{I}+\mathbf{u}\mathbf{v}^{\top})^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^{\top}}{1+\mathbf{v}^{\top}\mathbf{u}}, \tag{51}$$

应用于$\mathbf{u} = \mathbf{v} = \sqrt{\beta_2(\alpha)}\,\mathbf{1}_{N_o}$，得到辅助矩阵$\boldsymbol{\Omega}_1$，其对角元素为 $\frac{1+2\alpha}{1+\alpha}$，非对角元素为 $\frac{\alpha}{1+\alpha}$。在（50c）中，我们使用$\mathbf{1}_{N_o}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Omega}_1 = \left(\frac{1+2\alpha}{1+\alpha} + \sum_{i=1}^{N_o-1}\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)\mathbf{1}_{N_o}^{\mathsf{T}} = \frac{\alpha N_o+\alpha+1}{\alpha+1}\mathbf{1}_{N_o}^{\mathsf{T}}$，这是将$\boldsymbol{\Omega}_1$的对角和非对角贡献相加所得。



（a）用户间相关因子 α 对 $N_o = 10$的影响。



（b）辅助用户数量 N_o 对 $\alpha = 0.5$的影响。

图4：协作网络参数对 C-DGNSS 三维定位均方根误差的影响。结果针对 $K_o = \{8, 14, 19\}$给出。我们报告 **克拉美–罗下界**$_{\text{DGNSS}}$ (43)、**克拉美–罗下界**$_{\text{Ideal DGNSS}}$ (44)、渐近基准 $\beta_1(\alpha)^{-1}$ (47)，以及对于表III中的 C-DGNSS 模型，**克拉美–罗下界**$_{\text{C-DGNSS}}$ (34)和**加权最小二乘**$_{\text{C-DGNSS}}$ (30)。

将（50c）以及来自（$\mathbf{M}_{11}$ 和$\mathbf{M}_{21}$ 的块代入（45）中的（48），可得：

$$\mathbf{CRB}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_c)|_{\mathbf{J}_o=0} = \left(\beta_1(\alpha)\,\mathbf{J}_c + \frac{\alpha\,\beta_2(\alpha)}{\alpha+1}\,\boldsymbol{\Omega}_2\right)^{-1} \tag{52a}$$

$$= \left(\beta_1(\alpha) + \frac{\alpha\,\beta_2(\alpha)}{\alpha+1}\,N_o\right)^{-1}\mathbf{J}_c^{-1} \tag{52b}$$

$$= (1+\alpha)\,\mathbf{J}_c^{-1} = \mathbf{CRB}_{\text{Non-Coop}}. \tag{52c}$$

在（52a）中，我们使用辅助矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_2 = (1_{N_o}^\top \otimes \mathbf{I}_{K_c})(1_{N_o} \otimes \mathbf{J}_c) = (1_{N_o}^\top 1_{N_o}) \otimes \mathbf{J}_c \equiv N_o\mathbf{J}_c$。

（52c）中的结果表明，对于有限的 N_o，当辅助用户无法提供额外可见性时，协作不会带来任何增益。在这种情况下，添加信息完全相同的用户（实际上对应于 $N_c > 1$）不会改变性能。

3. 簇间卫星可见性互不相交

我们考虑受约束用户与辅助用户没有共享卫星的情形，此时（39）中的观测矩阵简化为 $\mathbf{G} = \mathbf{G}_o$，对应的仅为 K_o 颗卫星的观测。在此条件下，（40）中的协方差变为块对角矩阵，所有交叉协方差项均消失，其结构由左上块 $(1+\alpha)\mathbf{R}_c$ 和右下块 $\mathbf{C}_{N_o}^{\alpha} \otimes \mathbf{R}_o$组成。此情形下的费舍尔信息矩阵为：

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega})|_{\mathbf{G}=\mathbf{G}_o} = \begin{bmatrix} (1+\alpha)\,\mathbf{J}_c & \mathbf{0}_{M_\omega,\,M_\omega N_o} \\ \mathbf{0}_{M_\omega N_o,\,M_\omega} & \begin{bmatrix} \beta_4(\alpha)\mathbf{J}_o & \cdots & \beta_5(\alpha)\mathbf{J}_o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_5(\alpha)\mathbf{J}_o & \cdots & \beta_4(\alpha)\mathbf{J}_o \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

将此结果与（45）中的非不相交情形进行比较可知，辅助用户块保留了其协作结构，而受约束用户块则简化为 $(1+\alpha)\mathbf{J}_c$，而非 $\beta_1(\alpha)\mathbf{J}_c$。因此，舒尔补给出（43）中的非协作界，这表明卫星可见性互不相交对受约束用户没有任何益处。

4. 大规模协作网络

为刻画协作的渐近行为，我们考虑辅助用户数量不断增加的状态。在此极限下，$\beta_1(\alpha) \xrightarrow[N_o\to\infty]{} 1$且 $\beta_2(\alpha) \xrightarrow[N_o\to\infty]{} 0$，因此（45）中的费舍尔信息矩阵收敛为

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}) \xrightarrow[N_o\to\infty]{} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_c & \mathbf{0}_{M_\omega,M_\omega N_o} \\ \mathbf{0}_{M_\omega N_o,M_\omega} & \mathbf{I}_{N_o} \otimes (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_o) \end{bmatrix}. \tag{53}$$

交叉信息项趋于零，舒尔补简化为

$$\mathbf{CRB}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_c) \xrightarrow[N_o\to\infty]{} \mathbf{J}_c^{-1} = \mathbf{CRB}_{\text{Ideal}}. \tag{54}$$

因此，在大规模网络中，协作渐近地消除基站噪声的影响，并使受约束用户的界限趋近于仅由$\mathbf{J}_c$决定的理想极限。

V. 仿真实验

本节通过仿真实验评估所提出的方法。我们首先介绍实验设置，随后分析N_o、 K_o和 α 对所提出的协作差分GNSS框架的三维位置均方根误差和模糊度固定成功率的影响。表V汇总了观察到的趋势。

采用 20° 的高度角掩模，基站总共跟踪 $K = 19$ 颗卫星。受约束的可见性簇包含 $N_c = 2$ 个辅助用户，每个用户观测到 $K_c = 4$ 颗卫星，几何精度因子（GDOP）为 2.5。加权矩阵设为$\mathbf{W}_r = \mathbf{I}$，这反映了所有卫星噪声方差相同的假设。为获得具有统计意义的结果，对于每种参数变化和实验，均进行 $M = 10^4$ 次蒙特卡罗运行。报告协作差分全球导航卫星系统估计器在受约束可见性簇中首个用户的性能，并将其与两个参考界进行比较：模型克拉美-罗界和渐近基准$\beta_1(\alpha)^{-1}$，该基准对应于第 IV-C.1. 中讨论的理想可见性状态。

图4展示了用户间相关因子 α 与辅助用户数量 N_o 在协作定位中的互补作用。随着 α增大，均方根误差如预期般增大，因为较大的 α意味着来自基站的噪声贡献更大，从而直接增大所有单差观测值的有效测量协方差。尽管如此，对于任意固定的 α，协作始终能提升定位性能。随着辅助用户数量 N_o 以及它们所观测到的额外卫星数量 K_o增加，性能增益也会随之提高，因为这两个因素都能增强网络可见性。对于固定的 N_o 和 α，随着 K_o 增大，协作定位的均方根误差会趋近渐近基准β_1^{-1}，反映出理想可见性状态。对于所有 α取值，均可观察到这一趋势，证实充足的协作可见性能够补偿基站噪声的增加。

