arXiv:2601.06014v1 [math.ST] 9 Jan 2026

低秩网络模型中嵌入维数设定错误的影响

Roddy Taing 和 Keith Levin威斯康星大学麦迪逊分校统计系

摘要

随着网络数据在各科学领域日益普及，人们对网络模型的兴趣不断增长。这类模型的结构由潜在几何空间（通常是低维空间）中的潜在节点级变量驱动。这些“潜在位置”通常通过嵌入进行估计，即将网络节点映射到欧几里得空间中的点，使“相似”的节点映射到彼此邻近的位置。在某些模型假设下，这些嵌入是潜在位置的一致估计，但大多数此类结果都要求正确选择嵌入维度，通常使其等于潜在空间的维度。近年来，估计正确嵌入维度的方法已得到广泛研究，但迄今为止，关于嵌入维度设定错误时嵌入表现的研究仍然很少。本文在随机点积图这一潜在空间网络模型类别下，对邻接谱嵌入的嵌入维度设定错误所产生的影响进行了理论刻画。该模型类别包含多种广泛使用的网络模型作为特例，包括随机区块模型。我们分别考虑维度选得过小和过大的情形：对于前者，我们证明了估计误差下界；对于后者，我们表明一致性仍然成立，但收敛速度比正确选择嵌入维度时更慢。一系列合成数据实验支持了我们的理论结果。我们的主要技术结果可能具有独立价值，它推广了随机矩阵理论中的早期成果，表明受到加性噪声扰动的低秩矩阵的所有非信号特征向量都是离域的。

1 引言

网络用于描述相互作用实体的集合，在过去二十年间已成为众多应用领域的核心。作为数学对象，网络是由顶点（也称为节点；本文将交替使用这两个术语）和边构成的图，其中顶点对应于所研究的实体，而边则描述这些实体之间的相互作用。网络应用于基因组学（van Dam et al., 2017; Marku and Pancaldi, 2023; Treiber et al., 2010; Larremore et al., 2013），用于描述哪些基因对共同表达或参与相同的生物过程。在神经科学中，网络用于描述连接组（Bullmore and Sporns, 2009; Sporns, 2012），其中顶点对应于脑区，边则编码哪些脑区对之间存在密切互动。生态学中使用网络描述食物网和物种共现（Guseva et al., 2022）。在社会科学中，网络应用于从政治学（Porter et al., 2005）、社会学（Lazega, 2001）到经济学（Chaney, 2014; Acemoglu et al., 2015; Elliott et al., 2014）等学科。

随着网络数据日益普及，网络统计模型层出不穷，最早可追溯到随机区块模型（SBM；Holland 等人，1983年）。在该模型中，每个顶点属于 r 个社区，任意一对顶点之间形成边的概率由其社群归属决定。此后，SBM 经多种方式扩展，以允许度异质性（Karrer 和 Newman，2011）和混合社群归属（Airoldi 等人，2008）。上述模型都假设网络结构由潜在的节点级变量驱动（例如，SBM 中的社群归属）。后续模型将这一思路扩展为允许几何潜在结构，即每个节点在 r 维欧几里得空间中都有一个对应的潜在位置。这类模型通常称为潜在空间网络模型（尽管这一术语有时专指由 Hoff 等人，2002 年提出的模型系列）。最著名的例子包括随机几何图（Gilbert，1961年；M´eliot，2019；Garc´ıa Trillos 等人，2020），其中，两个节点仅当其潜在位置之间的距离低于预设阈值时才形成一条边；以及随机点积

图（随机点积图；Young和Scheinerman，2007；Athreya 等人，2017年；Rubin-Delanchy等，2022），其中边的概率由潜在位置之间的内积决定。上述模型都是图子（Borgs 等人，2008；Airoldi 等人，2013；Lei，2021；Lov´asz，2012）的特例。

上述潜在空间模型中的一项典型统计任务，是根据观测网络估计节点的潜在位置。一种常见方法是使用节点嵌入，将网络中的节点映射到低维（通常为欧几里得）空间，使“相似”的节点映射到彼此相近的点。对应于不同节点相似性概念的节点嵌入示例包括 Sussman 等人（2012）；Eldridge 等人（2018年）；Rohe 等人（2011）；Tang 和 Priebe（2018）；Grover 和 Leskovec（2016）等。节点嵌入常用于获得顶点的欧几里得表示，进而应用于聚类（Rohe 等人，2011；Sussman 等人，2012）、推断（Du 和 Tang，2023；Zheng，2025）以及可视化（Modell 等人，2022）等下游任务；不过，本文关注的是将嵌入作为潜在位置的估计量。

构建节点嵌入的第一步是选择嵌入维度。绝大多数关于潜在位置相合估计的结果都假设嵌入维度选择正确（例如，参见 Athreya 等人，2017；Lei 和 Rinaldo，2015；Cape 等，2019a；Rohe 等人，2011；Jones 和 Rubin-Delanchy，2020；Levin 等人，2019、2022；Sussman 等人，2012；Cape 等，2019b；Lyzinski 等人，2014；Rubin-Delanchy等，2022），但 Lei（2021）以及 Tang 和 Cape（2025）除外；这些研究转而依赖潜在结构的谱性质。该潜在维度通常（但并非总是如此；例如，参见 Rubin-Delanchy，2020；Athreya 等人，2021；Tang 等人，2022；Sansford 等人，2025）等于给定潜在位置条件下期望邻接矩阵的秩。当然，在实践中，嵌入维度必须根据数据进行选择。统计网络分析界普遍认为，这一模型选择问题十分重要且颇具挑战性，并且与其重要性相称地受到了广泛关注。最早的方法依赖于在邻接矩阵的碎石图中寻找肘部（Zhu 和 Ghodsi，2006）。较新的方法包括交叉验证和最大似然方法 Li 等（2020）；Chen 和 Lei（2018）；Chen 等人（2021a）；Yang 等人（2021）；Jiang 等人（2025）；Wang 和 Bickel（2017），平行分析（Hong 和 Cape，2025；Hong 等人，2025），假设检验（Bickel 和 Sarkar，2015；Lei，2016；Han 等人，2023），以及阈值化方法（Chatterjee，2015）。

尽管可以使用上述方法估计嵌入维度，但嵌入维度始终存在选择错误的可能性。因此，有必要更好地理解模型设定错误下节点嵌入的表现。文献对这一问题的关注相对较少（不过，Fishkind 等人（2013）在随机块模型（SBM）背景下给出了较早的结果）。在本文中，我们在随机点积图（RDPG）下的潜在位置估计背景下考察这一问题。具体而言，我们研究嵌入维度选择错误时邻接谱嵌入（ASE；Sussman 等人，2012）的表现。我们证明，当嵌入维度选择过大时，邻接谱嵌入生成的嵌入仍然是一致的，尽管其收敛速度可能慢于维度选择正确时的情形，从而解决了 Athreya 等人（2017）中的一个开放问题（见该文第 7 节）。我们还证明了嵌入维度选择过小时的估计下界，该下界刻画了未能捕捉数据中存在的所有信号维度所付出的代价。我们的主要技术贡献可能具有独立研究价值：我们证明，在随机点积图下，在温和条件下，邻接矩阵的所有特征向量都会离域化。我们的结果拓展了随机矩阵理论中的早期工作（Erd˝os 等人，2013b），后者研究了受加性噪声影响的确定性秩一矩阵的特征向量。在继续之前

, 我们先介绍本文后续部分将使用的记号。 .

1.1 记号

令 $\|\mathbf{Z}\|$ 和 $\|\mathbf{Z}\|_F$ 分别表示 Z 的谱范数和 Frobenius 范数。矩阵用大写粗体字母表示，例如 Z。给定对称矩阵 Z 的完整谱分解 $n \times n$ symmetric matrix Z $=\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top$，我们假设特征值及其对应的特征向量按非递增顺序排列。对于矩阵 Z $\in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$，我们将 $\mathbf{Z}_{a:b}$ 记为由 Z 的第 a 列至第 b 列组成的 $n_1 \times (b-a)$ 子矩阵。我们用 $\mathbb{O}_r$ 表示所有 r 阶正交矩阵的集合。符号 := 用于表示定义。为简化表述，对于一个 a_n 序列 $b_n > 0$，我们用记号 $a_n \lesssim b_n$ 表示存在某个 $C > 0$，使得当 n充分大时，$a_n \leq Cb_n$；用记号 $a_n \ll b_n$ 表示在大-n 极限下 $a_n/b_n \to 0$。我们用 $a_n \asymp b_n$ 表示存在常数 c、$C > 0$，使得对于序列 a_n、$b_n > 0$、$ca_n \leq b_n \leq Ca_n$，对所有 n 均有相应关系。

2 设定与建模

本研究关注这样的网络模型：其邻接矩阵由一个低秩信号矩阵加上加性噪声构成。文献中通常将这类模型称为“信号加噪声”模型（例如，Cape 等人，2019a；Yan 和 Levin，2024）。因此，我们考虑

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{E}, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{E}$ 是一个均值为零的噪声矩阵，而 $\mathbf{P}$ 是一个秩为 r 的 $n \times n$ 对称矩阵，其谱分解可表示为

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_{1:r}\mathbf{S}_{1:r}\mathbf{U}_{1:r}^{\top}, \tag{2}$$

其中 $\mathbf{S}_{1:r}$ 是由非零特征值构成的对角矩阵，这些特征值按非递增顺序排列（$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_r > 0$），而 $\mathbf{U}_{1:r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ 是相应正交归一特征向量构成的矩阵。

在第1节讨论的潜变量网络模型（如随机块模型、随机点积图及其变体）中，$\mathbf{P}$可表示为

$$\mathbf{P} = \rho_n \mathbf{X}\mathbf{X}^{\top} = \left(\rho_n^{1/2}\mathbf{X}\right)\left(\rho_n^{1/2}\mathbf{X}\right)^{\top},$$

其中，$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ 的各行编码了顶点层面的 r 维潜变量，而 $\rho_n \in (0,1]$ 可以解释为信号强度参数。本文研究的任务是从观测到的 $\mathbf{A}$ 中恢复缩放后的潜结构 $\rho_n^{1/2}\mathbf{X}$。根据方程 (2) 中 $\mathbf{P}$ 的谱分解，我们可以取

$$\rho_n^{1/2}\mathbf{X} = \mathbf{U}_{1:r}\mathbf{S}_{1:r}^{1/2}. \tag{3}$$

一个障碍在于，对于任意 $\mathbf{W} \in \mathbb{O}_r$,

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^{\top} = (\mathbf{X}\mathbf{W})(\mathbf{X}\mathbf{W})^{\top}. \tag{4}$$

也就是说，对 $\mathbf{X}$ 进行任意正交旋转，都会得到相同的期望邻接矩阵 $\mathbf{P}$。因此，在估计缩放后的潜在位置 $\rho_n^{1/2}\mathbf{X}$ 时，我们必须考虑这种不可识别性。具体而言，我们满足于使用估计量恢复 $\rho_n^{1/2}\mathbf{X}$，使其在正交旋转意义下与上方显示方程中的结果相同。

方程 (3) 中的表达式提示了一种估计 $\rho_n^{1/2}\mathbf{X}$ 的自然方法，即用观测到的 $\mathbf{A}$ 的主特征值和特征向量替代 $\mathbf{P}$ 的主特征值和特征向量。这启发了邻接谱嵌入，该方法最早由 Sussman 等人（ 2012 ）提出。

定义 1（邻接谱嵌入）。给定一个实对称矩阵$\mathbf{A}$，其谱分解为

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{U}}^{\top},$$

我们定义 d 维邻接谱嵌入（*ASE*；*Sussman* 等人，*2012*）$\mathbf{A}$ 为

$$\hat{\mathbf{X}}_{1:d} = \hat{\mathbf{U}}_{1:d}|\hat{\mathbf{S}}|_{1:d}^{1/2} \in \mathbb{R}^{d}.$$

对于刚才描述的这类模型，近期绝大多数研究在考虑~不可识别性后，都是通过真实结构 $\rho_n^{1/2}\mathbf{X}$ 与其估计值之间的最大欧几里得范数来评估估计误差（例如，Athreya 等人，2017年；Rubin-Delanchy等，2022；Levin 等人，2019年；Cape 等，2019b；Levin 等人，2022），也就是说，好的估计量 $\mathbf{X} \in \mathbb{O}_r$ 应当使下式取得较小值

$$\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_r} \left\|\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}\right\|_{2,\infty},$$

其中 $\|\mathbf{Z}\|_{2,\infty}$ 定义为矩阵 $\mathbf{Z}$ 各行的最大欧几里得范数。在此（2，∞）-范数下的收敛意味着能够一致恢复编码于 $\mathbf{X}$ 各行中的顶点级结构（Lyzinski 等人，2014年）。在多种潜变量网络模型下均可保证此类收敛性，其中我们考虑随机点积图（RDPG；Athreya 等人，2017年；Young和Scheinerman，2007年），这是一种网络结构由潜在顶点级几何结构驱动的模型。

定义 *2*（随机点积图）。设 F 是定义在 $\mathbb{R}^r$上的概率分布，并令 $X_1, X2$、...、X_n 根据 F独立同分布地抽取，将这些样本收集为矩阵 X 的各行 $\in \mathbb{R}^{n\times r}$，并令 $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$为满足 $\rho_n \in [0,1]$ 对所有 $n = 1$、*2*、... 的序列。若给定 X，$E = A - \rho_n XX^\top$ 具有相互独立的元素（对称性之外），则称 A 服从具有潜在位置 X 和信号强度 ρ_n 的加权随机点积图。当 F满足对于 F的支撑集中的所有 x、y，$x^\top y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ 时，若 A 具有潜在位置 X 和稀疏参数 ρ_n，则称其服从二元随机点积图，且

$$\mathbb{P}(\mathbf{A} \mid \mathbf{X}) = \prod_{i<j} (\rho_n \mathbf{X}_i^\top \mathbf{X}_j)^{A_{ij}} (1 - \rho_n \mathbf{X}_i^\top \mathbf{X}_j)^{1-A_{ij}}. \tag{5}$$

在这两种情况下，我们都将$(\mathbf{A}, \mathbf{X}) \sim$随机点积图$(F, n)$ 记作维度为 r、参数为 ρ_n 的模型，具体含义由上下文确定；并将$\mathbf{X}$的各行称为网络的潜在位置。

随机点积图扩展了多种广泛使用的网络模型。例如，令潜在位置服从适当选取的点质量混合分布，即可将随机块模型视为其特例。同样，令$\mathbf{X}_i = c_i Y_i$，其中 $c_i \in$(0,1)，且 Y_i随机取自 r 个不同的向量 $y_1, y_2, \ldots, y_r \in \mathbb{R}^r$ 之一，即可将度修正随机块模型（ Karrer 和 Newman，2011 ）视为随机点积图的特例。随机点积图还可以通过多种方式扩展和推广。例如，可以修改模型，使边的概率由潜在空间 κ 上的核函数给出：$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to [0,1]$（Tang 等人，2013）。在定义 2 给出的随机点积图中，κ 就是内积，且 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^r$。$\mathbf{P} = \rho_n \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ 的半正定结构也可以放宽（Rubin-Delanchy 等人，2022）。关于随机点积图的更深入讨论，请参见 Athreya 等人（2017）。

注释 1. 读者可能已经注意到，定义 *1* 中的参数 ρ_n 承担着两种不同但相关的作用。对于二元随机点积图，ρ_n 描述稀疏度，其含义为大多数网络研究者所熟悉：随着顶点数 n 增长，观测网络中实际存在的边在所有可能的 n^2 条边中所占的比例趋于零。也就是说，两个特定节点之间出现一条边的概率会随着节点数增加而趋于零。正如定义 *2* 中所述，我们通过参数 ρ_n 将这一点纳入模型；对于二元网络，我们将其称为稀疏参数。对于加权随机点积图，ρ_n 描述的是信号强度：如果 $\rho_n = 1$，那么 $\mathbf{P}$ 的特征值会随 n 线性增长（见附录 *B* 中的引理 *B.2*）。随着网络规模增长，令 ρ_n 趋于零，可以通过使 $\mathbf{P}$ 的特征值次线性增长，让估计问题变得更难。这两种情形的关键区别在于，对于加权随机点积图，我们允许单独指定$\mathbf{E}$ 各元素的方差，不受信号强度 ρ_n 的影响；而对于二元随机点积图，边的方差由于边服从伯努利随机变量分布，必然与 ρ_n 的变化相关。

2.1 模型设定错误

在嵌入维度设定正确的情形下（即在上述记号中，$k = 0$），邻接谱嵌入的一致性已得到广泛研究；参见 Athreya 等人，2017年；Levin 等人，2022年；Sussman 等人，2012；Rubin-Delanchy 等人，2022年；Levin 等人，2021；Tang 和 Priebe，2018年；Lyzinski等，2017。显然，在实际应用中，模型秩 r 通常未知，需要根据观测数据进行估计。正如第1节所述，文献中已广泛探讨了估计嵌入维度的方法。然而，即使采用最佳的嵌入维度估计技术，仍然可能出现嵌入维度设定错误。因此，本文旨在刻画嵌入维度选择不正确时邻接谱嵌入的表现。据我们所知，这是首项对此进行研究的工作。

证明在已知真实嵌入维度 r 时，邻接谱嵌入在 $(2,\infty)$-范数下的一致性，需要我们控制以下量

$$\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_r} \left\| \hat{\mathbf{X}}_{1:r}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r} \right\|_{2,\infty}, \tag{6}$$

其中，我们回顾一下，对$\mathbf{W}$ 进行最小化是为了处理潜在位置的不可识别性。方程（6）中描述的量及其相关量，在真实嵌入维度已知时，已在一系列情形下得到控制（Lyzinski等，2017；Levin 等人，2022，2019；Rubin-Delanchy 等，2022；Cape 等，2019b），而当

真实嵌入维度已知时，这些结果以能够应用 Davis-Kahan $\sin\Theta$ 定理或其变体为前提（Davis 和 Kahan，1970；Yu 等人，2014；Eldridge 等人，2018），而这要求存在非零特征值间隔。当我们将数据嵌入到 $d \neq r$ 维时，这些方法便不再适用。特别是，当嵌入维度选择过大时，邻接谱嵌入（ASE）会包含对应总体特征值为零的特征向量，从而导致特征值间隔为零。因此，若要刻画嵌入维度设定错误时邻接谱嵌入（ASE）的行为，我们需要采用不同的工具。

在研究维度误设的影响时，我们发现，用真实嵌入维度 r 和所选维度与真实维度之差 $k = d - r$ 来表述最为方便。接下来，我们将考虑 $(r+k)$ 维邻接谱嵌入，

$$\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k} = \hat{\mathbf{U}}_{1:r+k}|\hat{\mathbf{S}}|^{1/2}_{1:r+k},$$

其中，r 是 $\mathbf{P}$ 的秩，而 $k = d - r \in \{-r, -r+1, \ldots, n-r\}$ 描述真实模型秩与所选嵌入维度之间的差异。

要将公式（6）中的量调整到嵌入维度选择不正确的情形，我们需要引入以下记号，以便精确地表述邻接谱嵌入（ASE）的估计误差。当我们选择的嵌入维度过小（即 $k < 0$）时，需要在估计值 $\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}$ 后补上若干列零，使其能够与 n-by-r 矩阵 $\mathbf{X}_{1:r}$ 进行合理比较。类似地，当嵌入维度选择过大（即 $k > 0$）时，需要在 $\mathbf{X}_{1:r}$ 后补上若干列零，以确保嵌入矩阵与真实潜在位置的维度相容。因此，为了研究 $k < 0$ 的情形，我们将 $\hat{\mathbf{X}}^{\circ}_{1:r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ 定义为 $\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}$ 的零填充版本。也就是说，当 $k < 0$ 时，我们定义

$$\hat{\mathbf{X}}^{\circ}_{1:r} := \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k} & \mathbf{0}_{r+k+1:r}\end{bmatrix}. \tag{7}$$

类似地，当 $k > 0$ 时，我们将 $\mathbf{X}_{1:r+k}$ 定义为 $n \times (r+k)$ 矩阵

$$\mathbf{X}_{1:r+k} := \begin{bmatrix}\mathbf{X}_{1:r} & \mathbf{0}_{r+1:r+k}\end{bmatrix}. \tag{8}$$

为了理解邻接谱嵌入的估计误差，在嵌入维度选择过大（$k > 0$）的情形下，我们暂且忽略不可识别性，并进行如下分解：

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_{2,\infty} &\leq \left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty} + \left\|\hat{\mathbf{X}}_{r+1:r+k} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty} \\ &= \underbrace{\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty}}_{\text{Controlled via standard techniques}} + \underbrace{\left\|\hat{\mathbf{X}}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty}}_{\text{Goal}}.\end{aligned}$$

从该分解中可以看出，其中包含两项：一项对应于嵌入维度选择正确时的收敛速率，另一项则对应于“尾部”维度。我们在下面的引理中将这一理解形式化，该引理同时给出了嵌入维度选择过大和选择过小时的结果。证明见附录 A。

引理 2.1（误设模型界）。假设 $\mathbf{A} = \rho_n\mathbf{X}\mathbf{X}^{\top} + \mathbf{E}$，并将 $\mathbf{A}$ 的 $(r+k)$ 维邻接谱嵌入记为 $\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k} = \hat{\mathbf{U}}_{1:r+k}|\hat{\mathbf{S}}|^{1/2}_{1:r+k}$。当 $k < 0$ 时，

$$\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_{r+k}} \left\|\hat{\mathbf{X}}^{\circ}_{1:r}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty} \geq \sqrt{\sum_{j=r+k+1}^{r}\frac{s_j}{n}}.$$

On 另一方面，当 $k > 0$ 时，假设存在一个序列 $\mathbf{W}^* \in \mathbb{O}_r$，使得 t

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r}\mathbf{W}^* - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty} \lesssim \phi_n, \tag{9}$$

对于某个序列 $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$。那么存在一个序列 $\mathbf{W} \in \mathbb{O}_{r+k}$，使得

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_{2,\infty} \lesssim \phi_n + \left\|\hat{\mathbf{U}}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty}\|\mathbf{E}\|^{1/2}.$$

方程（9）中的 ϕ_n 旨在刻画嵌入维度选择正确时所能达到的估计速率。如前所述，文献已对这一设定进行了广泛研究；在随机点积图的若干不同变体中，ϕ_n 的精确性质已为人所知，这些变体对应于对 $\mathbf{X}$ 和边噪声 $\mathbf{E}$的不同建模选择。下面列举几个有代表性的结果作为示例。

对于二元网络，我们给出以下改编自 Lyzinski 等人（2017）的定理。

定理 2.2（Lyzinski 等人（2017），定理 5）。假设（$\mathbf{A}$，$\mathbf{X}$）$\sim$ 随机点积图（F，n），则存在一个$\mathbf{W} \in \mathbb{O}_r$ 序列，使得

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty} \lesssim \frac{r^{1/2}\log^2 n}{\sqrt{\rho_n n}}$$

以高概率成立。

对于下一个例子，我们引入 Rubin-Delanchy 等人（2022）提出的广义随机点积图（广义随机点积图），它扩展了定义 2 中的随机点积图，允许$\mathbf{P}$为不定矩阵。

定义 3（Rubin-Delanchy 等人（2022），定义 2）。将$\mathbf{I}_{p,\ q}$记作一个（$p+q$）$\times$（$p+q$）对角矩阵，其前 p 个对角元素为1，后 q 个对角元素为 -1。假设 $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^r$ 满足性质 $x^\top \mathbf{I}_{p,\ q} y \in [0,1]$ 对所有 x、y 均成立。令 F 为 $\mathcal{X}^n$ 上的一个分布，并根据 F 独立同分布地抽取$\mathbf{X}_1$、、$\mathbf{X}_2$、…、$\mathbf{X}_n$。将这些潜在位置作为行收集到$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times r}$中。那么在给定$\mathbf{X}$的条件下，如果邻接矩阵$\mathbf{A}$ 通过以下方式获得

$$A_{ij} \overset{ind}{\sim} \text{Bernoulli}(\rho_n \mathbf{X}_i^\top \mathbf{I}_{p,q} \mathbf{X}_j)$$

对所有 $i > j$ 均成立。因此，我们称 $(\mathbf{A},\mathbf{X})$ $\sim$广义随机点积图(F, n)，其符号为 (p, q)。

定理 2.3（Rubin-Delanchy 等人（2022），定理 1）。假设$(\mathbf{A},\mathbf{X})$ $\sim$广义随机点积图(F, n)，其符号为 (p, q)。进一步假设 秩$(\mathbf{P})$ 固定。存在一个通用常数 $c > 1$，使得只要稀疏因子满足 $\rho_n n = \omega(\log^{4c} n)$，就存在一个序列 $\mathbf{W} \in \mathbb{O}_r$，使得

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty} \lesssim \frac{\log^c n}{\sqrt{n}} \tag{10}$$

以高概率成立。

下面的定理改编自 Levin 等人（2022），给出了加权网络情形下 ϕ_n 的一个界，其中$\mathbf{E}$ 的各项满足次伽马尾部衰减（参见 Boucheron 等人，2013 年，第 2 章）。

定理 2.4（Levin 等人（2022），定理 6）。假设$\mathbf{A}$ $=\mathbf{P}$ $+\mathbf{E}$ $=\rho_n \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ $+\mathbf{E}$，并且假设给定$\mathbf{X}$ $\in \mathbb{R}^{n\times r}$后，$\mathbf{E}$ 的各项相互独立，且为(ν, b)次伽马随机变量，其中$n(\nu+b^2)\log^2 n \ll s_r^2$。那么存在一个序列 $\mathbf{W} \in \mathbb{O}_r$，使得

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty} \lesssim \frac{r(\log n)\sqrt{\nu+b^2}}{s_r^{1/2}} + \frac{rn(\log n)^2(\nu+b^2)s_1}{s_r^{5/2}}$$

以高概率。

由引理 2.1 可知，要证明嵌入维度选择过大时（即 $k > 0$）仍具有一致性，关键在于能够控制 $\left\|\hat{}\mathbf{X}_{r+1:r+k}\right\|_2$, ∞。根据定义 1，$\hat{}\mathbf{X}_{r+1:r+k}$ 的各列可以表示为

$$\hat{\mathbf{X}}_{r+1:r+k} = \left[\hat{u}_{r+1}|\hat{s}_{r+1}|^{1/2} \quad \hat{u}_{r+2}|\hat{s}_{r+2}|^{1/2} \quad \dots \quad \hat{u}_{r+k}|\hat{s}_{r+k}|^{1/2}\right] \in \mathbb{R}^{n\times(r+k)}.$$

将特征值界定为$\hat{s}_{r+k} \leq \|\mathbf{E}\|$后，我们可以根据 $\mathbf{E}$ 中元素的分布，采用矩阵集中不等式文献中的一系列工具（例如参见 Lei 和 Rinaldo，2015；Erd˝os 等人，2013b；Vershynin，2018）。因此，挑战在于控制与这些特征值相关的特征向量的元素

。直观地说，与这些特征向量相关的邻接谱嵌入的元素必须收缩至零，因为在真实的潜在位置 $\mathbf{X}$ 中它们为零。由于 $\|\mathbf{E}\| \lesssim \sqrt{n}$ （忽略对数因子），$\hat{}\mathbf{U}_{r+1:r+k}$ 的元素必须一致地趋于零。许多随机矩阵模型产生的特征向量，其元素满足 $C(\log n)^c/\sqrt{n}$ 的界，其中 $c > 0$ 为某个值。这些特征向量称为离域特征向量，并已在随机矩阵文献中得到广泛研究（Erd˝os 等人，2013b；Erd˝os 和 Yau，2017年；Erd˝os 等人，2007；O'Rourke 等人，2016；Benigni 和 Lopatto，2020；Rudelson 和 Vershynin，2015）。为在实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的情形下证明离域化，我们假设 $\mathbf{E}$ 是一个 $n \times n$ 实对称矩阵，其元素在给定 $\mathbf{P}$ 的条件下为均值为零的条件独立随机变量（满足对称性）。此外，我们将对$\mathbf{P}$ 的谱性质以及 E_{ij} 的矩作出以下假设，这两者都允许依赖于 n:

(A1) 假设 1（离域化）：与$\mathbf{L}$的非零特征值对应的特征向量是离域化的。也就是说，对于某个 $\gamma \geq 0$，其不依赖于 n。，

$$|u_{ij}| \lesssim \frac{(\log n)^\gamma}{\sqrt{n}}$$

对于所有 $i \in [n]$，以及 $j \in [r]$，其中 v_{ij} 表示$\mathbf{P}$的第 j 个特征向量的第 i 个元素 .

(A2) 假设 2：信号强度参数 $\rho_n = \omega(1/\sqrt{n})$

(A3) 假设 3：$\mathbf{P}$ 的非零特征值互不相同。

(A4) 假设 4：$\mathbf{P}$ 的非零特征值的阶为 $\rho_n n$：对于 $j \in [r]$，$s_j \asymp \rho_n n$。

(A5) 假设 5：$r = \mathrm{rank}(\mathbf{P}) \ll (\log n)^\zeta$，对于某个 $\zeta \geq 0$。

(A6) 假 设 6（特征值间隔）：特征值间隔 $\Delta := \min_{j\in[r]} \min_{i\neq j} |s_i - s_j|$ 满足 $\Delta = \Omega(\rho_n n)$.

