arXiv:2601.06018v1 [math.RT] 9 Jan 2026

分次温和代数的霍赫希尔德上同调与内在形式性

SEBASTIAN OPPER

摘要。我们描述分次温和代数的（双分次）霍赫希尔德上同调，以及 Gerstenhaber 括号和杯积。特别地，这给出了 Haiden-Katzarkov-Kontsevich 意义下、至少具有一个停止点的曲面部分缠绕福柯范畴的霍赫希尔德上同调描述。我们的结果是作者近期描述部分缠绕福柯范畴和分次温和代数的导出 Picard 群的重要组成部分。作为另一项应用，在温和假设下，我们给出了本征形式温和代数的刻画。

目录

引言 1
1. 温和代数与 Fukaya 范畴 4 2. 分次温和代数的霍赫希尔德上同调 8 3. 杯积与 Gerstenhaber 括号 19 4. 本征形式温和代数的应用 24 参考文献 25

引言

我们对霍赫希尔德上同调的兴趣，源于微分分次范畴 $\mathcal{C}$ 或 A_∞-范畴的霍赫希尔德上同调与其导出 *Picard* 群 $\mathcal{D}\mathrm{Pic}(\mathcal{C})$ 之间的一般联系。这个群可以看作是导出范畴 $\mathcal{C}$ 自等价群的一种 “ 增强 ” 形式，它将微分分次结构或 A_∞-结构所提供的“更高阶”结构考虑在内。作者最近在 [Opp25b] 中证明，与李群和李代数之间的关系类似，存在一个指数映射

$$\exp\colon \mathrm{HH}^1_+(\mathcal{C},\mathcal{C}) \to \mathcal{D}\mathrm{Pic}(\mathcal{C}),$$

它定义在第一霍赫希尔德上同调的一个子空间上。该指数与其经典对应物有许多共同性质，并满足 Baker-Campbell-Hausdorff 公式的一个类似形式。因此，Gerstenhaber 括号使我们能够显式表达 exp 的像中的群乘法；而理解一个代数或范畴的霍赫希尔德上同调及 Gerstenhaber 括号，有助于深入认识相应导出 Picard 群的结构。自然地，分次温和代数的霍赫希尔德上同调和指数在作者近期对分次温和代数的导出皮卡群的描述中发挥了重要作用 [Opp25a]，而该描述运用了本文的结果。

温和代数这一类于 20 世纪 80 年代首次引入 [AS87] ，此后由于它们与曲面的部分缠绕福柯范畴 之间的联系而受到越来越多的关注；这类范畴由[Boc16, HKK17]引入。随后，分次温和代数的一个子类作为这些范畴中形式生成元的上同调代数出现。因此，除了 [Boc16]中的情形外，我们对分次温和代数的霍赫希尔德上同调的描述，也给出了此类 Fukaya 范畴在所有其他情形下的霍赫希尔德上同调描述。从这个意义上说，我们的工作与 [BvdK24] 和 [CSSS24]中的结果互为补充。前者描述了 [Boc16] 中研究的带 puncture 曲面的 Fukaya范畴的霍赫希尔德上同调；后者则计算了非分次温和代数的霍赫希尔德上同调（以及完整的 Tamarkin-Tsygan 演算）。分次温和代数的霍赫希尔德上同调在近期的工作[BSW25] 中也发挥了重要作用，该工作计算了它们在次数 2 的霍赫希尔德上同调。

为了按照 [HKK17], 的意义定义 Fukaya 范畴，我们从一个分次标记曲面开始，即一个定向曲面 Σ，其边界上带有一个指定子集$\mathcal{M}$ 以及一个线场。线场允许我们为 Σ的每个边界分支赋予一个唯一整数，即所谓的绕数。对于一个分次标记曲面和某些辅助数据， [HKK17]的作者随后赋予其部分缠绕 Fukaya 范畴。事实证明，该范畴与辅助数据无关；辅助数据对应于 Fukaya 范畴的一个生成元，而该生成元具有一个底层的分次温和代数。反过来，从一个分次温和代数 A 出发，可以构造一个分次标记曲面 Σ_A [HKK17、LP20、OPS18、PPP19]。

为简化主要结果的表述，我们将在引言中排除两种例外情形，即底层箭图为环或 Kronecker 箭图的温和代数。我们的第一个结果描述了分次温和代数的全部霍赫希尔德上同调。

定理 A。 设 A 为一个分次温和代数，它可能既不是同调光滑的，也不是适当的，并令 Σ_A 表示其分次标记曲面。那么，$\mathrm{HH}^\bullet(A,A)$ 具有一个 $\Bbbk$-线性（*Schauder*）基，其元素与由以下元素组成的集合构成双射：

- 基 $\mathrm{H}^1(\Sigma_A,\Bbbk)$ 的元素 f_1、……、 f_l；
- 对于每一条不可缩的保向路径 γ： $S^1 \to \partial\Sigma_A$（按同伦计），若其绕数为 ω，满足 $\omega \cdot \operatorname{char}\Bbbk$ 为偶数，且作为 γ 像的边界分支 B 要么完全标记，要么未标记，则取一对元素 $N^0(\gamma)$ 和 $N^1(\gamma)$；
- 对于 Σ_A 的每个恰有一个停止点的边界分支 B，取一个元素 $[B]$。

此外， $f_i \in \mathrm{HH}^1(A,A)$、$N^s(\gamma) \in \mathrm{HH}^{\omega+s}(A,A)$ 以及 $[B] \in \mathrm{HH}^\omega(A,A)$，其中 ω 表示 B的绕数。这里，如果边界分支 B 包含于 $\partial\Sigma_A$ 的指定子集 M 中，则称其为完全标记的；如果与其不相交，则称其为未标记的。 B 上的停止点按定义是 $B \setminus M$ 的一个连通分支。

事实上，我们证明了一个稍强的结果，并确定了每个分次温和代数的双分次 Hochschild 上同调，参见证明 2.18。下文中，我们将定理 A 中的元素与 $\mathrm{HH}^\bullet(A,\ A)$ 中对应的基元素相对应。根据部分缠绕福柯范畴与同调光滑分次温和代数之间的关系 [HKK17] ，定理 A 因此给出了所有与至少有一个停止点的分次标记曲面相关联的部分缠绕福柯范畴的霍赫希尔德上同调的描述。我们的下一个结果描述

HH•(*A*, *A*) 的 Gerstenhaber 括号在基下的表示。杯积的描述见证明 3.4。

定理 B. 设 A 与前文相同。以下结论成立：

(1) 对于 $1 \le i \le l$ 和 $v \in \mathrm{HH}^\bullet(A,A)$ （形式为 $N^s(\gamma)$ 或 $[B]$），

$$[f_i, v] = f_i(B)v,$$

其中，f_i 通过将 $B \cong S^1$ 与 $\mathrm{H}_1(\Sigma_A, \Bbbk)$ 中的一个元素相对应，并利用同构 $\mathrm{H}^1(\Sigma_A, \Bbbk) \cong$ 同态集$_{\Bbbk}(\mathrm{H}_1(\Sigma_A, \Bbbk)\ \Bbbk)$，在 B 处取值。

(2) 对于每条本原非可缩闭路 $\gamma\colon S^1 \to \Sigma_A$ 以及所有满足路径 γ^m 和 γ^n 符合定理 *A* 条件的 m、$n \ge 1$，

$$[\mathcal{N}^1(\gamma^m), \mathcal{N}^1(\gamma^n)] = (m-n)\cdot \mathcal{N}^1(\gamma^{m+n})$$
$$[\mathcal{N}^0(\gamma^m), \mathcal{N}^1(\gamma^n)] = m \cdot \mathcal{N}^0(\gamma^{m+n}).$$

(3) 基元素之间的所有其他括号均为零。

最后，定理 A 的双分次变体使我们能够刻画内在形式的分次温和代数。我们回顾一下，如果任意具有上同调 A 的分次 $\Bbbk$-代数 A 的 dg 或A_∞-代数 B 已经是形式的，也就是说，拟同构于 A，那么它就是内在形式的 。换言之，内在形式代数上不存在非平凡的高阶结构（$=A_\infty$-代数结构）。这一性质往往很有用，例如在比较不同三角范畴的生成元时。如果两个生成元的分次自同态环同构且内在形式，那么相应的三角范畴便自动等价。

定理 C (证明 4.1)。 设 A 是一个分次温和代数，它可能既非同调光滑也非适当，并假设 Σ_A 不含任何具有单个停止点且绕数为2的边界分支。那么，当且仅当 Σ_A 没有绕数为2的未标记边界分支时， A 是内在形式的。

我们强 烈地认为，即使去掉关于 Σ_A 的附加假设，这一结论仍然成立，参见证明 4.2 .

撰写本文期间，我们近日获悉边秀丽、Sibylle Schroll、Andrea Solotar、王晓创和温灿的工作 [BSS+] ，他们通过不同的方法描述了分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调及其 Gerstenhaber 括号和杯积。

致谢。本项目获得 Primus资助项目 PRIMUS/23/SCI/006 的支持。

记号。给定一个箭图 Q，我们分别用 Q_0 和 Q_1 表示其顶点集和箭集，并用 $\Bbbk Q$ 表示相应的路径代数。进一步地，我们用 s，$t\colon Q_1 \to Q_0$ 表示将箭 $\alpha \in Q_1$ 映射到其起点和终点的函数。箭的复合从右向左进行，也就是说，若 $s(\beta) = t(\alpha)$，则我们用 $\beta\alpha$ 表示它们的连接，因此也表示它们在 $\Bbbk Q$中的乘积。与顶点 $x \in Q_0$ 相关联的长度为零的平凡路径记为 e_x。

1. 温和代数与 Fukaya范畴

1.1. **分次温和代数与部分缠绕福柯范畴**。

定义 1.1. 一个**分次温和箭图** 是一个二元组 $(Q,\ I)$，由一个有限箭图 Q （其箭头按整数分次）和理想 $I \subseteq \Bbbk Q$ 组成，并满足以下所有条件：

(1) 对于每个顶点 $x \in Q_0$，至多有两个箭头 $\alpha, \beta \in Q_1$ 和至多两个箭头$\gamma, \delta \in Q_1$ 使得 $s(\alpha) = x = s(\beta)$ 且 $t(\gamma) = x = t(\delta)$。(2) 对于每个箭头 $\alpha \in Q_1$，至多存在一个箭头 β 使得 $t(\alpha) = s(\beta)$ 且 $\beta\alpha \in I$，并且至多存在一个箭头 $\gamma \in Q_1$ 使得 $s(\alpha) = t(\gamma)$ 且 $\gamma\alpha \in I$。(3) 对于每个箭头 $\alpha \in Q_1$，至多存在一个箭头 β 使得 $t(\alpha) = s(\beta)$ 且 $\beta\alpha \notin I$，并且至多存在一个箭头 $\gamma \in Q_1$ 使得 $s(\alpha) = t(\gamma)$ 且 $\gamma\alpha \notin I$。(4) I 由二次单项式 $\alpha\beta$生成，即长度为 2 的路径。