我们补充了采用 C-RTK框架的实验，以评估协作对载波相位定位和整周模糊度解算的影响。在该实验中，基站和辅助接收机总共跟踪 $K = K_o = 8$ 颗卫星，而辅助用户（$N_c = 1$）观测到 $K_c = 4$ 颗卫星，其独立定位 GDOP 为 2.97。对于码观测值和载波相位观测值，基站–流动站方差比均设为 $\alpha = 1$，且 $\sigma_\Phi = \sigma_\rho/100$。经验模糊度解算成功率定义为

$$\hat{P}_{\text{succ}} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \delta\left(\hat{\mathbf{a}}_c^{(m)} - \mathbf{a}_{\text{ref},c}\right), \tag{55}$$

其中，$\hat{\mathbf{a}}_c^{(m)}$表示受约束用户在第 m 次蒙特卡洛迭代中的模糊度估计向量，$\mathbf{a}_{\text{ref},\,c}$ 表示对应的真实模糊度向量，而 $\delta(\mathbf{x})$表示克罗内克 δ 函数。

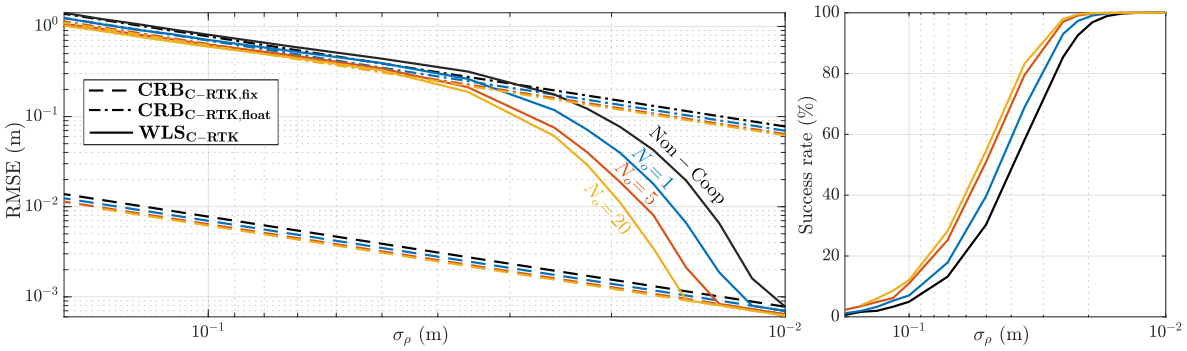


图 5 $\{1, 5, 25\}$ 3 $N_o \in$：协作网络参数对 C-RTK 中 D 定位均方根误差和模糊度解算的影响。结果针对 C-RTK float 给出。我们展示（左）界 **克拉美–罗下界**，在（）和 C-RTK fix **克拉美–罗下界**，在（）中的结果，以及经验 C-RTK **加权最小二乘**性能；（右）成功概率 ^ P_{succ} 在（55）中的结果。作为参考，所有情况均列出了相应的非协作基准。

表 V：关键系统参数对 C-DGNSS 和 C-RTK 性能影响的总结，该影响由理论性能界（第 IV 节）推导并通过第V节的仿真研究验证。

参数	对协作式DGNSS/RTK的影响
N_{o}：辅助用户数量	在满足 $K_{\mathrm{o}} \geq K_{\mathrm{c}}$的条件下， $N_{\mathrm{o}} \geq 1$ 的性能提升。
K_{o}：辅助用户独占可见的卫星数量	在满足 $N_{\mathrm{o}} \geq 1$的条件下， $K_{\mathrm{o}} \geq K_{\mathrm{c}}$的性能提升。
α：基站—接收机方差比	协作带来的性能提升幅度随 α 增大而增加。
$\mathbf{J}_{\mathrm{c}}$：辅助用户的费舍尔信息矩阵（内在几何极限）	即使采用理想协作，性能也无法超越 $\mathbf{J}_{\mathrm{c}}^{-1}$。
N_{c}：受约束用户数量	没有影响。
K_{c}：辅助用户/辅助用户共同可见的卫星数量	改进的内在几何界 $\mathbf{J}_{\mathrm{c}}$。

图 5 （左）展示了不同协作用户数量下，接收机（包括辅助接收机和提供辅助的接收机）的定位均方根误差随码方差的变化情况。可以清楚地观察到两种状态，即浮点解状态和固定解状态；在这两种状态下，协作都能持续改善非协作基线的表现。可以看出，随着协作用户数量增加，向固定模糊度状态的转变会推迟到更高的噪声水平，这表明协作能够实现更快、更可靠的模糊度解算。图5 （右）进一步量化了这一效应，显示随着协作用户数量增加，经验模糊度解算成功率显著提高。

VI. 结论

我们提出了一种协作差分GNSS统一估计框架，该框架融合了码和载波相位技术，同时适用于噪声质量任意的参考站。通过对费 Fisher 信息矩阵进行解析推导，我们刻画了 C-DGNSS 和 C-RTK 的渐近性能与接收机数量、卫星可见性及测量方差之间的关系。协作能够提高卫星可见性有限的用户的定位精度；当参与协作的用户拥有更好的可见性时，随着网络规模增大，基站噪声的影响会减弱。在大型网络中，可实现的精度将趋近于用户自身卫星几何构型所决定的极限。对于载波相位定位，与独立实时动态定位解相比，C-RTK 方案还能进一步提升模糊度解算能力。仿真结果验证了本文提出的理论见解。

我们的研究结果表明，即使是低成本参考站，借助多个用户也能提供高质量定位服务，为实现更普及的差分GNSS服务开辟了一条路径。

参考文献

[1] P.D. Groves 《*GNSS*、惯性与多传感器集成导航系统原理（第二版）》GNSS/GPS。Artech House，2013。[2] Y Jade Morton、Frank van Diggelen、James J Spilker Jr、Bradford W Parkinson、Sherman Lo 和 Grace Gao 《*21*世纪的定位、导航与授时技术：集成卫星导航、传感器系统与民用应用》约翰·威立父子出版公司，2021。[3] Daniel Egea-Roca、Markel Arizabaleta-Diez、Thomas Pany、Felix Antreich、Jose A Lopez-Salcedo、Matteo Paonni 和 Gonzalo Seco-Granados，“全球导航卫星系统用户技术：最新进展与未来趋势”，*IEEEAccess*，第10卷，第39939–39968页，2022。[4] Peter Teunissen 和 O Montenbruck 编。《施普林格全球导航卫星系统手册》，第XXXI卷，施普林格，2017。[5] Nigel Williams、Parisa Borhani Darian、Guoyuan Wu、Pau Closas 和 Matthew Barth，“定位不确定性对网联与自动驾驶汽车应用的影响”，《*SAE*国际网联与自动驾驶汽车期刊》，第6卷，2022年08月。[6] Bruno Mendes、Marco Ara´ujo、Adriano Goes、Daniel Corujo 和 Arnaldo S. R. Oliveira，“探索5G网络中的车联网：混合场景下基于位置的服务综述”，《车辆通信》，第52卷，100878，2025，第 页。[7] Tarek Hassan、Ahmed El-Mowafy 和 Kan Wang，“智能交通系统定位中的系统集成与现行完好性监测方法综述”，《*IET*智能交通系统》，第15卷，第1期，第43–60页，2021。[8] Xiangdong An、Andrea Bell´es、Filippo Giacomo Rizzi、Lukas H¨osch、Christoph Lass 和 Daniel Medina，“阵列精密单点定位实时动态定位：一种适用于户外场景的高精度位姿估计方法”，*IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*，第25卷，第6期，第6223–6237页，2023。