(A7) 假设 7：$\mathbf{E}$ 的元素满足矩条件

$$\mathbb{E}[E_{ij}] = 0, \quad \mathbb{E}\left[|E_{ij}|^2\right] = \sigma^2, \quad \mathbb{E}[|E_{ij}|^p] \leq \frac{C_1^p}{\tilde{q}_n^{(p/2-1)}} \quad (p > 2)$$

其中 $\tilde{q}_n \in \left[n^{-1/2}(\log n)^6, 1\right]$ 是一个控制$\mathbf{E}$尾部行为的参数，在二元网络的语境下对应于稀疏参数。

注释 2. 我们暂且简要讨论其中一些假设。假设 ***A1***与谱方法中常见的不相干条件类似（*Chen* 等人，*2021b*；*Yan* 和 *Levin*，*2024*；*Zheng*，*2025*）。这是我们的主要离域化结果成立的关键条件。一般而言，若没有此类条件，我们并不一定期望随机矩阵的特征向量会离域化（更多讨论见 *O'Rourke* 等人，*2016*）。对于随机点积图，可以证明 $\|\mathbf{U}\|_{2,\infty} \lesssim 1/\sqrt{n}$ （见下文推论 *B.3.1*）。假设 ***A3***假定$\mathbf{P}$具有不同的非零特征值。我们认为，这一假设可以放宽，但在定理 *3.1* 的证明中追踪对应于重复特征值的特征子空间会增加记号上的复杂性；这一问题留待未来研究。假设***A2*** 和***A6***是使用谱方法结果所必需的。我们推测，即使放宽这些假设，$\mathbf{A}$的特征向量仍会离域化，*Yan* 和 *Levin*（*2024*）的结果也支持这一点。最后，假设 ***A7*** 中$\mathbf{E}$的矩条件允许次指数衰减。详情见 *Erd˝os* 等人（*2013b*）的注释 *2.5*。

3 理论结果

现在，我们给出加权网络情形下的主要理论结果。这些结果依赖于（2，∞）-范数的基本性质，以及谱方法和随机矩阵理论中的基本结果。我们的第一个结果表明，在上述假设下，邻接矩阵$\mathbf{A}$ 的尾部特征向量会离域化。证明见附录 C。

Theo注 3.1。 令$\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{E}$，并假设假设（**A1**）–（**A7**） 成立。那么，我们有 e

$$\max_{\alpha>r} |\hat{u}_{j\alpha}| \lesssim \frac{r^2(\log n)^{4+6\gamma}}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

以高概率成立。

该结果的证明主要基于 Erd˝os 等人（2013b）提出的方法，他们证明了在方程（1）中的$\mathbf{P}$ 秩为一时的半圆律。将结果推广到更一般的低秩信号矩阵，需要处理$\mathbf{P}$的非零信号特征值所对应特征子空间之间的非平凡相互作用。我们首先为一个低秩期望矩阵推导局部律；经过缩放后，该矩阵的谱范数不受常数限制。这得益于我们对 $\|\mathbf{U}^{1:r}\|_{2,\infty}$所作的假设。随后，特征向量离域可由局部律推得。已有一些类似研究为期望矩阵证明了局部律，其中矩阵的谱范数受常数限制，或假设矩阵为对角矩阵，但所采用的矩条件与我们的设定不同（Erd˝os 等人，2025；Lee 等人，2016）。Capitaine 等人（2009）研究了低秩加噪声模型中最大特征值的分布，但其设定要求$\mathbf{P}$ 的谱范数受常数限制。我们的证明要求$\mathbf{E}$ 的逐元素方差矩阵为双随机矩阵，而二元网络通常不满足这一条件。不过，我们认为即使放宽这一假设，仍会出现离域化。我们将在第 3.1 节进一步讨论这一点。另一方面，我们预计可以放宽假设（**A5**），允许 r 以 $r \ll n^{1/4}$的速度增长，但可能需要在离域界中付出一个较小的多项式因子。

注释 3. 随机矩阵理论中关于特征值分布的结果，已受到网络文献的关注，并被用于模型选择（即嵌入维数选择；参见 *Lei，2016*；*Bickel* 和 *Sarkar，2015*）。我们强调，我们关注的是邻接谱嵌入在（可能）设定错误时的行为；这种情况发生在选择嵌入维度之后，因此需要了解与受扰动的零空间相关联的特征向量的行为，而不只是特征值的行为。

对于本文的目的而言，最重要的是，定理 3.1 使我们能够刻画与扰动后的零特征值相关联的特征向量。特别是，我们能够证明，对于某个$c \geq 4$

$$\left\|\hat{\mathbf{U}}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty} \lesssim \frac{\sqrt{k}\log^c n}{\sqrt{n}}$$

以高概率成立。我们着重说明这一界在本文主要贡献中的应用——量化邻接谱嵌入在其嵌入维度设定错误时的行为。证明见附录 A。

定理 3.2（加权网络的估计界）。 设 $(\mathbf{A}, \mathbf{X}) \sim$随机点积图$(F, n)$是一个 r 维加权随机点积图，其信号强度为 ρ_n，并且假设$(\mathbf{A1})$ –$(\mathbf{A7})$成立。将$\mathbf{A}$ 的$(r+k)$维邻接谱嵌入记为$\hat{}\mathbf{X}_{1:r+k} = \hat{}\mathbf{U}_{1:r+k}|\hat{}\mathbf{S}|_1^{1/2}{}_{:r+k}$ 并假设存在一列$\mathbf{W}^* \in \mathbb{O}_r$ 和$(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ ，如方程(9)所示。那么存在一列$\mathbf{W} \in \mathbb{O}_{r+k}$，使得对于 $k > 0$,

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}\mathbf{W}\right\|_{2,\infty} \lesssim \phi_n + \sqrt{\sigma^2 k}\frac{r^2(\log n)^{5+6\gamma}}{n^{1/4}} \tag{12}$$

以高概率。另一方面，对于 $k < 0$,

$$\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_r} \left\|\hat{\mathbf{X}}^{\circ}_{1:r}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty} \gtrsim \sqrt{|k|\rho_n}.$$

3.1 二元网络的一致性

定理 3.2 表明，对于加权网络，当嵌入维度至少为 r 时，在 (2，∞)-范数下具有一致性。证明依赖于证明观测矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量是离域的，正如我们在定理 3.1 中所做的那样。由于元素具有异质性，二元网络并不总是满足当前工作所要求的假设 **A7** 中概述的矩条件

（概率）在 $\mathbf{P}$ 中。由于 $\mathbf{A}$ 的元素服从《伯努利》分布，这些概率决定了 $\mathbf{E}$ 元素的方差。然而，我们强烈认为，上一节提出的核心思想可以扩展到二元网络。一般而言，二元网络不满足方差矩阵的双随机假设，而这一假设是我们证明 $\mathbf{A}$ 的特征向量离域所必需的。随机矩阵理论的最新进展（Ajanki 等人，2017年，2015）使得双随机假设可以放宽，从而适用于更一般的方差。基于这些最新的理论进展，以及第4.2节所示的二元网络实验结果，我们认为也可以放宽双随机假设，将离域化结果扩展到更一般的二元网络。具体而言，我们猜想，对于一般的二元网络，$\mathbf{A}$ 的特征向量是离域的，这与定理 3.1 的结论类似，

猜想1（离域化）。假设 $\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{E}$，且假设 $(\mathbf{A1})$ –$(\mathbf{A7})$ 成立，其中假设 $(\mathbf{A7})$ 放宽为条件 $c \leq \mathbb{E}\left[|E_{ij}|^2\right] \leq C$。那么对于所有 $j \in [n]$,

$$\max_{\alpha > r} |\hat{v}_{j\alpha}| \lesssim \frac{r^2 (\log n)^{4+6\gamma}}{\sqrt{n}}$$

如果该猜想能够得到证明，一个直接推论将是：当嵌入维度选择过大（$k > 0$）时，在二元随机点积图下仍可相合估计潜在位置，前提是稀疏参数 ρ_n 的收敛速度不能过快。例如，利用加权网络情形中概述的相同论证，以及 Lyzinski 等人（2017）的定理 5（上文引用为定理 2.2），离域化将推出以下结果。

$$\min_{\mathbf{W} \in \mathbb{O}_{r+k}} \left\| \hat{\mathbf{X}}_{1:r+k} \mathbf{W} - \rho_n^{1/2} \mathbf{X}_{1:r+k} \right\|_{2,\infty} \lesssim \sqrt{r} \frac{(\log n)^2}{\sqrt{\rho_n n}} + \sqrt{k} r^2 (\log n)^4 \left(\frac{\rho_n}{n} \right)^{1/4}. \tag{13}$$

以高概率成立。类似地，对于 $k < 0$,

$$\min_{\mathbf{W} \in \mathbb{O}_r} \left\| \hat{\mathbf{X}}^{\circ}_{1:r} \mathbf{W} - \rho_n^{1/2} \mathbf{X}_{1:r} \right\|_{2,\infty} \gtrsim \sqrt{|k| \rho_n}.$$

类似地，猜想（1）的另一个推论将基于上文的定理10，为广义随机点积图（GRDPG）推出以下结果,

$$\min_{\mathbf{W} \in \mathbb{O}_{r+k}} \left\| \hat{\mathbf{X}}_{1:r+k} \mathbf{W} - \rho_n^{1/2} \mathbf{X}_{1:r+k} \right\|_{2,\infty} \lesssim \frac{\log^c n}{\sqrt{n}} + \sqrt{k} r^2 (\log n)^4 \left(\frac{\rho_n}{n} \right)^{1/4}$$

以高概率成立，其中 $c > 1$。类似地，对于 $k < 0$,

$$\min_{\mathbf{W} \in \mathbb{O}_r} \left\| \hat{\mathbf{X}}^{\circ}_{1:r} \mathbf{W} - \rho_n^{1/2} \mathbf{X}_{1:r} \right\|_{2,\infty} \gtrsim \sqrt{|k| \rho_n}.$$

4 实验

现在，我们通过实验研究第3节中提出的理论结果。首先，我们研究加权网络中邻接谱嵌入（ASE）的表现，这与我们的主要结果定理3.2和定理3.1的预测一致。在第4.2节中，我们将关注不同嵌入维度选择对二元网络稀疏度的影响，以支持猜想1。

4.1 加权网络

我们首先考虑定理3.2中的加权随机点积图设定下邻接谱嵌入（ASE）的表现，其中信号强度参数 ρ_n 保持不变。为获得 $\mathbf{P} = \rho_n \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$，我们考虑从狄利克雷分布中抽取的潜在位置，其中 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 的各行均按照参数为 $\alpha = (1, 1, 1, 1, 1)$ 的狄利克雷分布独立同分布地抽取，因此真实潜在维度为 $r = 5$。给定这些潜在位置后，通过按照以下方式生成邻接矩阵 $\mathbf{A}$ 来定义网络

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top + \mathbf{E}, \tag{14}$$

其中$\mathbf{E}$ 的元素为 $E_{ij} = E_{ji}$，由 $i > j$ 独立同分布地从某个零均值分布中抽取。我们考虑$\mathbf{E}$各元素的四种不同噪声模型:

(a) $E_{ij} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} N(0,1)$;

(b) $E_{ij}+1 \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{Laplace}(0,1)$;

(c) $E_{ij}+1 \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{Exp}(1)$;

(d) $E_{ij}+1 \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{Pois}(1)$.

注意，在设置 (c) 和 (d) 中，我们将分布的中心设为 1，以确保$\mathbf{E}$ 的各元素均值为零，正如我们的理论所要求的那样。给定邻接矩阵$\mathbf{A}$，我们构造其 $(r+k)$ 维邻接谱嵌入。我们的目标是考察邻接谱嵌入对潜在位置$\mathbf{X}$的恢复效果，但为此，我们必须考虑模型的正交不可识别性，如方程 4 中所述。为此，我们计算.....的奇异值分解

$$\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}^{\top}\mathbf{X}_{1:r+k} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^{\top},$$

并设$\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{V}^{\top}$，这是 Procrustes 对齐问题的解

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{V}^{\top} = \underset{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_{r+k}}{\operatorname{argmin}} \left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\mathbf{W} - \mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_F. \tag{15}$$

我们使用这一$\mathbf{W}$ 选择来计算

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\mathbf{W} - \mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_{2,\infty}$$

a作为$\hat{}\mathbf{X}_{1:r+k}$ 与真实潜在位置之间的 $(2,\infty)$ 范数误差估计。

我们针对不同的网络规模 $n = 300$，600、.....、7800 个顶点，以及不同的嵌入维度 $r+k = 4$、5、6、10、20、40，进行了上述实验，每种条件下进行 80 次蒙特卡罗试验。图 1 展示了实验结果，绘出了邻接谱嵌入（ASE）在 $(2,\infty)$ 范数下的估计误差随网络规模 n 变化的情况，其中嵌入维度的取值各不相同。坐标轴采用双对数尺度，以突出定理 3.2 预测的收敛速率，并展示当嵌入维度选得大于真实嵌入维度时，邻接谱嵌入（ASE）的一致性。黑色虚线表示维度设定正确时定理 3.2 预测的收敛速率（忽略对数因子），灰色虚线则表示嵌入维度选择过大时预测的收敛速率（忽略对数因子）。

观察图 1 可见，当嵌入维度至少与真实嵌入维度（$r = 5$）相同，一致性似乎成立。当嵌入维度选择过小（此处为 4，以橙色线表示）时，一致性不再成立：对于所有四种误差模型，随着 n 足够大，邻接谱嵌入（ASE）与真实潜在位置之间的误差似乎趋近于一个常数。在这些实验中，取值为$\rho_n = 1$ 时，我们看到，定理 3.2 给出的下界与此处嵌入维度选择过小所导致的不一致性相符。接下来考察维度设定正确的情形（图 1 中以金色线表示），可以看到，随着 n 增大，估计误差似乎符合定理 3.2 预测的 $n^{-1/2}$ 速率。当维度选择过大时（图中绿色、蓝色、紫色和洋红色线分别对应嵌入维度 6、10、20 和 40），我们看到一致性似乎仍然成立，但速率为较慢的$n^{-1/4}$ ，这同样与定理 3.2 的结论一致。

对于固定的 n，定理 3.2 预测，当嵌入维度超过真实嵌入维度（即 $k > 0$）时，$(2,\infty)$-范数下的估计误差应呈现平方根变化。我们在先前实验的设定下对此进行实验探究，并将注意力限制在 $E_{ij}+1 \overset{\text{独立同分布}}{\sim}$ Exp(1) 分布的情形，其中 $i < j$。我们计算了嵌入维度为$r+k = 1$、2、.....、10、11 时的邻接谱嵌入（ASE），随后也计算了更大嵌入维度 $r+k = 20$、40、45 时的结果。

图 2 显示，我们对潜在位置的估计误差至多以 $\sqrt{k}$ 的速率增长，其中$k > 0$ ，且 n 保持固定。实验中观察到的速率略慢于定理（3.2）预测的$\sqrt{k}$ 。我们推测，这可能是计算$\mathbf{W}$时引入的不确定性所致，如公式（15）所示。我们还观察到，当 ASE 的嵌入维度与真实嵌入维度（$r = 5$）相同时，$(2,\infty)$-范数最小（对于 $n > 1500$）。我们指出，对于 $n = 300$,600, 900, 和 1500，$(2,\infty)$-范数并未在 $r+k = 5$ 处达到最小值，因为我们的结果具有渐近性质。

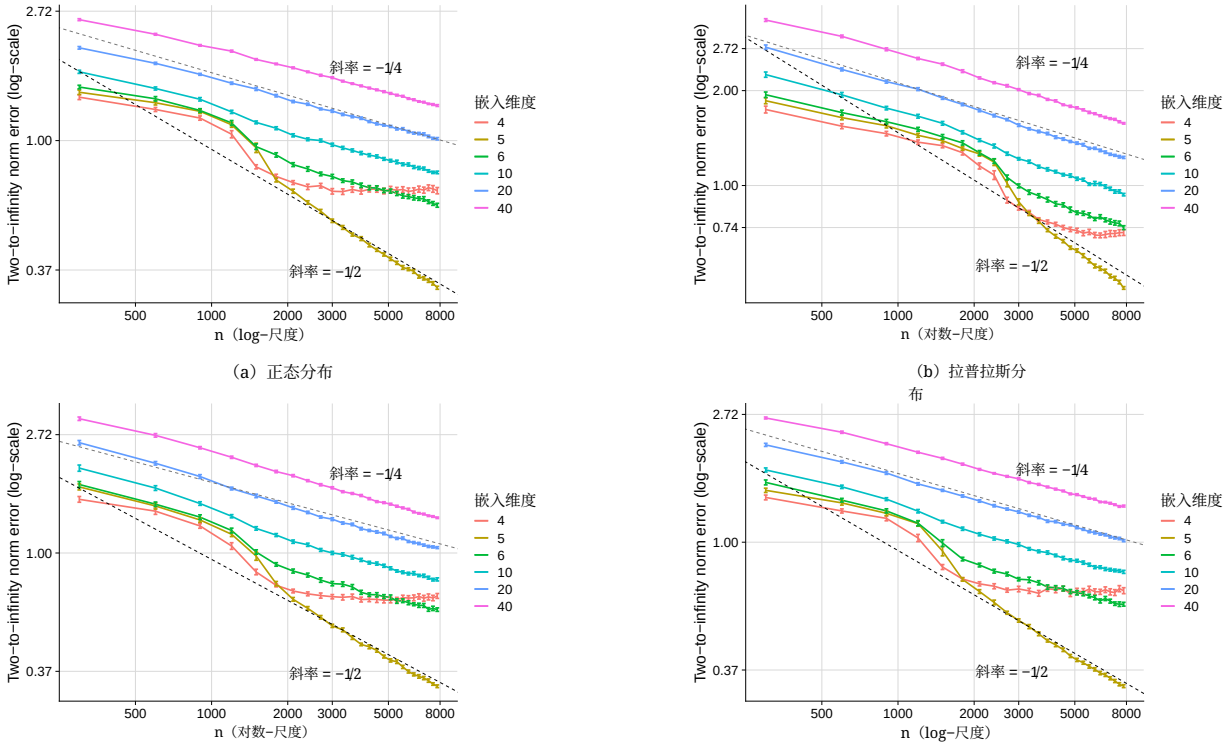


图 1：在公式（14）所示的加权网络中，四种不同噪声模型（(a) 正态分布、(b) 拉普拉斯分布、(c) 指数分布和 (d) 泊松分布）下，采用六种嵌入维度（彩色线条）时，邻接谱嵌入（ASE）的 $(2,\infty)$-范数估计误差随顶点数 n 变化的情况。图中还展示了正确设定的嵌入维度（$r=5, k=0$；金色）以及五种设定错误的嵌入维度（$r+k$ =4, 6,10, 20, 40；分别以橙色、绿色、青绿色、紫色和洋红色表示）。黑色和灰色虚线分别表示正确设定情形下以及嵌入维度选择过大时的预测收敛速率。误差条表示均值的两个标准误。

在下一组针对加权网络的实验中，我们考察信号强度参数 ρ_n对 ASE 估计误差的影响，以及它与嵌入维度之间的相互作用。我们再次按照先前实验中的方法，从狄利克雷分布中抽取潜在位置。也就是说，$\mathbf{X}$ 的各行独立同分布地服从 Dir(α)，其中 $\alpha=(1,1,1,1,1)$，因此真实潜在维度为 $r=5$。随后按照以下方式生成观测网络：

$$\mathbf{A}=\rho_n\mathbf{X}\mathbf{X}^\top+\mathbf{E} \tag{16}$$

其中，$\rho_n\in[0,1]$ 是一个信号强度参数，随着 n 增大，该参数将趋于零（见注释 1）。具体而言，我们取 $\rho_n=n^{-\gamma}$作为 $\gamma\geq 0$，并按照 $E_{ij}\overset{\text{i.i.d}}{\sim}N(0,0.1_2)$ 生成边噪声，其中 $i>j$。给定邻接矩阵 $\mathbf{A}$，我们再次针对不同的 k 取值，构造其 $(r+k)$ 维邻接谱嵌入（ASE），并在求解正交Procrustes问题以处理随机点积图（RDPG）中存在的不可识别性之后，计算真实潜在位置的估计误差（采用 $(2,\infty)$-范数），如公式（15）所示。

我们对网络规模为 $n=1000$，2000、.....、8000，以及嵌入维度分别为 $r+k=4$、5、6、7、10、20 的情况进行了这项实验，每种条件下进行了 40 次蒙特卡洛重复试验。实验结果见图3，两个坐标轴均采用对数尺度，以突出显示收敛速率。我们还用灰色虚线绘制了预测的 $n^{-1/4}$ 收敛速率（即嵌入维度选择过大、高于真实维度时的收敛速率），以突出定理 3.2 中理论结果的准确性；同时用黑色虚线绘制了 $n^{-1/2}$ 最优收敛速率。

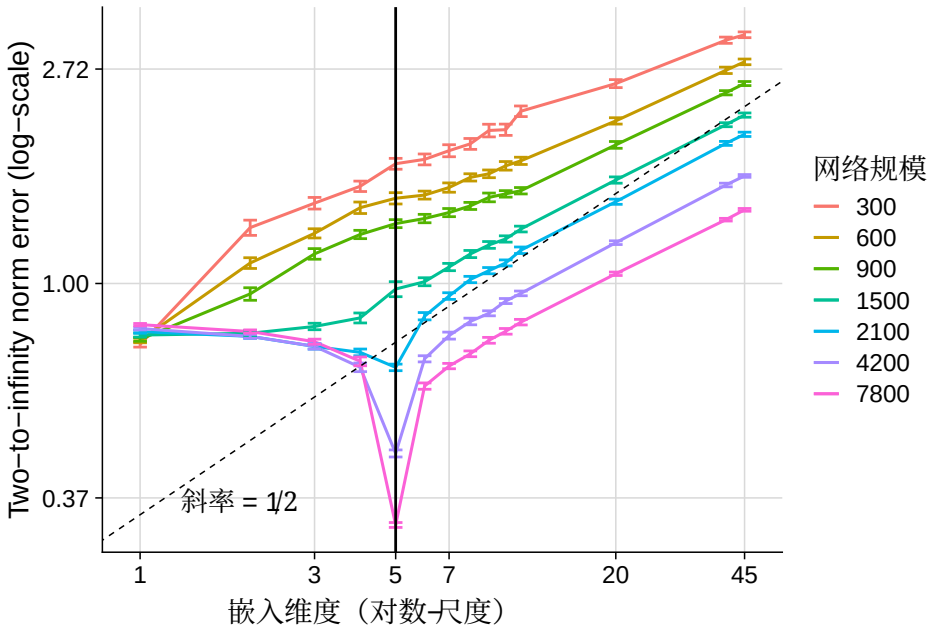


图 2：随着嵌入维度的变化，在 $(2,\infty)$-范数下恢复真实潜在位置时的误差；不同网络规模 n 的结果以线条颜色区分。两个坐标轴均采用对数尺度，黑色虚线表示我们的结果所预测的 $\sqrt{k}$ 类行为。黑色竖线表示真实嵌入维度（秩）$\mathbf{P}$ $= 5$。误差条表示两个均值标准误。

4.2 二元网络

现在，我们考察二元网络情形下邻接谱嵌入的表现。如第 3.1 节所述，第3节中给出的主要结果不适用于二元网络，因为邻接矩阵逐元素方差构成的矩阵不是双随机矩阵。一般而言，在随机点积图等模型下，二元矩阵的逐元素方差并不均一。尽管如此，我们仍预期观测到的邻接矩阵的特征向量会如猜想1所述保持离域，同时在嵌入维度选择错误时，其表现也会与加权网络相似。对于第一组二元网络实验，我们考虑随机区块模型。随机块模型通过将每个顶点分配到 r 个社区，并在给定这些社区分配的条件下独立生成边，来刻画网络的形成；两个顶点之间形成边的概率由它们的社群归属决定。我们将这些概率存储在对称矩阵 $\mathbf{B}$ $\in [0,1]^{r\times r}$ 的元素中，因此 $B_{k,\ \ell}$ 编码了 $A_{ij} = 1$的概率，其中顶点 i 属于社区 k，而顶点 j 属于社区 ℓ。总而言之，

1. 抽取一个随机概率向量 $\pi \sim$Dir(α)，其中 $\alpha \in \mathbb{R}^r$ 是一个由非负实数组成的向量。2. 根据 π，将每个节点 $i \in [n]$ 独立分配到 r 个社区之一，并将这些成员关系记录为 $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n\times r}$各行中的独热编码。3. 通过将社区内概率（即对角线上的元素）设为 0.9、社区间边概率（即非对角线上的元素）设为 0.1，构造 $\mathbf{B}$ $\in [0,1]^{r\times r}$。4. 令 $\mathbf{P}$ $= \mathbf{ZBZ}^\top$，并通过对 $\mathbf{P}$ $=\mathbf{USU}^\top$ 进行特征分解，得到 $\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{X}$ $= \mathbf{U}_{1:r}$ $\mathbf{S}_{1}^{1/2}$ $_{r}$。5. 根据以下方式生成 $\mathbf{A}$ $\in \{0,1\}^{n\times n}$

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{A} \mid \mathbf{X}\right) = \prod_{i<j} P_{ij}^{A_{ij}} (1-P_{ij})^{1-A_{ij}}. \tag{17}$$

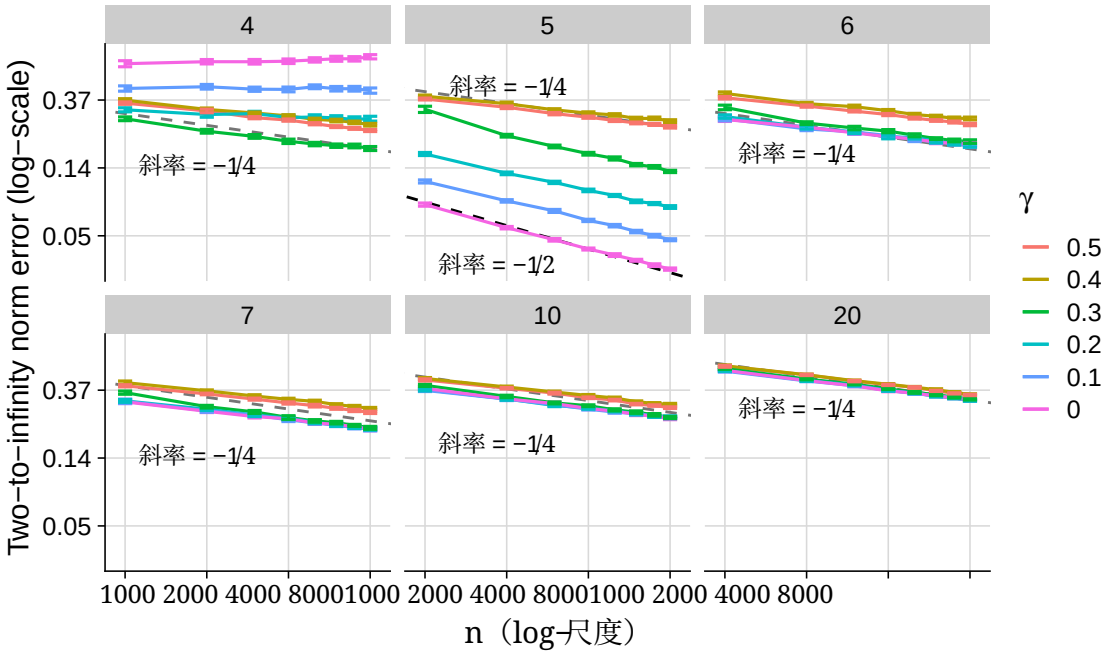


图3：对于六种嵌入维度选择，展示了不同信号强度水平（由线条颜色表示）下，邻接谱嵌入在 $(2,\infty)$-范数中的估计误差随网络规模的变化。子图展示了嵌入维度设定正确时（$r+k=r=5$；顶排中间面板）的情形，以及维度选得过低时（$r+k=4$；顶排左侧）和过高时（$r+k=6,7,10,20$；顶排右侧面板及底排全部三个面板）的情形。斜率为 $-1/2$ （分别为 $-1/4$）的黑色（分别为灰色）虚线表示定理 3.2 对嵌入维度选择正确（分别为选择错误）时预测的收敛速率。误差条表示均值的两个标准误。

我们按照上述步骤生成 $\mathbf{A}$，并再次将社区的真实数量（因此也是真实潜在维度）设为 $r=5$。随后，我们根据 $\mathbf{A}$计算（$r+k$）维邻接谱嵌入，在嵌入维度选择正确（即 $k=0$）和错误（$r+k=4$，6，7，10，20）的情况下分别进行计算；在求解公式（15）中描述的普罗克鲁斯对齐后，计算（2，∞）范数下的误差。我们针对网络规模 $n=300$，600，.....，7800重复这一过程，每种条件进行 80 次蒙特卡洛重复试验。图4展示了该实验的结果。与前面的图一样，坐标轴采用双对数尺度，以突出收敛速率，并显示嵌入维度选择适当大的邻接谱嵌入的一致性。黑色虚线表示我们对维度设定正确时收敛速率的猜想 $n^{-1/2}$ 。灰色虚线表示我们猜想嵌入维度选择过大时的 $n^{-1/4}$ 收敛速率。不同的嵌入维度选择以不同颜色的线表示，其中金色线表示维度设定正确的情况 $r+k=5$。观察该图可见，收敛行为总体上与第 4.1 节中考察的加权网络相似（见图 1）。当嵌入维度选择正确时（$r=5$，$k=0$，金色线），仍可达到预测的 $n^{-1/2}$ 收敛速率；而当嵌入维度选择过大时（即 $k>0$，绿色、青绿色、紫色和洋红色线），一致性似乎仍然成立，但收敛速率较慢，为猜想所述的 $n^{-1/4}$ 速率。当维度选择过小（$k<0$，橙色线）时，则不再观察到一致性，这同样符合我们的理论结果以及对二元网络行为的猜想。

在下一组针对二元网络的实验中，我们回到潜在位置服从狄利克雷分布的设定，这次考虑稀疏二元随机点积图。为获得潜在位置，我们从狄利克雷分布中进行模拟，其中 $\mathbf{X}_i,\ldots,\mathbf{X}_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{Dir}(\alpha)$，且 $\alpha=(1,1,1,1,1)$。随后，按照以下方式得到相应的邻接矩阵