一个**分次温和代数**是一个分次 $\Bbbk$-代数，它作为分次代数同构于一个$\Bbbk Q/I$，其中（$Q,\ I$）是一个分次温和箭图，而 $\Bbbk Q/I$ 继承了箭头上给定分次所诱导的分次。对于 Q中的任意路径 q ，我们将其次数记为 $|q|$ 。

约定。除非另有明确说明，我们的讨论将始终排除这样的温和箭图：它们是带有单个顶点的环，或是 Kronecker 箭图。这些情形具有某些特殊性质，将另行处理。

分次温和代数作为某些 Fukaya范畴的形式生成元出现。

定义 1.2 （[HKK17]）。一个**分次标记曲面**是一个三元组（$\Sigma,\ \mathcal{M}\ \eta$），由以下对象组成 f

（1）一个带边界的光滑定向曲面 Σ ；（2）一个非空紧子集$\mathcal{M} \subseteq \partial\Sigma$ ，使得$\mathcal{M}$ 同胚于单位圆 S^1 的若干个副本与闭区间 $[a, b]$、 $a < b$的不交并；（3） Σ上的一个线场 η ，即射影化切丛的一个截面。

停止点是 $\partial\Sigma \setminus \mathcal{M}$ 的一个连通分支。若边界分支 B 满足**完全标记**，则称其为**完全标记**边界；若 $\mathcal{M}$ 未**标记**，则称其为**未标记**边界。

根据定义，线场 η 平滑地将其切空间中的一个 1 维子空间$\eta(x) \subseteq T_x\Sigma$ 关联到每个点 $x \in \Sigma$ x。从这个意义上说，可以将线场视为处处非零向量场的一种无定向推广。事实上，每个处处非零向量场 χ 在Σ 上都会诱导一个线场，该线场逐点赋予由 $\chi(x) \in T_x\Sigma$生成的 1 维子空间。然而，并非每个线场都由此产生。每个线场 η 都会给出一个**绕数函数**$\omega = \omega_\eta$ ，它为每条浸入闭曲线 γ: $S^1 \to \Sigma$ 赋予一个整数 $\omega(\gamma) \in \mathbb{Z}$，称为**绕数**。形式上，这是子流形 $\eta(\Sigma)$ 与 γ 的导数之间的交数，两者都被视为射影化切丛中的子流形。特别地，当 γ 被替换为方向相反的反向环时，其绕数会改变符号。更准确地说，在其定义域的任意点处， γ 的导数所生成的 1 维子空间

将其定义域 S^1 的一个嵌入 S^1 嵌入射影化切丛。在本文中，我们只讨论分次标记曲面的边界分支的绕数。根据定义，边界分支 $B \subseteq \partial\Sigma$的绕数$\omega_\eta(B)$，是任意一个与 $B \cong S^1$相关联的保定向嵌入 S^1 ，$\to \partial\Sigma$ 的绕数。ω_η 的不变性保证了 $\omega_\eta(B)$ 是一个定义良好的整数。

对于任意满足,$\mathcal{M}$ η与每个边界分支相交的分次标记曲面 (Σ)，[HKK17] 定义了一个预三角**部分缠绕 Fukaya 范畴** A_∞-范畴。记号中省略集合$\mathcal{M}$ 和线场 η，并将 Fukaya 范畴记作 Fuk(Σ)。Fuk(Σ) 的具体定义取决于对弧系的辅助选择；弧系是曲面中一组嵌入路径，其端点位于$\mathcal{M}$中。随后，Fuk(Σ) 中的高阶乘法通过所谓的圆盘序列来定义；圆盘序列是一些浸入圆盘，其边界由弧系中的弧构成。之所以可以称之为Σ 的*Fukaya* 范畴，是因为 Fuk(Σ) 在等价意义下不依赖于这些辅助数据。更多细节请参阅 [HKK17] 。

定理 1.3 ([HKK17])。 设 $(\Sigma,\mathcal{M}\ \eta)$ 是一个至少含有一个停止点的分次标记曲面。那么存在一个同调光滑[1] 分次温和代数，使得

$$\mathrm{Fuk}(\Sigma) \cong \mathrm{Perf}(A).$$

其底层箭图的顶点与选定的弧系构成双射。反过来也可以从分次温和代数A构造分次标记曲面 Σ_A，参见[PPP19、HKK17、LP20、OPS18] 以及证明 1.4。 Σ_A 的边界分支及其标记通过 Avella-Alaminos-Geiss 不变量以组合方式编码，参见第 1.4 节。

注 1.4。从一个同调光滑的分次温和代数 A 出发，可以构造一个规范的分次标记曲面 Σ_A，使得 Fuk(Σ_A) $\simeq$ Perf(A) [LP20]。对于适当分次温和代数，也有类似结果：若 B 是一个有限维分次温和代数，则存在一个分次标记曲面 Σ_B，使得 $\mathrm{D_{fd}}(B)$ 刻画 Fuk(Σ_B) [OPS18、BGO25]的某种（导出）完备化。这体现了适当分次温和代数与同调光滑分次温和代数之间的 Koszul 对偶 [OPS18]，以及[BGO25]中证明的 $\mathrm{D_{fd}}(B)$ 的生成性结果。在 B满足较宽松条件时，或者等价地，在 Σ_B满足较宽松条件时，Perf(B) 等价于的无穷小 *Fukaya* 范畴；在这些情形下，它与子范畴 $\mathrm{D_{fd}}$ (Fuk(Σ_B)) $\subseteq$Fuk(Σ_B) 一致。更详细的讨论参见[BGO25 第 9] 节。

注 1.5。证明 1.3 中用于描述 Fukaya 范畴的分次温和代数并非唯一。已有研究表明，对于非分次温和代数（ [APS23、Opp19] ）、同调光滑分次温和代数（ [JSW23] ），以及同调光滑或适当的分次温和代数（ [Opp25a] ），这类分次温和代数的完美导出范畴等价，当且仅当 $\Sigma_A \cong \Sigma_B$ 作为分次标记曲面。后者意味着存在一个微分同胚ψ: $\Sigma_A \to \Sigma_B$，使得 $\psi(\mathcal{M}_A) = \mathcal{M}_B$，并且沿$\psi$ 拉回 η_B 所定义的线场与 η_A同伦。等价地，分次温和代数的导出等价类与（Σ, $\mathcal{M}$ η）在映射类群作用下的轨道一一对应；该映射类群由将$\mathcal{M}$ 映到自身的微分同胚 $\Sigma \to \Sigma$ 的同伦类组成。根据 [LP20]，存在少数几个相当明确的不变量，可用于判定分次标记曲面

[1]若对角双模 A 是微分分次代数 A-双模的导出范畴中的紧对象，则称微分分次代数 A **同调光滑**。$\mathcal{D}(A \otimes A^{\otimes})$。

A 和 B 的曲面是否属于同一轨道，从而判定 $\mathsf{Perf}(A) \simeq \mathsf{Perf}(B)$ 是否成立。根据 [BGO25]，的结果，这等价于存在一个等价 $\mathsf{D}_{\mathrm{fd}}(A) \simeq \mathsf{D}_{\mathrm{fd}}(B)$。

1.2. 路径与反路径。 固定一个分次温和箭图 (Q, I) 及其关联的分次温和代数 $A = \Bbbk Q/I$。

定义 1.6。 路径 $p = \alpha_1 \cdots \alpha_l, \alpha_i \in Q_1$ 在 Q 中称为

- 一条**反路径** A，如果对所有 $1 \leq i < l$，$l(p) = 0$ 或 $\alpha_i\alpha_{i+1} \notin I$。
- 一条**路径** A，如果对所有 $1 \leq i < l$，$l(p) = 0$ 或 $\alpha_i\alpha_{i+1} \in I$。

上述反路径（分别地，路径）p 属于 A，若 $s(p) = t(p)$ 且 $\alpha_l\alpha_1 \notin I$（分别地，$\alpha_l\alpha_1 \in I$），则称其为完全的。特别地，完全反路径（分别地，路径）的任意正整数次幂仍是完全反路径（分别地，路径）。我们用 $\mathsf{rot}(p) = \alpha_2 \cdots \alpha_l\alpha_1$ 表示 p 的旋转，并用 $\mathsf{rot}^n(p)$ 表示这一过程的 n 次迭代；当 n 为负数时，按显然的方式定义，使 rot^{-n} 为 rot^n 的逆运算。由 $p \sim \mathsf{rot}(p)$ 生成的等价关系的等价类称为旋转类。若反路径（分别地，路径）p 属于 A，且不被更长的反路径（分别地，路径）A 真包含，则称其为极大的。对于极大反路径 p，至多存在一条路径 $p_\odot$ 属于A，满足 $s(p_\odot) = s(p)$、$t(p_\odot) = t(p)$，且 $p_\odot$ 的首（分别地，末）箭不同于 p 的首（分别地，末）箭。若不存在这样的路径，则记为 $p_\odot = \emptyset$。

根据定义，完全（反）路径 p 的任意旋转仍是完全（反）路径。我们称满足 $\mathsf{rot}^n(p) = p$ 的最小数 $n \geq 1$ 为 p 的**周期**，并称商 $e(p) := {}^{l(p)}n$ 为 p的**指数**。指数为 1 的完全（反）路径称为**本原**。 —

对于 A的完全路径 q，定义 $\omega(q) := -|q|$、$n(q) := \infty$；对于完全反路径p，定义 $\omega(p) := |p| - l(p)$ 和 $n(p) = 0$。注意，在这两种情况下，$\omega(x^n) = n\omega(x)$ 和 $\omega(-)$ 仅取决于完全路径或反路径的旋转类。

1.3. 光滑性与适当性。 与之前一样，我们将分次代数视为微分平凡的微分分次代数。回顾一下，微分分次代数 B 是**同调光滑** 的，若与 B 相关联的对角微分分次B-双模是$\mathcal{D}(B \otimes B)$中的紧对象，其中该范畴是微分分次 B-双模的导出范畴。此外，若其总上同调 $\mathrm{H}^\bullet(A)$ 是有限维向量空间，则称 B 是**适当** 的。特别地，分次代数在此意义下适当，当且仅当它是有限维的。分次温和代数的这些性质有直接明了的刻画。