[9] Gerhard Wabbena、Martin Schmitz 和 Andreas Bagge，“精密单点定位实时动态定位：在实时动态定位网络中使用状态空间表示的精密单点定位”，载于国际导航学会卫星分部第18届技术会议（ION GNSS 2005）论文集，2005，第2584–2594页。[10] Pengyu Hou、Jiuping Zha、Teng Liu 和 Baocheng Zhang，“GNSS精密单点定位实时动态定位的最新进展与展望”，Measurement Science and Technology，第34卷，第5期，第051002页，2023。[11] Ronghe Jin、Guohao Zhang、Li-Ta Hsu 和 Yu Hu，“使用GNSS测量值进行协作定位的综述”，IEEE Transactions on Intelligent Vehicles，2024。[12] Kai Liu、Hock Beng Lim、Emilio Frazzoli、Houling Ji 和 Victor C. S. Lee，“利用GPS伪距测量值提高协同车辆定位精度”，IEEE Transactions on Vehicular Technology，第63卷，第6期，第2544–2556页，2014。[13] Alex Minetto 和 Fabio Dovis，“相关协作测距测量值对混合定位所携信息的研究”，IEEE Transactions on Vehicular Technology，第69卷，第2期，第1419–1427页，2019。[14] Fabian de Ponte M¨uller、Alexander Steingass 和 Thomas Strang，“车载环境中相对定位的零基线测量值”，载于第六届欧洲GNSS信号与信号处理研讨会，2013。[15] Alex Minetto、Maria Chiara Bello 和 Fabio Dovis，“移动智能设备上的DGNSS协同定位：概念验证”，IEEE Transactions on Vehicular Technology，第71卷，第4期，第3480–3494页，2022。[16] Muhammad Tahir、Sayed Saad Afzal、Muhammad Saad Chughtai 和 Khurram Ali，“协作框架下使用GNSS观测量进行车间距离测量值的精度”，IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems，第20卷，第2期，第682–691页，2019。[17] Ana¨ıs Del´epaut、Alex Minetto 和 Fabio Dovis，“月球轨道器的基于码的差分GNSS测距：理论综述及其在NaviMoon观测量中的应用”，Remote Sensing，第16卷，第15期，2024。[18] Bin Huang、Zheng Yao、Xiaowei Cui 和 Mingquan Lu，“GNSS协同定位的精度衰减分析”，IEEE Transactions on Vehicular Technology，第65卷，第5期，第3401–3415页，2016。[19] Ali Naouri、Lorenzo Ortega、Jordi Vil`a-Valls 和 Eric Chaumette，“协同GNSS导航的多维尺度分析方法”，载于国际定位与GNSS会议，2021，第1–6页。[20] Anat Schaper 和 Steffen Sch¨on，“通过多智能体、多传感器协作提高城市环境中的定位精度”，载于国际导航学会卫星分会第37届技术会议论文集（ION GNSS + *2024* 2024， 2780 2792 ），第 页，

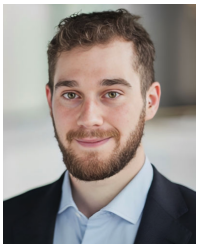
[21] Federico Penna、Mauricio A Caceres 和 Henk Wymeersch，“GNSS-地面协同定位的Cram´er-Rao界”，IEEE Communications Letters，第14卷，第11期，第1005–1007页，2010。[22] Eun-Kyu Lee、Soon Y Oh 和 Mario Gerla，“车载自组网中的RFID辅助车辆定位”，Pervasive and Mobile Computing，第8卷，第2期，第167–179页，2012。[23] Jie Du 和 Matthew J Barth，“新一代自动车辆定位系统：车道级定位”，IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems，第9卷，第1期，第48–57页，2008。[24] Shahram Rezaei 和 Raja Sengupta，“基于卡尔曼滤波器的差分全球定位系统与车辆传感器集成定位”，IEEE Transactions on Control Systems Technology，第15卷，第6期，第1080–1088页，2007。[25] Guohao Zhang、Weisong Wen 和 Li-Ta Hsu，“利用城市区域的三维建筑模型校正基于GNSS的协同定位”，GPS Solutions，第23卷，第3期，第83页，2019。

[26] Guohao Zhang、Hoi-Fung Ng、Weisong Wen 和 Li-Ta Hsu，“基于三维制图数据库辅助GNSS、采用因子图优化的协作定位”，*IEEE*智能交通系统汇刊，第22卷，2020年，第6175–6187页，第10期。[27] Helena Calatrava、Daniel Medina 和 Pau Closas，“GNSS伪距测量的大规模差分”，载于*IEEE/ION*定位、位置与导航研讨会（*PLANS*），2023年，第891–896页。[28] Helena Calatrava、Adri`a Gusi、Ernest Artiaga 和 Pau Closas，“协同差分全球导航卫星系统（GNSS）”，2024年9月12日，美国专利申请18/120,389。[29] Daniel Medina、Helena Calatrava、J David Castro-Arvizu、Pau Closas 和 Jordi Vila-Valls，“面向城市场景车辆集群精密定位的协作RTK方法”，载于*IEEE/ION*定位、位置与导航研讨会（*PLANS*）。IEEE，2023年，第254–259页。[30] Helena Calatrava、Daniel Medina 和 Pau Closas，“面向多用户定位的协同码差分GNSS”，载于*2025*年*IEEE/ION*定位、位置与导航研讨会（*PLANS*），2025年。[31] Clement A Ogaja，“GNSS连续运行参考站网络与数据”，载于《*GNSS*大地测量导论：使用全球导航卫星系统进行精密定位的基础》。2022年，第93–118页，施普林格。[32] Bu-Gyeom Kim、Donguk Kim、Junesol Song 和 Changdon Kee，“使用无电离层组合和克里金法估计对流层延迟以扩大网络RTK覆盖范围”，《*NAVIGATION*》，第71卷，第3期，2024年。[33] Daniel Medina，基于*GNSS*载波相位的稳健位置与姿态估计，博士论文，马德里卡洛斯三世大学，2022年。[34] L. Elneser、X. Wen、G. Seepersad、M. Horton 和 Y. Yi，“共址和社区连续运行参考站能否提升GNSS数据价值？”，载于*FIG 2023*年度工作周：保护我们的世界，征服新的前沿，美国佛罗里达州奥兰多，2023年5月28日至6月1日。[35] W Stempfhuber 和 M Buchholz，“一种用于无人机应用的精密低成本RTK GNSS系统”，《国际摄影测量、遥感与空间信息科学档案》，第38卷，第289–293页，2012年。[36] Umberto Robustelli、Matteo Cutugno 和 Giovanni Pugliano，“低成本GNSS与精密单点定位实时动态定位：研究u-blox ZED-F9P模块的能力”，《*Sensors*》，第23卷，第13期，第6074页，2023年。[37] Xingxing Li、Hailong Gou、Xin Li、Zhiheng Shen、Hongbo Lyu、Yuxuan Zhou、Hao Wang 和 Qian Zhang，“使用不同天线配置的低成本GNSS芯片组进行频率混合PPP-RTK的性能分析”，《*Satellite Navigation*》，第4卷，第1期，第26页，2023年。[38] Mike Horton、David Chen、Yudan Yi、Xiaohua Wen 和 James Doebbler，“GEODNET：全球地球观测去中心化网络”，《*NAVIGATION*：导航学会期刊》，第70卷，第4期，2023年。[39] Xingwang Zhao、Yulong Ge、Fuyang Ke、Chao Liu 和 Fangchao Li，“利用法国国家空间研究中心产品研究实时动态多GNSS精密单点定位”，《*Measurement*》，第166卷，第108231页，2020年。[40] Ignacio Fernandez-Hernandez、Adri´an Chamorro-Moreno、Sim´on Cancela-Diaz、J David Calle-Calle、Paolo Zoccarato、Daniel Blonski、Tommaso Senni、F Javier de Blas、Carmelo Hern´andez、Javier Sim´on 等，“伽利略高精度服务：初始定义与性能”，《*GPS Solutions*》，第26卷，第3期，第65页，2022年。[41] Guenter Heinrichs、Paolo Mulassano 和 Fabio Dovis，“利用通用RAKE接收机架构实现蜂窝无线电网络的混合定位算法”，载于*2004*年*IEEE*第*15*届个人、室内与移动无线电国际研讨会