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}\mid\mathbf{X})=\prod_{i<j}(\rho_n\mathbf{X}_i^\top\mathbf{X}_j)^{A_{ij}}(1-\rho_n\mathbf{X}_i^\top\mathbf{X}_j)^{1-A_{ij}} \tag{18}$$

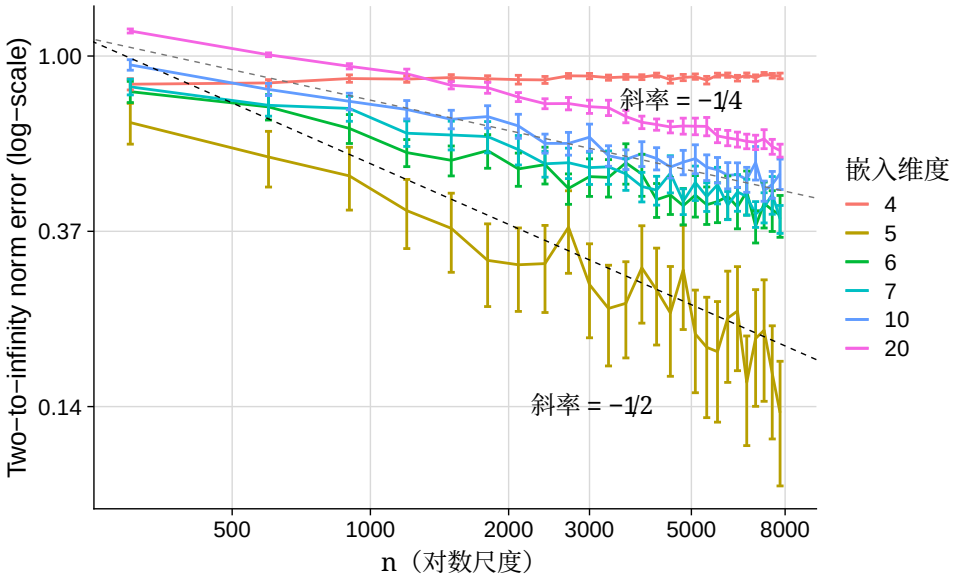


图4：在公式（17）所述的随机块模型下，对于不同的嵌入维度选择（线条颜色），邻接谱嵌入（ASE）在 $(2,\infty)$-范数下的平均估计误差随顶点数 n 的变化。两个坐标轴均采用对数尺度，黑色和灰色虚线分别表示在维度正确选择和选择过大的情况下，猜想1预测的 $n^{-1/2}$ 和 $n^{-1/4}$速率。误差条表示均值的两个标准误。

其中 $\rho_n = n^{-\gamma}$ for $\gamma \geq 0$。请回想， ρ_n 取值越小（即稀疏度越高，也就是 γ取值越大），通常估计越具挑战性。给定按照方程（18）生成的$\mathbf{A}$，我们针对不同的嵌入维度计算其邻接谱嵌入，并在通过求解方程（15）所述的正交Procrustes问题找到最优对齐后，计算估计的潜在位置与真实潜在位置$\mathbf{X}$之间的 $(2,\infty)$-范数误差。我们在网络规模为 $n = 300, 600, \ldots, 7800$ 的情况下开展了这项实验，并考察了多种稀疏率 $\rho_n = n^{-\gamma}$ for$\gamma = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$；每种条件下进行了80次蒙特卡洛重复试验。图5展示了这项实验的结果。

观察该图可见，我们的模拟结果表明，当正确选择嵌入维度（$r + k = r = 5$；顶排中间）时，对于所有 γ取值，邻接谱嵌入（ASE）在 $(2,\infty)$-范数下均以约 $n^{-1/2}$ 速率收敛，这与文献中已有的结果一致（相差对数因子）（Lyzinski等，2017；Rubin-Delanchy等，2022）。当嵌入维度选择过大时（底排及顶排右侧），对于所有 γ取值，ASE 仍然收敛，但收敛速率较慢；较大的 γ值似乎会使其更快地趋近这一速率。当嵌入维度仅略大于真实嵌入维度（$r + k = 6$）时的收敛速率，与嵌入维度远大于真实嵌入维度（$r + k = 20$）时相似，这表明一旦嵌入维度选择过大，ASE 对嵌入维度在渐近意义上相对不敏感。当嵌入维度选择过小（$r + k = 4$；顶排左侧）时，我们看到，在网络稠密时（即 γ取值较小），ASE 不再具有一致性；在稀疏度较高时（即 γ取值较大），结果不太明确，但从较大取值对应的曲线推断，同样的不一致性仍然存在，曲线在 n超过 8000 后趋于平缓。

5 讨论

在本文中，我们考察了在随机点积图以及更一般的信号加噪声矩阵模型下，不同嵌入维度的选择如何影响潜在位置的估计 $\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{E}$我们的结果刻画了不同嵌入维度的选择如何影响邻接谱嵌入的估计速率，

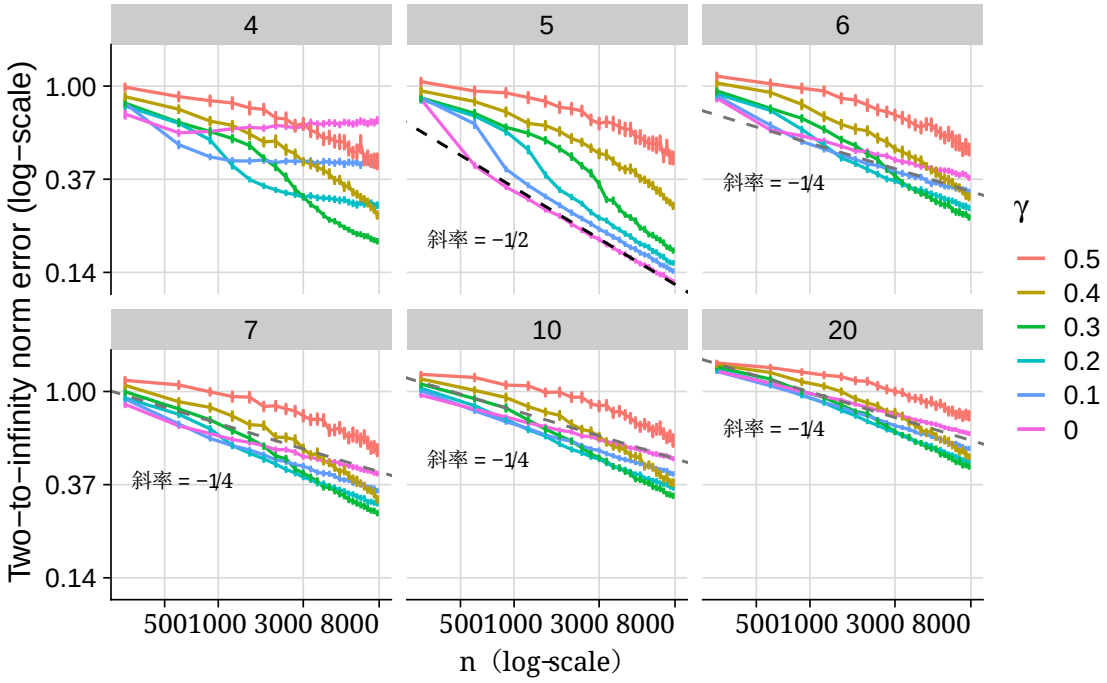


图5：稀疏二元模型中，方程（18）下 ASE 的（2，∞）范数估计误差随网络规模 n 的变化情况。稀疏度 $\rho_n = n^{-\gamma}$（$\gamma = 0$，0。1，0。2，0。3，0。4，0。5；以线条颜色表示）和嵌入维度 $r+k = 4$，5，6，7，10，20 取不同值时的结果。我们的理论针对设定正确的情形（$r+k=5$；顶排中间图）所预示的 $n^{-1/2}$ 速率以黑色虚线表示。我们的理论在嵌入维度过大时（$r+k>5$；顶排右图及底排）所预示的 $n^{-1/4}$ 速率以灰色虚线表示。误差条表示两个均值标准误。

该速率以 $(2,\infty)$-范数衡量。定理 (3.2) 以及我们在第 4.1 节中的实验表明，在加权随机点积图下，当嵌入维度选择过小时，邻接谱嵌入不一定能在 $(2,\infty)$-范数下保持一致性。事实上，由定理 (3.2) 可知，当嵌入维度选择过小时，估计误差以下界信号强度参数 ρ_n为界。这意味着，当 ρ_n 不趋于零且嵌入维度选择过小时，邻接谱嵌入是不一致的。我们可以将其理解为：嵌入未能捕获网络中包含的全部信息。当嵌入维度被正确指定时，网络中的全部信号都会被捕获，不会残留噪声特征值；此时，我们达到了文献中所见且被广泛认为是最优的 $n^{-1/2}$ 收敛速率（忽略对数因子）（例如，参见 Yan 和 Levin 在 2023、2024 年的讨论）。另一方面，定理 (3.2) 以及我们在第 4.1 节中的实验表明，当嵌入维度选择过大时，只要嵌入维度没有比真实维度大太多，一致性仍可能成立。这一结果证实了 Athreya 等人（2017）在第 7 节中的猜想：只要所有信号信息都被捕获，邻接谱嵌入就应当仍然是一致的。这种一致性是与受扰动的零空间相关的特征向量发生离域化的直接结果。由于在这三种情形（嵌入维度过小、选择正确或过大）下的渐近行为存在显著差异，我们的结果支持网络嵌入以及更广泛的模型选择领域中的经验观点，即选择模型秩时，宁可将其设得过大。

未来工作最直接的方向，是将我们的去局域化证明扩展到邻接矩阵的逐元素方差矩阵不再是双随机矩阵的情形，如第 3.1 节所述。这样便可证明我们的猜想1，并据此将定理 3.2 扩展到二元随机点积图。我们在第4.2节所述的二元网络实验表明，邻接谱嵌入的表现与定理 3.2 的预测相似，这为去局域化猜想的有效性提供了有力证据。未来工作的其他方向包括研究模型设定错误对下游任务的影响，

例如社区检测和假设检验；以及将我们的结果扩展到其他节点嵌入方法，例如拉普拉斯谱嵌入（Tang 和 Priebe，2018年）、拉普拉斯特征映射（Eldridge 等人，2018年）以及多网络版本的邻接谱嵌入（Levin 等人，2019年）。

参考文献

Daron Acemoglu、Asuman Ozdaglar 和 Alireza Tahbaz-Salehi。金融网络中的系统性风险与稳定性。《美国经济评论》，105(2)：564–608，2015年。

Edo M Airoldi、Thiago B Costa 和 Stanley H Chan。图子随机区块模型近似：理论与相合估计。载于 C.J. Burges、L. Bottou、M. Welling、Z. Ghahramani 和 K.Q. Weinberger 编，《神经信息处理系统进展》，第26卷。Curran Associates, Inc.，2013。

Edoardo M. Airoldi、David M. Blei、Stephen E. Fienberg 和 Eric P. Xing。混合成员随机区块模型。《机器学习研究杂志》，9(65)：1981–2014，2008。

Oskari Ajanki、L´aszl´o Erd˝os 和 Torben Kruger。复上半平面上的二次向量方程。《美国数学会回忆录》，2015年。

Oskari H. Ajanki、L´aszl´o Erd˝os 和 Torben Kr¨uger。一般 Wigner 型矩阵的普适性。《Proba- bility Theory and Related Fields》，169(3):667–727，2017年12月。ISSN 1432-2064。

Greg W. Anderson、Alice Guionnet 和 Ofer Zeitouni。《随机矩阵导论》。剑桥大学出版社，2010年。

Avanti Athreya、Donniell E. Fishkind、Minh Tang、Carey E. Priebe、Youngser Park、Joshua T. Vogelstein、Keith Levin、Vince Lyzinski 和 Yichen Qin。随机点积图上的统计推断：综述。《机器学习杂志》，18(1):8393–8484，2017年。

Avanti Athreya、Minh Tang、Youngser Park 和 Carey E. Priebe。潜在结构随机图中的估计与推断。《统计科学》，36(1):68–88，2021。

Florent Benaych-Geo rges 和 Antti Knowles。《Wigner 矩阵局部半圆律讲义》，201 8.

Lucas Benigni 和 Patrick Lopatto。广义 Wigner 矩阵的最优离域化。《数学进展》，2020 年。

Peter J. Bickel 和 Purnamrita Sarkar。网络中的自动化社群检测假设检验。《英国皇家统计学会会刊》*B*辑：统计方法学，78(1):253–273，2015 年 5 月。ISSN 1369-7412。

Christian Borgs、Jennifer T. Chayes、L´aszl´o Lov´asz、Vera T. S´os 和 Katalin Vesztergombi。稠密图的收敛序列 I：子图频数、度量性质与检验。《数学进展》，219(6):1801–1851，2008 年。

St´ephane Boucheron、G´abor Lugosi 和 Pascal Massart。《集中不等式：独立性的非渐近理论》。牛津大学出版社，2013 年。

Ed Bullmore 和 Olaf Sporns。复杂脑网络：结构与功能系统的图论分析。《自然综述：神经科学》，10(3):186–198，2009年。

Joshua R. Cape、Minh Tang 和 Carey E. Priebe。信号加噪声矩阵模型：特征向量偏差与涨落。《*Biometrika*》，106(1):243–250，2019a年1月。ISSN 0006-3444。

Joshua R. Cape、MinhTang 和 Carey E. Priebe。《二范数到无穷范数与奇异子空间几何及其在高维统计学中的应用》。《统计年刊》，47(5):2405 – 2439，2019b。

Mireille Capitaine、Catherine Donati-Martin 和 Delphine F´eral。《大 Wigner 矩阵有限秩变形的最大特征值：涨落的收敛性与非普适性》。《概率年刊》，37(1):1 – 47，2009。Thomas Chaney。《国际贸易的网络结构》。《美国经济评论》，104(11):3600– 3634，2014。Sourav Chatterjee。《通过通用奇异值阈值化进行矩阵估计》。《统计年刊》，43(1):177 – 214，2015。Fan Chen、Sebastien Roch、Karl Rohe 和 Shuqi Yu。《用交叉验证特征值估计图维数》，2021a。网址：https://arxiv.org/abs/2108.03336。Kehui Chen 和 Jing Lei。《用于确定网络数据中社区数量的网络交叉验证》。《美国统计学会杂志》，113(521):241–251，2018。Yuxin Chen、Yuejie Chi、Jianqing Fan 和 Cong Ma。《数据科学的谱方法：统计学视角》。《机器学习的基础与趋势》，14(5):566–806，2021b。ISSN 1935-8245。Chandler Davis 和 W. M. Kahan。《扰动引起的特征向量旋转，III》。《SIAM 数值分析杂志》，7(1):1–46，1970。Xinjie Du 和 Minh Tang。《随机图中潜在位置相等性的假设检验》。《伯努利》，29(4):3221 – 3254，2023。Justin Eldridge、Mikhail Belkin 和 Yusu Wang。《未受扰动：超越 Davis-Kahan 的谱分析》。载于 Firdaus Janoos、Mehryar Mohri 和 Karthik Sridharan 编，《算法学习理论会议论文集》，《机器学习研究论文集》第83卷，第321–358页。PMLR，2018年4月7–9日。Matthew Elliott、Benjamin Golub 和 Matthew O. Jackson。《金融网络与传染》。《美国经济评论》，104(10):3115–3153，2014。L´aszl´o Erd˝os 和 Horng-Tzer Yau。《随机矩阵理论的动力学方法》。载于《库朗讲义》第28卷，2017年。L´aszl´o Erd˝os、Benjamin Schlein 和 Horng-Tzer Yau。《短尺度半圆律与 Wigner 随机矩阵特征向量的离域化》。《概率年刊》，37:815–852，2007。L´aszl´o Erd˝os、Antti Knowles、Horng-Tzer Yau 和 Jun Yin。《一类一般随机矩阵的局部半圆律》。《电子概率杂志》，18:1 – 58，2013a。L´aszl´o Erd˝os、Horng-Tzer Yau 和 Jun Yin。《广义 Wigner 矩阵的主体普适性》。《概率论及其相关领域》，154(1):341–407，2012。L´aszl´o Erd˝os、Antti Knowles、Horng-Tzer Yau 和 Jun Yin。《Erd˝os–R´enyi 图的谱统计 I：局部半圆律》。《概率年刊》，41(3B):2279 – 2375，2013b。出版方：数理统计学会。L´aszl´o Erd˝os、Joscha Henheik 和 Volodymyr Riabov。《相关随机矩阵的尖点普适性》。《数学物理通讯》，406(10):253，2025年9月。Donniell E. Fishkind、Daniel L. Sussman、Minh Tang、Joshua T. Vogelstein 和 Carey E. Priebe。《模型参数未知时随机区块模型的一致邻接谱划分》。《SIAM 矩阵分析与应用杂志》，34(1):23–39，2013。Nicol´as Garc´ıa Trillos、Moritz Gerlach、Matthias Hein 和 Dejan Slepˇcev。《随机几何图上图拉普拉斯算子谱收敛至拉普拉斯–贝尔特拉米算子的误差估计》。《计算数学基础》，20(4):827–887，2020年8月。ISSN 1615-3383。Edgar Nelson Gilbert。《随机平面网络》。《工业与应用数学学会杂志》，9

(4)：533–543，1961年。

Aditya Grover 和 Jure Leskovec。Node2vec：面向网络的可扩展特征学习。载于第*22*届*ACM SIGKDD*知识发现与数据挖掘国际会议论文集，第855–864页，2016。Ksenia Guseva、Sean Darcy、Eva Simon、Lauren V. Alteio、Alicia Montesinos-Navarro 和 Christina Kaiser。从多样性到复杂性：土壤中的微生物网络。《土壤生物学与生物化学》，169:108604，2022。Xiao Han、Qing Yang 和 Yingying Fan。通过残差子抽样进行通用秩推断及其在大型网络中的应用。《统计年刊》，51(3):1109 – 1133，2023。Peter D. Hoff、Adrian E. Raftery 和 Mark S. Handcock。社会网络分析的潜在空间方法。《美国统计学会杂志》，97(460):1090–1098，2002。Paul W. Holland、Kathryn Blackmond Laskey 和 Samuel Leinhardt。随机区块模型：初探。《社会网络》，5(2):109–137，1983。David Hong 和 Joshua Cape。用于选择嵌入维度的网络符号翻转平行分析，2025。网址：https://arxiv.org/abs/2509.05722。David Hong、Yue Sheng 和 Edgar Dobriban。通过随机符号翻转选择主成分分析中的成分数量，2025。Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，1985。Wenlong Jiang、Chris McKennan、Jes´us Arroyo 和 Joshua Cape。在网络样本中同时估计连通性与维数。《计算与图形统计学杂志》，0(ja):1–23，2025。Andrew Jones 和 Patrick Rubin-Delanchy。多层随机点积图。*arXiv:2007.10455*，2020。Brian Karrer 和 M. E. J. Newman。网络中的随机区块模型与社区结构。《物理评论*E*》，83:016107，2011年1月。Tosio Kato。《线性算子的扰动理论》。施普林格，第2版，1995。Daniel B. Larremore、Aaron Clauset 和 Caroline O. Buckee。采用网络方法分析高度重组的疟原虫基因。《*PLOS*计算生物学》，9(10):1–12，2013。Emmanuel Lazega。《合议现象：公司法律合伙关系中同侪合作的社会机制》。牛津大学出版社，2001。Ji Oon Lee、Kevin Schnelli、Ben Stetler 和 Horng-Tzer Yau。变形 Wigner 矩阵的主体普适性。《概率年刊》，44(3):2349 – 2425，2016。Jing Lei。随机区块模型的拟合优度检验。《统计年刊》，44(1):401 – 424，2016。Jing Lei。利用图根分布进行网络表示。《统计年刊》，49(2):745–768，2021。Jing Lei 和 Alessandro Rinaldo。随机区块模型中谱聚类的一致性。《统计年刊》，43(1):215 – 237，2015。Keith Levin、Avanti Athreya、Minh Tang、Vince Lyzinski、Youngser Park 和 Carey E. Priebe。多个随机图的全合并嵌入的中心极限定理及其对多尺度网络推断的启示，2019年6月。arXiv:1705.09355 [stat]。Keith Levin、Asad Lodhia 和 Elizaveta Levina。利用未知边分布从多个网络中恢复共享结构。《机器学习研究杂志》，23(3):1–48，2022。

Keith D. Levin、Fred Roosta、Minh Tang、Michael W. Mahoney 和 Carey E. Priebe。邻接谱嵌入和拉普拉斯谱嵌入的样本外扩展的极限定理。《机器学习研究杂志》，22(194):1–59，2021。Tianxi Li、Elizaveta Levina 和 Ji Zhu。通过边采样进行网络交叉验证。《*Biometrika*》，107(2): 257–276，2020年4月。L´aszl´o Mikl´os Lov´asz。大型网络与图极限。载于*Colloquium Publications*，2012。Vince Lyzinski、Daniel L. Sussman、Minh Tang、Avanti Athreya 和 Carey E. Priebe。通过邻接谱嵌入实现随机块模型图的完美聚类。《电子统计学杂志》，8(2): 2905 – 2922，2014。Vince Lyzinski、Minh Tang、Avanti Athreya、Youngser Park 和 Carey E. Priebe。分层随机块模型中的社区检测与分类。《*IEEE*网络科学与工程汇刊》，4(1):13–26，2017。Malvina Marku 和 Vera Pancaldi。从时间序列转录组学到基因调控网络：推断方法综述。《*PLOS*计算生物学》，19(8):1–26，2023年8月。Pierre-Lo¨ıc M´eliot。紧李群上随机几何图的渐近表示论与谱。《电子概率杂志》，24:1 – 85，2019。Alexander Modell、Ian Gallagher、Joshua Cape 和 Patrick Rubin-Delanchy。多部网络的谱嵌入与潜在几何，2022。URL https://arxiv.org/abs/2202.03945。Sean O'Rourke、Van Vu 和 Ke Wang。随机矩阵的特征向量：综述。组合理论杂志*A*辑，144:361–442，2016。ISSN 0097-3165。Mason A. Porter、Peter J. Mucha、M. E. J. Newman 和 Casey M. Warmbrand。美国众议院委员会的网络分析。美国国家科学院院刊，102 (20):7057–7062，2005。Karl Rohe、Sourav Chatterjee 和 Bin Yu。谱聚类与高维随机块模型。《统计年刊》，39(4):1878 – 1915，2011。Patrick Rubin-Delanchy。图嵌入中的流形结构。载于 H. Larochelle、M. Ranzato、R. Hadsell、M.F. Balcan 和 H. Lin（编），《神经信息处理系统进展》，第33卷，第11687–11699页。Curran Associates, Inc.，2020。Patrick Rubin-Delanchy、Joshua Cape、Minh Tang 和 Carey E. Priebe。谱嵌入的统计解释：广义随机点积图。《英国皇家统计学会会刊》*B*辑：统计方法学，84(4):1446–1473，2022年6月。Mark Rudelson 和 Roman Vershynin。具有独立元素的随机矩阵特征向量的离域化。《杜克数学杂志》，164(13):2507 – 2538，2015。Hannah Sansford、Nick Whiteley 和 Patrick Rubin-Delanchy。"高"有多高？重新思考维数在拓扑数据分析和流形学习中的作用。*arXiv:2505.16879*，2025。Olaf Sporns。发现人类连接组。MIT出版社，2012。Daniel L. Sussman、Minh Tang、Donniell E. Fishkind 和 Carey E. Priebe。随机块模型图的一致邻接谱嵌入。《美国统计学会杂志》，107(499): 1119–1128，2012。Ming Tang 和 Joshua R. Cape。无限秩核随机图的特征向量涨落与极限结果。*arXiv:2501.15725*，2025。Minh Tang 和 Carey E. Priebe。随机图归一化拉普拉斯矩阵特征向量的极限定理。《统计年刊》，46(5):2360 – 2415，2018。

Minh Tang、Daniel L. Sussman 和 Carey E. Priebe。潜在位置图的普遍一致顶点分类。《统计年刊》，41(3):1406–1430，2013。

Minh Tang、Joshua Cape 和 Carey E. Priebe。随机块模型的渐近有效估计量：朴素最大似然估计、秩约束最大似然估计和谱估计量。《伯努利》，28(2):1049–1073，2022。Thomas Treiber、Elizabeth M. Mandel、Sebastian Pott、Ildiko Gy¨ory、Sonja Firner、Edison T. Liu 和 Rudolf Grosschedl。早期B细胞因子1通过激活、抑制和对染色质进行转录非依赖性预备，调控B细胞基因网络。《免疫》，32(5):714–725，2010年。

Sipko van Dam、Urmo V˜osa、Adriaan van der Graaf、Lude Franke 和 Jo˜ao Pedro de Magalh˜aes。用于功能分类和基因–疾病预测的基因共表达分析。《生物信息学简报》，19(4):575–592，2017年1月。

Roman Vershynin。《高维概率：数据科学中的应用导论》。剑桥统计与概率数学系列。剑桥大学出版社，2018年。

Y. X. Rachel Wang 和 Peter J. Bickel。随机块模型的基于似然的模型选择。《统计年刊》，45(2):500 – 528，2017年。

Hao Yan 和 Keith Levin。广义随机点积图中潜在位置估计的极小极大速率。*arXiv:2307.01942*，2023。

Hao Yan 和 Keith Levin。低秩信号加噪声矩阵模型中特征向量的无相干性逐元素估计。载于 A. Globerson、L. Mackey、D. Belgrave、A. Fan、U. Paquet、J. Tomczak 和 C. Zhang 编，《神经信息处理系统进展》，第37卷，第126566–126619页。Curran Associates, Inc.，2024。

Congyuan Yang、Carey E. Priebe、Youngser Park 和 David J. Marchette。用于谱图聚类的维数与复杂度同步模型选择。《计算与图形统计学杂志》，30(2):422–441，2021。

Stephen J. Young 和 Edward R. Scheinerman。面向社交网络的随机点积图模型。载于网络图算法与模型国际会议第五届会议论文集，WAW'07，第138–149页，柏林、海德堡，2007。施普林格出版社。ISBN 3540770038。

Yi Yu、Tengyao Wang 和 Richard J. Samworth。适用于统计学家的 Davis–Kahan 定理一个实用变体。《*Biometrika*》，102(2):315–323，2014年。

Runbing Zheng。网络间顶点层面潜在位置偏移的检测与估计，2025。网址：https://arxiv.org/abs/2502.01947。

Mu Zhu 和 Ali Ghodsi。通过剖面似然自动选择碎石图中的维数。《*Computational Statistics & Data Analysis*》，51(2):918–930，2006。ISSN 0167-9473。

估计误差界

这里我们给出与随机点积图估计结果、引理 2.1 和定理 3.2 相关的证明。我们首先建立估计误差的基本上界和下界。

$\widetilde{}$引理 *2.1* 的证明。 我们首先考虑 $k > 0$ 的情形。根据以下内容定义 $\mathbf{W} \in \mathbb{O}_{r+k}$

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r+1:r+k} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

其中，$\mathbf{W}^* \in \mathbb{O}_r$ 是公式（9）中假设保证存在的矩阵。显然 ，

$$\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_{r+k}} \left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_{2,\infty} \leq \left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\widetilde{\mathbf{W}} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_{2,\infty}. \tag{20}$$

ˆ现在，将$\mathbf{X}_{1:r+k}$ 表示为分块矩阵

$$\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{X}}_{1:r} & \hat{\mathbf{X}}_{r+1:r+k}\end{bmatrix}.$$

以类似方式分解 $\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}$，回顾公式(8)可知，$\mathbf{X}$ 的末尾 k 列按$\widetilde{\ }$构造为零，并利用公式（19）中 $\mathbf{W}$ 的定义，可得

$$\hat{\mathbf{X}}_{1:r_k}\widetilde{\mathbf{W}} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k} = \left[\left(\hat{\mathbf{X}}_{1:r}\mathbf{W}^* - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right) \quad \hat{\mathbf{X}}_{r+1:r+k}\right] \in \mathbb{R}^{n\times(r+k)}.$$

根据三角不等式，可得

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\widetilde{\mathbf{W}} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_{2,\infty} \leq \left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r}\mathbf{W}^* - \mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty} + \left\|\hat{\mathbf{X}}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty}.$$

By 根据我们对$\mathbf{W}^*$的选择，公式（9）允许我们对右侧第一项进行界定，并写出 e

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\widetilde{\mathbf{W}} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_{2,\infty} \leq C\phi_n + \left\|\hat{\mathbf{X}}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty}.$$

将其应用于公式（20），

$$\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_{r+k}} \left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_{2,\infty} \leq C\phi_n + \left\|\hat{\mathbf{X}}_{r+1:r+k}\mathbf{W}^*\right\|_{2,\infty}. \tag{21}$$

回顾一下，按构造，$\hat{\ }\mathbf{X}_{r+1:r+k} = \hat{\ }\mathbf{U}_{r+1:r+k}|\hat{\ }\mathbf{S}_{r+1:r+k}|^{1/2}$。因此，利用 $(2,\infty)$-范数的基本性质（例如，参见 Cape 等，2019b），

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{r+1:r+k}\mathbf{W}^*\right\|_{2,\infty} \leq \left\|\hat{\mathbf{U}}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty}\left\|\hat{\mathbf{S}}_{r+1:r+k}^{1/2}\mathbf{W}^*\right\| \leq \left\|\hat{\mathbf{U}}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty}\|\mathbf{E}\|^{1/2}, \tag{22}$$