命题 1.7 ([HKK17，命题 3。4])。 设(Q, I) 是一个分次温和箭图，A 表示其关联的分次温和代数。那么，

(1) A 是同调光滑的，当且仅当(Q, I) 不包含完全反路径；等价地，Σ_A 没有未标记边界分支；(2) A 是适当的，当且仅当(Q, I) 不包含完全路径；等价地，Σ_A 没有完全标记的边界分支。

1.4. AAG 不变量与边界分支。 对于下一个定义，我们形式上将箭头 $\alpha \in Q_1$ 的逆元 α^{-1} 添加到箭图中，使得 $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$且 $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$。由此得到扩展箭图 $Q^{\pm} \supseteq Q$，其中若一条路径不包含形如 $\alpha\alpha^{-1}$ 或 $\alpha^{-1}\alpha$ 的子路径（其中 $\alpha \in Q_1$），则称其为**约化的**。赋值 $\alpha \in \alpha^{-1}$ 可唯一地扩展为反 involution[2] $Q^{\pm}$。特别地，路径 $p = p_1 \cdots p_l$ 位于$Q \subseteq Q^{\pm}$ $p^{-1} = p_l^{-1} \cdots p_1^{-1} \in Q^{\pm}$中。

定义 1.8。 A 的**边界循环** 或者是 A的完全反路径、A的完全路径，或者是 $Q^{\pm}$中的闭路径 $c = p_1q_1p_2 \cdots p_rq_r$，其中 $p_{r+1} = p_1$ 和 $q_{r+1} = q_1$，满足

- 每个 q_i 都是 A的一条路径,
- 每个 p_i 都是 A的反路径的逆,
- c是约化的
- 对所有 $1 \leq i \leq r$， $s(p_i) = t(q_i)$ 和 $s(q_i) = t(p_{i+1})$。

定义 $n(c) := r$ 和 $\omega(c) := r + \sum_{i=1}^{r}(|q_i| - l(p_i)))$。将仅相差旋转的边界循环视为相同，也就是说，$c = p_1q_1 \cdots p_rq_r$与 $p_2q_2 \cdots p_rq_rp_1q_1$等价。

边界循环也称为 [LP20]中的组合边界分支 。我们注意到， c 是约化的这一条件，等价于假设对于每个 $1 \leq i \leq r$， p_i 的首箭头不是 q_i 的末箭头的逆，且 p_{i+1} 的末箭头不是 q_i 的首箭头的逆。

命题 1.9（参见 [LP20, Opp19, CSSS24]）。 $c \mapsto B_c$ 与 A 的边界循环等价类集合和 Σ_A的边界分支集合之间存在一个双射。

在此双射下，完全路径对应于满足 $C \subseteq \mathcal{M}$的边界分支 C，而完全反路径对应于满足 $C \cap \mathcal{M} = \emptyset$的边界分支 $C \subseteq \partial\Sigma_A$。对于其他每个边界循环 c，证明 1.8 中的数 r 与 $\mathcal{M} \cap C$的连通分支数相同，其中 C 表示与 c关联的边界分支。在所有情况下， C 的绕数都与 $\omega(c)$一致，参见 [LP20，命题 3.21]和 [Opp19，推论 2.17]。接下来，我们回顾 Avella-Alaminos-Geiss 不变量，该不变量最初由 [AAG08], 定义，随后在 [LP20]中得到推广。

定义 1.10. A **Avella-Alaminos-Geiss 不变量**（简称 AAG 不变量）是函数 $\phi_A \colon (\mathbb{N}_{\geq 0} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_{\geq 0}$，满足： $\phi_A(n, m)$ 是满足 $n(c) = n$ 且当 $n \neq \infty$ 时 $m = n - \omega(c)$ 的 A 的边界循环的数量。此外，按定义， $\phi_A(\infty, m)$ 是满足 $\omega(c) = -m$ 的完全反路径 c 的数量。

若 A 同调光滑或适当，则已知 ϕ_A 是一个导出不变量；也就是说，若 B 是一个分次温和代数，且 $\mathrm{Perf}(A) \simeq \mathrm{Perf}(B)$，那么 $\phi_A = \phi_B$。这可由此类分次温和代数之间导出等价的刻画得出，参见证明 1.5。在本文中， $\phi_A(n, m)$ 在 $n \in \{0, 1, \infty\}$ 时的取值发挥着特殊作用，因为它们可以用 $\mathrm{HH}^{\bullet}(A, A)$ 来解释。我们注意到，证明 1.8 的条件意味着，若 c 是

[2]箭图 E 的反 *involution* 是一个同构 $\iota \colon E \to E^{\mathrm{op}}$，满足 $\iota^{\mathrm{op}} \circ \iota = \mathrm{Id}_E$，其中 E^{op} 表示将所有箭头的定向反转后从 E 得到的相反箭图，且 $\iota^{\mathrm{op}} \colon E^{\mathrm{op}} \to (E^{\mathrm{op}})$ 表示 ι 的相反对象。换言之， ι 在顶点和路径上诱导一个从 E 到自身的双射，但会将 E 中从 x 到 y 的路径映射为 E 中从 $\iota(x)$ 到 $\iota(y)$ 的路径。

一条满足 $n(c) = 1$ 的边界循环，那么要么 p_1 是一条极大反路径，且 $p_1^{-1}{}_{\odot} = q_1$；要么 p_1 是平凡的，且 q_1 是 A 的一条闭极大路径。

注 1.11. 证明 1.8 与 LP 中的定义略有不同，后者规定：若 c 是完全路径或完全反路径，则为 $n(c) = 0$；而证明 1.8 对反路径 p 则规定为 $n(p) = \infty$。因此，若 A 既非同调光滑也非适当，则证明 1.8 是一个更精细的量，可由此恢复他们的版本。当然，若 A 同调光滑或适当，则不存在完全路径或完全反路径；将 ϕ_A 的值 ∞ 替换为 0 后，证明 1.8 与 LP 中的定义基本等价。在 Koszul 对偶下，若 $n \notin \{0, \infty\}$，则有等式 $\phi_{A^!}(n, m) = \phi_A(n, m)$；而对 $n \in \{0, \infty\}$，有 $\phi_{A^!}(n, m) = \phi_A(\frac{1}{n}, m)$，其中 $\frac{1}{0} := \infty$ 且 $\frac{1}{\infty} := 0$。

注 1.12。边界循环的集合可以通过算法计算：任选一个顶点，以及一条包含该顶点的极大路径或反路径 $p_1 \quad A$。随后 p_1 即可唯一地补全为一个边界循环。特别地，每个顶点至多出现在两个边界循环中。更多细节请参见 [AAG08] 或 [LP20]。

注 1.13。若 A 是一个适当分次温和代数，则 $\phi_A(m,\ n)$ 统计由 $(n,\ n-m)$-分数 Calabi-Yau 对象的特殊集族的同构类构成的轨道数；也就是说，这些对象属于 $X \in \mathrm{Perf}(A)$，且满足 $\mathbb{S}^n X \cong X[n-m]$，其中 $\mathbb{S}$ 表示 Serre 函子。对ϕ_A 的这种解释最初见于非分次情形下的 [AAG08]，以及任意分次下的 [Opp19]。若 $(n,\ m) \neq (1,\ 1)$，则所有 $(n,\ n-m)$-分数 Calabi-Yau 对象在此意义下都是特殊的，而霍赫希尔德上同调的导出 Morita 不变性为所有 $(n,\ m) \neq (1,\ 1)$ 的 $\phi_A(n,\ m)$ 的导出 Morita 不变性提供了另一种证明。

2. 分次温和代数的霍赫希尔德上同调

2.1. 分次代数的双分次 Hochschild 上同调。我们遵循 [RW11]中的符号约定，这些约定特化后与 [CSSS24]中的约定一致。在本节中，我们固定一个分次代数 B，并将其视为微分为零的微分分次代数。其霍赫希尔德复形 $C(B)$ 是这样的复形：其 d 次齐次分量为

$$\prod_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}^{d-n}(B^{\otimes n}, B).$$

这是一个自然的赋范向量空间，其中由下式定义的子集 $\{W_j C(B)\}_{j\geq 0}$ 构成零向量邻域的一个基，这与局部环上的通常进拓扑类似。

$$W_j C(B) = \prod_{n\geq j} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}^{d-n}(B^{\otimes n}, B)$$

这使得 $C(B)$ 成为一个巴拿赫空间。霍赫希尔德微分是在 $C(B)$ 上唯一的连续微分，并且在 f 上由 $B^{\otimes n} \to B$ 通过下式确定

$$d(f) = (-1)^{|f|}\Big(m_B(\mathbf{1}\otimes f) + (-1)^{n+1} m_B(f\otimes \mathbf{1}) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1} f(\mathbf{1}^{\otimes i}\otimes m_B\otimes \mathbf{1}^{n-1-i})\Big), \quad (2.1)$$

其中 $m_B\colon\ B^{\otimes 2} \to B$ 表示乘法，$\mathbf{1}$ 表示 B的恒等映射，$|f|$ 表示 f的齐次次数。分次向量空间之间齐次映射 g 和 h 的张量积 $g \otimes h$

在齐次元素 u, v 上求值。使用 Koszul 符号规则

$$g \otimes h(u \otimes v) = (-1)^{|u||g|} g(u) \otimes h(v).$$

霍赫希尔德复形是一个自然双复形的乘积总化 $C^{\bullet,\bullet}(B)$。在 $C^{\bullet,\bullet}(B)$ 中，双次数为 $(n, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ 的齐次元素是一个齐次线性映射 $f\colon B^{\otimes n} \to B$，其次数为 $n + d$，我们也将其称为 f 的**总次数**。d-微分在 $C^{\bullet,\bullet}(B)$ 上为零，而 n-微分就是霍赫希尔德微分，它关于 d-次数保持齐次，且次数为 0。因此，存在一个典范同构

$$\mathrm{HH}^i(B, B) \cong \prod_{n+t=i} \mathrm{HH}^{n,t}(B, B),$$

其中，$\mathrm{HH}^{n,t}(B, B)$ 表示复形 $C^{\bullet,t}(B)$ 关于 n-微分（=霍赫希尔德微分）的第 n 个上同调。$\mathrm{HH}^\bullet(B, B)$ 从 $C(B)$ 继承巴拿赫空间结构。我们将利用这一点讨论 $\mathrm{HH}^\bullet(B, B)$ 中的无穷和，或者等价地，讨论元素 $(x_n)_{n\geq 0}$ 的无限乘积，其中 $x_n \in \mathrm{HH}^{n,t}(B, B)$。在此背景下，我们回顾一下：巴拿赫空间中的一组向量若使得每个向量都能唯一地表示为该集合中向量的有限或无穷线性组合，则称其为 *Schauder* 基。与向量空间的“通常”基之间的区别，在研究非同调光滑的适当分次温和代数的霍赫希尔德上同调时将发挥作用。