通信（IEEE目录号04TH8754）。IEEE，2004年，第4卷，第2347–2351页。[42] R Michael Buehrer、Henk Wymeersch 和 Reza Monir Vaghefi，“协作传感器网络定位：算法与实际问题”，《IEEE会议录》，第106卷，第6期，第1089–1114页，2018年。[43] Henk Wymeersch、Jaime Lien 和 Moe Z Win，“无线网络中的协作定位”，《IEEE会议录》，第97卷，第2期，第427–450页，2009年。[44] Thang Van Nguyen、Youngmin Jeong、Hyundong Shin 和 Moe Z Win，“最小二乘协作定位”，《IEEE Transactions on Vehicular Technology》，第64卷，第4期，第1318–1330页，2015年。[45] Neil Gogoi、Alex Minetto 和 Fabio Dovis，“共享原始GNSS测量值的Android智能手机之间的协作测距”，载于IEEE第90届车辆技术会议。IEEE，2019年，第1–5页。[46] Lucy Icking 和 Steffen Sch¨on，“用于改善城市区域协作定位的多智能体智能手机GNSS观测值的最优组合”，载于导航学会卫星分会第35届国际技术会议（ION GNSS+ *2022*），2022年，第2860–2870页。[47] Duojie Weng、Xingli Gan、Wu Chen、Shengyue Ji 和 Yangwei Lu，“面向Android智能手机的新型DGNSS定位基础设施”，《Sensors》，第20卷，第2期，第487页，2020年。[48] Alex Minetto、Andrea Nardin 和 Fabio Dovis，“联网车辆之间的仅GNSS协作定位”，载于第1届ACM MobiHoc研讨会论文集，2019年，第37–42页。[49] Chen Zhuang、Hongbo Zhao、Shan Hu、Wenquan Feng 和 Rongke Liu，“利用GNSS载波相位和UWB测距实现V2X应用的协作定位”，《IEEE通信快报》，第25卷，第6期，第1876–1880页，2021年。[50] Davide Dardari、Pau Closas 和 Petar M Djuri´c，“室内跟踪：理论、方法与技术”，《IEEE Transactions on Vehicular Technology》，第64卷，第4期，第1263–1278页，2015年。[51] Lintong Li、Mireille Elhajj、Yuxiang Feng 和 Washington Yotto Ochieng，“基于机器学习的GNSS信号分类与加权方案设计在建成环境中的应用：一项比较实验”，《Satellite Navigation》，第4卷，第1期，第12页，2023年。[52] Siddharth Tanwar 和 Grace Xingxin Gao，“利用三维制图辅助（3DMA）GNSS和智能体间测距实现城市环境中的去中心化协作定位”，载于导航学会卫星分会第31届国际技术会议论文集（ION GNSS + *2018*），2018年，第2352–2363页。[53] Guillermo Hernandez、Gerald LaMountain 和 Pau Closas，“隐私保护协作定位”，载于导航学会卫星分会第33届国际技术会议论文集（ION GNSS+ *2020*），2020年，第2667–2675页。[54] Helena Calatrava、Daniel Medina 和 Pau Closas，“存在离群值时的稳健协作DGNSS”，载于2025年IEEE/ION定位、位置与导航研讨会（PLANS）。IEEE，2025年，第328–336页。[55] Heidi Kuusniemi、Andreas Wieser、Gerard Lachapelle 和 Jarmo Takala，“城市个人卫星导航的用户级可靠性监测”，《IEEE航空航天与电子系统汇刊》，第43卷，第4期，第1305–1318页，2008年。[56] Daniel Medina、Kasia Gibson、Ralf Ziebold 和 Pau Closas，“信号退化场景下伪距误差模型的确定与多路径特性分析”，载于ION GNSS+，导航学会卫星分会国际技术会议，2018年。[57] Bradley M Bell 和 Frederick W Cathey，“迭代卡尔曼滤波器更新作为高斯-牛顿方法”，《IEEE自动控制汇刊》，第38卷，第2期，第294–297页，1993年。[58] Daniel Medina、Jordi Vil`a-Valls、Eric Chaumette、Franc¸ois Vincent 和 Pau Closas，“混合实数与整数值参数向量及其在线性回归模型中的应用”，《*Signal Processing*》，第179卷，107792，2021年，第。



Helena Calatrava（IEEE学生会员）于2020年和2022年分别获得UPC电气工程理学学士和理学硕士学位。她目前是波士顿东北大学电气与计算机工程专业的博士候选人。她的研究重点是统计与鲁棒信号处理、机器学习以及多目标跟踪算法，旨在提升基于卫星的导航和基于雷达的定位系统的韧性，重点关注协作式和分布式架构。



Daniel Medina 于2016年和2022年分别获得马德里卡洛斯三世大学（UC3M）计算机科学理学硕士和博士学位。他目前是德国航空航天中心（DLR）通信与导航研究所的研究员，并在那里领导多传感器系统研究组。他的研究兴趣包括统计信号处理、鲁棒滤波与估计、激光雷达感知，以及高精度卫星导航。他目前担任 IEEE ITSS德国分会副主席。



Pau Closas（IEEE高级会员），现任波士顿东北大学电气与计算机工程副教授。他分别于2003年和2009年在UPC获得电气工程硕士和博士学位，并于2014年在UPC获得高等数学硕士学位。他主要研究统计信号处理和机器学习，以及这些领域在定位和定位系统中的应用。

《协作式差分GNSS定位：估计器与界》的补充材料

Helena Calatrava、Daniel Medina、Pau Closas

请注意，本补充材料中的章节、公式和表格均以“S”作为前缀。没有此前缀的引用对应于主论文。符号说明与主论文一致。

回顾一下，在本文中，我们假设有一个由一个经过测量的、可能为低成本的参考站（索引为 b）和 N个用户接收机（索引为 $r \in \{1,\dots,N\}$）组成的网络，如图 1所示。参考站观测到一组 K颗卫星（索引为 $s \in \{p,1,\dots,K-1\}$），其中 p表示用于双差的枢轴卫星；根据可见性条件，假设每个用户接收机都能观测到这些卫星的全部或其中一部分。

在以下推导过程中，我们将用到以下克罗内克积恒等式，这些恒等式便于处理维度随算法协作程度增加而扩大的矩阵：

- 转置恒等式：$(A\otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$。
- 逆恒等式（对于可逆的 A和 B）：$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$。
- 混合乘积性质：$(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$，只要乘积 AC和 BD有明确定义。

SI. 观测和协方差矩阵的展开形式

A. 单用户模型

回顾在（10）中定义的单用户观测模型：

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\rho}_r &= \mathbf{H}_r\,\delta\mathbf{x}_r + c\,d\mathbf{t} + \boldsymbol{T}_r + \boldsymbol{I}_r + \boldsymbol{\varepsilon}_r \in \mathbb{R}^K,\\ \Delta\boldsymbol{\Phi}_r &= \mathbf{H}_r\,\delta\mathbf{x}_r + c\,d\mathbf{t} + \boldsymbol{T}_r - \boldsymbol{I}_r + \lambda\mathbf{N}_r + \boldsymbol{\epsilon}_r \in \mathbb{R}^K.\end{aligned} \tag{S1}$$

我们将观测矩阵展开如下，以便后续推导（回顾一下，我们假设 $\mathbf{H}_r = \mathbf{H}\ \ \forall r$）：

$$\mathbf{H} = [\mathbf{E},\ \underline{1}_K] = \begin{bmatrix} -(\mathbf{e}^1)^\top & 1\\ -(\mathbf{e}^2)^\top & 1\\ \vdots & \vdots\\ -(\mathbf{e}^K)^\top & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}-e_x^1 & -e_y^1 & -e_z^1\\ -e_x^2 & -e_y^2 & -e_z^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -e_x^K & -e_y^K & -e_z^K\end{matrix}}_{\mathbf{E}} & \begin{matrix}1\\1\\\vdots\\1\end{matrix}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K\times 4}, \tag{S2}$$