其中，第二个不等式由谱范数的酉不变性和 Weyl 不等式得出。将方程 (22) 代入方程 (21)，即可完成 $k > 0$ 情形下的论证。

对于论证的下界部分，当 $k < 0$ 时成立。注意，根据 $(2,\infty)$-范数的定义，其值为最大值；回顾方程 (7) 中 $\hat{\ }\mathbf{X}_{1:r}^{\circ}$ 的定义，我们有

$$\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_r} \left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r}^{\circ}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty}^2 \geq \frac{1}{n}\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_r} \left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r}^{\circ}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_F^2. \tag{23}$$

展开 Frobenius 范数，对于任意 $\mathbf{W} \in \mathbb{O}_r$,

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r}^{\circ}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_F^2 = \left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r}^{\circ}\mathbf{W}\right\|_F^2 + \left\|\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_F^2 - 2\operatorname{Tr}(\hat{\mathbf{X}}_{1:r}^{\circ}\mathbf{W})^{\top}\left(\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right).$$

利用 Frobenius 范数的酉不变性，并注意到 $\left\|\hat{\ }\mathbf{X}_{1:r}^{\circ}\right\|_F = \left\|\hat{\ }\mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_F$ 是由构造得到的,

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r}^{\circ}\mathbf{W} - \rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_F^2 = \left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\right\|_F^2 + \left\|\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_F^2 - 2\operatorname{Tr}(\hat{\mathbf{X}}_{1:r}^{\circ}\mathbf{W})^{\top}\left(\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right). \tag{24}$$

回想一下，$\sqrt{\hat{s}_j}$ 和 $\sqrt{s_j}$ 分别是$\hat{\ }\mathbf{X}_{1:r}$ 和 $\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}$的奇异值，根据冯·诺伊曼迹不等式（例如，参见 Horn and Johnson，1985，定理 7.4.1.1），可得

$$\left|\operatorname{Tr}(\hat{\mathbf{X}}_{1:r}^{\circ}\mathbf{W})^{\top}(\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r})\right| \leq \sum_{j=1}^{r}\sqrt{s_j\hat{s}_j} = \sum_{j=1}^{r+k}\sqrt{s_j\hat{s}_j},$$

ˆ其中我们用到了$\mathbf{X}^{\circ}_{1:r}$ 的奇异值在右乘$\mathbf{W}$ 后保持不变这一事实，以及ˆ$\mathbf{X}^{1:r+k}$ 根据构造至多有 $r+k$ 个非零奇异值这一事实。将此界应用于方程（24），

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\mathbf{X}}^{\circ}_{1:r}\mathbf{W}-\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_F^2 &\geq \sum_{j=1}^{r+k}\hat{s}_j+\sum_{j=1}^{r}s_j-2\sum_{j=1}^{r+k}\sqrt{s_j\hat{s}_j}\\ &=\sum_{j=1}^{r+k}\left(\sqrt{\hat{s}_j}-\sqrt{s_j}\right)^2+\sum_{j=r+k+1}^{r}s_j.\end{aligned}$$

将第一个和下界平凡地取为零,

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}^{\circ}_{1:r}\mathbf{W}-\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_F^2 \geq \sum_{j=r+k+1}^{r}s_j.$$

Ap将此下界应用于方程 (23) 并开平方，即完成证明 . □

现在我们转向 使用引理 2.1 证明关于邻接谱嵌入渐近行为的一般结果。

定理 *3.2* 的证明。 我们首先考虑 $k>0$ 的情形。应用引理 2.1，存在一个序列$\mathbf{W}\in\mathbb{O}_{r+k}$ 使得

$$\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\mathbf{W}-\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_{2,\infty}\leq C\phi_n+|\hat{s}_{r+1}|^{1/2}\left\|\hat{\mathbf{U}}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty}. \tag{25}$$

为界定 $|\hat{s}_{r+1}|$，标准的矩阵集中不等式（例如参见 Vershynin，2018年）给出 $\|\mathbf{E}\|\leq C\sigma\sqrt{n}$log n（另见 Erd˝os 等人 2013b 年的引理 4.3）。结合 Weyl 不等式,

$$|\hat{s}_{r+1}|^{1/2}\left\|\hat{\mathbf{U}}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty}\leq Cn^{1/4}(\sigma\log n)\max_{j\in[n]}\left(\sum_{\alpha=r+1}^{r+k}\hat{u}_{j\alpha}^2\right)^{1/2}\leq Cn^{1/4}(\sigma\log n)\left(k\max_{j\in[n]}\max_{\alpha>r}\hat{u}_{j\alpha}^2\right)^{1/2}.$$

根据定理 3.1，我们有

$$|\hat{s}_{r+1}|^{1/2}\left\|\hat{\mathbf{U}}_{r+1:r+k}\right\|_{2,\infty}\leq Cn^{1/4}(\log n)\sqrt{k\sigma^2}\left(\frac{r^4(\log n)^{8+12\gamma}}{n}\right)^{1/2}\leq C\sqrt{k\sigma^2}\frac{r^2(\log n)^{5+6\gamma}}{n^{1/4}} \tag{26}$$

以高概率成立。将方程 (26) 代回方程 (25)，我们得到 ain

$$\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_{r+k}}\left\|\hat{\mathbf{X}}_{1:r+k}\mathbf{W}-\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r+k}\right\|_{2,\infty}\leq C\phi_n+C\sqrt{k\sigma^2}\frac{r^2(\log n)^{5+6\gamma}}{n^{1/4}}$$

以高概率成立，由此得到了我们的估计误差上界。

对于情形 $k<0$，根据引理 2.1,

$$\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_r}\left\|\hat{\mathbf{X}}^{\circ}_{1:r}\mathbf{W}-\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty}\geq\sqrt{\sum_{j=r+k+1}^{r}\frac{s_j}{n}}.$$

根据假设 **A4**，可知

$$\min_{\mathbf{W}\in\mathbb{O}_r}\left\|\hat{\mathbf{X}}^{\circ}_{1:r}\mathbf{W}-\rho_n^{1/2}\mathbf{X}_{1:r}\right\|_{2,\infty}\geq C\sqrt{\rho_n|k|},$$

如所需。 □

B 谱方法的基本结果

这里汇集了一个 ha 附录 C 中使用的若干关于矩阵谱和特征子空间的基本结果 .

引理 B.1. 设 $\{s_i\}$ 是秩为 r 的矩阵 $\mathbf{P}$ 的特征值，且 $\{\hat{s}_i\}$ 是 $\mathbf{A}=\mathbf{P}+\mathbf{E}$ 的特征值。假设假设 (**A3**) 成立，并定义 $\Delta=\min_{j\in[r]}\min_{i\neq j}|s_i-s_j|$。那么对于 $j\in[r]$ 和 $i\neq j$,

$$|\hat{s}_i-s_j|\geq\Delta-\|\mathbf{E}\|\,. \tag{27}$$

证明. 固定 $j\in[r]$ 并令 $i\neq j$。由反三角不等式,

$$|\hat{s}_i-s_j|\geq||\hat{s}_i-s_i|-|s_j-s_i||\geq\Delta-|\hat{s}_i-s_i|\,,$$

其中第二个 不等式由 Δ 的定义得出。应用 Weyl 不等式，可得

$$|\hat{s}_i-s_j|\geq\Delta-\|\mathbf{E}\|,$$

证明完毕。 □

引理 B.2. 设$\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_n$ 是同分布的 r 维随机向量，且$\|\mathbf{X}_1\|\leq M<\infty$ 几乎处处成立，并定义 $\mathbf{X}=[\mathbf{X}_1\cdots\mathbf{X}_n]^\top\in\mathbb{R}^{n\times r}$。假设 r 满足假设 (**A5**)。那么以高概率，$\left\|\mathbf{X}\mathbf{X}^\top-n\mathbb{E}\left[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1\right]\right\|\leq Cr\sqrt{n}\log n$。

证明。 由于 $\|\mathbf{X}_1\|\leq M$ 几乎处处成立，$\mathbf{X}_1$ 的各坐标是有界随机变量。根据霍夫丁不等式可知，对于任意 j, $k\in[r]$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\left(\mathbf{X}^\top\mathbf{X}\right)_{jk}-n[\mathbb{E}\left[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^\top\right]]_{jk}\right|\geq C\sqrt{n\log n}\right)\leq\frac{2}{n^2}.$$

对 $j,k\in[r]$ 使用并集界，可得

$$\mathbb{P}\left(\left\|\mathbf{X}^\top\mathbf{X}-n\mathbb{E}\left[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^\top\right]\right\|_F^2\geq r^2(C\sqrt{n\log n})^2\right)\leq\frac{2r^2}{n^2}.$$

利用 Frobenius 范数是谱范数上界这一事实，可得

$$\mathbb{P}\left(\left\|\mathbf{X}^\top\mathbf{X}-n\mathbb{E}\left[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^\top\right]\right\|\geq Cr\sqrt{n\log n}\right)\leq\frac{2r^2}{n^2},$$

并且，利用我们在方程（**A5**）中的假设，可确保该界以足够快的速度收敛到零，结果随即成立。

□

类似于以下的界出现在 Levin 等人（2019年）的研究中。我们给出这一独立版本，以便查阅，并纳入信号强度参数 ρ_n。

引理 B.3。 设（$\mathbf{A}$、$\mathbf{X}$） ～随机点积图（F、n） 具有信号强度参数 ρ_n，并且潜在位置几乎处处有界。则

$$\|\mathbf{U}\|_{2,\infty}\lesssim\frac{\|\mathbf{X}\|_{2,\infty}}{\sqrt{n}}$$

以高概率成立。

证明。 重新整理恒等式 $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^\top=\mathbf{P}=\rho_n\mathbf{X}\mathbf{X}^\top$,

$$\mathbf{U}=\sqrt{\rho_n}\mathbf{X}\mathbf{S}^{-1/2}.$$

应用 $(2,\infty)$-范数的基本性质（参见 Cape 等，2019b），

$$\|\mathbf{U}\|_{2,\infty}\leq\|\mathbf{X}\|_{2,\infty}\left\|\sqrt{\rho_n}\mathbf{S}^{-1/2}\right\|. \tag{28}$$

注意到对角 的对角元素恰好是$\mathbf{P}/\rho_n = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$的特征值，引理 B.2 蕴 s

$$\left\|\rho_n^{1/2}\mathbf{S}^{-1/2}\right\| = \frac{\rho_n^{1/2}}{\sqrt{s_r}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

以高概率成立，其中我们使用了假设 **(A4)**。将其应用于方程 (28)，即可完成证明。

□

推论 B.3.1. 假设$(\mathbf{A},\mathbf{X}) \sim$随机点积图$(F, n)$ 具有二元边和稀疏参数 ρ_n。那么，以高概率，

$$\|\mathbf{U}\|_{2,\infty} \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

证明。 应用引理 B.3,

$$\|\mathbf{U}\|_{2,\infty} = O\left(\frac{\|\mathbf{X}\|_{2,\infty}}{\sqrt{n}}\right)$$

以高概率成立。注意到，在二元随机点积图下， $\|\mathbf{X}\|_{2,\infty} \le 1$ ，即可完成证明。 □

C 去局域化结果

在本节中，我们证明加权随机点积图的特征向量是离域的，即特征向量的各个分量均被 $Cn^{-1/2}\log^c n$ 所界定，其中 $C,\ c > 0$ 为某些常数。我们的方法基于 Erd˝os 等人 (2013b) 的早期工作；他们在 Erd˝os–R´enyi 模型下证明了体部特征值的局部半圆律，而该模型的期望是一个秩一实对称矩阵。我们将他们的方法扩展到更一般的低秩、实对称期望情形。关于本节所用技术工具的背景，感兴趣的读者可参阅 Erd˝os 等人 (2013a)；Benaych-Georges 和 Knowles（2018）；Erd˝os 和 Yau（2017）；Anderson 等人 (2010)。

半圆密度定义为

$$\mu_{\mathrm{sc}}(x) := \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$$

对于 $x \in [-2,2]$，其对应的斯蒂尔切斯变换满足 $\mathrm{Im}\ z > 0$,

$$m_{\mathrm{sc}}(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_{\mathrm{sc}}(x)}{x-z}\mathrm{d}x. \tag{29}$$

本节的目标是证明，对于经过适当中心化和缩放的邻接矩阵$\mathbf{A}$，其经验特征值密度的斯蒂尔切斯变换收敛到 $m_{\mathrm{sc}}(z)$。下文的定理 C.13 将证明这一点。对于研究低秩信号加噪声网络模型（如随机点积图）的学者而言，这一结果或许本身就有一定意义。然而，对本文而言，最重要的是，我们可以利用这一结果证明$\mathbf{A}$的特征向量是离域的；这一点将在定理 C.14 中证明。

记号变更：特征值排序与子矩阵

仅在本节中，为了遵循绝大多数随机矩阵理论结果所采用的惯例（尤其是 Erd˝os 等人 2013b, , 所遵循的惯例；我们将推广他们的结果），我们对记号作一处变更。下文中，我们将特征值按从小到大的顺序编号，而不采用正文中从大到小的编号方式。因此，在本节中，某个矩阵$\mathbf{D}$的特征值 d_i将按如下方式编号：

$$d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_N.$$

也就是说， d_N 是$\mathbf{D}$的最大特征值。为标示下文中这一约定的变化，我们使用 N而不是 n 来表示网络中的节点数，但强调 $N = n$。记号的变化只是为了提醒读者，我们采用的是经过调整的索引约定。在本文以及下面提到的其他少数

变化中，我们的记号基本遵循 Erd˝os 等人（2013b）的记法。改变记号是为了更便于比较本文给出的结果与其所推广的结果。对于矩阵$\mathbf{D}$，我们令$\mathbf{D}_{\cdot j}$ 表示其第 j列。矩阵的元素将使用其非粗体变体表示，因此，$\mathbf{D}$ 的 (i,j) 元素记为 D_{ij}。我们用 $(\mathbf{D})^{\setminus i} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ 表示从矩阵$\mathbf{D}$中删除第 i行和第 i列后得到的主子矩阵。更一般地，对于某个指标集$\mathbb{T} \subset [N]$，我们将 $(\mathbf{D})^{\setminus \mathbb{T}}$ 写作$\mathbf{D}$ 的 $(N-|\mathbb{T}|)\times(N-|\mathbb{T}|)$ 主子矩阵，该矩阵是对$\mathbf{D}$ 中的每个 $i \in \mathbb{T}$删除第 i行和第 i列后得到的。如果用 $\boldsymbol{d}$ 和 d 分别表示矩阵$\mathbf{D}$的特征向量和特征值，则用 $\boldsymbol{d}_i^{(\setminus\mathbb{T})}$ 和$d_i^{(\setminus\mathbb{T})}$ 分别表示 $(\mathbf{D})^{\setminus\mathbb{T}}$ 的特征向量和特征值。特征向量和特征值的索引将重新标记为集合 $[N-|\mathbb{T}|]$中的元素，同时保持本节开头所述的顺序：$d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_{N-|\mathbb{T}|}$。然而，在定义 $(\mathbf{D})^{\setminus\mathbb{T}}$时，我们保留$\mathbf{D}$ 的索引名称。

例如，考虑矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Then

$$(\mathbf{D})^{\setminus 2} = \begin{bmatrix} a & c \\ g & i \end{bmatrix}.$$

我们将以类似的方式扩展向量的子矩阵记号。例如，若向量表示为 $\boldsymbol{d} = (a,\ b,\ c)^\top$，则向量 $(\boldsymbol{d})^{\setminus 2} = (a,\ c)^\top$ 的指标为 1 和 3，跳过指标 2。对于一个 N 维向量 $\boldsymbol{d}$，令 $(\boldsymbol{d})^{\setminus\mathbb{T}}$ 表示通过移除 $\boldsymbol{d}$ 中由 $\mathbb{T}$ 索引的所有元素而得到的 $(N-|\mathbb{T}|)$ 维向量。由于我们将经常处理子矩阵及其各个元素，因此采用以下记号表示对指标求和：

$$\sum^{(\setminus\mathbb{T})} := \sum_{i\notin\mathbb{T}} = \sum_{i\in[N]\setminus\mathbb{T}}.$$

此外，给定指标集 $\mathbb{T} \subset [N]$，我们定义 $\mathbf{D}[\mathbb{T}^c] \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 为如下矩阵：对于每个元素 $i \in \mathbb{T}$，将第 i 列和第 i 行中的所有元素置为零。类似地，我们用 $\mathbf{D}[\mathbb{T}]$ 表示通过将 $\mathbf{D}$ 中除由 $\mathbb{T}$ 索引的列和行之外的所有元素置为零而得到的矩阵。当指标集仅含一个元素 i 时，我们将直接用该元素表示该集合。也就是说，若 $\mathbb{T} = \{i\}$，则 $\mathbf{D}[i] := \mathbf{D}[\mathbb{T}]$。我们用相应的上标表示这些“置零”矩阵的特征向量和特征值。例如，若矩阵 $\mathbf{D}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{d}$，则 $\mathbf{D}[*]$ 对应的特征向量记为 $\boldsymbol{d}^{[*]}$。我们继续使用常数 C 和 c 表示正的常数，其值可能随行而变化，但始终与 N 无关。

以下定义主要改编自 Erd˝os 等人（2013b）。

定义 4. 若一个 N-依赖事件 Ω 满足 $\mathbb{P}(\Omega^c) \le \exp\{-\nu(\log N)^\xi\}$，则称其以 (ξ,ν)-高概率成立，只要 $N \ge N_0(\nu, c_0, C_0)$ 满足方程（5）中的 c_0, C_0。此外，对于给定事件 Ω_0，若对所有 $N \ge N_0(\nu, c_0, C_0)$ 均有 $\mathbb{P}(\Omega_0 \cap \Omega^c) \le \exp\{-\nu(\log N)^\xi\}$，则称 Ω 在 Ω_0 上以 (ξ,ν)-高概率成立。

定义 5. 令 $\xi \equiv \xi(N)$ 满足

$$1 + c_0 \le \xi \le C_0 \log(\log N), \tag{30}$$

其中 $c_0 > 0$ 且 $C_0 \ge 10$。对于 $N = 1, 2, \ldots$，考虑一个 $N \times N$ 随机矩阵 $\mathbf{H} = (H_{ij})$，其元素为实数，且除对称性约束 $H_{ij} = H_{ji}$ 外相互独立。我们假设 $\mathbf{H}$ 的元素满足矩条件

$$\mathbb{E}[H_{ij}] = 0, \quad \mathbb{E}\left[|H_{ij}|^2\right] = \frac{1}{N}, \quad \mathbb{E}[|H_{ij}|^p] \le \frac{C_1^p}{N q^{p-2}} \tag{31}$$

其中 $3 \le p \le (\text{对数 } N)^{C_0 \text{对数对数 } N}$，$C_1 > 0$ 以及 $q \equiv q(N)$ 是控制噪声尾部行为的参数（*Boucheron* 等，*2013*），满足

$$r^2(\log N)^{3\xi+3\gamma} \le q \le C_2 N^{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

对于某个 $C_2 > 0$。我们将$\mathbf{H}$ 的特征值记为 $\omega_1 \le \omega_2 \le \cdots \le \omega_N$。

接下来，我们考虑非零期望矩阵，它是正文中$\mathbf{P}$ 的一个缩放版本（参见下方表 1）。定义一个 $N \times N$ 实值、对称且非随机的秩为 r 的矩阵$\mathbf{L}$ ，其谱分解为

$$\mathbf{L} = \sum_{\ell=N-r+1}^{N} \lambda_\ell \boldsymbol{v}_\ell \boldsymbol{v}_\ell^\top, \tag{33}$$

其中，特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{N-r} = 0 < \lambda_{N-r+1} < \lambda_{N-r+2} < \cdots < \lambda_N.$$

将$\mathbf{H}$ 与$\mathbf{L}$之和记为

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{H}, \tag{34}$$

其谱分解为

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{N} \hat{\lambda}_j \hat{\boldsymbol{v}}_j \hat{\boldsymbol{v}}_j^\top.$$

将此处描述的设定与正文联系起来时，我们注意到

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\mathbf{A} - \rho_n \mathbf{X}\mathbf{X}^\top \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\mathbf{A} - \mathbf{P} \right).$$

换句话说，$\mathbf{B}$ 是观测到的邻接矩阵$\mathbf{A}$的一个版本，其缩放因子为$1/\sqrt{N}$。本节需要缩放因子 $1/\sqrt{N}$，因为我们关注的对象与随机矩阵特征值的极限分布有关。对于随机点积图（参见例如引理 B.2），若不采用这一缩放因子，$\mathbf{A}$ 的特征值将随 N 增长而无界，因此不会存在极限谱分布。需要特征值具有极限分布，这也是我们假设$\mathbf{H}$ 各元素的方差为 $1/N$ 的原因；不过，这一假设可以放宽为允许$\mathbf{H}$ 各元素的方差构成更一般的双随机矩阵（参见 Erd˝os 等人 2012 年的第 5 节）。我们的目标是证明，与扰动后的零特征值相对应的$\mathbf{B}$的特征向量（以及$\mathbf{A}$的特征向量）是离域的。为此，我们研究$\mathbf{B}$ 和$\mathbf{H}$的特征值分布。

为清晰起见并便于查阅，我们在此重述正文中的假设，并改写为与本附录记号一致的形式。记 $\mathcal{S} := \{N - r + 1, \ldots, N\}$。

(A1) 假设 1（离域化）：与$\mathbf{L}$ 的非零特征值相对应的特征向量是离域的。也就是说，对某个不依赖于 N 的 $\gamma \geq 0$ ，

$$|v_{ij}| \lesssim \frac{(\log N)^\gamma}{\sqrt{N}}$$

对所有 $i \in [N]$，且 $j \in \mathcal{S}$ ，其中 v_{ij} 表示$\mathbf{L}$的第 j 个特征向量的第 i 个元素。为避免混淆，可以将其理解为对特征向量矩阵 $\mathbf{V}$ 中第 (i, j) 个元素进行索引。

(A2) 假设 2：信号强度参数 ρ_N 满足 $\rho_N \sqrt{N} \gg 1$。

(A3) 假设 3：$\mathbf{L}$的非零特征值互不相同。

(A4) 假设 4：$\mathbf{L}$的非零特征值的阶为 $\rho_N \sqrt{N}$：$\lambda_j \asymp \rho_N \sqrt{N}$，其中 $j \in \mathcal{S}$。

(A5) 假设 5：$\mathbf{L}$ 的秩 $\lesssim (\log n)^\zeta$，对于某个 $\zeta \geq 0$。

(A6) 假设 6（特征值间隔）：$\mathbf{L}$ 的特征值间隔 $\Delta^\circ := \min_{j \in \mathcal{S}} \min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|$ 满足 $\Delta^\circ = \Omega\left(\rho_N \sqrt{N}\right)$。

(A7) 假设 7：$\mathbf{H}$ 的各项满足矩条件

$$\mathbb{E}\left[H_{ij}\right] = 0, \quad \mathbb{E}\left[|H_{ij}|^2\right] = \frac{1}{N}, \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left[|H_{ij}|^p\right] \leq \frac{C_1^p}{N q^{(p-2)}} \quad (p > 2).$$

正文	附录 C
n	N
$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$
$\mathbf{P}$	$\sqrt{N}\mathbf{L}$
$\mathbf{E}$	$\sqrt{N}\mathbf{H}$
Δ	$\sqrt{N}\Delta^{\circ}$
$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n$	$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$

表 1: 正文与本附录之间符号对应关系词典 .

我们在表 1 中总结了本附录中所做的记号变更及其与正文中相应符号的对应关系。主要区别在于，本附录中，我们将期望矩阵和随机矩阵按 $1/\sqrt{N}$ 重新缩放，并将特征值索引顺序反转。

现在我们分别引入$\mathbf{B}$ 和$\mathbf{H}$ 的经验特征值密度函数 :

$$\tilde{\mu}(x) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha}\delta(x-\hat{\lambda}_{\alpha}) \quad \text{and} \quad \mu(x) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha}\delta(x-\omega_{\alpha}), \tag{35}$$

其中 $\delta(\cdot)$是狄拉克测度。我们根据以下定义相应的经验累积分布函数（积分后的经验密度）

$$\tilde{n}(x) = \frac{1}{N}\left|\{\alpha : -\infty < \hat{\lambda}_{\alpha} \leq x\}\right| \tag{36}$$

and

$$n(x) = \frac{1}{N}\left|\{\alpha : -\infty < \omega_{\alpha} \leq x\}\right|. \tag{37}$$

在本节的大部分内容中，这些经验密度并非重点，因为处理它们的斯蒂尔切斯变换更为简单。证明斯蒂尔切斯变换的收敛性等价于证明密度的收敛性（见 Benaych-Georges 和 Knowles（2018年）中的引理 2.1）。

与其他部分一样，为了研究斯蒂尔切斯变换，我们考虑矩阵预解式（例如，参见 Kato，1995年）。我们分别将 $\mathbf{B}$ 和$\mathbf{H}$ 的预解式记为，

$$\tilde{\mathbf{G}}(z) := (\mathbf{B}-z\mathbf{I})^{-1} \quad \text{and} \quad \mathbf{G}(z) := (\mathbf{H}-z\mathbf{I})^{-1}, \tag{38}$$

其中 $z \in \{x+\mathrm{i}y\colon\ y>0; x,y\in\mathbb{R}\}$。预解式的迹与$\mathbf{B}$ 的经验特征值密度函数的斯蒂尔切斯变换相关，具体如下（例如，参见 Benaych-Georges 和 Knowles，2018年，公式（2.5））：

$$\tilde{m}(z) := \int \frac{\tilde{\mu}(x)}{x-z} = \frac{1}{N}\operatorname{Tr}\tilde{\mathbf{G}}(z)dx \quad \text{and} \quad m(z) := \int \frac{\mu(x)}{x-z}dx = \frac{1}{N}\operatorname{Tr}\mathbf{G}(z). \tag{39}$$

处理$\mathbf{B}$的子矩阵时，我们将相应的预解式记为

$$\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})} := \left((\mathbf{B})^{\setminus\mathbb{T}} - z\,(\mathbf{I})^{\setminus\mathbb{T}}\right)^{-1}.$$

请注意，在定义相应的斯蒂尔切斯变换 $\tilde{m}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)$ 时，我们保留 $1/N$ 归一化：

$$\tilde{m}^{(\setminus\mathbb{T})}(z) := \frac{1}{N}\operatorname{Tr}\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}. \tag{40}$$

我们希望了解 $\tilde{m}(z)$ 与 $m_{\mathrm{sc}}(z)$ 之间的误差。我们将这些误差记为

$$\tilde{\Lambda}(z) := |\tilde{m}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)|, \quad \Lambda(z) := |m(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)|. \tag{41}$$

下文中，我们将考虑由 E 和 η 参数化的复数，表示为

$$z = E + \mathrm{i}\eta,$$

其中， $E \in \mathbb{R}$ 和 $\eta > 0$ 的选取使得 z 靠近半圆律的支撑集。具体而言，我们考虑以下区域

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |E| \le \Sigma, 0 < \eta \le 3\}, \tag{42}$$

以及一个依赖于 L 的子域

$$D_L := \left\{ z \in \mathbb{C} : |E| \le \Sigma, \frac{r^4 (\log N)^{L+12\gamma}}{N} \le \eta \le 3 \right\} \tag{43}$$

其中 $\Sigma \ge 3$ 是一个固定的任意常数，且 $L \equiv L(N)$ 满足

$$L \ge 8\xi, \tag{44}$$

其中 ξ 由定义 5 中的方程 (30) 给出。

C.1 主要估计

以下界是根据 Erd˝os 等人（2013b）第 7 节的结果改写而来。我们进行了修改，以允许对$\mathbf{L}$作更一般的选择，使其秩为 $r \ge 1$。具体而言，我们允许$\mathbf{L}$ 具有有限且可能缓慢增长的秩，而不再局限于 Erd˝os 等人（2013b）所考虑的秩为 $\mathbf{L} = 1$ 的情形。

引理 C.1。 设$\mathbf{B}$ 满足方程(34)。那么对于任意 $z \in D_L$，有

$$\left| \tilde{\Lambda}(z) - \Lambda(z) \right| \le \frac{r\pi}{N\eta}$$

证明。 证明大体遵循 Erd˝os 等人（2013b）引理 7.1 的证明。关键区别在于 $\tilde{n}(x)$ 与 $n(x)$ 之间的关系。在我们的设定中， $|\tilde{n}(x) - n(x)| \le r/N$，这一点可由引理 C.23 得出，并注意到 $\mathbf{H}$ 和$\mathbf{B}$ 的特征值至多每隔 r 个指标交错一次，正如下文所示。˜回顾方程（41）中 Λ 和 Λ 的定义，并应用反三角不等式，

$$|\tilde{\Lambda}(z) - \Lambda(z)| \le |\tilde{m}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z) - m(z) + m_{\mathrm{sc}}(z)| = |\tilde{m}(z) - m(z)|. \tag{45}$$

回顾方程（39）中 $\tilde{m}(z)$ 和 $m(z)$ 的定义，

$$\tilde{m}(z) - m(z) = \int \frac{\tilde{\mu}(x) - \mu(x)}{x - z} dx = \int \frac{\tilde{n}(x) - n(x)}{(x - z)^2} dx,$$

其中第二个等号由分部积分得出。将其代入方程（45），并应用詹森不等式，

$$|\tilde{\Lambda}(z) - \Lambda(z)| \le \int \frac{|\tilde{n}(x) - n(x)|}{|x - z|^2} dx. \tag{46}$$

于是，引理 C.23 推出交错关系

$$\omega_i \le \omega_{i+1} \le \cdots \le \omega_{i+r-1} \le \hat{\lambda}_i \le \cdots \le \hat{\lambda}_{i+r-1} \le \omega_{i+r} \le \hat{\lambda}_{i+r}.$$