2.2. **Gerstenhaber 括号与杯积**。如前所述，我们遵循 [RW11] 中的约定。我们将使用简写记号 $\mathbf{1} = \mathrm{Id}_A$。对于 $f \in C^{m,r}(B)$、$g \in C^{n,s}(B)$ 以及一个 $1 \leq i \leq m$，定义

$$f \circ g := \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(i-1)(n-1)} f \circ_i g,$$

其中

$$f \circ_i g := (-1)^{(m-1)(n+s-1)} f\big(\mathbf{1}^{\otimes(i-1)} \otimes g \otimes \mathbf{1}^{\otimes(n-i)}\big).$$

这里，Koszul 符号规则所涉及的次数是 s of g 的齐次次数。随后，关于这个平移后的总次数，对 $\circ$ 取分次交换子，即，$C(A)[1]$, 上的次数为此次数，从而得到

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(m+r-1)(n+s-1)} g \circ f.$$

结合前述微分，$[-,-]$ endows $C^\bullet(A)[1]$ 具有微分分次李代数的结构。在平移后的上同调 $\mathrm{HH}^{\bullet+1}(B, B)$ 上诱导的分次李括号就是通常的 Gerstenhaber 括号。同样，霍赫希尔德上同调上的杯积源自链层次上的运算

$$f \cup g := m_2(f \otimes g).$$

结合前述微分，它赋予 $C(A)$ 微分分次代数的结构。

2.3. **双分次 Bardzell 分解**。在本节中，我们固定一个分次温和箭图 (Q, I) 及其相应的分次温和代数 A。对于 $n \geq 1$，令 $\mathcal{P}_n$ 表示 A 中长度为 n 的反路径集合。特别地，$\mathcal{P}_1 = Q_1$ 和 $\mathcal{P}_0 := Q_0$。路径的次数赋予 $\Bbbk\mathcal{P}_n$ 一个分次，我们称之为**内部分次**。这样，$\Bbbk\mathcal{P}_n$ 自然成为半单环 $E := \Bbbk$ 上的分次双模，而 $A \otimes_E \mathcal{P}_n \otimes_E A$ 则继承由诱导的内部分次所确定的分次A-双模结构。**双分次 Bardzell 分解** 为

A 是由分次 A-双模构成的复形 $\mathcal{R}_\bullet = (\mathcal{R}_n)_{n\geq 0}$，其

$$\mathcal{R}_n = A \otimes_E \Bbbk\mathcal{P}_n \otimes_E A,$$

。其微分 $d_n\colon \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_{n-1}$ 对反路径 $u = \alpha_1 \dots \alpha_n$, $\alpha_i \in Q_1$ 的定义如下：

$$d_n(1 \otimes_E u \otimes_E 1) = \begin{cases} \alpha_1 \otimes_E \alpha_2 \cdots \alpha_n \otimes_E 1 + (-1)^n 1 \otimes_E \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes_E \alpha_n, & \text{if } n \geq 1; \\ \alpha_1 \otimes_E e_{t(\alpha_1)} \otimes_E 1 - 1 \otimes_E e_{s(\alpha_1)} \otimes_E \alpha_1, & \text{if } n = 1; \end{cases}$$

我们将 A^e 和 E^e 分别记为 $\Bbbk$ 上的包络代数。于是存在一个分次 A-双模同构

$$\begin{aligned} \varphi\colon \operatorname{Hom}_{E^e}(\Bbbk\mathcal{P}_n, A) &\xrightarrow{\quad\sim\quad} \operatorname{Hom}_{A^e}(\mathcal{R}_n, A), \\ f &\longmapsto \Big(a \otimes u \otimes b \mapsto (-1)^{|f||a|} a f(u) b\Big), \end{aligned} \tag{2.2}$$

使得 $\varphi(f) = m_A(m_A(1 \otimes f) \otimes 1) = m_A(1 \otimes m_A(f \otimes 1))$。因此，

$$C^\bullet_{\mathcal{P}}(A) \coloneqq \big(\operatorname{Hom}_{E^e}(\Bbbk\mathcal{P}_n, A)\big)_{n\geq 0}$$

这是一个分次 A-双模的上链复形。通常将 $C^n_{\mathcal{P}}(A)$ 视为由平行路径集合张成的向量空间

$$(\mathcal{P}_n \parallel Q) \coloneqq \{(p,q) \mid p \in \mathcal{P}_n, q \notin I \text{ path}\colon s(\alpha) = s(\beta) \wedge t(\alpha) = t(\beta)\}.$$

具体而言，$(p,q) \in (\mathcal{P}_n \parallel Q)$ 与 $p^* \cdot q$ 对应，其中 $p^* \in \operatorname{Hom}_{E^e}(\Bbbk\mathcal{P}_n, \Bbbk)$ 表示相对于基 $\mathcal{P}_n$ 的 p 的对偶。特别地，(p,q) 对应于 $C_{\mathcal{P}}(A)$ 中双次数 $(l(p)\ |q| - |p|)$ 的一个元素，其中第一项对应于上同调次数，第二项对应于内部次数。由此，$C_{\mathcal{P}}(A)$ 的微分如下给出。对于 $f = (p,q) \in (\mathcal{P}_n \parallel Q)$，令 $n = l(p)$ 且 $s \coloneqq |f| = |q| - |p|$。那么

$$d(p,q) = d_L(p,q) + d_R(p,q) \coloneqq (-1)^s \Big(\sum_\alpha (-1)^{s|\alpha|} (\alpha p, \alpha q) - \sum_\beta (-1)^n (p\beta, q\beta) \Big), \tag{2.3}$$

其中，左侧（分别为右侧）的求和按满足 αp（分别为 $p\beta$）属于 $\mathcal{P}_{n+1}$ 且 $\alpha q \notin I$（分别为 $q\beta \notin I$）的箭头 $\alpha \in Q_1$（分别为 $\beta \in Q_1$）取遍。注意，若 $n \geq 1$，由于温和箭图中关系的性质，这样的 α（分别为 β）至多存在一个。项 $d_L(p,\ q)$（分别为 $d_R(p,\ q)$）对应于 (2.3) 中包含符号 $(-1)^s$（分别为 $-(-1)^s$）的第一（分别为第二）个求和。

2.4. **Hochschild 复形与 Bardzell 复形之间的比较映射**。类似于未分次情形 [RR18 的第 4] 节，对于分次 A-双模的复形，有拟逆链同伦等价

$$\mathcal{R}_\bullet \underset{V}{\overset{U}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}_\bullet, \qquad V \circ U = \mathrm{Id}_{\mathcal{R}_\bullet},$$

其中 $\mathcal{B}_\bullet = (\mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ 表示分次 bar 分解。映射 U 和 V 诱导出 U^* 和 V^*，它们分别以相反方向连接 $C(A)$ 和 $C_{\mathcal{P}}(A)$，满足 $U^* \circ V^* = \mathrm{Id}_{C_{\mathcal{P}}(A)}$，并表明 $C_{\mathcal{P}}(B)$ 是 $C(B)$ 的直缩。我们回顾一下，$\mathcal{B}_n = A^{\otimes_E (n+2)}$，且微分由下式给出

$$d_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathbf{1}^{\otimes_E i} \otimes_E m_A \otimes_E \mathbf{1}^{\otimes(n-1-i)},$$

其中 $m_A\colon A^{\otimes 2}\to A$ 表示乘法映射。映射 U 和 V 的定义与非分次情形完全相同，也就是说，对于 $v=1\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes 1$ 和 $n\geq 2$，有

$$V(v)=\begin{cases} v'\otimes\alpha\otimes v'', & \text{if } v_1\cdots v_n=v'\alpha v'', \text{ where } \alpha\in\mathcal{P}_n,\ v_i,v',v''\notin I;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{2.4}$$

以及

$$V^1(1\otimes v\otimes 1):=\begin{cases} 0, & \text{if } l(v)=0;\\ \sum_{i=1}^{l(v)}\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\otimes\alpha_i\otimes\alpha_{i+1}\cdots\alpha_n, & \text{if } v=\alpha_1\cdots\alpha_n,\ \alpha_j\in Q_1.\end{cases}$$

$$V^0(1\otimes x\otimes 1)=1\otimes x\otimes 1,$$

对于 $x\in Q_0$ 且在识别 $A^{\otimes_E 2}\cong A\otimes_E E\otimes_E A$ 的条件下。映射 U 更容易描述，对于 $u=\alpha_1\cdots\alpha_n\in\mathcal{P}_n$, $n\geq 1$，其定义为

$$U(1\otimes u\otimes 1)=1\otimes\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n\otimes 1,$$

并且对于所有 $x\in Q_0$，$U_0(1\otimes x\otimes 1)=1\otimes x\otimes 1$，同样是在上述识别下。考虑 Koszul 符号规则，在应用 $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,A)$ 并将自由 A-双模之间的态射识别为某些 E-线性同态[3]（如 (2.2) 所示）之后，即可得到公式 (2.1)。

2.5. **Bardzell 分解上的诱导运算**。映射 U^* 和 V^* 可以将二元运算 $\star$（如 $\circ_i$、$[-,-]$ 和 $\cup$）从 $C(A)$ 拉回到 $C_{\mathcal{P}}(A)$ 上的运算，其公式为

$$f\star g:=U^*\big(V^*(f)\star V^*(g)\big),$$

其中 f，$g\in C_{\mathcal{P}}(A)$。现在我们给出诱导运算 $\circ_i$ 和 $\cup$ 在 $C_{\mathcal{P}}(A)$ 上的显式公式，它们推广了 [RR18 第 4 节中的运算2]。

为使记号更简洁，我们将形如 $q_1\otimes\cdots q_n$ 的初等张量选作向量空间 $A^{\otimes_E n}$ 的一组基，其中 q_1、…、$q_n\notin I$ 是 Q 中可复合的路径。若 q 是一条路径，满足 $t(q)=t(q_1)$ 且 $s(q)=s(q_n)$，则我们用 $(q_1\otimes\cdots\otimes q_n,q)$ 表示 $C^{n,\bullet}(A)$ 中的对偶元素，它将 $q_1\otimes\cdots q_n$ 映至 q，并将 $A^{\otimes_E n}$ 的所有其他基元素映至零。$C^{n,\bullet}(A)$ 中的每个元素都是此类对偶元素的（可能无限）和。当 A 是无限维时，就需要无限和，因为在这种情况下，$C^{n,\bullet}(A)$ 是 A 的若干份拷贝的无限乘积。下文中，对于一对 (u,v)，若 u 和 v 是 Q 中的路径，则当 u 不是定义良好的路径、不是反路径，或 $v=0$ 不在 A 中时，我们将其视为 $C_{\mathcal{P}}(A)$ 中的零元素。对于齐次的 (p_1,q_1)、$(p_2,q_2)\in C_{\mathcal{P}}(A)$，例如，这意味着若 $s(p_1)\neq t(p_2)$、$\alpha_m\beta_1\in I$，或者若 $q_1q_2\in I$，我们就将 $(p_1p_2,q_1q_2)=0$ 视为零。注意，$(p,q)\in C_{\mathcal{P}}(A)$ 的总次数为 $|(p,q)|:=l(p)+|q|-|p|$。