其中，$\mathbf{e}^s = -(\mathbf{p}^s - \mathbf{p}_0)/\|\mathbf{p}^s - \mathbf{p}_0\| \in \mathbb{R}^3$是卫星—接收机视线单位向量。对于每个用户 r，各自的码和载波相位误差协方差为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,r} = \sigma_\rho^2\,\mathbf{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix}(\sigma^p_{\rho,r})^2 & & & \\ & (\sigma^1_{\rho,r})^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\sigma^{K-1}_{\rho,r})^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\Phi,r} = \sigma_\Phi^2\,\mathbf{W}_r^{-1} = \begin{bmatrix}(\sigma^p_{\Phi,r})^2 & & & \\ & (\sigma^1_{\Phi,r})^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\sigma^{K-1}_{\Phi,r})^2\end{bmatrix}, \tag{S3}$$

其中，σ_ρ^2和 σ_Φ^2分别表示共用的码方差和相位方差，而 $\mathbf{W}_r$是加权矩阵（考虑仰角）。上标 $(\cdot)^k$表示第 k颗卫星的测量特定方差，该方差取决于其仰角。

B. 多用户模型

基于算子 (2) 得到的网络堆叠量如下：

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}} \triangleq \begin{bmatrix}\Delta\rho_b\\ \Delta\rho_1\\ \vdots\\ \Delta\rho_N\end{bmatrix},\quad \Delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}} \triangleq \begin{bmatrix}\Delta\Phi_b\\ \Delta\Phi_1\\ \vdots\\ \Delta\Phi_N\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \triangleq \begin{bmatrix}\varepsilon_b\\ \varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_N\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K(N+1)},\qquad \delta\tilde{\mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix}\delta\mathbf{x}_b\\ \delta\mathbf{x}_1\\ \vdots\\ \delta\mathbf{x}_N\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4(N+1)}. \tag{S4}$$

回想一下，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_\rho = \mathbb{E}\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathsf{T}\} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b},\,\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,1},\dots,\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,N}) \in \mathbb{R}^{K(N+1)\times K(N+1)}$。对于 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_\Phi$，也有类似的表达式。

C. C-DGNSS模型

- **观测矩阵：** 在网络范围内应用单差（SD）算子可得到克罗内克形式

$$\tilde{\mathbf{D}}_b = [-\underline{1}_N \otimes \mathbf{I}_K,\ \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_K] = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_K & \mathbf{I}_K & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbf{I}_K & 0 & \mathbf{I}_K & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{I}_K & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{I}_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{KN \times K(N+1)}, \tag{S5}$$

为方便起见，假设基站测量值位于堆叠测量向量的第一个块中。

应用 $\tilde{\mathbf{D}}_b$ 于堆叠伪距差分，可得到 C-DGNSS观测模型

$$\tilde{\mathbf{D}}_b\, \Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\rho}_1 - \Delta\boldsymbol{\rho}_b \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{\rho}_N - \Delta\boldsymbol{\rho}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\delta\mathbf{x}_1 - \delta\mathbf{x}_b) \\ \vdots \\ \mathbf{H}(\delta\mathbf{x}_N - \delta\mathbf{x}_b) \end{bmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b \tag{S6}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{H} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_1 - \delta\mathbf{x}_b \\ \vdots \\ \delta\mathbf{x}_N - \delta\mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b = \boxed{\tilde{\mathbf{H}}_N\, \delta\tilde{\mathbf{x}}_b + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b \triangleq \Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b \in \mathbb{R}^{KN}}. \tag{S7}$$

- **协方差矩阵：** C-DGNSS协方差矩阵可计算为

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho} = \mathbb{E}\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b\, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^{\mathsf{T}}\} = \tilde{\mathbf{D}}_b\, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_\rho\, \tilde{\mathbf{D}}_b^{\top} \tag{S8}$$

$$= \begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,i} + \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b}, & i = j, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b}, & i \neq j. \end{cases} \tag{S9}$$

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,1} + \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,2} + \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,N} + \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} \end{bmatrix}} \tag{S10}$$

这里，对角块表示用户内项，其对角元素反映每颗卫星对应的基站–用户方差之和，而非对角元素为零。非对角块仅包含基站噪声：其对角元素包括每颗卫星的基站方差，非对角元素为零，表明除共享基站外不存在用户间交叉相关性。

- **其他量：** 以下展开式明确展示了式（13）中紧凑模型所依据的堆叠、差分和矩阵结构。

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b \triangleq \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\rho}_{b1} \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{\rho}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\rho}_1 - \Delta\boldsymbol{\rho}_b \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{\rho}_N - \Delta\boldsymbol{\rho}_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{KN}, \quad \Delta\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b \triangleq \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\Phi}_{b1} \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{\Phi}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\Phi}_1 - \Delta\boldsymbol{\Phi}_b \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{\Phi}_N - \Delta\boldsymbol{\Phi}_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{KN},$$

$$\delta\tilde{\mathbf{x}}_b \triangleq \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{b1} \\ \vdots \\ \delta\mathbf{x}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_1 - \delta\mathbf{x}_b \\ \vdots \\ \delta\mathbf{x}_N - \delta\mathbf{x}_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4N}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{b1} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_b \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_N - \boldsymbol{\varepsilon}_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{KN}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_b \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{b1} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{bN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_b \\ \vdots \\ \boldsymbol{\epsilon}_N - \boldsymbol{\epsilon}_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{KN}. \tag{S11}$$

D. C-RTK模型

- **观测矩阵：** 应用于整个网络的双差（DD）算子形式如下

$$\mathbf{D}_p = [\,-\mathbf{1}_{K-1},\, \mathbf{I}_{K-1}\,] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(K-1)\times K}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_p = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_p & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D}_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(K-1)N \times KN}, \tag{S12}$$

其中，为方便起见，假设枢轴测量值位于堆叠测量向量的第一个分块中。

对式（S6）中的堆叠单差观测值应用枢轴差分算子，可得

$$\tilde{\mathbf{D}}_p\,\Delta\tilde{\boldsymbol{\rho}}_b = \underbrace{(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{D}_p)(\mathbf{I}_N\otimes\mathbf{H})}_{\mathbf{I}_N\otimes(\mathbf{D}_p\mathbf{H})}\,\delta\tilde{\mathbf{x}}_b+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{D}_p\mathbf{H}\,\delta\mathbf{x}_{b1}\\ \vdots\\ \mathbf{D}_p\mathbf{H}\,\delta\mathbf{x}_{bN}\end{bmatrix}}_{\text{(S14)}}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b = \boxed{\tilde{\mathbf{D}}_p\tilde{\mathbf{E}}_N\tilde{\mathbf{b}}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b^p \triangleq \Delta\boldsymbol{\rho}_b^p\in\mathbb{R}^{(K-1)N}}. \tag{S13}$$

注意，此处我们使用

$$\begin{bmatrix}\mathbf{D}_p\mathbf{H}\,\delta\mathbf{x}_{b1}\\ \vdots\\ \mathbf{D}_p\mathbf{H}\,\delta\mathbf{x}_{bN}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_p & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{D}_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{H} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{H}\end{bmatrix}\delta\tilde{\mathbf{x}}_b = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_p & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{D}_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{E}\end{bmatrix}\delta\tilde{\mathbf{p}}_b, \tag{S14}$$