由这些不等式可知，$\mathbf{H}$ 的特征值中，位于$\mathbf{H}$ 的第 i 个特征值与 $\mathbf{B}$的第 i 个特征值之间的至多有 r 个，因为$\mathbf{H}$ 的第（$i + r$）个特征值必定位于$\mathbf{B}$的第 i 个特征值之后。因此，对于任意 x,

$$\left| |\{\alpha : -\infty < \omega_\alpha \le x\}| - \left| \{\alpha : -\infty < \hat{\lambda}_\alpha \le x\} \right| \right| \le r.$$

由此可得 $|\tilde{n}(x) - n(x)| \le r/N$。将其应用于方程 (46),

$$|\tilde{\Lambda}(z) - \Lambda(z)| \le \frac{r}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x - z|^2} dx = \frac{r}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - E)^2 + \eta^2} dx = \frac{r}{N\eta} \lim_{t \to \infty} \left[\tan^{-1}(t) - \tan^{-1}(-t) \right] = \frac{r\pi}{N\eta},$$

正如我们所要证明的那样。 □

引理 C.2. 设**B** 满足公式 *34*。对于任意满足 $0 < |\mathbb{T}| \leq \tau < N$ 的 $\mathbb{T} \subset [N]$，其中 τ 是关于 N 的常数，记作$\mathbf{E}(\mathbb{T}) := \mathbf{H}[\mathbb{T}^c] - \mathbf{L}[\mathbb{T}]$。那么

$$\|\mathbf{E}(\mathbb{T})\| \leq C(1 + r\sqrt{\tau}\rho_N(\log N)^{2\gamma}) \tag{47}$$

以(ξ, ν)高概率成立。

证明。 Erd˝os 等人（2013b）的引理 4.3 指出，以 (ξ, ν) 高概率成立时，我们有

$$\|\mathbf{H}\| \leq 2 + \frac{(\log N)^{\xi}}{q^{1/2}}. \tag{48}$$

回顾由方程（32）可知 $r^2(\log N)^{3\xi+3\gamma} \leq q$，

$$\|\mathbf{H}\| \leq 2 + \frac{(\log N)^{\xi}}{(\log N)^{3\xi/2}} \leq C. \tag{49}$$

现在，对于任意 $\mathbb{T} \subset [N]$，我们有

$$\|\mathbf{E}(\mathbb{T})\| = \|\mathbf{H}[\mathbb{T}^c] - \mathbf{L}[\mathbb{T}]\| \leq \|\mathbf{H}[\mathbb{T}^c]\| + \|\mathbf{L}[\mathbb{T}]\|.$$

根据 Horn 和 Johnson（1985）的定理 4.3.17，对于任意 $\mathbb{T} \subset [N]$，有 $\|\mathbf{H}[\mathbb{T}^c]\| \leq \|\mathbf{H}\|$。因此，利用公式（49），以 (ξ, ν) 高概率成立：

$$\|\mathbf{E}(\mathbb{T})\| \leq C + \|\mathbf{L}[\mathbb{T}]\|. \tag{50}$$

为了得到 $\|\mathbf{L}[\mathbb{T}]\|$ 的上界，回顾方程（33）可知

$$\mathbf{L} = \sum_{\ell=N-r+1}^{N} \lambda_\ell \boldsymbol{v}_\ell \boldsymbol{v}_\ell^\top.$$

根据假设（$\tilde{\mathbf{A4}}$），$c\rho_N\sqrt{N} \leq \lambda_\ell \leq C\rho_N\sqrt{N}$对所有 $\ell \in \{N-r+1, N-r+2, \ldots, N\}$均成立，因此对于每个$k$, $j \in [N]$，我们有

$$|L_{kj}| = \left| \left(\sum_{\ell=N-r+1}^{N} \lambda_\ell \boldsymbol{v}_\ell \boldsymbol{v}_\ell^\top \right)_{kj} \right| \leq C\rho_N\sqrt{N} \left| \left(\sum_{\ell=N-r+1}^{N} \boldsymbol{v}_\ell \boldsymbol{v}_\ell^\top \right)_{kj} \right|. \tag{51}$$

根据假设（$\tilde{\mathbf{A1}}$），$\boldsymbol{v}_\ell \boldsymbol{v}_\ell^\top$的各项阶为 $(\log N)^{2\gamma}/N$，因此

$$|L_{kj}| \leq C\left(\frac{r\rho_N(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}} \right).$$

由此可知，由于根据构造，$\mathbf{L}[\mathbb{T}]$ 具有 $2N\tau - \tau^2$ 个非零项，

$$\|\mathbf{L}[\mathbb{T}]\| \leq \|\mathbf{L}[\mathbb{T}]\|_F \leq C(r\sqrt{\tau}\rho_N(\log N)^{2\gamma}).$$

将这一界应用于公式（50），证明得证。 □

引理 C.3。 对于每个 $\alpha = 1, 2, \ldots, N$，令 $\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}$为 $\mathbf{B}[\mathbb{T}^c] = \mathbf{L}[\mathbb{T}^c] + \mathbf{H}[\mathbb{T}^c]$的正交归一特征向量。记 $\mathbf{E}(\mathbb{T}) = \mathbf{H}[\mathbb{T}^c] - \mathbf{L}[\mathbb{T}]$。那么对于所有 $j \in \{N-r+1, N-r+2, \ldots, N\}$ 以及任意 $\mathbb{T} \subset [N]$（其中$0 < |\mathbb{T}| \leq \tau$），以 (ξ, ν)-高概率，有

$$\sqrt{\sum_{\alpha \neq j} |\boldsymbol{v}_j^\top \hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}|^2} \leq \frac{Cr(\log N)^{2\gamma}}{\lambda_j},$$

其中， $\boldsymbol{v}_j$ 是与$\mathbf{L}$的第 j小特征值相对应的特征向量。

证明。 按照 Chen 等人（2021b）第 2 章中 Davis-Kahan 正弦定理的证明，对于给定的 $j \in \{N-r+1, \ldots, N\}$，我们通过特征分解表示$\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_j & \mathbf{U}_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_j & \mathbf{U}_\perp \end{bmatrix}^\top, \tag{52}$$

其中，$\mathbf{U}_\perp$ 是其（$N-1$）$\times$（$N-1$）特征向量矩阵，这些特征向量张成了 $\boldsymbol{v}_j$的正交补；而$\mathbf{M}_\perp$ 是相应特征值构成的对角矩阵。类似地，将$\mathbf{B}[\mathbb{T}^c]$ 进行特征分解:

$$\mathbf{B}[\mathbb{T}^c] = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_j^{[\mathbb{T}^c]} & \widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_j^{[\mathbb{T}^c]} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{M}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_j^{[\mathbb{T}^c]} & \widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]} \end{bmatrix}^\top, \tag{53}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{v}}_j^{[\mathbb{T}^c]}$ 是与$\hat{\lambda}_j^{[\mathbb{T}^c]}$ 相对应的特征向量，$\hat{\lambda}_j^{[\mathbb{T}^c]}$ 是$\mathbf{B}[\mathbb{T}^c]$的第 j小特征值；$\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}$ 是由正交归一特征向量组成的矩阵，这些特征向量张成了$\hat{\boldsymbol{v}}_j^{[\mathbb{T}^c]}$ 的正交补；$\widehat{\mathbf{M}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}$ 是相应特征值构成的对角矩阵。

根据构造，$\mathbf{B}[\mathbb{T}^c] = \mathbf{L} + \mathbf{H}[\mathbb{T}^c] - \mathbf{L}[\mathbb{T}] = \mathbf{L} + \mathbf{E}(\mathbb{T})$，因此我们可以将$\mathbf{E}(\mathbb{T})$视为$\mathbf{L}$与$\mathbf{B}[\mathbb{T}^c]$之间的误差。也就是说，

$$\mathbf{E}(\mathbb{T}) = \mathbf{B}[\mathbb{T}^c] - \mathbf{L} \tag{54}$$

现在，我们将运用中心化技巧，通过处理替代矩阵来给 $\widehat{\mathbf{M}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}$ 的特征值建立远离 0 的界:

$$\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} - \lambda_j \mathbf{I} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{B}}[\mathbb{T}^c] = \mathbf{B}[\mathbb{T}^c] - \lambda_j \mathbf{I}. \tag{55}$$

从这些替代矩阵中，我们可以看到

$$\mathbf{E}(\mathbb{T}) = \mathbf{B}[\mathbb{T}^c] - \mathbf{L} = \mathbf{B}[\mathbb{T}^c] - \lambda_j \mathbf{I} + \lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{B}}[\mathbb{T}^c] - \widetilde{\mathbf{L}}.$$

根据引理 B.1，我们注意到，$\widehat{\mathbf{M}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}$ 对角线上的特征值属于集合$\widetilde{\quad}(-\infty, \lambda_j - \Delta^\circ + \|\mathbf{E}(\mathbb{T})\|] \cup [\lambda_j + \Delta^\circ - \|\mathbf{E}(\mathbb{T})\|, \infty)$。$\mathbf{L}$和$\mathbf{B}[\mathbb{T}^c]$的特征值分别通过将映射 $x \mapsto x - \lambda_j$ 应用于$\mathbf{L}$ 和$\mathbf{B}[\mathbb{T}^c]$的谱得到，因此，

$$\sigma_{\min}(\widetilde{\mathbf{M}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}) \geq \Delta^\circ - \|\mathbf{E}(\mathbb{T})\|. \tag{56}$$

我们用与方程 (52) 和 (53) 中相同的记号表示这些替代矩阵的特征分解，但在每个对象上方额外加上波浪号 ($\tilde{}$)。注意到替代矩阵与其原始矩阵具有相同的特征向量，我们有

$$\widetilde{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]} = \mathbf{U}_\perp \quad \text{and} \quad \widetilde{\widehat{\mathbf{U}}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]} = \widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}. \tag{57}$$

接下来我们考察以下量

$$\left(\widetilde{\widehat{\mathbf{U}}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \mathbf{E}(\mathbb{T}) \tilde{\boldsymbol{v}}_j = \left(\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \mathbf{E}(\mathbb{T}) \boldsymbol{v}_j = \left(\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \left(\widetilde{\mathbf{B}}[\mathbb{T}^c] - \widetilde{\mathbf{L}}\right) \boldsymbol{v}_j = \widetilde{\widehat{\mathbf{M}}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]} \left(\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \boldsymbol{v}_j,$$

其中，第一个等式由方程 (57) 得出；第二个等式是将方程 (54) 中的$\mathbf{E}(\mathbb{T})\tilde{}$代入后得到的；第三个等式则由 $\mathbf{L}\boldsymbol{v}_j = 0$ 按构造得出。取 Frobenius 范数后，我们有

$$\begin{aligned} \left\| \left(\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \mathbf{E}(\mathbb{T}) \boldsymbol{v}_j \right\|_F &= \left\| \widetilde{\widehat{\mathbf{M}}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]} \left(\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \boldsymbol{v}_j \right\|_F \geq \sigma_{\min}\left(\widetilde{\widehat{\mathbf{M}}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right) \left\| \left(\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \boldsymbol{v}_j \right\|_F \\ &\geq (\Delta^\circ - \|\mathbf{E}(\mathbb{T})\|) \left\| \left(\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \boldsymbol{v}_j \right\|_F, \end{aligned}$$

其中，第一个不等式来自酉不变范数的基本性质，第二个不等式由方程 (56) 得出。因此，根据范数的基本性质，

$$(\Delta^\circ - \|\mathbf{E}(\mathbb{T})\|) \left\| \left(\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \boldsymbol{v}_j \right\|_F \leq \left\| \left(\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \mathbf{E}(\mathbb{T}) \boldsymbol{v}_j \right\|_F \leq \left\| \left(\widehat{\mathbf{U}}_\perp^{[\mathbb{T}^c]}\right)^\top \right\| \|\mathbf{E}(\mathbb{T}) \boldsymbol{v}_j\|_F \leq \|\mathbf{E}(\mathbb{T}) \boldsymbol{v}_j\|_F.$$

˜利用假设（**A6**）可得 Δ° 的下界，并利用引理 C.2 可得 $\|\mathbf{E}(\mathbb{T})\|$ 的上界；假设（**A2**）和（**A5**）保证，对于足够大的 n，有 $\Delta^\circ - \|\mathbf{E}(\mathbb{T})\| > 0$，因此

$$\left\| \left(\widehat{\mathbf{U}}_{\perp}^{[\mathbb{T}^c]} \right)^\top \boldsymbol{v}_j \right\|_F \leq \frac{\|\mathbf{E}(\mathbb{T})\boldsymbol{v}_j\|_F}{\Delta^\circ - \|\mathbf{E}(\mathbb{T})\|}.$$

现在，由于

$$\sqrt{\sum_{\alpha \neq j} |\boldsymbol{v}_j^\top \hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}|^2} = \left\| \left(\widehat{\mathbf{U}}_{\perp}^{[\mathbb{T}^c]} \right)^\top \boldsymbol{v}_j \right\|_F,$$

我们有

$$\sqrt{\sum_{\alpha \neq j} |\boldsymbol{v}_j^\top \hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}|^2} \leq \frac{\|\mathbf{E}(\mathbb{T})\boldsymbol{v}_j\|_F}{\Delta^\circ - \|\mathbf{E}(\mathbb{T})\|} \leq \frac{\|\mathbf{E}(\mathbb{T})\|}{\Delta^\circ - \|\mathbf{E}(\mathbb{T})\|} \leq \frac{C(1 + r\rho_N(\log N)^{2\gamma})}{\Delta^\circ - (1 + r\rho_N(\log N)^{2\gamma})}$$

根据引理 C.2，最后一个不等式以 (ξ, ν)-高概率成立。注意，我们已将 τ并入常数 C。

因此，根据假设 ˜**A6**（其指出 $\Delta^\circ = \Omega\left(\rho_N \sqrt{N}\right)$），我们证明了

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{\alpha \neq j} |\boldsymbol{v}_j^\top \hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}|^2} &\leq \frac{C(1 + r\tau\rho_N(\log N)^{2\gamma})}{\Delta^\circ - (1 + r\tau\rho_N(\log N)^{2\gamma})} \leq \frac{C(1 + r\rho_N(\log N)^{2\gamma})}{\rho_N\sqrt{N} - (1 + r\rho_N(\log N)^{2\gamma})} \\ &= \frac{C(1 + r\rho_N(\log N)^{2\gamma})}{\rho_N\sqrt{N}(1 - (1 + r\rho_N(\log N)^{2\gamma})/\rho_N\sqrt{N})}.\end{aligned}$$

以 (ξ, ν)-高概率成立。接着，由于 (1) 根据假设 (˜**A2**)，$\rho_N\sqrt{N} \gg 1$；且 (2) 根据假设 (˜**A5**)，$r(\log N)^{2\gamma} \ll \sqrt{N}$，我们有 $1 + r\rho_N(\log N)^{2\gamma} \ll \rho_N\sqrt{N}$。因此可得，

$$\sqrt{\sum_{\alpha \neq j} |\boldsymbol{v}_j^\top \hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}|^2} \leq \frac{C(1 + r\rho_N(\log N)^{2\gamma})}{\rho_N\sqrt{N}}.$$

以 (ξ, ν)-高概率成立。为简化后续各节的表述，我们将 ρ_N 直接替换为 1，并将另一个加项吸收到常数中。因此

$$\sqrt{\sum_{\alpha \neq j} |\boldsymbol{v}_j^\top \hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}|^2} \leq \frac{C}{\rho_N\sqrt{N}} r(\log N)^{2\gamma} \tag{58}$$

以 (ξ, ν)-高概率。回顾根据假设（$\lambda_j \asymp \rho_N\sqrt{N}$（˜**A4**））， 我们有，以 (ξ, ν)-高概率，

$$\sqrt{\sum_{\alpha \neq j} |\boldsymbol{v}_j^\top \hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}|^2} \leq \frac{C}{\lambda_j} r(\log N)^{2\gamma}. \tag{59}$$

注意到，上述论证仅依赖于引理 C.2 中的概率保证，而我们对$\mathbb{T}$和 j的选择在其他方面是任意的，因此对于任意 $\mathbb{T} \subset [N]$和 $j \in \{N - r + 1, N - r + 2, \ldots, N\}$，该估计均以 (ξ, ν)-高概率成立，正如我们所要证明的那样。□

下面的引理基本上仿照了 Erd˝os 等人（2013b）的引理 7.2，但由于现在我们有一个秩为 r 的矩阵 $\mathbf{L}$，而不是 Erd˝os 等人（2013b）所考虑的秩一情形，因此矩阵 $\mathcal{A}_i(z)$ 中包含更多项˜。下文中，对于向量 $F = (F_1, F_2, \ldots, F_N)$，我们记

$$\langle F \rangle := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i. \tag{60}$$

引理 C.4。令$\mathbf{B}$ 为方程(34) 中给定的矩阵，并将$\mathbf{B}$ 的预解式记为 ˜$\mathbf{G}(z) = (\mathbf{B} - z\mathbf{I})^{-1}$，如方程$(38)$所示。则

$$\tilde{G}_{ii}(z) = \frac{1}{-z - m_{\mathrm{sc}}(z) - \left(\langle \tilde{\psi}(z) \rangle - \tilde{Y}_i(z) \right)},$$

其中

$$\tilde{Y}_i(z) = H_{ii} - \tilde{Z}_i(z) + \tilde{\mathcal{A}}_i(z), \tag{61}$$

and

$$\tilde{Z}_i(z) = Q_i\left(((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\right) \tag{62}$$

以及，对于矩阵 $\mathbf{D}$，

$$Q_i(\mathbf{D}) = \mathbf{D} - \mathbb{E}\left[\mathbf{D} \mid (\mathbf{H})^{\setminus i}\right] \tag{63}$$

and

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}_i(z) = L_{ii} - \sum_{\ell=N-r+1}^{N} \lambda_\ell^2 (v_{i\ell}(\boldsymbol{v}_\ell)^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z) v_{i\ell}(\boldsymbol{v}_\ell)^{\setminus i} - \sum_{\ell_1\neq\ell_2} \lambda_{\ell_1}\lambda_{\ell_2} (v_{i\ell_1}(\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z) v_{i\ell_2}(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus i} \\ + \frac{1}{N}\sum_j \frac{\tilde{G}_{ij}(z)\tilde{G}_{ji}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)}.\end{aligned} \tag{64}$$

此外，

$$\tilde{\psi}_i(z) := \tilde{G}_{ii}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z). \tag{65}$$

˜证明。 根据 $\mathbf{G}(z)$ 的定义，取舒尔补可得

$$\tilde{G}_{ii}(z) = \left(-z + B_{ii} - \left((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\right)^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\right)^{-1}. \tag{66}$$

考察二次型，根据式（34）中 $\mathbf{B}$ 的定义，有

$$\left((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\right)^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} = \left[((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top + \sum_{\ell=N-r+1}^{N} \lambda_\ell (v_{i\ell}(\boldsymbol{v}_\ell)^{\setminus i})^\top\right] \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z) \left[(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} + \sum_{\ell=N-r+1}^{N} \lambda_\ell (v_{i\ell}(\boldsymbol{v}_\ell)^{\setminus i})\right],$$

这里提醒读者，$(\mathbf{H})^{\setminus i}$ 表示从 $\mathbf{H}$ 中删去第 i 行和列后得到的 $(N-1)\times(N-1)$ 子矩阵；记号 $\mathbf{H}_{\cdot i} \in \mathbb{R}^N$ 表示 $\mathbf{H}$ 的第 i 行；因此，$(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} \in \mathbb{R}^{N-1}$ 表示 $\mathbf{H}$ 的第 i 行，并删去其第 i 个元素。展开并在给定 $(\mathbf{H})^{\setminus i}$ 的条件下取条件期望后，关于 $(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}$ 的线性项消失，这是因为 $(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}$ 的元素未包含在矩阵 $(\mathbf{H})^{\setminus i}$ 中，因此有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} \mid (\mathbf{H})^{\setminus i}\right] &= \mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} \mid (\mathbf{H})^{\setminus i}\right] \\ &\quad + \sum_{\ell=N-r+1}^{N} \lambda_\ell^2\ (v_{i\ell}(\boldsymbol{v}_\ell)^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z) v_{i\ell}(\boldsymbol{v}_\ell)^{\setminus i} \\ &\quad + \sum_{\ell_1\neq\ell_2} \lambda_{\ell_1}\ \lambda_{\ell_2}\ (v_{i\ell_1}(\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z) v_{i\ell_2}(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus i}.\end{aligned} \tag{67}$$

˜回顾 Equation (64) 中 $\mathcal{A}_i(z)$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} \mid (\mathbf{H})^{\setminus i}\right] \\ &\qquad = \mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} \mid (\mathbf{H})^{\setminus i}\right] - \tilde{\mathcal{A}}_i(z) + L_{ii} + \frac{1}{N}\sum_j \frac{\tilde{G}_{ij}(z)\tilde{G}_{ji}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)}.\end{aligned} \tag{68}$$

公式（68）中的第一项可表示为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} \mid (\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\right] &= \frac{1}{N}\sum_j^{(\setminus i)} \tilde{G}_{jj}^{(\setminus i)}(z) = \frac{1}{N}\sum_j \left(\tilde{G}_{jj}(z) - \frac{\tilde{G}_{ji}(z)\tilde{G}_{ij}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_j \tilde{G}_{jj}(z) - \frac{1}{N}\sum_j \frac{\tilde{G}_{ji}(z)\tilde{G}_{ij}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)},\end{aligned} \tag{69}$$

其中，在第一个等式中，我们利用了 H_{ii} 的方差为 $1/N$这一事实，以及$\mathbb{E}[H_{ij}] = 0$这一事实；在第二个等式中，我们利用了引理 C.15 中给出的预解式元素的基本性质。将公式（69）代入公式（68）可得

$$\mathbb{E}\left[((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} \mid (\mathbf{H})^{\setminus i}\right] = \frac{1}{N}\sum_j \tilde{G}_{jj}(z) - \tilde{\mathcal{A}}_i(z) + L_{ii} \tag{70}$$

回顾方程（63）中 $Q_i(\cdot)$ 的定义，我们记为

$$\tilde{Z}_i(z) = Q_i\left(((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\right)$$

为便于记号书写。现在，考虑

$$\begin{aligned}
B_{ii} - ((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} &= B_{ii} - ((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{G}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} + \mathbb{E}\left[((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} \mid (\mathbf{H})^{\setminus i}\right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} \mid (\mathbf{H})^{\setminus i}\right] \\
&= B_{ii} - \mathbb{E}\left[((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} \mid (\mathbf{H})^{\setminus i}\right] - \tilde{Z}_i(z) \\
&= B_{ii} - \left(\frac{1}{N}\sum_j \tilde{G}_{jj}(z) - \tilde{\mathcal{A}}_i(z) + L_{ii}\right) - \tilde{Z}_i(z) \\
&= L_{ii} + H_{ii} - \frac{1}{N}\sum_j \tilde{G}_{jj}(z) + \tilde{\mathcal{A}}_i(z) - L_{ii} - \tilde{Z}_i(z) + m_{\mathrm{sc}}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z) \\
&= H_{ii} - \frac{1}{N}\sum_j \tilde{G}_{jj}(z) + \tilde{\mathcal{A}}_i(z) - \tilde{Z}_i(z) + m_{\mathrm{sc}}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z).
\end{aligned}$$

其中，在第二个等式中，我们代入了 $Z_i(z)$ 的定义；在第三个等式中，我们代入了方程（70）中推导出的条件期望展开式。整理各项，并回顾方程（60）中定义的括号记号，可得

$$\begin{aligned}
B_{ii} - ((\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top \tilde{G}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i} &= -m_{\mathrm{sc}}(z) + m_{\mathrm{sc}}(z) - \frac{1}{N}\sum_j \tilde{G}_{jj}(z) + H_{ii} - \quad \tilde{Z}_i(z) + \tilde{\mathcal{A}}_i(z) \\
&= -m_{\mathrm{sc}}(z) - \langle\tilde{\psi}(z)\rangle + \tilde{Y}_i(z),
\end{aligned}$$

其中，我们将 $m_{\mathrm{sc}}(z)$ 项并入 $\langle\psi(z)\rangle$（ψ 的定义见方程（65）），并使用了方程（61）中 $Y_i(z)$ 的定义。将其代入方程（66），

$$\tilde{G}_{ii}(z) = \left(-z - m_{\mathrm{sc}}(z) - \langle\tilde{\psi}(z)\rangle + \tilde{Y}_i(z)\right)^{-1},$$

这正是我们要证明的结论。 □

现在我们引入两个新的量：

$$\tilde{\Lambda}_o(z) := \max_{i\neq j}|\tilde{G}_{ij}(z)| \quad \text{and} \quad \tilde{\Lambda}_d(z) := \max_i |\tilde{G}_{ii}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)|. \tag{71}$$

引理 C.4 中的误差项——$\mathcal{A}_i(z)$、$Z_i(z)$，以及 $Y_i(z)$——通常用这些量来估计，而这些量又由一个确定性的 $\Phi(z)$ 控制。

接下来，对于满足 $N^{-1}r^4(\log N)^{L+12\gamma} \le \eta \le 3$ 的 ηs，定义集合 $D(\eta) := \{z \in D_L : \mathrm{Im}\ z = \eta\}$ 以及事件

$$\tilde{\Omega}(\eta) := \left\{\sup_{z\in D(\eta)} (\tilde{\Lambda}_d(z) + \tilde{\Lambda}_o(z)) \le (\log N)^{-\xi}\right\}. \tag{72}$$

我们将需要 Erd˝os 等人（2013b）中的引理 7.4。无需针对当前 $r > 1$ 情形进行调整，因为证明仅涉及预解式的基本性质（参见 Erd˝os 等人（2013b）中引理 3.12 的证明）。

引理 C.5（Erd˝os 等人（2013b），引理 7.4）。令 $z = E + \mathrm{i}\eta \in D_L$，对于任意满足 $i \notin \mathbb{T}$ 和 $|\mathbb{T}| \le \tau < N$ 的 i 和 $\mathbb{T} \subset \{1, \dots, N\}$，其中 τ 是关于 N 的常数，有

$$\tilde{m}^{(\{i\} \cup \mathbb{T})}(z) = \tilde{m}^{(\mathbb{T})}(z) + O\left(\frac{1}{N\eta}\right) \tag{73}$$

˜在Ω(η)上成立。

接下来，我们改编 Erd˝os 等人（2013b）的引理 7.5。为此，我们先介绍几个简单的集中不等式。

引理 C.6（Erd˝os 等人（2013b），引理 3.8）。设 $a_1, \dots, a_N$ 是中心化的独立随机变量，并满足

$$\mathbb{E}\left[|a_i|^p\right] \le \frac{C_1^p}{Nq^{p-2}} \tag{74}$$

对于 $2 \le p \le (\log N)^{C_0 \log\log N}$。那么存在一个仅依赖于 C_1 的 $\nu > 0$，使得对所有 ξ 以及任意 $A_i, F_{ij} \in \mathbb{C}$，以下结论以$(\xi, \nu)$高概率成立

$$\left|\sum_{i=1}^N A_i a_i\right| \le (\log N)^{\xi} \left[\frac{\max_i |A_i|}{q} + \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N |A_i|^2\right)^{1/2}\right], \tag{75}$$

$$\left|\sum_{i=1}^N a_i F_{ii} a_i - \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 F_{ii}\right| \le (\log N)^{\xi} \frac{\max_i |F_{ii}|}{q}, \tag{76}$$

and

$$\left|\sum_{1 \le i \ne j \le N} a_i F_{ij} a_j\right| \le (\log N)^{2\xi} \left(\frac{\max_{i \ne j} |F_{ij}|}{q} + \left(\frac{1}{N^2}\sum_{i \ne j} |F_{ij}|^2\right)^{1/2}\right). \tag{77}$$

设 $a_1, \dots, a_N$ 和 $b_1, \dots, f_N$ 为相互独立的随机变量，且每个变量均满足方程(74)。那么存在一个仅依赖于 C 的 $\nu > 0$，使得对所有 ξ 和 $F_{ij} \in \mathbb{C}$，以下结论以 (ξ, ν) 高概率成立

$$\left|\sum_{i,j=1}^N a_i F_{ij} b_j\right| \le (\log N)^{2\xi} \left[\frac{\max_i |F_{ii}|}{q^2} + \frac{\max_{i \ne j} |F_{ij}|}{q} + \left(\frac{1}{N^2}\sum_{i \ne j} |F_{ij}|^2\right)^{1/2}\right] \tag{78}$$

引理 C.7（Erd˝os 等人（2013b），引理 7.5，改编版）。设 $\tau < N$ 相对于 N 为常数，并设 $\mathbf{B}$ 如方程 (34)所定义。令 $z = E + \mathrm{i}\eta \in D_L$，对于任意满足 $|\mathbb{T}| \le \tau < N$ 的 $\mathbb{T} \subset [N]$，只要 $i \in \mathbb{T}$，对于 $j \in \{N - r + 1, N - r + 2, \dots, N\}$，我们有：

$$\left|\lambda_j (v_{ij} (\boldsymbol{v}_j)^{\setminus \mathbb{T}})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) (\mathbf{H}_{\cdot i})^{\setminus \mathbb{T}}\right| \le Cr(\log N)^{\xi + 3\gamma} \left(\frac{1}{q} + \sqrt{\frac{\operatorname{Im} \tilde{m}(z)}{N\eta}} + \frac{1}{N\eta}\right) \tag{79}$$

˜以事件 Ω(η) 上的（ξ，ν）-高概率成立，其中 q 满足方程 (32)。

证明。我们注意到，我们对这一界的证明与 Erd˝os 等人（2013b）的证明略有不同。由于我们根据假设（˜**A4**）假设 $\mathbf{L}$ 的信号特征值满足 $\lambda_i \asymp \rho_N \sqrt{N}$，因此我们的证明更为简洁。