注意，对于任意齐次的 $(p,q)=(\alpha_1\cdots\alpha_n,q)\in C^{n,s}{}_{\mathcal{P}}(A)$，$n\geq 2$，

$$V^*((p,q))=\sum_{u,v}(u\alpha_1\otimes\alpha_2\otimes\cdots\otimes\alpha_{n-1}\otimes\alpha_n v,uqv),$$

其中，该（可能是无限）求和以所有满足 $u\alpha_1,\alpha_n v\notin I$ 和 $uqv\notin I$ 的（可能是平凡的）路径 u,v 为指标。对于 $n=1$，有 $V^*((p,q))=(\alpha_1\otimes\cdots\alpha_n,q)$，并且对于 $x\in Q_0$，还有 $V^*((x,q))=(x,q)$。除非 $q_1,\ldots,q_m$ 是箭且 $q_1\cdots q_m$ 是反路径，否则 U^* 将元素 $(q_1\otimes\cdots\otimes q_m,q)\in C^{m,\bullet}(A)$ 映为零。最后，若 $x\in Q_0$，则 $U^*((x,q))=(x,q)$。

[3]式（2.1）中对 $m_B(\mathbf{1}\otimes f)$ 求值时出现的符号源于这一识别。

现在给出 $\cup$ 和 $\circ_i$ 在 $C_{\mathcal{P}}(A)$ 上的运算。具体而言，对于 $(p_1,q_1)\in C^{m,r}\mathcal{P}(A)$ 和 $(p_2,q_2)\in C^{n,s}\mathcal{P}(A)$，其中 $p_1=\alpha_1\cdot\cdot\alpha_m$ 且 $p_2=\beta_1\cdot\cdot\beta_n$，$\alpha_i,\beta_j\in Q_1$，对于 $1\le i\le m$，可得

$$(p_1,q_1)\cup(p_2,q_2)=(-1)^{(|q_2|-|p_2|)|p_1|}(p_1p_2,q_1q_2), \tag{2.5}$$

对于$\circ_i$，有四种情况。首先，

$$(p_1,q_1)\circ_i(p_2,q_2)=(-1)^{(m-1)(n+s-1)+|\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}|(|q_2|-|p_2|)}(\alpha_1\cdot\cdot\cdot\alpha_{i-1}p_2\alpha_{i+1}\cdot\cdot\cdot\alpha_m,q_1) \tag{2.6}$$

当且仅当 $1<i<m$ 且 $q_2=\alpha_i$时。其次，

$$(p_1,q_1)\circ_1(p_2,q_2)=(-1)^{(m-1)(n+s-1)}(p_2\alpha_2\cdots\alpha_m,uq_1) \tag{2.7}$$

若 $l(p_1)\ge 2, l(q_2)\ge 2$ 且 $q_2=u\alpha_1$，其中某条路径 u 必然不包含于 I中。下一种情况是

$$(p_1,q_1)\circ_m(p_2,q_2)=(-1)^{(m-1)(n+s-1)+|\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}|(|q_2|-|p_2|)}(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}p_2,q_1u), \tag{2.8}$$

若 $l(p_1)\ge 2, l(q_2)\ge 2$ 且 $q_2=\alpha_mu$，其中某条路径 u 必然不包含于 I中。最后一种情况是前两种情况的混合，即当 $l(p_1)=1$，从而 $m=1$，在这种情况下

$$(p_1,q_1)\circ_1(p_2,q_2)=(-1)^{(m-1)(n+s-1)}(p_2,uq_1v) \tag{2.9}$$

若 $q_2=u\alpha_1v$ 对于某些路径 u，v。所有不属于上述任何情形的表达式 $f\circ_i g$ 均为零。

2.6. 霍赫希尔德上同调的计算。现在，我们将分次温和代数的霍赫希尔德上同调描述为一个向量空间。我们的证明基于与 Bardzell 微分相关联的图；从离散 Morse 理论的视角来看，该图自然出现，参见 [Tam21]。这使我们能够利用该图的组合性质，简化组合论证。

2.6.1. 图与典范分解。令 G 表示顶点为 $G_0:=\{0\}\sqcup\bigsqcup_{n\ge0}(\mathrm{P}_n\parallel Q)$ 的箭图；当用来自 $\overline{G_0}\setminus\{0\}$ 的元素的线性组合表示 $d_L(x)$（分别为 $d_R(x)$）时，若 y 以非零系数出现，则该箭图中有一条标记为 L（分别为 R）的箭 $x\to y$。若 $d_L(x)=0$（分别为 $d_R(x)=0$），我们也添加一条标记为 L（分别为 R）的箭 $x\to 0$。我们将 $G\subseteq G$ 记为由 $\{0\}$ 以及所有满足 $l(p)+l(q)\ge 1$ 的顶点 (p,q) 所张成的全子箭图；也就是说，我们从 G 中排除形如 (x,x)、$x\in Q_0$ 的顶点。我们还考虑分别由非零顶点张成的全子箭图 $G^\star\subseteq G$ 和 $G^\star\subseteq G$。下面记录几个初等观察：

(1) G 中的箭由其目标和标签唯一确定。

(2) $\overline{G}$ 没有有向环，其箭在其顶点集上定义了一个偏序；若存在一条从 x 到 y的路径，则有$x<y$。它以 0 为最大元，且每个 $(x,\ x)$,$x\in Q_0$ 都是极小元。“高度映射” $h\colon G_0\setminus\{0\}\to\mathbb{N}$, $(p,\ q)\mapsto l(p)$ 和$h'\colon G_0\setminus\{0\}\to\mathbb{N}$, $(p,\ q)\mapsto l(q)$ 均为保序映射。

(3) 箭图 G 是一棵二叉树。更准确地说，G 的每个顶点 $v=(p,q)$ 都恰好是两条箭头的源点，其中一条的标签为 L，另一条的标签为 R。$G^\star$ 中的每个顶点都是

至多两条箭头的目标；如果有两条，它们的标签不同。顶点 (x,x)、 $x\in Q_0$ 至多是 4 条箭头的源点，且每个标签至多对应 2 条箭头。

(4) 从 x 到 $d_L(x)$ 和 $d_R(x)$ 的映射会在偏序集L， R: $G_0\to G_0$ 上诱导自同态，其中 $L^2=R^2$ 等于常值映射 $G_0\to\{0\}$，且 $R\circ L=L\circ R$。更一般地，对于任意子集 $U\subseteq G_0$，令 $L(U)$（分别地， $R(U)$）表示这样的顶点集合 y：它们是某个标签为 L、源点位于 U中的箭的目标。于是，对所有$U\subseteq G_0$， $L^2(U)=\{0\}=R^2(U)$，且 $L(R(U))=R(L(U))$。

(5) 若 $v\in\overline{G_0}$ 使得 $0\neq u\in L(v)\cap R(v)$，则对于某个 $x\in Q_0$，有 $v=(x,\ x)$，并且存在一个环 $\alpha\in Q_1$，满足 $s(\alpha)=t(\alpha)=x$。特别地，若 $v\in G_0$，则 $\{L(v)\ R(v)\}$ 线性无关或包含 0。

定义 2.1. 对于 $v\in G^\star$，若顶点 w满足 $v\in L(w)\cup R(w)$，则称其为 v的**父顶点**，而 v是 w的**子顶点**。因此，任意两个顶点至多有一个公共子顶点，且每个顶点至多有两个父顶点。拥有公共子顶点的父顶点称为**邻点**。这在顶点上定义了一个等价关系，其等价类称为**邻域**。因此，邻域是一个子集 $V\subseteq G^\star$，其中包含其每个元素的邻点。子集 $V\subseteq G^\star$ 的邻域是包含 V的最小邻域。若一个邻域与其每个元素的邻域重合，则称其为**原子的**。

我们利用上述性质 (1)-(5)，为每个非零 $f\in C_{\mathcal{P}}(A)$ 构造一个特殊分解。将 f唯一地写成有限和 $f=\sum_{j\in J}\lambda_j(p_j,q_j)$，使得 $\lambda_j\in\Bbbk^\times$，并且对所有 $i\neq j\in J$，都有 $(p_i,q_i)\neq(p_j,q_j)$。然后定义 $V(f):=\{(p_j,q_j)\mid j\in J\}\subseteq G^\star$，并将其基数 $|J|$称为 f的秩。特别地，对所有 $f\in C_{\mathcal{P}}(A)$，有 $V(d(f))\subseteq L(V(f))\cup R(V(f))$。对于 $v=(p_j,q_j)\in V(f)$，定义 $\lambda_f(v):=\lambda_j$。任意划分 $V(f)=\bigsqcup_{x\in\chi}V_x$，$V_x\neq\emptyset$都会给出和分解 $f=\sum_{x\in\chi}f_x$，$f_x=\sum_{j\in V_x}\lambda_j(p_j,q_j)$。定义 $G(f)$为由 $V(f)$中的顶点及其子节点张成的全子箭图。 $G(f)$与 G和$G^\star$的交分别定义了 G和 $G^\star$的全子箭图 $G(f)$和 $G^\star(f)$。集合 $V(f)$可分解为互不相交的层集 $V_{n,n'}(f):=h^{-1}(n)\cap h'^{-1}(\overline{n'})\cap V(f)$。另一种划分来自 $G^\star(f)$的底层图的连通分支。我们也将 f所对应的和项称为其连通分支。于是，若 f只有一个连通分支，就称其为连通的；若对某对 $n,n'\in\mathbb{N}$，有 $V(f)=V_{n,n'}(f)$，就称其为分层的。将每个非空的 $V_{n,n'}(f)$分解为其连通分支后，我们得到 $V(f)$的一个划分，以及 $f=\sum_{j\in J}f_j$ 的一个和分解，使得每个 f_j 都是连通且分层的。我们分别称之为典范划分和典范分解。元素f_i 称为 f 的原子；若 f 是单个原子的和，则称其为原子的。这些定义直接带来以下结论。