第二个等式中的等价关系可由以下内容理解：

$$\mathbf{D}_p\mathbf{H}\delta\mathbf{x}_{br} = \underbrace{\begin{bmatrix}(\mathbf{e}^1-\mathbf{e}^p)^\top & 0\\ (\mathbf{e}^2-\mathbf{e}^p)^\top & 0\\ \vdots & \vdots\\ (\mathbf{e}^K-\mathbf{e}^p)^\top & 0\end{bmatrix}}_{\in\,\mathbb{R}^{(K-1)\times 4}}\begin{bmatrix}\mathbf{p}_r-\mathbf{p}_b\\ c\,(dt_r-dt_b)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}(\mathbf{e}^1-\mathbf{e}^p)^\top\\ (\mathbf{e}^2-\mathbf{e}^p)^\top\\ \vdots\\ (\mathbf{e}^K-\mathbf{e}^p)^\top\end{bmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{(K-1)\times 3}}(\mathbf{p}_r-\mathbf{p}_b) = \mathbf{D}_p\mathbf{E}\delta\mathbf{p}_{br}. \tag{S15}$$

此外，请注意，我们用 $\tilde{\mathbf{b}} = \delta\tilde{\mathbf{p}}_b$ 表示全网络基线向量（基站 b 与各接收机之间的基线）。

- **协方差矩阵：**C-RTK协方差矩阵可计算为

$$\tilde{\mathbf{D}}_p\,\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}\,\tilde{\mathbf{D}}_p^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_p & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{D}_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,1}+\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,2}+\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{\rho,N}+\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{D}_p^{\mathsf{T}} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{D}_p^{\mathsf{T}}\end{bmatrix} \tag{S16}$$

$$= \boxed{\begin{cases}\mathbf{D}_p(\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,i}+\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b})\mathbf{D}_p^\top, & i=j,\\ \mathbf{D}_p\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b}\mathbf{D}_p^\top, & i\neq j.\end{cases}\triangleq\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}^p}. \tag{S17}$$

对于$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\Phi}^p$，也有类似的表达式。根据此表达式，我们研究基站和各用户的噪声贡献如何体现在 C-RTK 模型的块对角协方差结构中（见图3）

的对角块 $\mathring{\boldsymbol{\Sigma}}_{b,\rho}^p\ (i=j)$**：**

$$\mathbf{D}_p(\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,i}+\boldsymbol{\Sigma}_{\rho,b})\mathbf{D}_p^\top = \mathbf{D}_p\begin{bmatrix}(\sigma_{\rho,i}^p)^2+(\sigma_{\rho,b}^p)^2 & & & \\ & (\sigma_{\rho,i}^1)^2+(\sigma_{\rho,b}^1)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\sigma_{\rho,i}^{K-1})^2+(\sigma_{\rho,b}^{K-1})^2\end{bmatrix}\mathbf{D}_p^{\mathsf{T}} \tag{S18}$$

$$= \begin{bmatrix}-(\sigma_{\rho,i}^p)^2-(\sigma_{\rho,b}^p)^2 & (\sigma_{\rho,i}^1)^2+(\sigma_{\rho,b}^1)^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -(\sigma_{\rho,i}^p)^2-(\sigma_{\rho,b}^p)^2 & & & (\sigma_{\rho,i}^{K-1})^2+(\sigma_{\rho,b}^{K-1})^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & \cdots & -1\\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix} \tag{S19}$$

$$= \begin{cases}(\sigma_{\rho,i}^p)^2+(\sigma_{\rho,b}^p)^2+(\sigma_{\rho,i}^i)^2+(\sigma_{\rho,b}^i)^2, & i=j,\\ (\sigma_{\rho,i}^p)^2+(\sigma_{\rho,b}^p)^2, & i\neq j.\end{cases} \tag{S20}$$

对角块体现了用户内相关项：其对角元素包含四重方差贡献（来自枢轴卫星上的基站和用户，以及相应卫星上的基站和用户），而非对角元素则包含仅由枢轴卫星项（来自基站和用户）产生的双重贡献。

$\tilde{\mathbf{\Sigma}}_b^p$ 的非对角块$_{,\rho}$ $(i \neq j)$：

$$\mathbf{D}_p \mathbf{\Sigma}_{\rho,b} \mathbf{D}_p^\top = \mathbf{D}_p \begin{bmatrix} (\sigma_{\rho,b}^p)^2 & & & \\ & (\sigma_{\rho,b}^1)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\sigma_{\rho,b}^{K-1})^2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_p^\mathsf{T} = \begin{cases} (\sigma_{\rho,b}^p)^2 + (\sigma_{\rho,b}^i)^2, & i = j, \\ (\sigma_{\rho,b}^p)^2, & i \neq j. \end{cases} \tag{S21}$$

非对角块编码了用户间相关项，且仅包含基站噪声的贡献。在每个块中，对角元素体现了基站的双重贡献（一项与公共卫星相关，另一项与枢轴相关），而非对角元素仅包含枢轴卫星贡献。

SII. 参数化费舍尔信息矩阵的完整推导

本节给出推导过程，完整推导出 $\tilde{\mathbf{R}}^{-1}$ 在（S30）中的表达式，以及第**IV**($\tilde{\boldsymbol{\omega}}$) 节中引用的（45）中的费舍尔信息矩阵（FIM）$\mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})$。系数 $\beta_i(\alpha)$， $i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$（列于表VI）的表达式也将推导得出。重要的是，后续推导必须考虑第IV-A 节中提出的网络聚类模型。

A. 协方差矩阵逆

我们首先通过（40）的舒尔补，推导任意 N_o 和 α 下 $\tilde{\mathbf{R}}^{-1}$ 的表达式，其中令$\mathbf{X} = (1+\alpha)\mathbf{R}_\mathrm{c}$，$\mathbf{Y} = \mathbf{P}_{N_\mathrm{o}}^\alpha = \underline{1}_{N_\mathrm{o}}^\top \otimes \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{R}_\mathrm{c} & \mathbf{0}_{K_\mathrm{c},\ K_\mathrm{o}} \end{bmatrix}$，以及$\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{C}}_{N_\mathrm{o}}^\alpha \otimes \mathbf{R}$，并将 $\tilde{\mathbf{R}}^{-1}$ 的四个块记作$[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{ij}$，其中 $i,\ j \in \{1, 2\}$。

•步骤 1（对角线块的顶部 部分）： 为求得$[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{11} = (\mathbf{X} - \mathbf{Y}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}^\top)^{-1}$，我们先计算 $\mathbf{Z}^{-1}$，如下所示：

$$\mathbf{Z}^{-1} = (\tilde{\mathbf{C}}_{N_\mathrm{o}}^\alpha \otimes \mathbf{R})^{-1} = [\mathbf{I}_{N_\mathrm{o}} + \alpha \mathbf{1}_{N_\mathrm{o}}]^{-1} \otimes \mathbf{R}^{-1} = \underbrace{\left(\mathbf{I}_{N_\mathrm{o}} - \frac{\alpha}{\alpha N_\mathrm{o} + 1} \mathbf{1}_{N_\mathrm{o}}\right)}_{\mathbf{\Gamma}_1} \otimes \mathbf{R}^{-1}, \tag{S22}$$

辅助矩阵 $\mathbf{\Gamma}_1$ 的对角元素和非对角元素分别为 $1+\alpha_{(N_\mathrm{o}-1)\ \alpha N_\mathrm{o}+1}$ 和 $-\frac{\alpha}{\alpha N_\mathrm{o}+1}$。在最后一个等式中，我们使用了 Sherman–Morrison 公式，该公式可对单位矩阵的秩一修正进行求逆：

$$(\mathbf{I} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top)^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^\top}{1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{u}}, \tag{S23}$$