首先，给定 $\mathcal{S} = \{N - r + 1 - |\mathbb{T}|, N - r + 2 - |\mathbb{T}|, \dots, N - |\mathbb{T}|\}$，定义

$$R := \max_{|\mathbb{T}| \le \tau} \max_{\alpha \notin \mathcal{S}} \max_j |\hat{v}_{j\alpha}^{(\setminus \mathbb{T})}|.$$

˜ ˜回顾公式（72）中的事件 Ω(η)。在 Ω(η) 上，根据引理 C.20,

$$c \le |\tilde{G}_{ii}^{(\setminus \mathbb{T})}(z)| \le C,$$

因此，对于 $z:=\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}+\mathrm{i}\eta\in D_L$ 和 $\alpha\notin\mathcal{S}$,

$$C\geq \operatorname{Im}\tilde{G}_{ii}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}+\mathrm{i}\eta)=\sum_{\beta\in[N-|\mathbb{T}|]}\frac{\eta|\hat{v}_{i\beta}^{(\setminus\mathbb{T})}|^2}{(\hat{\lambda}_\beta^{(\setminus\mathbb{T})}-\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^2+\eta^2}=\frac{\eta|\hat{v}_{i\alpha}^{(\setminus\mathbb{T})}|^2}{\eta^2}+\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{\eta|\hat{v}_{i\beta}^{(\setminus\mathbb{T})}|^2}{(\hat{\lambda}_\beta^{(\setminus\mathbb{T})}-\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^2+\eta^2}$$
$$\geq\frac{|\hat{v}_{i\alpha}^{(\setminus\mathbb{T})}|^2}{\eta}.$$

开平方 并回想一下， $\alpha\in\mathcal{S}$、 $\mathbb{T}\subset[N]$ 和 $j\in[N]$ 的选取是任意的，我们得到

$$R\leq C\sqrt{\eta}. \tag{80}$$

现在，注意到 $\tilde{G}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)$ 的谱分解为

$$\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)=\sum_{\alpha=1}^{N-|\mathbb{T}|}\frac{\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}.$$

因此，应用三角不等式,

$$\begin{aligned}\left|\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}\right|&=\left|\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\left(\sum_\alpha\frac{\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}\right|\\&=\left|\sum_\alpha\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\\&\leq\left|\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\\&\quad+\left|\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|.\end{aligned} \tag{81}$$

˜注意，根据假设 **(A1)** 以及特征向量已归一化这一事实，我们有

$$\left|(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}\right|=|v_{ij}|\left|((\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}\right|\leq\frac{C(\log N)^\gamma}{\sqrt{N}}\left|((\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}\right|\leq\frac{C(\log N)^\gamma}{\sqrt{N}}. \tag{82}$$

对公式 (81) 中不等式右侧的第一项应用次乘性，并使用公式 (82)，我们可得

$$\left|\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\leq\frac{C(\log N)^\gamma}{\sqrt{N}}\left|\frac{\lambda_j}{\hat{\lambda}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\left|(\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}\right|. \tag{83}$$

应用引理 C.6 控制内积，可得以 (ξ,ν)-高概率 y,

$$\left|\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\leq\frac{(\log N)^\gamma}{\sqrt{N}}\left|\frac{\lambda_j}{\hat{\lambda}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|(C\log N)^\xi\left[\frac{1}{q}+\frac{1}{\sqrt{N}}\right].$$

当 $\lambda_j\geq\Sigma+3$ 时，由假设（˜**A2**）和（˜**A4**）可知，我们有 $\lceil\lambda_{j-|\mathbb{T}|}^{(\mathbb{T})}-z|\geq c\lambda_j$，因此以（$\xi$， ν）-高概率

$$\left|\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\leq\frac{C(\log N)^\gamma(\log N)^\xi}{\sqrt{N}q}. \tag{84}$$

方程（81）中的第二项由与体部相关的特征值构成，可用类似方法处理。应用三角不等式，

$$\left|\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\leq\lambda_j\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\left|\frac{(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right||(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}|.$$

根据引理 C.6，以 (ξ,ν)-高概率，

$$\left|\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\leq\lambda_j\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\left|\frac{(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|(\log N)^\xi\left[\frac{C\sqrt{\eta}}{q}+\frac{1}{\sqrt{N}}\right]. \quad (85)$$

根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\left|\frac{(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\leq\left(\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}|(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_\alpha\frac{1}{|\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z|^2}\right)^{1/2}. \quad (86)$$

˜根据引理 C.5，在事件 $\Omega(\eta)$ 上，

$$\sum_\alpha\frac{1}{|\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z|^2}=\frac{1}{\eta}\operatorname{Im}\sum_\alpha\frac{1}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}=\frac{1}{\eta}\operatorname{Im}\operatorname{Tr}\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)=\frac{N}{\eta}\operatorname{Im}\tilde{m}(z)+O\left(\frac{1}{\eta^2}\right). \quad (87)$$

此外，

$$\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}|(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}|^2\leq|v_{ij}|^2\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}|((\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}|^2\leq\frac{C(\log N)^{2\gamma}}{N}\left(\frac{r(\log N)^{2\gamma}}{\lambda_j}\right)^2$$

˜以 (ξ,ν)-高概率，其中最后一个不等式由引理 C.3 以及关于 $\boldsymbol{v}_j$ 各项的假设 **(A1)** 得出。取平方根后，以 (ξ,ν)-高概率，

$$\left(\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}|(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}|^2\right)^{1/2}\leq\frac{C(\log N)^\gamma}{\sqrt{N}}\left(\frac{r(\log N)^{2\gamma}}{\lambda_j}\right). \quad (88)$$

将方程 (87) 和 (88) 中的界代入方程 (86)，

$$\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\left|\frac{(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\leq\frac{C(\log N)^\gamma}{\sqrt{N}}\left(\frac{r(\log N)^{2\gamma}}{\lambda_j}\right)\sqrt{\frac{N}{\eta}\operatorname{Im}\tilde{m}(z)+O\left(\frac{1}{\eta^2}\right)}$$

˜以 (ξ,ν)-高概率在事件 $\Omega(\eta)$ 上成立。将此界应用于方程 (85)，

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\\&\quad\leq C\left(\frac{r(\log N)^{\xi+3\gamma}}{\sqrt{N}}\right)\left[\frac{C\sqrt{\eta}}{q}+\frac{1}{\sqrt{N}}\right]\sqrt{\frac{N}{\eta}\operatorname{Im}\tilde{m}(z)+O\left(\frac{1}{\eta^2}\right)}\end{aligned} \quad (89)$$

˜在事件 $\Omega(\eta)$ 上以 $(\xi,\ \nu)$-高概率成立。综上，方程 (84) 和 (89) 推出

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|+\left|\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\frac{\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\\&\leq\frac{C(\log N)^{\xi+\gamma}}{\sqrt{N}q}+C\left(\frac{r(\log N)^{\xi+3\gamma}}{\sqrt{N}}\right)\left[\frac{C\sqrt{\eta}}{q}+\frac{1}{\sqrt{N}}\right]\left(\sqrt{\frac{N}{\eta}\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}+\frac{1}{\eta}\right)\\&\leq Cr(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q}+\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}}+\frac{1}{N\eta}\right)\end{aligned}$$

˜在事件 Ω(η) 上以 (ξ， ν)-高概率成立。将此应用于公式 (81),

$$\left|\lambda_j(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus\mathbb{T}}\right| \le Cr(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q}+\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}}+\frac{1}{N\eta}\right)$$

˜以（ξ， ν）-高概率在事件 Ω(η) 上成立，从而完成证明。 □

引理 C.8. 设 $\tau < N$ 相对于 N 为常数，且 $z = E+\mathrm{i}\eta \in D_L$。则对满足 $|\mathbb{T}| \le \tau$ 的 $j \in \{N-r+1,\dots,N\}$ 和 $\mathbb{T} \subset \{1,\dots,N\}$，一致地有：以 （ξ， ν）-高概率，

$$\left|\lambda_j^2(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}}\right| \le \frac{C\lambda_j(\log N)^{2\gamma}}{N}+C\frac{r^2(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}. \tag{90}$$

证明。 对 ˜$\mathbf{G}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)$ 的谱分解应用三角不等式,

$$\begin{aligned}\left|\lambda_j^2(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\left(\sum_\alpha\frac{\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right)v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}}\right| &\le \left|\frac{\lambda_j^2(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right| \\ &\quad+\left|\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\frac{\lambda_j^2(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|.\end{aligned} \tag{91}$$

运用与引理 C.7 的证明中类似的论证（例如方程 (83) 中的论证），方程 (91) 的第一项可控制为

$$\left|\frac{\lambda_j^2(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right| \le \frac{C\lambda_j^2}{\lambda_j}\frac{(\log N)^{2\gamma}}{N} = \frac{C\lambda_j(\log N)^{2\gamma}}{N} \tag{92}$$

以（ξ， ν）-高概率成立。转而考察方程 (91) 右侧的第二项，注意到 |ˆ$\lambda_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}-z| \ge \eta$，因为 ˆ$\lambda_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}$ 是实数,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\frac{\lambda_j^2(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right| &\le \left(\frac{C\lambda_j^2(\log N)^{2\gamma}}{N\eta}\right)\sum_{\alpha\neq j-|\mathbb{T}|}\left|((\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{j-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}\right|^2 \\ &\le C\frac{r^2(\log N)^{6\gamma}}{N\eta},\end{aligned} \tag{93}$$

根据引理 C.3，最后一个不等式以 (ξ, ν)-高概率成立。将方程 (92) 和 (93) 应用于方程 (91) 的右侧，我们得到

$$\left|\lambda_j^2(v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)v_{ij}(\boldsymbol{v}_j)^{\setminus\mathbb{T}}\right| \le \frac{C\lambda_j(\log N)^{2\gamma}}{N}+C\frac{r^2(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}$$

以 (ξ, ν)-高概率成立。 $j \in [N]$ 的选择是任意的，因此该界对所有 $j \in [N]$ 都一致地以 (ξ, ν)-高概率成立，正如我们所要证明的。 □

Erd˝os 等人（2013b）的工作中没有与以下引理相对应的结果，因为只有在考虑秩为 $r > 1$ 的信号矩阵时才需要该引理。

引理 C.9. 设**B** 满足方程 (34)，并且 $\tau < N$ 相对于 N 为常数。令 $z = E+\mathrm{i}\eta \in D_L$，则对于任意满足 $|\mathbb{T}| \le \tau < N$、$\ell_1$、$\ell_2 \in \{N-r+1,\dots,N\}$ 和 $\ell_1 \neq \ell_2$ 的 $\mathbb{T} \subset \{1,\dots,N\}$，以及可能的 $i = j \in [N]\setminus\mathbb{T}$，以下结论均一致成立，且以(ξ、 ν)高概率成立：

$$\left|\lambda_{\ell_2}\lambda_{\ell_1}(v_{i\ell_1}(\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)v_{j\ell_2}(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}\right| \le Cr^2\frac{(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}. \tag{94}$$

证明。我们采用与引理 C. 7 8 $\mathbb{T} \subset [N]$ $\ell_1\ \ell_2 \in$ 和 C. 中类似的论证。
$\{N-r+1,\dots,N\}$ $\tilde{}^{(\setminus\mathbb{T})}$ z 2,
设 和,互不相同。根据G( ) 的谱分解和引理 B.，我们有

$$\begin{aligned}\left|\lambda_{\ell_2}\lambda_{\ell_1}(v_{i\ell_1}(\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)v_{j\ell_2}(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}\right| &\le C\lambda_N^2\left|(v_{i\ell_1}(\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\left(\sum_\alpha\frac{\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top}{\hat\lambda_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right)v_{j\ell_2}(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}\right| \\ &\le C\lambda_N^2\,|v_{i\ell_1}|\,|v_{j\ell_2}|\left|((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\left(\sum_\alpha\frac{\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top}{\hat\lambda_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right)(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}\right|.\end{aligned} \tag{95}$$

以 $(\xi,\ \nu)$-高概率成立。回顾关于 $\boldsymbol{v}_k$ 中元素的假设，对于来自假设 ($\tilde{}$**A1)** 的 $k\in\{N-r+1,\dots,N\}$，我们有 $N\,|v_{i\ell_1}|\,|v_{j\ell_2}|\le C(\log\ N)^{2\gamma}$。将该不等式应用于公式 (95) 可得

$$\left|\lambda_{\ell_2}\lambda_{\ell_1}(v_{i\ell_1}(\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)v_{j\ell_2}(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}\right| \le \frac{C\lambda_N^2(\log N)^{2\gamma}}{N}\left|((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\left(\sum_\alpha\frac{\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top}{\hat\lambda_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right)(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}\right|$$

以 $(\xi,\ \nu)$-高概率成立。展开并应用三角不等式，

$$\begin{aligned}&\left|\lambda_{\ell_2}\lambda_{\ell_1}(v_{i\ell_1}(\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)v_{j\ell_2}(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}\right| \\ &\le\frac{C\lambda_N^2(\log N)^{2\gamma}}{N}\left(\left|\frac{((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{\ell_1-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{\ell_1-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat\lambda_{\ell_1-|\mathbb{T}|}^{(\mathbb{T})}-z}\right|+\left|\frac{((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{\ell_2-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{\ell_2-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat\lambda_{\ell_2-|\mathbb{T}|}^{(\mathbb{T})}-z}\right|\right. \\ &\qquad\left.+\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}\left|\frac{((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat\lambda_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\right)\end{aligned} \tag{96}$$

其中 $\mathcal{S}=\{\ell_1-|\mathbb{T}|,\ell_2-|\mathbb{T}|\}$。

公式 (96) 的前两项可以类似地处理。我们以第一项为例进行考察。利用 $\boldsymbol{v}_{\ell_1}$ 和 $\hat{}\boldsymbol{v}_{\ell_1-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}$ 均为归一化特征向量这一事实，可得 $\left|((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{}\boldsymbol{v}_{\ell_1-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}\right|\ \le\ 1$。此外，根据假设 ($\tilde{}$**A4)**，$|\hat{}\lambda_{j-|\mathbb{T}|}^{(\mathbb{T})}-z|\ge c\lambda_j$。结合这两个界可知，以 $(\xi,\ \nu)$-高概率成立，

$$\left|\frac{((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_{\ell_1-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{\ell_1-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat\lambda_{\ell_1-|\mathbb{T}|}^{(\mathbb{T})}-z}\right|\le\frac{C}{\lambda_{\ell_1}}\left|(\hat{\boldsymbol{v}}_{\ell_1-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}\right|\le\frac{C}{\lambda_{\ell_1}}\frac{r(\log N)^{2\gamma}}{\lambda_{\ell_2}}, \tag{97}$$

$\tilde{}$其中，第二个不等式由引理 C.3 和假设 **(A1)** 得出。利用 $\lambda_{\ell_1}\ \ge\lambda_{N-r+1}$ 这一事实，并将公式 (97) 代入 (96)，可得以 (ξ,ν)-高概率成立，

$$\begin{aligned}&\left|\lambda_{\ell_2}\lambda_{\ell_1}(v_{i\ell_1}(\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)v_{j\ell_2}(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}\right| \\ &\le\frac{C\lambda_N^2(\log N)^{2\gamma}}{N}\left(\frac{Cr(\log N)^{2\gamma}}{\lambda_{N-r+1}^2}+\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}\left|\frac{((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat\lambda_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right|\right).\end{aligned} \tag{98}$$

由于 $\left|\hat{}\lambda_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z\right|\ge\eta$，由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}\left|\frac{((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}}{\hat\lambda_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}-z}\right| &\le\frac{1}{\eta}\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}|((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}||(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}| \\ &\le\frac{1}{\eta}\left(\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}|((\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}|(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}|^2\right)^{1/2} \\ &\le\frac{C}{\eta}\left(\frac{r(\log N)^{2\gamma}}{\lambda_{N-r+1}}\right)^2,\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由柯西–施瓦茨不等式得出，最后一个不等式根据引理 C.3 以$\tilde{}$(ξ， ν)-高概率成立。将其应用于方程 (98)，并使用假设 **A4**，我们得到

$$\left|\lambda_{\ell_2}\lambda_{\ell_1}(v_{i\ell_1}(\boldsymbol{v}_{\ell_1})^{\setminus\mathbb{T}})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)v_{j\ell_2}(\boldsymbol{v}_{\ell_2})^{\setminus\mathbb{T}}\right| \le Cr^2\frac{(\log N)^{6\gamma}}{N\eta},$$

以（ξ， ν）的高概率成立。 ℓ_1， $\ell_2 \in \{N-r+1,\dots,N\}$ 和 $\mathbb{T}\subset[N]$ 的选择是任意的，因此对于满足条件 $|\mathbb{T}|\le\tau$且以（ξ， ν）的高概率成立的任意 ℓ_1， $\ell_2\in\{N-r+1,\dots,N\}$和 $\mathbb{T}$，该界均成立，证明完毕。 □

Following Erd˝os 等人（2013b），我们将引入一个控制参数,

$$\Phi(z) := \frac{r^2(\log N)^{\xi+3\gamma}}{q} + r^2(\log N)^{2\xi+6\gamma}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}}+\frac{r^2}{N\eta}\right) \tag{99}$$

其中 q 满足方程（32）。

引理 C.10（Erd˝os 等人（2013b）的命题 7.6，改编）。设**B**满足方程(34)。对于$z=E+\mathrm{i}\eta\in D_L$，在Ω(η) 上（见方程(72)），以(ξ, ν)的高概率有:

$$\tilde{\Lambda}_o(z)\le C\Phi(z), \tag{100}$$

$$\max_{i\in[N]}|\tilde{Z}_i(z)|\le C\Phi(z) \tag{101}$$

and

$$\max_{i\in[N]}|\tilde{\mathcal{A}}_i(z)|\le\frac{Cr(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}}+\frac{Cr^4(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}, \tag{102}$$

其中 $\tilde{Z}$ *an*$\tilde{}$*d* $\mathcal{A}$ 分别如方程(62) 和(64)所定义，且 $\Lambda_o(z)$ 如方程(71)所定义。

$\tilde{}$证明。 从对 $\Lambda_o(z)$ 的估计开始，由引理 C.16 可知,

$$\tilde{G}_{ij}(z)=\tilde{G}_{ii}(z)\tilde{G}^{(\setminus i)}_{jj}(z)\left(((\mathbf{B}_{\cdot i})^{\setminus ij})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus ij)}(z)\,(\mathbf{B}_{\cdot j})^{\setminus ij}\right)-\tilde{G}_{ii}(z)\tilde{G}^{(\setminus i)}_{jj}(z)B_{ij}.$$

根据引理 C.20，对于所有 $i,j\in[N]$，我们有 $\left|\tilde{G}_{ii}(z)\right|\le C$ 和 $|\tilde{G}^{(\setminus i)}_{jj}(z)|\le C$。因此,

$$\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right|\le C\left|((\mathbf{B}_{\cdot i})^{\setminus ij})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus ij)}(z)\,(\mathbf{B}_{\cdot j})^{\setminus ij}\right|+C\,|B_{ij}|=C\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)}B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)B_{lj}\right|+C|B_{ij}|. \tag{103}$$

根据引理 C.22， 我们有：以 (ξ, ν)-高概率，对所有 $i,j\in[N]$，以下结论均一致成立:

$$|B_{ij}|\le C\frac{r\rho_N(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}}+\frac{C}{q}.$$

将此代入方程（103），可得

$$|\tilde{G}_{ij}(z)|\le C\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)}B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)B_{lj}\right|+C\frac{r\rho_N(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}}+\frac{C}{q}. \tag{104}$$

回顾方程（34）中**B** 的定义,

$$\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)}B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)B_{lj}\right|=\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)}\left(h_{ik}+\sum_{\alpha=N-r+1}^{N}\lambda_\alpha v_{i\alpha}v_{k\alpha}\right)\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)\left(h_{lj}+\sum_{\alpha=N-r+1}^{N}\lambda_\alpha v_{l\alpha}v_{j\alpha}\right)\right|. \tag{105}$$

对方程（105）的右侧应用三角不等式后，将出现一项，根据下式可由引理 C.19 控制

$$\left|\sum_{k,l}^{(\backslash ij)} h_{ik}\tilde{G}^{(\backslash ij)}_{kl}(z)h_{lj}\right| \le \frac{C(\log N)^{\xi}}{q} + C(\log N)^{2\xi}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}} + \frac{1}{N\eta}\right). \tag{106}$$

˜在事件 Ω(η) 上以 (ξ, ν)-高概率成立。

在公式（105）中应用三角不等式后，还会有一些 $2r$ 项可以由引理 C.7 控制，即对于 $\ell = i, j$,

$$\left|\lambda_{\alpha_1}(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\backslash ij})^{\top}\tilde{\mathbf{G}}^{(\backslash ij)}(z)\,(\mathbf{H}_{\cdot\ell})^{\backslash ij}\right| \le Cr(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q} + \sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}} + \frac{1}{N\eta}\right) \tag{107}$$

以 (ξ, ν)-高概率成立。通过将公式（107）右侧的量与公式（99）中 ˜定义的 Φ(z) 进行比较，我们看到，在事件 Ω(η) 上以 (ξ, ν)-高概率成立，

$$\left|\lambda_{\alpha_1}(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\backslash ij})^{\top}\tilde{\mathbf{G}}^{(\backslash ij)}(z)\,(\mathbf{H}_{\cdot\ell})^{\backslash ij}\right| \le Cr(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q} + \sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}} + \frac{1}{N\eta}\right) \le C\Phi(z). \tag{108}$$

根据以下结果，公式（105）中会有一些 r 项可以由引理 C.8 控制：

$$\left|\lambda^2_{\alpha_1}(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\backslash ij})^{\top}\tilde{\mathbf{G}}^{(\backslash ij)}(z)v_{j\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\backslash ij}\right| \le \left(\frac{C\lambda_{\alpha_1}(\log N)^{2\gamma}}{N} + C\frac{r^2(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}\right) \tag{109}$$

以 (ξ, ν)-高概率成立。

由以下结果，公式（105）中会有一些 $\binom{r}{2}$ 项可以由引理 C.9 控制：

$$\left|\lambda_{\alpha_2}\lambda_{\alpha_1}(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\backslash ij})^{\top}\tilde{\mathbf{G}}^{(\backslash ij)}(z)v_{j\alpha_2}(\boldsymbol{v}_{\alpha_2})^{\backslash ij}\right| \le C\frac{r^2(\log N)^{6\gamma}}{N\eta} \tag{110}$$

以 (ξ, ν)-高概率成立。引理 C.8 和 C.9 给出的上界由 Φ(z) 主导，因为对于任意 j，查看公式（99），

$$C\frac{r^2(\log N)^{6\gamma}}{N\eta} \le C\frac{r^2(\log N)^{2\xi+6\gamma}}{N\eta} \le \frac{(\log N)^{\xi+3\gamma}}{q} + (\log N)^{2\xi+6\gamma}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}} + \frac{1}{N\eta}\right) \le \frac{C\Phi(z)}{r^2}$$

and

$$\frac{C\lambda_{\alpha_1}(\log N)^{2\gamma}}{N} \le \frac{C(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}} \le \frac{r(\log N)^{\xi+3\gamma}}{q} + r(\log N)^{2\xi+6\gamma}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}} + \frac{r}{N\eta}\right) \le \frac{C\Phi(z)}{r}.$$

将上述两个界应用于公式（109）和公式（110），

$$r\left|\lambda^2_{\alpha_1}(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\backslash ij})^{\top}\tilde{\mathbf{G}}^{(\backslash ij)}(z)v_{j\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\backslash ij}\right| \le C\Phi(z) \tag{111}$$

and

$$\binom{r}{2}\left|\lambda_{\alpha_2}\lambda_{\alpha_1}(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\backslash ij})^{\top}\tilde{\mathbf{G}}^{(\backslash ij)}(z)v_{j\alpha_2}(\boldsymbol{v}_{\alpha_2})^{\backslash ij}\right| \le C\Phi(z). \tag{112}$$

将公式（106）、（108）、（111）和（112）应用于（104），并对 $i \neq j$ 取最大值，可得˜在事件 Ω(η) 上以 (ξ, ν)-高概率成立，

$$\tilde{\Lambda}_o(z) := \max_{i\neq j}|\tilde{G}_{ij}(z)| \le C\Phi(z),$$

由此得证公式 (100)。注意，为了适应对 $i,j\in[N]$ 取并集界，我们将 (ξ,ν)-高概率定义中的 ν 的值增大一个常数倍。

回顾.....的定义 $\tilde{Z}_i(z)$，由公式（62）可知，

$$\tilde{Z}_i(z) = Q_i\left(((\mathbf{B}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\mathbf{i}})^{\setminus i}\right) = ((\mathbf{B}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\mathbf{i}})^{\setminus i} - \mathbb{E}\left[((\mathbf{B}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{B}_{\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]$$

其中我们使用了公式（63）中的 $Q_i(\cdot)$ 定义。通过加上并减去适当的量，并利用条件期望的性质，

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_i(z) = &\sum_{\alpha=N-r+1}((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)\lambda_\alpha v_{i\alpha}(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus i} + \sum_{\alpha=N-r+1}\lambda_w(v_{i\alpha}(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i}\\ &+((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i} - \mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]\end{aligned} \tag{113}$$

前两项利用引理 C.7 进行控制：

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{\alpha=N-r+1}((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)\lambda_\alpha v_{i\alpha}(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus i} + \sum_{\alpha=N-r+1}\lambda_w(v_{i\alpha}(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i}\right|\\ &\qquad\le 2Cr(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q}+\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}}+\frac{1}{N\eta}\right).\end{aligned} \tag{114}$$

为了控制公式（113）中的后两项，我们沿用 Erd˝os 等人（2013b）在引理 3.13 中首次给出的论证。根据引理 C.6，以 $(\xi,\ \nu)$-高概率：

$$\begin{aligned}&\left|((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i} - \mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i}\middle|(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]\right|\\ &\qquad\le\left|\sum_{k\neq l}h_{kl}\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kl}(z)h_{lk}\right| + \left|\sum_k^{(\setminus i)}|h_{kk}|^2\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kk}(z) - \frac{1}{N}\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kk}(z)\right|,\end{aligned} \tag{115}$$

其中我们用到了这一事实：

$$\mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k,l\neq i}h_{ki}\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kl}(z)h_{il}\ \middle|\ (\mathbf{H})^{\setminus i}\right] = \sum_k^{(\setminus i)}\frac{1}{N}\tilde{G}_{kk}(z).$$

公式（115）的右侧使用引理 C.6 对两项分别进行估计，得到

$$\begin{aligned}&\left|((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i} - \mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{G}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]\right|\\ &\qquad\le(\log N)^{2\xi}\left[\frac{\max_{k\neq l}\left|\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kl}(z)\right|}{q} + \left(\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq l}\left|\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kl}(z)\right|^2\right)^{1/2}\right] + (\log N)^\xi\frac{\max_k\left|\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kk}(z)\right|}{q}.\end{aligned}$$

以 $(\xi,\ \nu)$-高概率成立。根据引理 C.20，在事件 $\tilde{}\Omega(\eta)$ 上，$\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kk}(z)$ 项和 $\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kl}(z)$ 项均由常数控制，因此

$$\begin{aligned}&\left|((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i} - \mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{G}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]\right|\\ &\qquad\le(\log N)^{2\xi}\left[\frac{C(\log N)^{-\xi}}{q} + \left(\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq l}\left|\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kl}(z)\right|^2\right)^{1/2}\right] + (\log N)^\xi\frac{C}{q}\end{aligned} \tag{116}$$

$\tilde{}$在事件 $\Omega(\eta)$ 上，以 (ξ,ν)-高概率成立。根据 Ward 恒等式（参见 Benaych-Georges 和 Knowles 2018年中的公式（3.6））， 我们有

$$\sum_{j=1}^N|\tilde{G}_{ij}(z)|^2 = \frac{\operatorname{Im}\tilde{G}_{ii}(z)}{\eta}. \tag{117}$$

˜因此，在事件 Ω(η) 上，

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k,l}^{(\setminus i)}\left|\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kl}(z)\right|^2=\frac{1}{N^2\eta}\sum_{k}^{(\setminus i)}\operatorname{Im}\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kk}(z)\le\frac{C}{N\eta}\left(\operatorname{Im}\tilde{m}(z)+\tilde{\Lambda}_o^2(z)\right), \tag{118}$$

其中，在该不等式中，我们利用了引理 C.15 得到的如下事实：在 ˜Ω(η) 上，$\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kk}(z)=\tilde{G}_{kk}(z)+C\tilde{\Lambda}_o^2(z)$；以及 $\tilde{m}(z)=\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\tilde{\mathbf{G}}(z)$ 这一事实。由公式 (118) 可知，在 ˜Ω(η) 上以 (ξ,ν)-高概率，

$$\left(\frac{1}{N^2}\sum_{k,l}^{(\setminus i)}\left|\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kl}(z)\right|^2\right)^{1/2}\le C\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}}+\frac{\tilde{\Lambda}_o}{\sqrt{N\eta}}\right)\le C\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}}+\frac{\Phi(z)}{\sqrt{N\eta}}\right), \tag{119}$$

其中，第二个不等式由公式 (100) 得出。将公式 (119) 代入公式 (116) 并合并各项，可得

$$\begin{aligned}&\left|((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}-\mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]\right|\\&\qquad\le C\left(\frac{(\log N)^\xi}{q}+(\log N)^{2\xi}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}}+\frac{\Phi(z)}{\sqrt{N\eta}}\right)\right)\end{aligned}$$

˜在 Ω(η) 上以 (ξ,ν)-高概率成立。因此，回忆公式 (43) 中 D_L 的定义以及公式 (44) 中关于 L 的界，可得

$$\left|((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}-\mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]\right|\le C\Phi(z). \tag{120}$$

˜在 Ω(η) 上以 (ξ,ν)-高概率成立。对公式（113）应用三角不等式，并使用公式 (120) 和 (114)，

$$\left|\tilde{Z}_i(z)\right|\le C\Phi(z)+Cr^2(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q}+\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}}+\frac{1}{N\eta}\right)\le C\Phi(z) \tag{121}$$