引理 2.2。若 $f\in C_{\mathcal{P}}(A)$是分层的，那么只要 $d(f)$ $d_L(f)$和 $d_R(f)$非零，它们也都是分层的。若 f是原子的，那么 $V(f)$的邻域也是如此。

现在，也很容易验证以下性质。

引理 2.3。 设 $0 \neq f \in C_{\mathcal{P}}(A)$，并设 $V(f) = \bigsqcup_{j\in J} V_j$为典范划分。那么对所有$i \neq j \in J$，

$$\Big(L(V_i) \cup R(V_i)\Big) \cap \Big(L(V_j) \cup R(V_j)\Big) = \emptyset.$$

换句话说， V_i 和 V_j 没有共同的子节点。

换言之， $f = \sum_{j\in J} f_j$ 的典范分解可以刻画为将其唯一分解为连通分层元素 f_j，使得对所有 $i \neq j \in J$都有 $G^\star(f_j) \cap G^\star(f_i) = \emptyset$。因此，一个元素是原子的，当且仅当它是分层的且连通的。由于它们是 $\Bbbk(\mathcal{P} \parallel Q)$的一个基的子集，因此可知证明 2.3 中的两个子集是线性无关的，这就得到以下结论。

推论 2.4。 设 $f \in C_{\mathcal{P}}(A)$。则 $d(f) = 0$当且仅当对于 f的每个原子 a， $d(a) = 0$。

另一个直接的推论是典范分解与微分的相容性。

引理 2.5。 设 $f = \sum_{t\in T} f_t$ 和 $u = \sum_{s\in S} u_s$ 是元素 f、 $u \in C_{\mathcal{P}}(A)$的典范分解。若 $f = d(u)$，则存在唯一函数 $\varphi\colon\ T \to S$，使得对于每个 $s \in S$，

$$d(u_s) = \sum_{t\in\varphi^{-1}(s)} f_t.$$

证明。 由证明 2.3 可知，对于所有 $s \neq s' \in S$， $L \circ R(V(u_s)) \cap L \circ R(V(u_{s'})) \subseteq \{0\}$。由于对于任意 $U \subseteq V(G)$， $R \circ L(U) = L \circ R(\overline{U})$，再结合典范分解的等价刻画，可知分层元素 $d(u_s)$ 的每个连通分支实际上都是 f 的一个原子。于是，函数 φ 的定义很简单：当 f_t 作为原子出现在 $d(u_s)$ 中时，令 $t \in \varphi^{-1}(s)$。□

推论 2.6。 设 $f_1, \dots, f_n \in C_{\mathcal{P}}(A)$ 为原子余循环，满足 $f = \sum_{i=1}^n f_i$ 是一个余边界，且每个 f_i 都是 f 的一个原子。那么，存在一个划分 $\{0, \dots, n\} = \bigsqcup_{j\in J} S_j$，使得对于每个 $j \in J$，存在某个原子 u，使得 $\sum_{s\in S_j} f_s = d(u)$。

This 将有助于研究霍赫希尔德上同调中 $C_{\mathcal{P}}(A)$ 的上循环之间的关系 y.

2.6.2. 原子余循环的分类。

证明 2.4 使我们能够将对 $C_{\mathcal{P}}(A)$ 中上循环的分析归结为原子余循环。随后，通过对原子余循环进行分类，并考察它们在上同调中的关系，自然得到分次温和代数的霍赫希尔德上同调的一组基。证明分散在一系列引理中。

引理 *2.7.* 设 $f \in C_{\mathcal{P}}(A)$ 是原子的。若 $V(f) \not\subseteq G$，则对于某个 $x \in Q_0$，有 $V(f) = \{(x, x)\}$。若 $\tilde{V}(f) \subseteq G$，则 $G^\star(f)$ 是一个有限的 A 型或 A 型箭图。若它是 A 型，则 $G(f) = G^\star(f)\tilde{}$；若它是 A 型，则 $G(f)$ 是一个 A 型箭图，并带有一个额外顶点 $\{0\} = G(f)|G^\star(f)$。在这两种情况下， $G(f)$ 都有 $2|V(f)|$ 个箭头，其标签按自然循环序在 L 和 R 之间交替。

证明。如果 $V(f)$ 不包含于 G 中，则它必定包含一个形如 (x, x) 的元素， $x \in Q_0$；由于 f 是分层的， $V(f) = V_0$， $0(f) \subseteq \{(y, y) \mid y \in Q_0\}$。下文中我们假设 $V(f) \subseteq G$。 $G^\star(f)$ 的有限性是显然的。由于 f 是连通的且分层的，设 $V = V_{n,n'}(f)$，于是 $G^\star(f)$ 是连通的，并且 $L(V(f)) \cup R(V(f)) \subseteq \{0\} \sqcup h^{-1}(n + 1) \cap h'^{-1}(n' + 1)$。根据定义，每个

位于 $G(f)$ 中的箭将 $V(f)$ 中的一个源点连接到 $\{0\} \sqcup h^{-1}(n+1) \cap h'^{-1}(n'+1)$ 中的一个目标，使得 $G^\star(f)$ 的所有顶点都位于 $V_{n,n'}(f) \sqcup V_{n+1,n'+1}(f)$ 中。正如我们之前所述，对于两个标签 L 和 R 中的每一个，每个 $v \in G^\star(f)$ 至多是 $G^\star(f)$ 中一条箭的目标，且每条这样的箭的源点都位于 $V(f)$ 中。此外，每个 $w \in V(f)$ 都恰好是 $G(f)$ 中两条箭的源点，同样每个标签对应一条。令 $r := |V(f)|$。由于 f 是连通的，并且目标非零的箭由其目标和标签唯一确定，我们现在得到：或者 $0 \in G(f)$，此时 $G^\star(f)$ 是一个具有 $2(r-1)$ 条箭的 $\tilde{}$ 型箭图 A；或者 $G(f) \subseteq G^\star$，此时 $G(f)$ 是一个具有 $2r$ 条箭的 A 型箭图。其余断言直接由此得到。□

原子余循环 f 的**类型**是箭图 $G^\star(f)$ 的类型，其中 $V(f) \subseteq G$。正如我们在前一个引理的证明中所见，两种可能的情况取决于 $0 \in G(f)$ 是否成立。进一步，根据证明 2.7，在 $V(f)$ 上可定义一个典范的线性序（类型 A）或循环序（类型 A），其定义要求元素 $v \in V(f)$ 的后继 $w \in V(f)$ 满足 $R(v) = L(w)$。

引理 2.8。设 f 是一个原子余循环，满足 $V(f) \subseteq G_0$。那么对所有 $v, v' \in V(f)$，

$$\lambda_f(v) = \sigma(v, v')\lambda_f(v')$$

存在某个 $\sigma(v, v') \in \{\pm 1\}$，它仅取决于 $v, v' \in G$。

证明。设 w 是顶点 $v \in V(f)$ 的后继，因此 $L(w) = R(v) \neq 0$。由于 $v, w \in G_0$、$L(v) = 0$（分别为 $R(w) = 0$）或 $\{L(v) \ R(v)\}$（分别为 $\{L(w) \ R(w)\}$）线性无关。因此，$d(f) = 0$ 蕴含 $d_L(\lambda_f(w)w) = -d_R(\lambda_f(v)v)$。由归纳法可得结论，并且可根据 (2.3) 中 d_L 和 d_R 出现的符号，推导出 $\sigma(v, v')$ 的显式公式。□

推论 2.9. 设 f 是一个原子余循环，且 $V(f) \subseteq G_0$。那么，除相差一个标量倍数外，f 由 $G^\star(f)$（分别由 $G(f)$）唯一确定。

引理 2.10. 设 $U \subseteq G^\star$ 是一个类型为 $\tilde{A}$ 的子箭图，使得 $U \subseteq h^{-1}(\{n, n+1\})$ 对某个 $n \geq 0$ 成立。若 $U = G^\star(f)$ 对某个原子余循环 f 成立，则以下情形恰有一种成立：

(1) 存在一个周期为 r 的完全反路径 $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n \in P_n$，使得 f 是其非零标量倍数

$$\mathcal{N}^0(p) := \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{in+|p||\alpha_1 \cdots \alpha_i|} \big(\mathrm{rot}^i(p), s(\mathrm{rot}^i(p))\big)$$

(2) 存在一个周期为 r 的完全路径 $q = \beta_1 \cdots \beta_n$，$l(q) = n$，使得 f 是其非零标量倍数

$$\mathcal{N}^0(q) := \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{|q||\beta_1 \cdots \beta_i|} \big(s(\mathrm{rot}^i(q)), \mathrm{rot}^i(q)\big).$$

证明。首先，我们假设 $h(f) \geq 1$，并令 $w \in V(f)$ 为元素 $v = (p, q) \in V(f)$ 的后继，其中 $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathrm{P}_n$。由 d_L 和 d_R 的公式可知，$w = (\alpha_2 \cdots \alpha_n \beta, q'\beta)$，其中 $\beta \in Q_1$ 是一个箭，满足 $q = \alpha_1 q'$，$\alpha_n \beta \in I$ 和 $q'\beta \notin I$。反复应用此公式，并利用 (Q, I) 是温和的这一假设，可知 $G^\star(f)$ 是一个环这一事实迫使 $\beta = \alpha_1$ 成立。因此，通过归纳可得 p 是完全的。我们断言 $l(q') = 0$，从而 $l(q) = 1$。事实上，沿着后继序列可知 $pq' = q'p$ 属于 A，这意味着

$l(q') = 0$，因为 $l(p) = h(f) > 0$，而 I 仅由零关系生成。由此可得 $V(f) = \{(\mathrm{rot}^i(p)\ s(\mathrm{rot}^i(p)) \mid 0 \le i \le r-1\}$，其中 r 表示 p 的周期。通过追踪证明 2.8 中明确给出的符号，便可得出 $\mathcal{N}^0(p)$ 的具体符号。另一种情形是 $h(f) = l(p) = 0$，从而 $l(q) > 0$；用类似的论证可知 q 是一条完全路径。□

Cor ˜推论 2.11。设 f 是一个原子余循环，具有 $V(f) \subseteq G_0$ 类型 A。那么 f 不是余边界 y.