其中 $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \sqrt{\alpha}\underline{1}_{N_\mathrm{o}}$。现在，我们在左侧乘以矩阵 $\mathbf{Y} = \mathbf{P}_{N_\mathrm{o}}^\alpha = \left(\underline{1}_{N_\mathrm{o}} \otimes \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{R}_\mathrm{c} & \mathbf{0}_{K_\mathrm{c},\ K_\mathrm{o}} \end{bmatrix}\right)$：

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}\mathbf{Z}^{-1} &= \left(\underline{1}_{N_\mathrm{o}}^\mathsf{T} \otimes \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{R}_\mathrm{c} & \mathbf{0}_{K_\mathrm{c},K_\mathrm{o}} \end{bmatrix}\right)(\mathbf{\Gamma}_1 \otimes \mathbf{R}^{-1}) = \left(\underline{1}_{N_\mathrm{o}}^\mathsf{T} \mathbf{\Gamma}_1\right) \otimes \left(\begin{bmatrix} \alpha\mathbf{R}_\mathrm{c} & \mathbf{0}_{K_\mathrm{c},K_\mathrm{o}} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_\mathrm{c}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_\mathrm{o}^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}^{-1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha N_\mathrm{o} + 1} \underline{1}_{N_\mathrm{o}}^\mathsf{T}\right) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\mathrm{c}\mathbf{R}_\mathrm{c}^{-1} & \mathbf{0}_{K_\mathrm{c},K_\mathrm{o}} \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\frac{1}{\alpha N_\mathrm{o} + 1}}_{\beta_0(\alpha)} \left(\underline{1}_{N_\mathrm{o}}^\mathsf{T} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{K_\mathrm{c}} & \mathbf{0}_{K_\mathrm{c},K_\mathrm{o}} \end{bmatrix}\right), \end{aligned} \tag{S24}$$

其中我们使用了 $\underline{1}_{N_\mathrm{o}}^\mathsf{T}\mathbf{\Gamma}_1 = \left(\underbrace{1+\alpha_{(\ N_\mathrm{o}-1}}_{\alpha N_\mathrm{o}+1} - \sum_{i=1}^{N_\mathrm{o}-1} \underbrace{\alpha}_{\alpha N_\mathrm{o}+1}\right) \underline{1}_{N_\mathrm{o}}^\mathsf{T} = \underbrace{1}_{\alpha N_\mathrm{o}+1} \underline{1}_{N_\mathrm{o}}^\mathsf{T})$，这是将 $\mathbf{\Gamma}_1$ 的对角项和非对角项相加得到的。现在我们可以计算

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{11} &= (\mathbf{X} - \mathbf{Y}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}^\top)^{-1} = \left((1+\alpha)\mathbf{R}_\mathrm{c} - \alpha\beta_0(\alpha)\left(\underline{1}_{N_\mathrm{o}}^\mathsf{T} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{K_\mathrm{c}} & \mathbf{0}_{K_\mathrm{c},K_\mathrm{o}} \end{bmatrix}\right)\left(\underline{1}_{N_\mathrm{o}} \otimes \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{R}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0}_{K_\mathrm{o},K_\mathrm{c}} \end{bmatrix}\right)\right)^{-1} \\ &= \left((1+\alpha)\mathbf{R}_\mathrm{c} - \alpha\beta_0(\alpha) \underbrace{(\underline{1}_{N_\mathrm{o}}^\mathsf{T}\underline{1}_{N_\mathrm{o}})}_{N_\mathrm{o}} \otimes \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{K_\mathrm{c}} & \mathbf{0}_{K_\mathrm{c},K_\mathrm{o}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha\mathbf{R}_\mathrm{c} \\ \mathbf{0}_{K_\mathrm{o},K_\mathrm{c}} \end{bmatrix}\right)}_{\alpha\mathbf{R}_\mathrm{c}}\right)^{-1} = \left((1+\alpha)\mathbf{R}_\mathrm{c} - \alpha^2\beta_0(\alpha)N_\mathrm{o}\mathbf{R}_\mathrm{c}\right)^{-1} \\ &= (1 + \alpha - \alpha^2\beta_0(\alpha)N_\mathrm{o})^{-1}\mathbf{R}_\mathrm{c}^{-1} = \underbrace{\frac{\alpha N_\mathrm{o} + 1}{\alpha N_\mathrm{o} + \alpha + 1}}_{\beta_1(\alpha)} \mathbf{R}_\mathrm{c}^{-1}. \end{aligned} \tag{S25}$$

• **步骤 2（非对角块）：** 块 $[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{12}$ 和 $[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{21}$ 计算如下:

$$[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{12} = [\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{21}^{\top} = -[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{11}\,\mathbf{Y}\mathbf{Z}^{-1} = -\alpha\beta_0(\alpha)\beta_1(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1}\left(\underline{1}_{N_{\mathrm{o}}}^{\mathsf{T}} \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{I}_{K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix}\right) = \underbrace{-\frac{\alpha}{\alpha N_{\mathrm{o}}+\alpha+1}}_{\beta_2(\alpha)}\left(\underline{1}_{N_{\mathrm{o}}}^{\mathsf{T}} \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix}\right). \tag{S26}$$

• **步骤 3（底部对角块）：** 为了计算 $[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{22} = \mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}^{\top}[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{12}$，我们先计算这一项

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}^{\top}[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{12} &= \underbrace{\alpha\beta_0(\alpha)\beta_2(\alpha)}_{\beta_3(\alpha)}\left(\underline{1}_{N_{\mathrm{o}}} \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{I}_{K_{\mathrm{c}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}}\end{bmatrix}\right)\left(\underline{1}_{N_{\mathrm{o}}}^{\mathsf{T}} \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix}\right) = \beta_3(\alpha)\underbrace{\left(\underline{1}_{N_{\mathrm{o}}}\underline{1}_{N_{\mathrm{o}}}^{\mathsf{T}}\right)}_{\mathbf{1}_{N_{\mathrm{o}}}} \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix}\\ &= \beta_3(\alpha)\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix}\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{S27}$$

现在我们可以计算

$$\begin{aligned}[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{22} &= \mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}^{\top}[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{12} = \mathbf{\Gamma}_1 \otimes \mathbf{R}^{-1} - \beta_3(\alpha)\mathbf{1}_{N_{\mathrm{o}}} \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\underbrace{\frac{1+\alpha(N_{\mathrm{o}}-1)}{\alpha N_{\mathrm{o}}+1}}_{\beta_4(\alpha)}\mathbf{R}^{-1} & \cdots & \underbrace{-\frac{\alpha}{\alpha N_{\mathrm{o}}+1}}_{\beta_5(\alpha)}\mathbf{R}^{-1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{\alpha}{\alpha N_{\mathrm{o}}+1}\mathbf{R}^{-1} & \cdots & \frac{1+\alpha(N_{\mathrm{o}}-1)}{\alpha N_{\mathrm{o}}+1}\mathbf{R}^{-1}\end{bmatrix} - \beta_3(\alpha)\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{3,4}(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_4(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\beta_{3,5}(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_5(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{bmatrix}\beta_{3,5}(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_5(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\beta_{3,4}(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_4(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\\ &= \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{F}_1 + (\mathbf{1}_N - \mathbf{I}_N) \otimes \mathbf{F}_2.\end{aligned} \tag{S28}$$

这里，$\beta_{i,\ j}(\alpha) = \beta_j(\alpha) - \beta_i(\alpha)$。注意，$\beta_{3,\ 4}(\alpha) = \beta_1(\alpha)$ 以及 $\beta_{3,\ 5}(\alpha) = \beta_2(\alpha)$。此外，在最后一个等式中，我们利用以下矩阵将表达式化为更紧凑的形式:

$$\mathbf{F}_m = \beta_{m+3}(\alpha)\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix} - \beta_3(\alpha)\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_{3,m+3}(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_{m+3}(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix} \quad \forall\ m \in \{1,\ 2\}. \tag{S29}$$