˜在 Ω(η) 上以 (ξ,ν)-高概率成立。因此，取 $i\in[N]$ 上的最大值，并将 ν 的 ˜ 值增大一个常数倍后，在事件 Ω(η) 上以 (ξ,ν)-高概率，

$$\max_i|\tilde{Z}_i(z)|\le C\Phi(z),$$

从而得到公式 (101)。

˜最后，为了界定 $\mathcal{A}_i(z)$，回顾其在公式（64）中的定义，

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}_i(z)=L_{ii}&-\sum_{\alpha=N-r+1}^{N}\lambda_\alpha^2(v_{i\alpha}(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus i})^\top\tilde{G}^{(\setminus i)}(z)v_{i\alpha}(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus i}\\&-\sum_{\alpha_1\ne\alpha_2}\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\setminus i})^\top\tilde{G}^{(\setminus i)}(z)v_{i\alpha_2}(\boldsymbol{v}_{\alpha_2})^{\setminus i}+\frac{1}{N}\sum_j\frac{\tilde{G}_{ij}(z)\tilde{G}_{ji}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)}\end{aligned} \tag{122}$$

˜对于第一项，假设 **(A1)** 确保

$$L_{ii}=C\left(\frac{r\rho_N(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}}\right). \tag{123}$$

公式 (122) 中有 r 项可利用引理 C.8 进行控制，从而得到如下形式的界：

$$\left|\lambda_{\alpha_1}^2(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\setminus i}\right|\le\left(\frac{C\lambda_j(\log N)^{2\gamma}}{N}+C\frac{r^2(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}\right) \tag{124}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。公式 (122) 中有 $\binom{r}{2}$ 个交叉项可利用引理 C.9 进行控制，从而得到 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 如下形式的界：

$$\left|\lambda_{\alpha_2}\lambda_{\alpha_1}(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\setminus i})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z) v_{i\alpha_2}(\boldsymbol{v}_{\alpha_2})^{\setminus i}\right| \leq C\frac{r^2(\log N)^{6\gamma}}{N\eta} \tag{125}$$

以（ξ，ν）-高概率成立。公式 (122) 中的最后一项通过引理 C.20 和公式 (117) 中给出的 Ward˜恒等式加以控制。总之，将公式（123）、（124）和（125）、引理（**A1**）以及 Ward 恒等式应用于公式 (122)，可得

$$|\tilde{\mathcal{A}}_i(z)| \leq C\frac{r(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}} + C\frac{r^4(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}$$

˜在 Ω(η) 上以（ξ，ν）-高概率成立。对 $i \in [N]$ 取最大值，并将 ν 缩小一个 ˜ 常数因子，可得在事件 Ω(η) 上以（ξ，ν）-高概率成立，

$$\max_i |\tilde{\mathcal{A}}_i(z)| \leq \frac{Cr(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}} + \frac{Cr^4(\log N)^{6\gamma}}{N\eta},$$

由此得以证明公式（102），并完成证明。 □

以下是对 Erd˝os 等人（2013b）引理 7.7 的直接改写。为完整起见，现给出详细说明。

Lem ˜引理 C.11。对于 $z = E + \mathrm{i}\eta \in D_L$，以 Ω($\eta$) 上（（$\xi,\nu$））-高概率成立 ，

$$\max_i |\tilde{G}_{ii}(z) - \tilde{m}(z)| \leq C\Phi(z) \tag{126}$$

and

$$\tilde{\Lambda}_d(z) \leq \tilde{\Lambda}(z) + C\Phi(z). \tag{127}$$

˜证明。 回顾方程（61）中 $Y_i(z)$的定义。由引理 C.10,

$$\max_i |\tilde{Y}_i(z)| = \max_i \left|H_{ii} - \tilde{Z}_i(z) + \tilde{\mathcal{A}}_i(z)\right| \leq \frac{C}{q} + C\Phi(z) + \frac{Cr(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}} + \frac{Cr^4(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}$$

˜以（ξ,ν）-高概率在 Ω(η) 上成立。因此我们得到

$$\begin{aligned}|\tilde{G}_{ii}(z) - \tilde{G}_{jj}(z)| = \left|\frac{\tilde{G}_{ii}(z)\tilde{G}_{jj}(z)}{\tilde{G}_{jj}(z)} - \frac{\tilde{G}_{jj}(z)\tilde{G}_{ii}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)}\right| &= |\tilde{G}_{jj}(z)||\tilde{G}_{ii}(z)|\left|\frac{1}{\tilde{G}_{jj}(z)} - \frac{1}{\tilde{G}_{ii}(z)}\right| \\ &= |\tilde{G}_{jj}(z)||\tilde{G}_{ii}(z)|\left|\tilde{Y}_j(z) - \tilde{Y}_i(z)\right|.\end{aligned}$$

˜ ˜最后一个等式是将引理 C.4 中给出的 $G_{ii}(z)$恒等式代入后得到的。又因为在 Ω(η) 上，对任意 $i \in [N]$ 均一致地有˜， $c \leq |G_{ii}(z)| \leq C$，由三角不等式可知，以（$\xi,\nu$）-高概率，

$$|\tilde{G}_{ii}(z) - \tilde{G}_{jj}(z)| \leq C\left(\frac{C}{q} + C\Phi(z) + \frac{Cr(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}} + \frac{Cr^4(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}\right)$$

因此，

$$\left|\frac{1}{N}\sum_j (\tilde{G}_{ii}(z) - \tilde{G}_{jj}(z))\right| \leq C\Phi(z)$$

on ˜Ω(η)，以（ξ，ν）高概率成立。对 $i \in [N]$ 取最大值，并回顾

$$\tilde{m}(z) = \frac{1}{N}\operatorname{Tr}\tilde{\mathbf{G}}(z)$$

可得公式（126）。

˜回顾方程（71）中 $\Lambda_d(z)$ 的定义，并应用三角不等式，

$$\tilde{\Lambda}_d(z) = \max_i |\tilde{G}_{ii}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)| \le |\tilde{m}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)| + \max_i |\tilde{G}_{ii}(z) - \tilde{m}(z)| \le \tilde{\Lambda}(z) + \max_i |\tilde{G}_{ii}(z) - \tilde{m}(z)|,$$

˜其中，第二个不等式由方程（41）中 $\Lambda(z)$ 的定义得出。应用方程即可得到公式（127），证明完成。 (126) □

˜引理 C.12（Erd˝os 等人（2013b），引理 7.8，改编版）。若 $\eta \ge 2$，则 $\Omega(\eta)$ 以 (ξ, ν)-高 ˜概率成立，其中 $\Omega(\eta)$ 定义于方程 (72)中。

˜证明。令 $z = E + \mathrm{i}\eta_o$。为估计 Λ_o，我们采用引理 C.10 中的方法。同样，我们应用引理 C.16 得到

$$\tilde{G}_{ij}(z) = \tilde{G}_{ii}(z)\tilde{G}^{(\setminus i)}_{jj}(z)\left(((\mathbf{B}_{\cdot i})^{\setminus ij})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus ij)}(z)\,(\mathbf{B}_{\cdot j})^{\setminus ij}\right) - \tilde{G}_{ii}(z)\tilde{G}^{(\setminus i)}_{jj}(z)B_{ij}.$$

利用引理 C.21，我们以 (ξ, ν)-高概率有，

$$\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right| \le C\left|((\mathbf{B}_{\cdot i})^{\setminus ij})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus ij)}(z)\,(\mathbf{B}_{\cdot j})^{\setminus ij}\right| + C\,|B_{ij}| = C\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)} B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)B_{lj}\right| + C\,|B_{ij}|\,.$$

应用引理 C.18 和引理 (C.22),

$$\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right| \le C\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)} B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)B_{lj}\right| + C\frac{r\rho_N(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}} + \frac{C}{q} \tag{128}$$

为了估计 $\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)} B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)B_{lj}\right|$，我们还需要估计 $\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)} h_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)h_{lj}\right|$。因此，根据引理 C.6 中的公式（78），我们有

$$\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)} h_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)h_{lj}\right| \le (\log N)^{2\xi}\left[\frac{\max_k\left|\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kk}(z)\right|}{q^2} + \frac{\max_{i\ne j}\left|\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)\right|}{q} + \left(\sum_{k,l}^{(\setminus ij)}\left|\frac{\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)}{N}\right|^2\right)^{1/2}\right] \tag{129}$$

以 $(\xi,\ \nu)$-高概率成立。考察最右边的一项，可得

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k,l}^{(\setminus ij)}\left|\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)\right|^2 = \frac{1}{N^2\eta}\sum_{k}^{(\setminus ij)}\operatorname{Im}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kk}(z) = \frac{1}{N\eta}\operatorname{Im}\tilde{m}^{(\setminus ij)}(z) \le \frac{C}{N} \tag{130}$$

以 $(\xi,\ \nu)$-高概率成立，其中第一个等号由公式（117）中的 Ward 恒等式得出，第二个等号根据公式（40）中给出的 $\tilde{m}^{(\setminus ij)}(z)$ 的定义得出，而不等式则由 $\eta \ge 2$ 和引理 C.21 得出。将公式（130）代入（129），得到

$$\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)} h_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)h_{lj}\right| \le (\log N)^{2\xi}\left[\frac{\max_i\left|\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kk}(z)\right|}{q^2} + \frac{\max_{i\ne j}\left|\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)\right|}{q} + \frac{C}{\sqrt{N}}\right]$$

以 (ξ, ν)-高概率成立。展开并应用引理 C.21，可得

$$\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)} h_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)h_{lj}\right| \le \frac{C(\log N)^{2\xi}}{q^2} + \frac{C(\log N)^{2\xi}\tilde{\Lambda}_o(z)}{q} + \frac{C(\log N)^{2\xi}}{\sqrt{N}} \tag{131}$$

以 (ξ, ν)-高概率成立。对于由引理 C.7 控制的 $\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)} B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z)B_{lj}\right|$ 项（即关于 $(\mathbf{H}_{\cdot i})^{\setminus i}$ 呈线性的项），我们在使用界 $R \le C\eta$ 的地方（例如公式（89））修改引理 C.7 中的论证:

将该界替换为平凡界 $R \le 1$。这样做后，我们发现，与引理 C.7 的结果一样，对于任意 $\alpha_1 \in \{N-r+1,\dots,N\}$，当 $\eta \ge 2$ 时，

$$\left|\lambda_{\alpha_1}(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\setminus ij})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus ij)}(z)\,(\mathbf{H}_{\cdot i})^{\setminus ij}\right| \le Cr(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q}+\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}}+\frac{1}{N\eta}\right)$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。接着利用引理 C.21 以及 $\eta \ge 2$ here 的假设，我们可得，以 (ξ,ν)-高概率成立，

$$\left|\lambda_{\alpha_1}(v_{i\alpha_1}(\boldsymbol{v}_{\alpha_1})^{\setminus ij})^\top \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus ij)}(z)\,(\mathbf{H}_{\cdot i})^{\setminus ij}\right| \le Cr(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \tag{132}$$

对 $\left|\sum_k^{(\setminus ij)},_l \quad B_{ik}\tilde{G}_{kl}^{(\setminus ij)}(z)B_{lj}\right|$ 应用三角不等式可得 $2r$ 项；根据引理 C.8，这些项有界于 $C(\log N)^{2\gamma}/\sqrt{N}$；以及 $\binom{r}{2}$ 项，根据引理 C.9，这些项有界于 $C(r^2(\log N)^{6\gamma}/N)$；以上两者均以 (ξ,ν)-高概率成立。也就是说，

$$\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)} B_{ik}\tilde{G}_{kl}^{(\setminus ij)}(z)B_{lj}\right| \le 2r\frac{C(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}}+C\binom{r}{2}\frac{r^2(\log N)^{6\gamma}}{N} \tag{133}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。综上，根据引理 C.8、引理 C.9 和公式（132），我们可得，以 (ξ,ν)-高概率成立，

$$\begin{aligned}|\tilde{G}_{ij}(z)| \le{}& \frac{C(\log N)^{2\xi}}{q^2}+\frac{C(\log N)^{2\xi}\tilde{\Lambda}_o(z)}{q}+\frac{C(\log N)^{2\xi}}{\sqrt{N}}\\ &+Cr^2(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{\sqrt{N}}\right)+\frac{Cr^4(\log N)^{6\gamma}}{N}.\end{aligned} \tag{134}$$

对 $i \ne j$ ν $1/q \le$ 取最大值（根据需要调整常数因子），利用方程（）中的 $1/r^2$ $N^{3\xi+3\gamma}$ $(\log)$ 这一事实以及假设（A），我们以 $\tilde{5}$ ξ ν -高概率有，

$$\tilde{\Lambda}_o(z) \le C(\log N)^{-2\xi}. \tag{135}$$

为界定 $|Z_i(z)|$，我们应用公式（132） $2r$ 次，由公式（113）可得，

$$\begin{aligned}\left|\tilde{Z}_i(z)\right| \le{}& Cr^2(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{\sqrt{N}}\right)+\Big|((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\\ &-\mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]\Big|\end{aligned} \tag{136}$$

以（ξ,ν）-高概率成立。正如在 C.10 的证明中一样，公式（136）右侧的两项可界定为

$$\begin{aligned}&\left|((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}-\mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]\right|\\ &\quad\le(\log N)^{2\xi}\left[\frac{\max_{k\ne l}\left|\tilde{G}_{kl}^{(\setminus i)}(z)\right|}{q}+\left(\frac{1}{N^2}\sum_{k\ne l}\left|\tilde{G}_{kl}^{(\setminus i)}(z)\right|^2\right)^{1/2}\right]+(\log N)^{\xi}\frac{\max_k\left|\tilde{G}_{kk}^{(\setminus i)}(z)\right|}{q}\end{aligned}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。利用引理 C.21 和公式（135），我们得到

$$\begin{aligned}&\left|((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}-\mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]\right|\\ &\qquad\le\frac{C}{q}+\frac{C(\log N)^{\xi}}{q}+(\log N)^{2\xi}\left(\frac{1}{N^2}\sum_{k\ne l}\left|\tilde{G}_{kl}^{(\setminus i)}(z)\right|^2\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{137}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。按照推导公式（130）时所用的论证，并利用 Ward 恒等式，我们得到

$$\left(\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq l}\left|\tilde{G}^{(\setminus i)}_{kl}(z)\right|^2\right)^{1/2}\leq\frac{C}{\sqrt{N}}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。因此，将该界应用于公式（137），我们有

$$\left|((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{G}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}-\mathbb{E}\left[((\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i})^\top\tilde{G}^{(\setminus i)}(z)(\mathbf{H}_{\cdot\mathbf{i}})^{\setminus i}\mid(\mathbf{H})^{\setminus i}\right]\right|\leq\frac{C(\log N)^\xi}{q}+\frac{C(\log N)^{2\xi}}{\sqrt{N}}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。将该界应用于公式（136）可得

$$\left|\tilde{Z}_i(z)\right|\leq Cr^2(\log N)^{\xi+3\gamma}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{\sqrt{N}}\right)+\frac{C(\log N)^{2\xi}}{\sqrt{N}}\leq C(\log N)^{-2\xi}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立，其中在第二个不等式中，我们应用公式（32）对 q 进行上界估计。˜对 i 取最大值并减小 ν 的值，可得 $Z_i(z)$ 的界，该界以 (ξ,ν)-高概率成立。

˜为估计 $\mathcal{A}_i(z)$，我们采用引理 C.10 中使用的方法。应用三角不等式、一次假设（˜**A1**）、 r 次 C.8 以及 $\binom{r}{2}$ 次引理 C.9 后可得，以 (ξ,ν)-高概率成立，

$$\left|\tilde{\mathcal{A}}_i(z)\right|\leq\frac{Cr\rho_N(\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}}+C\left(\frac{r\sqrt{N}(\log N)^{2\gamma}}{N}+\frac{r^3(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}\right)+C\frac{r^4(\log N)^{6\gamma}}{N\eta}+\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\frac{\tilde{G}_{ij}(z)\tilde{G}_{ji}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)}\right|.$$

˜代入我们对 $\eta\geq2$ 的选择并应用假设（**A5**），可得

$$\left|\tilde{\mathcal{A}}_i(z)\right|\leq C\frac{(\log N)^{2\gamma+\zeta}}{\sqrt{N}}+C\frac{(\log N)^{6\gamma+4\zeta}}{N}+\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\frac{\tilde{G}_{ij}(z)\tilde{G}_{ji}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)}\right|\tag{138}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。根据引理 C.16，我们有

$$\frac{\tilde{G}_{ij}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)}\tilde{G}_{ji}(z)=-\tilde{G}^{(\setminus i)}_{jj}(z)(B_{ij}-\sum_{k,l}^{(\setminus ij)}B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kj}(z)B_{lj})\tilde{G}_{ji}(z)$$

因此，由引理 C.21 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\left|\frac{\tilde{G}_{ij}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)}\tilde{G}_{ji}(z)\right|&\leq\left|C\tilde{\Lambda}_o(z)\left(B_{ij}-\sum_{k,l}^{(\setminus ij)}B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kj}(z)B_{lj}\right)\right|\\&\leq C\tilde{\Lambda}_o(z)\left(|B_{ij}|+\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)}B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kj}(z)B_{lj}\right|\right)\end{aligned}\tag{139}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。为界定最后一个不等式右侧的绝对值，我们应用方程 (133) 和 (134)，得到

$$\left|\sum_{k,l}^{(\setminus ij)}B_{ik}\tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kj}(z)B_{lj}\right|\leq C\frac{r^2(\log N)^{\xi+3\gamma}}{q}\leq C(\log N)^{-2\xi},$$

其中，我们使用了来自公式（32）的 $q\geq r^2(\log N)^{3\xi+3\gamma}$。将其应用于公式（139），利用引理 C.22 控制˜$|B_{ij}|$，并根据引理 C.21 对 $\Lambda_o\leq C$ 进行界定，可得

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\left|\frac{\tilde{G}_{ij}(z)}{\tilde{G}_{ii}(z)}\tilde{G}_{ji}(z)\right|\leq C(\log N)^{-2\xi}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。将此界代入公式（138），

$$\left|\tilde{\mathcal{A}}_i(z)\right| \le C\frac{(\log N)^{2\gamma+\zeta}}{\sqrt{N}} + C\frac{(\log N)^{6\gamma+4\zeta}}{N} + C(\log N)^{-2\xi} \le C(\log N)^{-2\xi}$$

当 N 充分大时，以 (ξ,ν)-高概率成立。对 i 取最大值（如有必要，将 ν 的值缩小一个常数因子），即可得到以 (ξ,ν)-高概率成立的结果。所有这些速率都与 Erd˝os 等人（2013b）引理 7.8 中的完全相同。证明的其余部分可由 Erd˝os 等人（2013b）引理 3.16 中的论证推出。因此，证明余下部分与 Erd˝os 等人（2013b）引理 7.8 和 7.9 的证明完全相同，故省略细节。 □

以下结果建立了$\mathbf{B}$的特征值的整体半圆律和强局部半圆律，可能具有独立的研究价值。请注意，对 ξ 和 q 的条件略强于本附录其他部分所作的假设。

定理 C.13. 令 $z = E+\mathrm{i}\eta \in D$ 并定义 $\kappa_E = ||E|-2|$。假设$\mathbf{B}$ 满足方程(34)，且 ˜ ˜假设$(\mathbf{A1})-(\mathbf{A7})$ 成立，并假设

$$\xi = \frac{C_0}{2}\log(\log N) \quad and \quad r^2(\log N)^{C_3+3\gamma} \le q.$$

那么存在通用常数 $C_3, C_4 > 0$，使得对于某个依赖于方程 (5)、(32) 中的 C_0、C_1 和 C_2 以及定义 *5* 的 $\nu > 0$，事件

$$|\tilde{m}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)| \le \frac{r\pi}{N\eta} + (\log N)^{C_4\xi}\left(\min\left(\frac{1}{q^2\sqrt{\kappa_E+\eta}}, \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{N\eta}\right) \tag{140}$$

在所有 $z \in D$ 上一致地以 (ξ,ν)-高概率成立。此外，在所有 $z \in D$ 上一致地以 (ξ,ν)-高概率有

$$\max_{1\le i,j\le N}\left|\tilde{G}_{ij}(z) - I(i=j)m_{\mathrm{sc}}(z)\right| \le \frac{r^2(\log N)^{C_3\xi+3\gamma}}{q} + r^2(\log N)^{C_3\xi+6\gamma}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im} m_{\mathrm{sc}}(z)}{N\eta}} + \frac{r^2}{N\eta}\right). \tag{141}$$

证明。 为证明公式（140），由引理 C.1 可得，

$$\left|\tilde{\Lambda}(z) - \Lambda\right| \le \frac{r\pi}{N\eta}.$$

由此可见，

$$\tilde{\Lambda}(z) \le \frac{r\pi}{N\eta} + \Lambda(z).$$

应用 Erd˝os 等人（2013b）的定理 2.8，具体而言是公式（2.16），并回顾方程（41）中 $\Lambda(z)$ 和 $\Lambda(z)$ 的定义，我们得到：对于所有 $z \in D$，事件以 (ξ,ν)-高概率一致成立，

$$|\tilde{m}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)| \le \frac{r\pi}{N\eta} + (\log N)^{C_2\xi}\left(\min\left(\frac{1}{q^2\sqrt{\kappa_E+\eta}}, \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{N\eta}\right),$$

这正是所需。

为证明方程 (141)，应用引理 C.10 和 C.11 以及方程 140，可得到对 $z \in D_L$ 一致成立的界。要将该界扩展为对 $z \in D$ 一致成立，请遵循 Erd˝os 等人在方程 (4.28) 之后直至第 4.1 节末尾所给出的论证。 □

C.2 离域化证明

现在，我们已准备好证明关于$\mathbf{B}$的特征向量离域化的主要结果。我们指出，证明离域化只需要弱局部律。

˜**定理 C.14.** 设**B** 满足方程(34)，并且 $\mathcal{S} = \{N - r + 1, \ldots, N\}$。在假设(**A1**)–˜(**A7**)下，对于某个 $\nu > 0$，其取决于定义 *5* 中的 C_0、C_1 和 C_2，以及方程(30) 和(32)，我们有

$$\max_{\alpha \in \mathcal{S}} \max_{j} |\hat{v}_{j\alpha}| \leq C \frac{r^2 (\log N)^{4\xi + 6\gamma}}{\sqrt{N}} \tag{142}$$

以（ξ, ν）-高概率成立。

证明。 参照 Erd˝os 等人（2013b），令

$$L = 8\xi, \tag{143}$$

并令

$$\eta = \frac{r^4 (\log N)^{L + 12\gamma}}{N}. \tag{144}$$

由引理 C.11 中的公式（127），

$$\tilde{\Lambda}_d(z) \leq \tilde{\Lambda}(z) + C\Phi(z). \tag{145}$$

˜我们首先考察 $\Lambda(z)$。根据 Erd˝os 等人（2013b）的引理 C.1 和定理 3.1，有

$$\tilde{\Lambda}(z) \leq |\tilde{\Lambda}(z) - \Lambda(z)| + \Lambda(z) \leq \frac{r\pi}{N\eta} + \frac{C(\log N)^{\xi}}{\sqrt{q}} + \frac{C(\log N)^{2\xi}}{(N\eta)^{1/3}}. \tag{146}$$

将其应用于方程（145），并回顾方程（99）中谱控制参数 $\Phi(z)$的定义，

$$\tilde{\Lambda}_d(z) \leq \frac{r\pi}{N\eta} + \frac{C(\log N)^{\xi}}{\sqrt{q}} + \frac{C(\log N)^{2\xi}}{(N\eta)^{1/3}} + \frac{r^2 (\log N)^{\xi + 3\gamma}}{q} + r^2 (\log N)^{2\xi + 6\gamma} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im} \tilde{m}(z)}{N\eta}} + \frac{r^2}{N\eta} \right). \tag{147}$$

根据三角不等式，

$$\operatorname{Im} \tilde{m}(z) \leq |\operatorname{Im} \tilde{m}(z) - \operatorname{Im} m_{\mathrm{sc}}(z)| + \operatorname{Im} m_{\mathrm{sc}}(z) \leq |\tilde{m}(z) - m_{\mathrm{sc}}| + \operatorname{Im} m_{\mathrm{sc}}(z) = \tilde{\Lambda}(z) + \operatorname{Im} m_{\mathrm{sc}}(z)$$

˜其中，在等式中，我们代入了方程（41）中 $\Lambda(z)$ 的定义。
现在，由于 $C^{-1} \leq |m_{\mathrm{sc}}(z)| \leq C$ 对于 $z \in D_L$ 成立（参见 Erd˝os 等人（2013b）的引理 3.2），
并利用公式（146），我们得到

$$\operatorname{Im} \tilde{m}(z) \leq \frac{r\pi}{N\eta} + \frac{C(\log N)^{\xi}}{\sqrt{q}} + \frac{C(\log N)^{2\xi}}{(N\eta)^{1/3}} + C$$

将方程（144）中 η 的取值代入，回顾方程（32）中 q 的界并化简后，我们得到

$$\operatorname{Im} \tilde{m}(z) \leq \frac{r\pi}{r^4 (\log N)^{8\xi + 12\gamma}} + \frac{C(\log N)^{\xi}}{r(\log N)^{(3\xi + 3\gamma)/2}} + \frac{C(\log N)^{2\xi}}{(r^4 (\log N)^{8\xi + 12\gamma})^{1/3}} + C \leq C \tag{148}$$

因此，我们发现，将公式（148）代入公式（147）后，

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_d(z) \leq \frac{r\pi}{r^4 (\log N)^{8\xi + 12\gamma}} + \frac{C(\log N)^{\xi}}{r(\log N)^{(3\xi + 3\gamma)/2}} + \frac{C(\log N)^{2\xi}}{(r^4 (\log N)^{8\xi + 12\gamma})^{1/3}} + \frac{r^2 (\log N)^{\xi + 3\gamma}}{r^2 (\log N)^{3\xi + 3\gamma}} \\ + r^2 (\log N)^{2\xi + 6\gamma} \left(\sqrt{\frac{C}{r^4 (\log N)^{8\xi + 12\gamma}}} + \frac{r^2}{r^4 (\log N)^{8\xi + 12\gamma}} \right). \end{aligned}$$

用常数对形式为 $(\log n)^{-c}$ 的衰减项进行界定，

$$\tilde{\Lambda}_d(z) \leq C.$$

˜回顾式（71）中 $\Lambda_d(z)$ 的定义，对于任意 $j \in [N]$，我们有

$$|\tilde{G}_{jj}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)| \le C.$$

再次回顾，根据 Erd˝os 等人（2013b）的引理 3.2，$|m_{\mathrm{sc}}(z)|$ 被常数所界，因此我们有 t

$$|\tilde{G}_{jj}(z)| \le C,$$

这意味着对于 $\alpha \notin \{N-r+1, N-r+2, \dots, N\}$,

$$C \ge \operatorname{Im} \tilde{G}_{jj}(\hat{\lambda}_\alpha + \mathrm{i}\eta) = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\eta |\hat{v}_{j\beta}|^2}{(\hat{\lambda}_\beta - \hat{\lambda}_\alpha)^2 + \eta^2} = \frac{\eta \left|\hat{v}_{j\alpha}\right|^2}{\eta^2} + \sum_{\beta \ne \alpha} \frac{\eta |\hat{v}_{j\beta}|^2}{(\hat{\lambda}_\beta - \hat{\lambda}_\alpha)^2 + \eta^2} \ge \frac{\left|\hat{v}_{j\alpha}\right|^2}{\eta}.$$

重新整理，并回顾我们在方程（144）中对 η 的选择，以及在方程（143）中对 L 的选择,

$$|\hat{v}_{j\alpha}| \le C \frac{r^2 (\log N)^{4\xi+6\gamma}}{\sqrt{N}},$$

这正是我们要证明的。 □

C.3 辅助估计

这里汇总了一些有用的矩阵结果，其中大多与预解式有关。

引理 C.15（预解式恒等式；Benaych-Georges 和 Knowles（2018）引理 3.5）。对于任意厄米矩阵 **B** 和 $\mathbb{T} \subset [N]$，对于任意 $i,\ j,\ \notin \mathbb{T}$ 以及 $i \ne j$

$$G_{ij}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) = -G_{ii}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) \sum_{k}^{(\setminus \mathbb{T} i)} B_{ik} G_{kj}^{(\setminus \mathbb{T} i)}(z) = -G_{jj}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) \sum_{k}^{(\setminus \mathbb{T} j)} G_{ik}^{(\setminus \mathbb{T} j)}(z) B_{kj} \tag{149}$$

此外，对于任意 i、j 和 $k \notin \mathbb{T}$ 以及 i、$j \ne k$

$$G_{ij}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) = G_{ij}^{(\setminus \mathbb{T} k)}(z) + \frac{G_{ik}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) G_{kj}^{(\setminus \mathbb{T})}(z)}{G_{kk}^{(\setminus \mathbb{T})}(z)} \tag{150}$$

证明。 Benaych-Georges 和 Knowles（2018）的附录 A 给出了证明。 □

引理 C.16。 对于预解式 $\mathbf{G} = (\mathbf{F} - z\mathbf{I})^{-1}$，其中 **F** 为厄米矩阵，对于任意 $i \ne j \in [N]$

$$G_{ij}(z) = G_{ii}(z) G_{jj}^{(\setminus i)}(z) \sum_{k,l}^{(\setminus ij)} F_{ik} G_{kj}^{(\setminus ij)}(z) F_{lj} - G_{ii}(z) G_{jj}^{(\setminus i)}(z) H_{ij}.$$