证明。证明 2.10 中关于 $\mathcal{N}^0(-)$ 的显式公式表明，要么 $h(f) = 0$，要么 $h'(f) = 0$。因此，$V(f)$ 中没有任何元素是 G 中某个箭的目标。□

下面的引理描述了证明 2.10 中表达式 $\mathcal{N}^0(p)$ 和 $\mathcal{N}^0(q)$ 的微分；无论它们是否为上循环，这些表达式都可以定义。

引理 2.12。设 $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n \in P_n$，且 $q = \beta_1 \cdots \beta_m$ 是一条完全路径。那么

$$d(\mathcal{N}^0(p)) = (-1)^{|p|} \cdot \big(1 - (-1)^{\omega(p)}\big)(\alpha_1 p, \alpha_1),$$
$$d(\mathcal{N}^0(q)) = \big(1 - (-1)^{\omega(q)}\big)(\beta_n, \beta_n q).$$

其中，如前所述，$\omega(p) = l(p) - |p| = n - |p|$，且 $\omega(q) = -|q|$。

证明。由直接计算可验证，此处省略。□

˜接下来，我们处理类型为 A 的原子余循环。与 A-情形相同的论证表明，除去标量因子，类型为 A 且满足 $f$with $V(f) \subseteq G_0$ 的原子余循环 $G^\star(f)$ 唯一确定；等价地，它由 ˜by $G(f)$ 唯一确定。注意，与 A-情形不同，将原子余循环附加到给定的合适类型为 A 的箭图上不存在任何障碍。
剩下的工作是对类型为 A 的原子余循环进行分类。

引理 2.13。设 f 是一个类型为 A 且满足 $V(f) \subseteq G_0$ 的原子余循环。那么 f 的秩为 2 且是一个余边界，或者其秩为1。

证明。图 $G^\star$ 具有如下性质：若 v、$v' \in G^\star$ 满足 $R(v) = L(w) \in G^\star$，则存在唯一的 $w \in G^\star$ 使得 $L(w) = v$ 且 $R(w) = v'$。现在，若 f 的秩为 $r \ge 2$，则存在一个 $v \in V(f)$，它有一个后继 $v' \in V(f)$。根据定义，由于 $R(v) = L(v')$，存在唯一的 $w \in G^\star$ 使得 $L(w) = v$ 且 $R(w) = v'$。特别地，$L(v) = L^2(w) = 0 = R^2(w) = R(v')$，因此 $r = 2$，因为 f 是连通的。又由 $d(f) = 0$ 这一事实可知，$d_R(\lambda_f(v)v) = -d_L(\lambda_f(v')v')$。另一方面，我们有 $d^2(w) = 0$，这意味着 $d_R(d_L(w)) = -d_L(d_R(w))$，并表明 f 是 $d(w)$ 的倍数，因此是一个余边界。□

引理 2.14。令 $v \in G^\star$ 满足 $L(v) = 0 = R(v)$。若 $f \in C_{\mathcal{P}}(A)$ 是任意一个上循环，满足 $v \in V(f)$，则 $\lambda_f(v)v$ 是 f 的一个原子。

证明。设 $f = \sum_{j \in J} f_j$ 是典范分解。由于对所有 $i \ne j \in J$，$V(f_j) \cap V(f_i)$，根据假设，存在唯一的 $j_0 \in J$ 使得 $v \in V(f_{j_0})$。但是，由于 $L(v) = 0 = R(v)$，v 是 $G^\star(f_{j_0})$ 的汇点，因此 $G^\star$ 的子集 $V(f_{j_0})$ 不可能是连通的，若其严格大于 $\{v\}$，所以 $V(f_{j_0}) = \{v\}$，从而 $\lambda_f(v)v$ 是 f 的一个原子。□

引理 2.15. 设 f 是类型为 A、秩为 1 的原子余循环。那么，f 是余边界，或者以下情况恰有一种成立。

(1) f 是 $c = N^1(p) := (\alpha_n p, \alpha_n)$ 的一个数乘，其中 $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是某个完全反路径。若 f 是余边界，则对于某个 $\lambda \in \Bbbk^\times$，有 $f = d(\lambda N^0(p))$。*(2)* f 是 $c = N^1(q) := (\beta_n, \beta_n q)$ 的一个数乘，其中 $q = \beta_1 \cdots \beta_n$ 是某个完全路径。若 f 是余边界，则对于某个 $\lambda \in \Bbbk^\times$，有 $f = d(\lambda N^0(q))$。*(3)* f 不是余边界，且对于某个满足 $u_\circ \neq \emptyset$ 的极大反路径 u， f 是 $c = (u, u_\circ) \in G^\star$ 的一个数乘。*(4)* f 不是余边界，且 f 是 $(s(u)\ u)$ 的一个数乘，其中 u 是 A 的某个闭极大路径。*(5)* f 是 $c = (\alpha, \alpha)$ 的一个数乘，其中 $\alpha \in Q_1$。

反过来，上述任意一种形状都是原子余循环。

证明。 首先，我们注意到，对于 $C_{\mathcal{P}}(A)$ 中形如 (1)–(4) 的所有秩 1 元素， $L(c) = R(c) = 0$。因此，这样的 c 总是一个上循环。令 $v = (p, q)$ 为 $V(f)$ 的唯一顶点，并写作 $p = \alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathcal{P}_n$ 和 $q = \beta_1 \cdots \beta_m$，其中 $m = l(q)$。由于 f 是一个上循环，我们有 $L(v) = 0 = R(v)$。对 L 而言，这意味着不存在满足 $\alpha\alpha_1 \notin I$ 的 $\alpha \in Q_1$，或者存在这样的 α，但 $\alpha\beta_1 \in I$。由 $R(v) = 0$ 可推出类似的条件。

现在假设 v 没有父节点。特别地， f 不是余边界。当 $l(p) = 0, l(q) = 0$ 时，或者当我们有 $\alpha_1 \neq \beta_1$ 和 $\alpha_n \neq \beta_m$ 时，就会出现这种情况。如果 $l(p) > 0$，那么由于温和箭图中关系的性质，这意味着 p 无法在任一端延伸为更长的反路径，因此也是极大的； $p_\odot \neq \emptyset$ 亦然，这就意味着 $q = p_{\odot\circ}$。同样，如果 $l(p) = 0, L(v) = 0 = R(v)$，则意味着 q 无法延伸为更长的 A路径。由此可知， f 具有 (3) 或 (4) 中的形式。

接下来，假设 v 有父节点，也就是说，它属于 L 或 R的像。由于另一种情况类似，我们只考虑存在某个 $w =$ 使得 $v = L(w)$ 的情形，其中 $w = (p',\ q') \in G^\star$。如果$l(p') = l(q') = 0$，那么对某个 $\alpha \in Q_1$，有 $v = (\alpha,\ \alpha)$，且 $s(\alpha) = s(q') = s(p')$，如 (5) 中所述。否则， $w \in G_0 \setminus \{0\}$，且 w 由 v唯一确定。

从现在起，我们可以假设 $w \in G$，也就是说， $l(p') + l(q') \geq 1$。于是，若 $R(w) \neq 0$，则有 $L(R(w)) = R(L(w) = R(v) = 0 = R(R(w))$，从而 $R(w)$ 又是一个秩 1 的原子余循环。此外，若 $R(w) \neq 0$，我们断言 $l(p') = 0$ 或 $l(q') = 0$。我们有 $R(w) = (p'\beta, q'\beta)$，其中某个 $\beta \in Q_1$ 满足 $p'\beta \in \mathsf{P}_n$。但是 $\alpha p' = p$，因此 $l(p') = 0$ 或 $\alpha p'\beta \in \mathsf{P}_{n+1}$。所以，若 $l(p') > 0$，则 $L(w) = R(v) = 0$ 仅意味着 $\alpha q'\beta \in I$。但由于 $L(w) = v \neq 0$，我们知道 $\alpha q' \notin I$；又由于 $R(w) \neq 0$，我们知道 $q'\beta \notin I$。因为 I 由二次零关系生成，只有在 $l(q') = 0$ 时这才可能。现在，将从 v 得到 $R(w)$ 的同一过程反复应用于原子余循环 $R(w)$，依此类推，我们得到一列有序顶点 $v_0 = v$, $v_1 = R(w)$ $v_2, \ldots,$ 它们位于 $G^\star$ 中且高度相同；同时还得到顶点 $w_0 = w, \ldots, w_s$，满足对所有 $i \geq 0$， $L(w_i) = v_i$ 且 $R(w_i) = v_{i+1}$。该过程要么在有限步后终止，得到一个元素 v_s，使得 $R(v_s) = 0$；要么不会终止。在有限情形下，我们注意到 $d(v_s) = \pm L(v_s)$，因此对于适当的标量 $\lambda_i \in \Bbbk^\times$，有 $d(\sum_{i=0}^{s-1} \lambda_i w_i) = f$，这表明 f 是一个余边界。在无限情形下，由于 Q的有限性，若 $l(q') = 0$，则 p 必定是完全反路径；若 $l(p') = 0$，则 q 必定是完全路径。因此，在这种情况下，我们得出结论： v 具有 (1) 和 (2) 中所述的形式。由于完全路径的情形是类似的，下面我们假设 f 是某个完全反路径 p 的 $\mathsf{N}^1(p)$ 倍数。若 f 是一个余边界，则根据证明 2.6，且由于 $\mathsf{N}^1(p)$ 是原子的，对于某个原子 g，有 $f = d(g)$。

最后注意到， $V(\mathcal{N}^0(p))$ 与 f 的父节点的邻域重合，因此$V(g) \subseteq V(\mathcal{N}^0(p))$。现在，通常的消去论证以及 $d(g) = f$ 迫使 g 成为 $\mathcal{N}^0(p)$ 的标量倍数。□

引理 2.16。 </style}设 为一条完全路径或反路径。那么 N(p) 与 $N^0(\mathrm{rot}(p))$ 互为线性倍数。类似地，$N^1(p)$ 与 $N^1(\mathrm{rot}(p))$ 在上同调中互为线性倍数。赋值 $\alpha \mapsto (\alpha, \alpha)$ 诱导出一个嵌入，将映射 $\Bbbk^{Q_0} \to \Bbbk^{Q_1}$ 的余核嵌入 $\mathrm{HH}^{1,0}(A, A)$ 中，其中映射为 $\Bbbk^{Q_0} \to \Bbbk^{Q_1}$, $(\lambda_x)_{x\in Q_0} \mapsto (\lambda_{t(\alpha)} - \lambda_{s(\alpha)})^{\alpha\in Q_1}$。

证明。 第一个断言成立，是因为 $\mathcal{N}^0(p)$ 与 $\mathcal{N}^0(\mathrm{rot}(p))$ 除一个符号外相同。若 p是一条完全反路径，则可得 $d((p, e_{s(p)}))$ 是 $\mathcal{N}^1(p)$ 与 $\mathcal{N}^1(\mathrm{rot}^{-1}(p))$ 的带符号和，从而得到第二个断言。第二个断言是 [Opp19，命题 5.4] 的一个版本。□