• **步骤 4（最终表达式）：** $\tilde{\mathbf{R}}^{-1}$ 的展开表达式如下（将前面步骤计算出的各块组合起来即可得到）：

$$\tilde{\mathbf{R}}^{-1} = \begin{bmatrix}\underbrace{\beta_1(\alpha)\,\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1}}_{[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{11}} & \underbrace{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\,\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\,\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{12}}\\ \underbrace{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\,\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}}\end{bmatrix}\\ \vdots\\ \begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\,\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}}\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{21}} & \underbrace{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_4(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_5(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_5(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\beta_1(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}}\\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_4(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{22}}\end{bmatrix}. \tag{S30}$$

表 VI: $\beta_i(\alpha)$系数定义。

	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
紧凑	—	$(\alpha\beta_0+1)^{-1}$	$-\alpha\beta_1\beta_0$	$\alpha\beta_2\beta_0$	$1-\alpha\beta_0$	$-\alpha\beta_0$
Full	$\frac{1}{1+\alpha N_o}$	$\frac{\alpha N_o+1}{\alpha N_o+\alpha+1}$	$-\frac{\alpha}{\alpha N_o+\alpha+1}$	$-\frac{\alpha^2}{(1+\alpha N_o)(\alpha N_o+\alpha+1)}$	$\frac{1+\alpha(N_o-1)}{\alpha N_o+1}$	$-\frac{\alpha}{\alpha N_o+1}$

B. 费舍尔信息矩阵 (FIM)

费舍尔信息矩阵可直接由统一线性模型（29）得出。由于 $\tilde{\mathbf{R}}^{-1}$ 在（S30）中具有块结构，乘以 $\tilde{\mathbf{G}}$ 后会保留该结构，并将 $\tilde{\mathbf{R}}^{-1}$ 的每个块映射到$\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega})$中的对应块。这便得到式（45）中的紧凑表达式，并在第IV–C 节中用于分析 C-DGNSS/C-RTK 估计器的渐近性能。

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}) = \tilde{\mathbf{G}}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\mathrm{c}}^{\top} & \mathbf{0}_{M_\omega,K_{\mathrm{c}}} \\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},M_\omega} & \mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}} \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{G}_{\mathrm{c}}^{\top} & \mathbf{G}_{\mathrm{o}}^{\top}\end{bmatrix} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\mathrm{c}} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},M_\omega} \\ \mathbf{0}_{M_\omega,K_{\mathrm{c}}} & \mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}} \otimes \begin{bmatrix}\mathbf{G}_{\mathrm{c}} \\ \mathbf{G}_{\mathrm{o}}\end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{S31}$$

- **步骤 1（顶部对角块）：**

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega})]_{11} = \mathbf{G}_{\mathrm{c}}^{\mathsf{T}}[\tilde{\mathbf{R}}^{-1}]_{11}\mathbf{G}_{\mathrm{c}} = \beta_1(\alpha)\mathbf{G}_{\mathrm{c}}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{c}} = \boxed{\beta_1(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{c}} \triangleq \mathbf{M}_{11}}, \tag{S32}$$

其中，$\mathbf{J}_{\mathrm{c}}$ 是式（42）中定义的受约束用户费 Fisher 信息矩阵，而$\mathbf{J}_{\mathrm{o}}$ 表示辅助用户的专属信息。

- **步骤 2（非对角块）：**

$$\mathbf{G}^{\mathsf{T}}\begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\,\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} \\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}}\end{bmatrix}\mathbf{G}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix}\mathbf{G}_{\mathrm{c}}^{\top} & \mathbf{G}_{\mathrm{o}}^{\top}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\,\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} \\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}}\end{bmatrix}\mathbf{G}_{\mathrm{c}} = \beta_2(\alpha)\mathbf{G}_{\mathrm{c}}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{c}} = \beta_2(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{c}}. \tag{S33}$$

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega})]_{21} = [\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega})]_{12}^{\mathsf{T}} = \underline{1}_{N_{\mathrm{o}}} \otimes (\beta_2(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{c}}) = \boxed{\beta_2(\alpha)(\underline{1}_{N_{\mathrm{o}}} \otimes \mathbf{J}_{\mathrm{c}}) \triangleq \mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{12}^{\mathsf{T}}}. \tag{S34}$$

- **步骤 3（底部对角块）：** 块$\mathbf{M}_{22}$ 由下式给出

$$\mathbf{M}_{22} = \left(\mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}} \otimes \mathbf{G}^{\mathsf{T}}\right) \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\beta_1(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}} \\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_4(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}} \\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_5(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}} \\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_5(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\beta_1(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}} \\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_4(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{R}^{-1}]_{22}} \left(\mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}} \otimes \mathbf{G}\right), \tag{S35}$$

我们可以看到，这里有两项贡献：一项是$\mathbf{G}^{\top}$ 与 $[\mathbf{R}^{-1}]_{22}$的对角项相乘，另一项是$\mathbf{G}^{\top}$ 与其非对角项相乘。我们分别计算这两项贡献并将它们相加，如下所示：

$$\text{Diagonal contribution: } \mathbf{G}^{\mathsf{T}}\begin{bmatrix}\beta_1(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}} \\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_4(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix}\mathbf{G} = \begin{bmatrix}\beta_1(\alpha)\mathbf{G}_{\mathrm{c}}^{\top}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \beta_4(\alpha)\mathbf{G}_{\mathrm{o}}^{\top}\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G}_{\mathrm{c}} \\ \mathbf{G}_{\mathrm{o}}\end{bmatrix} \tag{S36}$$

$$= \beta_1(\alpha)\mathbf{G}_{\mathrm{c}}^{\top}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{c}} + \beta_4(\alpha)\mathbf{G}_{\mathrm{o}}^{\top}\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{o}} = \beta_1(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{c}} + \beta_4(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{o}}, \tag{S37}$$

$$\text{Off-diagonal contribution: } \mathbf{G}^{\mathsf{T}}\begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \mathbf{0}_{K_{\mathrm{c}},K_{\mathrm{o}}} \\ \mathbf{0}_{K_{\mathrm{o}},K_{\mathrm{c}}} & \beta_5(\alpha)\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix}\mathbf{G} = \begin{bmatrix}\beta_2(\alpha)\mathbf{G}_{\mathrm{c}}^{\top}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1} & \beta_5(\alpha)\mathbf{G}_{\mathrm{o}}^{\top}\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G}_{\mathrm{c}} \\ \mathbf{G}_{\mathrm{o}}\end{bmatrix} \tag{S38}$$

$$= \beta_2(\alpha)\mathbf{G}_{\mathrm{c}}^{\top}\mathbf{R}_{\mathrm{c}}^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{c}} + \beta_5(\alpha)\mathbf{G}_{\mathrm{o}}^{\top}\mathbf{R}_{\mathrm{o}}^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{o}} = \beta_2(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{c}} + \beta_5(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{o}}. \tag{S39}$$

为将这些计算整合到完整块中，我们使用

$$\mathbf{M}_{22} = \mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}} \otimes (\beta_1(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{c}} + \beta_4(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{o}}) + (\mathbf{1}_{N_{\mathrm{o}}} - \mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}}) \otimes (\beta_2(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{c}} + \beta_5(\alpha)\mathbf{J}_{\mathrm{o}}) \tag{S40}$$

$$= \boxed{(\mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}} + \beta_2(\alpha)\,\mathbf{1}_{N_{\mathrm{o}}}) \otimes \mathbf{J}_{\mathrm{c}} + (\mathbf{I}_{N_{\mathrm{o}}} + \beta_5(\alpha)\,\mathbf{1}_{N_{\mathrm{o}}}) \otimes \mathbf{J}_{\mathrm{o}} = \mathbf{M}_{22}}. \tag{S41}$$