证明。 这由引理 C.15 中的方程（149）直接推出。特别地，在该引理中令 $\mathbb{T} = \emptyset$，可得

$$G_{ij}(z) = -G_{ii}(z) \sum_{k}^{(\setminus i)} F_{ik} G_{kj}^{(\setminus i)}(z) = -G_{ii}(z) \sum_{k}^{(\setminus ij)} F_{ik} G_{kj}^{(\setminus i)}(z) - G_{ii}(z) G_{jj}^{(\setminus i)}(z) F_{ij}. \tag{151}$$

再次将 $\mathbb{T} = \{i\}$ 代入方程（149），我们得到

$$G_{kj}^{(\setminus i)}(z) = -G_{jj}^{(\setminus i)}(z) \sum_{l}^{(\setminus ij)} G_{kl}^{(\setminus ij)}(z) F_{lj}.$$

将其代入 (151) 即完成证明。 □

引理 C.17. 令 $\tau < N$ 相对于 N 为常数。对于 $|\mathbb{T}| \le \tau$，其中 $\mathbb{T} \subset [N]$，我们有：在方程 (72) 中定义的$\Omega(\eta)$ 事件上，

$$\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)\right| \le C\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right| \le (\log N)^{-\xi}$$

证明。 这是引理 C.15 的一个应用，由此，对于 $k \in \mathbb{T}$

$$\tilde{G}_{ij}(z) = \tilde{G}_{ij}^{(\setminus k)}(z) + \frac{\tilde{G}_{ik}(z)\tilde{G}_{kj}(z)}{\tilde{G}_{kk}(z)}.$$

应用反三角不等式，

$$\left|\left|\tilde{G}_{ij}^{(\setminus k)}(z)\right| - \left|\frac{\tilde{G}_{ik}(z)\tilde{G}_{kj}(z)}{\tilde{G}_{kk}(z)}\right|\right| \le \left|\tilde{G}_{ij}(z)\right|,$$

由此，三角不等式给出

$$\left|\tilde{G}_{ij}^{(\setminus k)}(z)\right| \le \left|\tilde{G}_{ij}(z)\right| + \frac{\left|\tilde{G}_{ik}(z)\right|\left|\tilde{G}_{kj}\right|}{\left|\tilde{G}_{kk}(z)\right|}. \tag{152}$$

根据引理 C.20，我们有，在 $\tilde{\Omega}(\eta)$ 上，$c \le \left|\tilde{G}_{ii}(z)\right| \le C$，进而可得

$$\frac{\left|\tilde{G}_{ik}(z)\right|\left|\tilde{G}_{kj}(z)\right|}{\left|\tilde{G}_{kk}(z)\right|} \le C\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right|^2.$$

将其应用于方程（152），并对 $i \neq j$ 取最大值，得到

$$\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}^{(\setminus k)}(z)\right| \le \max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right| + C\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right|^2 \le \max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right|(1 + C\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right|) \le \max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right|.$$

其中，最后一个不等式用到了这样一个事实：在 $\tilde{\Omega}(\eta)$ 上，根据 $\Omega(\eta)$ 的构造，我们有 $\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right| \le (\log N)^{-\xi} \le C$。回顾方程（71）中 $\Lambda_o(z)$ 的定义，可得在 $\Omega(\eta)$ 上，

$$\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}^{(\setminus k)}(z)\right| \le C\tilde{\Lambda}_o(z) \le C(\log N)^{-\xi}. \tag{153}$$

其中第二个不等式由 $\tilde{\Omega}(\eta)$ 的定义得出。为证明 $\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)\right| \le C\tilde{\Lambda}_o(z)$，我们对每个 $k \in \mathbb{T}$ 重复上述过程。具体而言，在下一次迭代中，令 $\tilde{\mathbf{G}} := \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus k)}$，并对 $k' \in \mathbb{T} \setminus \{k\}$ 重复上述过程。

□

引理 C.18。 设 $\mathbf{H}$ 为一个矩阵，其元素 H_{ij} 相互独立（至多受对称性约束），并满足方程（31）。当 $C > 0$ 充分大时，以（ξ、ν）-高概率，有：

$$\max_{i,j}|H_{ij}| \le \frac{C}{q}. \tag{154}$$

证明。 在方程（31）中令 $p = \nu(\log N)^{\xi}$。则由马尔可夫不等式，

$$\mathbb{P}\left(|H_{ij}| \ge \frac{C}{q}\right) = \mathbb{P}\left(|H_{ij}|^p \ge \frac{C^p}{q^p}\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[|H_{ij}|^p\right]q^p}{C^p} \le \frac{C_1^p q^p}{Nq^{p-2}C^p} = \left(\frac{C_1}{C}\right)^p\frac{q^2}{N} \le \left(\frac{C_1}{C}\right)^p,$$

其中，第二个不等式由方程（31）推出，最后一个不等式由公式（32）推出。对所有 $i,\ j \in [N]$ 取并集界，得到

$$\mathbb{P}\left(\max_{i,j}|H_{ij}| \ge \frac{C}{q}\right) \le N^2\left(\frac{C_1}{C}\right)^p = e^{2(\log N)}\left(\frac{C_1}{C}\right)^{\nu(\log N)^{\xi}}.$$

因此，当 $C>0$ 足够大时，并利用由定义（30）可知 $1<\xi$ ，

$$\mathbb{P}\left(\max_{i,j}|H_{ij}|\geq\frac{C}{q}\right)\leq e^{-\nu(\log N)^{\xi}},$$

完成证明。 □

˜**引理 C.19**。 设**H** 如公式(31) 所示，且 $z\in D_L$，则在公式(72)中定义的Ω(η) 上，对所有 $i\neq j\in[N]$ ，有

$$\left|\sum_{k,l}^{(\backslash ij)}h_{ik}\tilde{G}_{kl}^{(\backslash ij)}(z)h_{lj}\right|\leq\frac{C(\log N)^{\xi}}{q}+C(\log N)^{2\xi}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im}\tilde{m}(z)}{N\eta}}+\frac{1}{N\eta}\right)\tag{155}$$

以(ξ, ν)-高概率成立。

证明。 这是引理 C.6 的一个应用。由该引理中的公式（78），我们有，以 (ξ,ν)-高概率

$$\left|\sum_{k,l}^{(\backslash ij)}h_{ik}\tilde{G}_{kl}^{(\backslash ij)}(z)h_{lj}\right|\leq(\log N)^{2\xi}\left[\frac{\max_k\left|\tilde{G}_{kk}^{(\backslash ij)}(z)\right|}{q^2}+\frac{\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{kl}^{(\backslash ij)}(z)\right|}{q}+\left(\frac{1}{N^2}\sum_{k,l}^{(\backslash ij)}\left|\tilde{G}_{kl}^{(\backslash ij)}\right|^2\right)^{1/2}\right].\tag{156}$$

注意，在 ˜Ω(η) 上，由引理 C.17 可得 $\max_{i\neq j}\left|G_{kl}^{(\backslash ij)}\right|\leq C\max_{i\neq j}|G_{kl}|$ 。根据公式（32）中 q 的定义，有 $q\geq(\log N)^{3\xi}$。因此，在 ˜Ω(η) 上，将此界代入公式（156）中的 q，并利用在 Ω(η) 上 $\max_i|G_{ii}|\leq C$ 这一事实，展开后得到 ˜，

$$\left|\sum_{k,l}^{(\backslash ij)}h_{ik}\tilde{G}_{kl}^{(\backslash ij)}(z)h_{lj}\right|\leq\frac{C(\log N)^{2\xi}}{q(\log N)^{3\xi}}+\frac{C(\log N)^{2\xi}\max_{i\neq j}|G_{ij}|}{q}+(\log N)^{2\xi}\left(\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}(z)\right|^2\right)^{1/2}\tag{157}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。注意，根据 Ward 引理（公式（117））， 方程中的求和可以表示为 (157)

$$\sum_{k,l}^{(\backslash ij)}\left|\tilde{G}_{kl}^{(\backslash ij)}(z)\right|^2=\frac{1}{\eta}\sum_{k}^{(\backslash ij)}\operatorname{Im}\tilde{G}_{kk}^{(\backslash ij)}(z).\tag{158}$$

Now 注意，使用公式（150）两次应用引理 C.15，并使用引理 C.20，可得 e

$$\tilde{G}_{kk}^{(\backslash ij)}(z)=\tilde{G}_{kk}(z)+\frac{\left|\tilde{G}_{ik}(z)\right|^2}{\tilde{G}_{ii}(z)}+\frac{\left|\tilde{G}_{jk}(z)\right|^2}{\tilde{G}_{jj}(z)}=\tilde{G}_{kk}(z)+O(\tilde{\Lambda}_o^2(z)).\tag{159}$$

将方程（159）代入（158），并除以 N^2，得到

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k,l}^{(\backslash ij)}\left|\tilde{G}_{kl}^{(\backslash ij)}(z)\right|^2=\frac{1}{N^2\eta}\sum_{k}^{(\backslash ij)}\operatorname{Im}\tilde{G}_{kk}^{(\backslash ij)}(z)\leq\frac{1}{N\eta}\left(\operatorname{Im}\tilde{m}(z)+C\tilde{\Lambda}_o^2(z)\right),\tag{160}$$

其中，不等式是由以下事实得出的

$$\tilde{m}(z)=\frac{1}{N}\operatorname{Tr}\tilde{\mathbf{G}}(z).$$

将方程（160）代入方程（157）可得，以（ξ， ν）的高概率 y

$$\left|\sum_{k,l}^{(\backslash ij)}h_{ik}\tilde{G}_{kl}^{(\backslash ij)}(z)h_{lj}\right|\leq\frac{C}{q(\log N)^{\xi}}+\frac{(\log N)^{2\xi}\max_{i\neq j}\left|\tilde{G}_{ij}\right|}{q}+(\log N)^{2\xi}\left(\frac{1}{N\eta}\left(\operatorname{Im}\tilde{m}(z)+C\tilde{\Lambda}_o^2(z)\right)\right)^{1/2}.$$

由于 $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$，因此可得

$$\left| \sum_{k,l}^{(\setminus ij)} h_{ik} \tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z) h_{lj} \right| \le \frac{C}{q(\log N)^{\xi}} + \frac{C(\log N)^{2\xi} \tilde{\Lambda}_o(z)}{q} + (\log N)^{2\xi} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{Im} \tilde{m}(z)}{N\eta}} + \frac{C\tilde{\Lambda}_o(z)}{\sqrt{N\eta}} \right) \tag{161}$$

在（ξ，ν）-高概率下。利用（$\log N$）$^{4\xi} \le \sqrt{N\eta}$ on D_L，我们得到以下方程（16 1)

$$\left| \sum_{k,l}^{(\setminus ij)} h_{ik} \tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z) h_{lj} \right| \le \frac{C}{q(\log N)^{\xi}} + \frac{C(\log N)^{2\xi} \tilde{\Lambda}_o(z)}{q} + \sqrt{\frac{\operatorname{Im} \tilde{m}(z)}{N\eta}} + \frac{C\tilde{\Lambda}_o(z)}{(\log N)^{4\xi}}.$$

因此，将 ν 增大一个常数倍后，我们有，在（ξ，ν）-高概率下，对所有 $i \ne j \in [N]$ 均一致地成立:

$$\left| \sum_{k,l}^{(\setminus ij)} h_{ik} \tilde{G}^{(\setminus ij)}_{kl}(z) h_{lj} \right| \le \frac{C}{q(\log N)^{\xi}} + \frac{C(\log N)^{2\xi} \tilde{\Lambda}_o(z)}{q} + \sqrt{\frac{\operatorname{Im} \tilde{m}(z)}{N\eta}},$$

正如我们所要证明的。 □

˜ ˜**引理 C.20**。 回顾方程 (71) 中 $\Lambda_o(z)$ 和 $\Lambda_d(z)$ 的定义，

$$\tilde{\Lambda}_o(z) := \max_{i \ne j} |\tilde{G}_{ij}(z)|, \quad \tilde{\Lambda}_d(z) := \max_{i} |\tilde{G}_{ii}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)|.$$

˜在方程 (72) 给出的事件 $\Omega(\eta)$ 上，对于任意 $i \in [N]$ 和 $z \in D_L$，我们有

$$c \le \left| \tilde{G}_{ii}(z) \right| \le C. \tag{162}$$

进一步，对于任意满足 $|\mathbb{T}| \le \tau < N$ 的 $\mathbb{T} \subset [N]$，其中 τ 相对于 N 为常数，

$$c \le \left| \tilde{G}^{(\setminus \mathbb{T})}_{ii}(z) \right| \le C. \tag{163}$$

˜ ˜证明。注意，在 $\Omega(\eta)$ 上，由于 $\Lambda_d(z) \ge 0$，我们有

$$\tilde{\Lambda}_o(z) \le \tilde{\Lambda}_d(z) + \tilde{\Lambda}_o(z) \le (\log N)^{-\xi},$$

因此，对于任意 $i \in [N]$,

$$-(\log N)^{-\xi} \le \tilde{G}_{ii}(z) - m_{\mathrm{sc}}(z) \le (\log N)^{-\xi}.$$

在等式两边加上 $m_{\mathrm{sc}}(z)$，得到

$$m_{\mathrm{sc}}(z) - (\log N)^{-\xi} \le \tilde{G}_{ii}(z) \le (\log N)^{-\xi} + m_{\mathrm{sc}}(z). \tag{164}$$

对于 $z \in D_L$，Erd˝os 等人（2013b）中的引理 3.2 断言 $C^{-1} \le |m_{\mathrm{sc}}(z)| \le C$。将这一事实代入公式（164），得到

$$c \le \left| \tilde{G}_{ii}(z) \right| \le C, \tag{165}$$

从而证明公式（162）中的结论。

对于公式（163）中的结论，假设我们有 $k \in \mathbb{T}$。应用公式（150），可得

$$\tilde{G}_{ii}(z) - \frac{\left| \tilde{G}_{ik}(z) \right|^2}{\tilde{G}_{kk}(z)} = \tilde{G}^{(k)}_{ii}(z). \tag{166}$$

对 $\mathbb{T}$ 中剩余的指标反复将方程（150）应用于（166），得到

$$\tilde{G}_{ii}(z) - \sum_{k \in \mathbb{T}} \frac{\left| \tilde{G}_{ik}(z) \right|^2}{\tilde{G}_{kk}(z)} = \tilde{G}^{(\setminus \mathbb{T})}_{ii}(z). \tag{167}$$

将方程（167）应用于方程（164），并回想起，根据 Erd˝os etal.(2013b) 中的引理 3.2， $m_{\mathrm{sc}}(z)$ 的上下界均为常数，可知

$$m_{\mathrm{sc}}(z)-(\log N)^{-\xi}-\sum_{k\in\mathbb{T}}\frac{\left|\tilde{G}_{ik}(z)\right|^2}{\tilde{G}_{kk}(z)}\le\tilde{G}_{ii}^{(k)}(z)\le(\log N)^{-\xi}+m_{\mathrm{sc}}(z)-\sum_{k\in\mathbb{T}}\frac{\left|\tilde{G}_{ik}(z)\right|^2}{\tilde{G}_{kk}(z)}. \tag{168}$$

注意，在 $\tilde{\Omega}(\eta)$ 和 $z\in D_L$ 上，由公式（165）可得 $c\le\left|\tilde{G}_{kk}(z)\right|\le C$，因此在 $\tilde{\Omega}(\eta)$ 上，

$$\frac{\left|\tilde{G}_{ik}(z)\right|^2}{\tilde{G}_{kk}(z)}=O((\log N)^{-2\xi}). \tag{169}$$

将此界应用于公式（168）即可得到

$$c\le\left|\tilde{G}_{ii}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)\right|\le C, \tag{170}$$

从而证明公式（163）。 □

以下引理给出了当 z 远离实轴（$3\ge\eta\ge2$）且 $\tilde{}$ 预解式元素易于控制时的初始界。特别地，这些界将用于证明事件 $\Omega(\eta)$ 以高概率发生，从而我们的主要预解式估计可由函数 $\Phi(z)$ 控制。因此，$\tilde{}$利用 $\Phi(z)$ $G_{ij}(z)$ 和 $\tilde{m}(z)$ 均为 Lipschitz 连续这一点，可对任意小的 η 给出预解式元素的界。

引理 C.21。 设 $\tau<N$ 相对于 N 为常数。对于 $z=E+\mathrm{i}\eta\in D_L$ 和 $2\le\eta\le3$，假设 $\mathbb{T}\subset[N]$ 满足 $|\mathbb{T}|\le\tau$。那么以 (ξ,ν) 高概率，

$$c\le\left|\tilde{G}_{kk}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)\right|\le\frac{1}{\eta},\qquad\left|\tilde{m}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)\right|\le\frac{1}{\eta},\qquad\left|\tilde{G}_{ij}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)\right|\le\frac{1}{\eta},\qquad and\qquad\max_{i\ne j}\left|\tilde{G}_{ij}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)\right|\le C\tilde{\Lambda}_o(z).$$

证明。 我们首先给 $\left|\tilde{G}_{kk}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)\right|$一个下界。注意，取谱分解的虚部可得，

$$\operatorname{Im}\tilde{G}_{kk}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)=\eta\sum_{\alpha=1}^{N-|\mathbb{T}|}\frac{\left|\hat{v}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(k)\right|^2}{(\hat{\lambda}_\alpha-E)^2+\eta^2}\ge\eta\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}\frac{\left|\hat{v}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(k)\right|^2}{(\hat{\lambda}_\alpha-E)^2+\eta^2} \tag{171}$$

其中 $\mathcal{S}=\{N-r+1-|\mathbb{T}|,\dots,N-|\mathbb{T}|\}$。现在，根据 Erd˝os 等人（2013b）的引理 4.3 和引理 C.23，以 $(\xi,\ \nu)$-高概率，我们有 $\lambda_\alpha\le\|\mathbf{H}\|\le C$ 对所有 $\alpha\in\mathcal{S}$ 均成立。此外，根据 D_L 的定义， $E\le3$ ，因此 $(\hat{}\lambda_\alpha-E)^2\le C$ 对所有满足 $(\xi,\ \nu)$-高概率的 $\alpha\notin\mathcal{S}$ 均成立。然后，由于 η 被常数上下界所界定，对于某个 $c>0$,

$$\operatorname{Im}\tilde{G}_{kk}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)\ge\eta\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}\frac{\left|\hat{v}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(k)\right|^2}{(\hat{\lambda}_\alpha-E)^2+\eta^2}\ge c\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}\left|\hat{v}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(k)\right|^2 \tag{172}$$

以 (ξ,ν)-高概率成立。为求 $\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}\left|\hat{}v_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(k)\right|^2$ 的下界，注意到由于 $(\mathbf{B})^{\setminus\mathbb{T}}$ 是实对称矩阵，$(\mathbf{B})^{\setminus\mathbb{T}}$ 的特征向量构成一个标准正交基。因此， $\sum_{\alpha=1}^{N-|\mathbb{T}|}\left|\hat{}v_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(k)\right|^2=1$。注意，$(\mathbf{B})^{\setminus\mathbb{T}}$ 的特征向量可用于得到 $\mathbf{B}^{[\mathbb{T}^c]}$ 的特征向量，方法是在 $\mathbb{T}$ 给出的索引处填入零。由此可知，对于每个对应于 $\mathbf{B}$ 主特征值的 $\alpha\in\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\boldsymbol{v}}_{\alpha-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{\alpha-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top-(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus\mathbb{T}}((\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\right\|_F^2&\le\left\|\hat{\boldsymbol{v}}_{\alpha-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{\alpha-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top-(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus\mathbb{T}}((\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\right\|_F^2+\left\|\boldsymbol{v}_\alpha^{[\mathbb{T}]}(\boldsymbol{v}_\alpha^{[\mathbb{T}]})^\top\right\|_F^2\\&=\left\|\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]})^\top-\boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{v}_\alpha^\top\right\|_F^2\end{aligned} \tag{173}$$

根据引理 C.3，以 (ξ,ν)-高概率成立，

$$\left\|\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]})^\top-\boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{v}_\alpha^\top\right\|_F^2=2\left\|\left(\mathbf{I}-\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{[\mathbb{T}^c]})^\top\right)^\top\boldsymbol{v}_\alpha\right\|_F^2\le\frac{C}{N}.$$

将其应用于公式（173），

$$\left\|\hat{\boldsymbol{v}}_{\alpha-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_{\alpha-|\mathbb{T}|}^{(\setminus\mathbb{T})})^\top-(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus\mathbb{T}}((\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\right\|_F^2\le\frac{C}{N}\tag{174}$$

以 $(\xi,\ \nu)$-高概率成立。特别地，$\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top-(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus\mathbb{T}}((\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus\mathbb{T}})^\top$ 的 $(i,\ j)\in([N]\setminus\mathbb{T})^2$ 个元素由 $\hat{v}_{i\alpha}\hat{v}_{j\alpha}-v_{i\alpha}v_{j\alpha}$ 给出，因此

$$\sum_{i,j\in[N]\setminus\mathbb{T}}(\hat{v}_{i\alpha}\hat{v}_{j\alpha}-v_{i\alpha}v_{j\alpha})^2=\left\|\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})}(\hat{\boldsymbol{v}}_\alpha^{(\setminus\mathbb{T})})^\top-(\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus\mathbb{T}}((\boldsymbol{v}_\alpha)^{\setminus\mathbb{T}})^\top\right\|_F^2.$$

利用平凡的上界

$$\sum_{j\in[N]\setminus\mathbb{T}}(\hat{v}_{j\alpha}\hat{v}_{j\alpha}-v_{j\alpha}v_{j\alpha})^2\le\sum_{i,j\in[N]\setminus\mathbb{T}}(\hat{v}_{i\alpha}\hat{v}_{j\alpha}-v_{i\alpha}v_{j\alpha})^2,$$

对于 $k\in[N]\setminus\mathbb{T}$，我们有

$$(\hat{v}_{k\alpha}^2-v_{k\alpha}^2)^2\le\sum_{i,j\in[N]\setminus\mathbb{T}}(\hat{v}_{i\alpha}\hat{v}_{j\alpha}-v_{i\alpha}v_{j\alpha})^2.$$

因此，将此界应用于公式（174），我们以 $(\xi,\ \nu)$-高概率得到

$$(\hat{v}_{k\alpha}^2-v_{k\alpha}^2)^2\le\frac{C}{N}.$$

开平方后，我们得到：以 $(\xi,\ \nu)$-高概率，

$$\left|\hat{v}_{k\alpha}^2-v_{k\alpha}^2\right|\le\frac{C}{\sqrt{N}}.\tag{175}$$

根据假设（**A1**），

$$\hat{v}_{k\alpha}^2\le\frac{C}{\sqrt{N}}+v_{k\alpha}^2\le\frac{C}{\sqrt{N}}+\frac{C(\log N)^{2\gamma}}{N},$$

由此

$$\hat{v}_{k\alpha}^2\le\frac{C}{\sqrt{N}}+v_{k\alpha}^2\le\frac{C}{\sqrt{N}}+\frac{C(\log N)^{2\gamma}}{N}\le\frac{C}{\sqrt{N}},$$

开平方后，以（ξ,ν）-高概率，

$$|\hat{v}_{k\alpha}|\le\frac{C}{N^{1/4}}.\tag{176}$$

因此，由于 $\tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus\mathbb{T})}(z)$ 的特征向量构成一个正交矩阵，

$$\sum_{\alpha=1}^{N-|\mathbb{T}|}|\hat{v}_{k\alpha}|^2=1,\tag{177}$$

我们以 (ξ,ν)-高概率得到，

$$\sum_{\alpha\notin\mathcal{S}}|\hat{v}_{k\alpha}|^2=1-\sum_{\alpha\in\mathcal{S}}|\hat{v}_{k\alpha}|^2\ge1-\frac{Cr}{\sqrt{N}}\ge c\tag{178}$$

对于某个 $c>0$, $\tilde{}$当 N 足够大且满足假设（**A5**）时。由方程（172）可得

$$c \le \operatorname{Im} \tilde{G}_{kk}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) \le \left| \tilde{G}_{kk}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) \right|.$$

以（ξ, ν）高概率成立。

为求 $\left|\tilde{G}_{kk}^{(\setminus \mathbb{T})}(z)\right|$的上界，注意到 $(\mathbf{B}-z\mathbf{I})^{\setminus \mathbb{T}}$ 服从正态分布，其奇异值为

$$\left\{ \sqrt{(\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus \mathbb{T})} - E)^2 + \eta^2} : \alpha = 1, 2, \ldots, N - |\mathbb{T}| \right\}.$$

因此，$\tilde{}\mathbf{G}^{(\setminus \mathbb{T})} = ((\mathbf{B}-z\mathbf{I})^{\setminus \mathbb{T}})^{-1}$ 的奇异值可按如下方式界定

$$\frac{1}{\sqrt{(\hat{\lambda}_\alpha^{(\setminus \mathbb{T})} - E)^2 + \eta^2}} \le \frac{1}{\eta}.$$

由此可得

$$\max_{i,j} \left| \tilde{G}_{ij}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) \right| \le \left\| \tilde{\mathbf{G}}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) \right\| \le \frac{1}{\eta}. \tag{179}$$

对于 $\tilde{m}^{(\setminus \mathbb{T})}(z)$ 的上界，注意到

$$\left| \tilde{m}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_i \tilde{G}_{ii}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) \right| \le \frac{1}{N} \sum_i \left| \tilde{G}_{ii}^{(\setminus \mathbb{T})}(z) \right| \le \frac{1}{\eta}$$

其中，不等式由方程（179）得出。

为证明最后一个结论 $\max_{i \ne j} \left|\tilde{G}_{ij}^{(\setminus \mathbb{T})}(z)\right| \le C\tilde{\Lambda}_o(z)$，注意到根据引理 C.17 的证明中的方程（152）、方程（179），并回想起 $1/\eta \le 1/2$，我们有

$$\begin{aligned} \max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}^{(\setminus k)} \right|(z) &= \max_{i \ne j} \left| -\tilde{G}_{ij}(z) + \frac{\tilde{G}_{ik}(z)\tilde{G}_{kj}(z)}{\tilde{G}_{kk}(z)} \right| \le \max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}(z) \right| + \max_{i \ne j} \frac{\left|\tilde{G}_{ik}(z)\right| \left|\tilde{G}_{kj}(z)\right|}{\left|\tilde{G}_{kk}(z)\right|} \\ &\le \max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}(z) \right| + C \max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}(z) \right|^2. \end{aligned} \tag{180}$$

然后将 $\mathbb{T} = \emptyset$ 代入方程（179），于是有

$$\max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}(z) \right| + C \max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}(z) \right|^2 = \max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}(z) \right| (1 + C \max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}(z) \right|) \le \max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}(z) \right| \left(1 + \frac{C}{\eta} \right), \tag{181}$$

由此可得

$$\max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}^{(\setminus k)}(z) \right| \le C \max_{i \ne j} \left| \tilde{G}_{ij}(z) \right|. \tag{182}$$

对于其余的 $k' \in \mathbb{T} \setminus \{k\}$，将方程（180）中的 $\tilde{}\mathbf{G}$ 替换为 $\tilde{}\mathbf{G}^{(\setminus k)}$，并重复上述过程，便可通过引理 C.17 的证明中给出的相同论证得出该结论。 □

引理 C.22。 设$\mathbf{B}$ 如方程(34)中所示。以(ξ, ν)-高概率，有

$$\max_{i,j} |B_{ij}| \le C \frac{r \rho_N (\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}} + \frac{C}{q}.$$

证明。 注意，我们可以将任意元素 B_{ij} 分解为

$$B_{ij} = L_{ij} + H_{ij}. \tag{183}$$

回顾方程（51），我们可以进一步将 L_{ij} 分解为

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha=N-r+1}^{N} \lambda_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha^\top.$$

根据假设（$\tilde{}$**A4**），$c\sqrt{N} \leq \lambda_\alpha \leq C\sqrt{N}$对所有 $\alpha \in \{N-r+1, N-r+2, \ldots, N\}$均成立。因此，对于每个$i$, $j \in [N]$，我们有

$$L_{ij} = \left(\sum_{\alpha=N-r+1}^{N} \lambda_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha^\top \right)_{ij} \leq C\sqrt{N} \left(\sum_{\alpha=N-r+1}^{N} \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha^\top \right)_{ij}.$$

根据假设（$\tilde{}$**A1**），$\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^\top$的元素阶为 $1/N$，因此

$$L_{ij} = O\left(\frac{r\rho_N (\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}} \right).$$

利用此界来处理 L_{ij}，并根据引理 C.18 控制**H** 的元素，对方程（183）应用三角不等式可得

$$\max_{i,j} |B_{ij}| \leq \max_{i,j} |L_{ij}| + \max_{i,j} |H_{ij}| \leq C \frac{r\rho_N (\log N)^{2\gamma}}{\sqrt{N}} + \frac{C}{q}$$

其以（ξ，ν）-高概率成立，至此便完成了证明。 □

引理 C.23（Weyl 不等式；Horn 和 Johnson（1985）中的定理 4.3.1）。设**A**，**B** 为厄米矩阵，其特征值按如下顺序排列：$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N = \lambda_{\max}$。则

$$\lambda_i(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \lambda_{i+j}(\mathbf{A}) + \lambda_{N-j}(\mathbf{B}) \tag{184}$$

其中，对每个 $i \in [N]$，$j = 0$，$\ldots N-i$。类似地，

$$\lambda_{i-j+1}(\mathbf{A}) + \lambda_j(\mathbf{B}) \leq \lambda_i(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \tag{185}$$

其中，对于每个 $i \in [N]$，$j = 1$、2、$\ldots$、i。

此外，如果**A**和**B** 是厄米矩阵，且**B** 的秩为 r。则

$$\lambda_i(\mathbf{A}) \leq \lambda_i(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \lambda_{i+r}(\mathbf{A}) \quad for\ 1 \leq i \leq N-r.$$