映射 $\Bbbk^{Q_0} \to \Bbbk^{Q_1}$ 的核由对角映射的像给出，而元素 (α, α) 张成 $\mathrm{HH}^{1,0}(A, A)$ 中一个与 $\mathrm{H}^1(|Q|, \Bbbk) \cong \mathrm{H}^1(\Sigma_A, \Bbbk)$ 同构的子空间。特别地，若 $T \subseteq Q$ 是一棵生成树，则 $\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in Q_1\}$ 构成该子空间的一组基。

注 2.17. 证明 2.16 中 $\mathrm{H}^1(\Sigma_A, \Bbbk)$ 在 $\mathrm{HH}^1(A, A)$ 中的像，也与 A 的基本群有关，其意义在于 [MVD83]，且可自然地推广到分次代数。一般而言，这些群取决于代数所选的表示；但若代数是单项式代数（例如温和代数），则它们与表示无关，此时 A 的基本群是自由阿贝尔群。存在自然的识别 $\pi_1(A) \cong \pi_1(\Sigma_A)$；根据 [dlPnS01]，对于任意普通（=非分次）代数 B，存在一个嵌入 $\mathrm{Hom}(\pi_1(B), \Bbbk) \to \mathrm{HH}^1(B, B)$。若 A 集中在 0 次，则在识别 $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_A), \Bbbk) \cong \mathrm{H}^1(\Sigma_A, \Bbbk)$ 下，该嵌入与证明 2.16 所诱导的嵌入 $\mathrm{H}^1(\Sigma_A, \Bbbk) \to \mathrm{HH}^{1,0}(A, A)$ 一致。文献 [BRyD23] 表明，对于每个普通单项式代数 B，$\pi_1(B)$ 的秩与 $\mathrm{HH}^1(B, B)$ 中任一极大环面的秩相同。

定理 2.18. 设(Q, I) 为一个分次温和箭图， A 是其关联的分次温和代数，且不假设它是同调光滑或适当的。取

- 一个 Q的任意生成树 T，
- 一个完备代表元集 P^c （分别地，Q^c），包含(Q, I)中所有完备反路径（分别地，路径）的旋转类。

那么，对于每个 $n \geq 0$ 和每个 $d \in \mathbb{Z}$，下列元素构成$\mathrm{HH}^{n,d}(A, A)$的一个 $\Bbbk$-线性（*Schauder*）基：

(1) 单位元 $\mathbb{1} = \sum_{x\in Q_0}(x, x)$，如果 $(n, d) = (0, 0)$；*(2)* 所有形如 $N^s(p)$、 $p \in P^c$, $s \in \{0, 1\}$ 的元素，使得 $(n, d) = (l(p) + s, -|p|)$，且其中 $\omega(p) \in 2\mathbb{Z} + s$ 或 $\mathrm{char}\,\Bbbk = 2$。*(3)* 所有形如 $N^s(q)$、 $q \in Q^c$, $s \in \{0, 1\}$ 的元素，使得 $(n, d) = (s, |q|)$，且其中$\omega(q) \in 2\mathbb{Z} + s$ 或 $\mathrm{char}\,\Bbbk = 2$。*(4)* 所有形如 $(u, u_\circ)$ 的元素，其中 u 是具有 $u_\circ \neq \emptyset$ 的极大反路径，且 $(n, d) = (l(u) \ |u_\circ| - |u|)$。

(5) 所有形如 $(s(u)\ u)$ 的元素，其中 u 是 A 的闭极大路径，且 $(n,d) = (0,|u|)$。(6) 所有形如 (α,α)、 $\alpha \in Q_1 \setminus T_1$ 的元素，使得 $(n,d) = (1,0)$。

证明。下文将把式 (1)–(4) 中出现的元素称为预设基。假设 c 是完全路径或完全反路径。根据证明 2.15，要么余循环 $\mathrm{N}^1(c)$ 不是余边界，此时 $\mathrm{N}^0(c)$ 是上循环（且不是余边界）；要么 $\mathrm{N}^1(c)$ 不是余边界，且 $\mathrm{N}^0(c)$ 不是上循环。因此，$\mathrm{N}^0(c)$ 和 $\mathrm{N}^1(c)$ 要么都贡献非平凡的霍赫希尔德类，要么都不贡献。关于 $\omega(p)$、$\omega(q)$ 以及 $\Bbbk$ 的特征的条件，均可由这一观察得出。更一般地，根据证明 2.12 和证明 2.15，预设基中的每个元素都是原子余循环；根据证明 2.11 和证明 2.15，它们都不是余边界。根据证明 2.4，$C_{\mathcal{P}}(A)$ 中的每个上循环都是原子上循环之和；根据证明 2.7，每个原子上循环都属于 $\tilde{A}$ 或 A 类型。因此，由证明 2.10、证明 2.13、证明 2.15 和证明 2.16 可知，式 (1)–(4) 中的元素张成 $\mathrm{HH}^{n,s}(A,A)$ 这一向量空间。剩下要证明这些元素线性无关。设 $f_1,\ldots,f_n \in C_{\mathcal{P}}(A)$ 是预设基中两两不同元素构成的序列。那么 $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda f_i$ 是上循环，并且我们注意到，每个 $\lambda_i f_i$ 必然是 f 的一个原子。

在证明的其余部分中，假设 f 是一个余边界。于是由证明 2.5 可知，不妨设 $f = d(u)$，其中某个原子的 $u \in C_{\mathcal{P}}(A)$。因此，$V(u)$ 必须包含在集合 $V(f)$ 中各元素的父节点集合的邻域内。我们注意到，对于所假设的基中的任意元素 b，当 $b = \mathrm{N}^0(p)$、$p \in \mathrm{P}^c \cup \mathrm{Q}^c$ 时，$V(b)$ 的父节点的邻域为空；在其他情况下则是原子的。若所假设的基中的 b 和 b' 是不同元素，则要么二者都具有 (α,α)，$\alpha \in Q_1$ 的形式，要么 $V(b)$ 与 $V(b')$ 的邻域互不相交，它们各自父节点集合的邻域也互不相交。在前一种情况下，$\{(x,x) \mid x \in Q_0\}$ 是 $V(b)$ 和 $V(b')$ 的父节点的邻域。由于 u 是原子的，因而具有原子邻域，我们得出结论：f 要么是原子的，要么是形如 (α,α)，$\alpha \in Q_1$ 的元素的线性组合。由于 f 的任何原子都不是余边界（因为它是一个基元素的倍数，且由本证明的第一部分可知），所以只能是第二种情况；由证明 2.16 及其后的讨论可知，结论成立。□

定理 A 的证明。这可由证明 2.18 得出：将周期为 m 的完全路径或反路径 p 与路径 γ 对应：$S^1 \to \partial\Sigma_A$ 它沿着边界分支 B_p 的定向绕行 m 圈。同样，我们将类 $(p, p_{\odot})$ 和 $s(s(v)\ v)$（v 闭极大路径）对应于元素 $[B_{p^{-1}p_{\odot}}]$ 和 $[B_{vs(v)^{-1}}]$。最后，任何形如 (α,α) 的类的线性组合 $\alpha \in Q_1$，都通过将嵌入 $\mathrm{H}^1(\Sigma_A,\Bbbk) \to \mathrm{HH}^{1,0}(A,A)$ 限制到其像后取逆，对应于 $\mathrm{H}^1(\Sigma_A,\Bbbk)$ 中的一个元素，参见证明 2.16。这便将 Q 的生成图补集中的边与 $\mathrm{H}^1(\Sigma_A,\Bbbk)$ 的一组基对应起来。□

3. 杯积与 Gerstenhaber 括号

本节中，我们固定一个分次温和箭图 $(Q,\ I)$ 及其关联的分次温和代数 A。我们先描述 $\mathrm{HH}^\bullet(A,\ A)$ 上的杯积，随后介绍 Gerstenhaber 括号。

3.1. **杯积的计算**。

引理 3.1. 设 u 是本原完全反路径或完全路径。那么对所有 m、$n \geq 1$,

$$\mathcal{N}^0(u^m) \cup \mathcal{N}^0(u^n) = \pm\mathcal{N}^0(u^{m+n})$$

$$\mathcal{N}^0(u^m) \cup \mathcal{N}^1(u^n) = \pm\mathcal{N}^1(u^{m+n}).$$

此外，如果 $\alpha \in Q_1$ 在 u中作为一支箭出现，那么 $(\alpha, \alpha) \cup N^0(u^m) = \pm N^1(u^m)$。

证明。我们只讨论完全反路径的情形，完全路径的情形可通过类似论证得到。我们在链层次上得到 $(u^m, s(u)) \cup (u^n, s(u)) = \pm(u^{m+n}, s(u))$。对于$p = u^m$, $q = u^n$ 以及任意满足 $i - j$不被 u的周期整除的整数 $i, j \in \mathbb{Z}$，我们在链层次上有 $(\mathrm{rot}^i(p)\ s(\mathrm{rot}^i(p))) \cup (\mathrm{rot}^j(q)\ s(\mathrm{rot}^j(q))) = 0$，除非 $s(\mathrm{rot}^i(p)) = s(\mathrm{rot}^j(q))$；然而在这种情况下，所得路径 $\mathrm{rot}^i(p)\,\mathrm{rot}^j(q)$ 不是反路径，这意味着 $(\mathrm{rot}^i(p)\ s(\mathrm{rot}^i(p))) \cup (\mathrm{rot}^j(q)\ s(\mathrm{rot}^j(q))) = 0$ in $C_{\mathcal{P}}(A)$。这证明了第一个断言，并且结合 $(p, s(p)) \cup (q\alpha_1(q)\ \alpha_1) = (pq, \alpha_1(q))$，证明了第二个断言。对于最后一个断言，我们可以假设通过旋转 u（从而将 $\mathrm{N}^0(u^m)$ 改变一个符号），使得 u 以箭 α开头。于是可得，

$$(\alpha, \alpha) \cup \mathcal{N}^0(u^m) = (-1)^{|u^m| \cdot |\alpha|}(\alpha u^m, \alpha) \tag{3.1}$$

□

由公式 (3.1) 及其关于完全路径的类似公式，我们可以得出如下结论。

推论 3.2。设 $p = \alpha_1 \cdots \alpha_l$ 是一条本原完整路径或反路径，并设 $m \geq 1$ 使得 $N^0(p^m)$ 在 $\mathrm{HH}^\bullet(A, A)$ 中构成一个非平凡类。则 $(\alpha_l, \alpha_l) \cup N^0(p^m) = (\alpha_1, \alpha_1) \cup N^0(\mathrm{rot}(p^m))$。

引理 3.3。设 b 和 b' 是霍赫希尔德上同调中证明 *2.18* 所述基的元素，且不同于单位元。则除非 (b, b') 是证明 *3.1* 中的情形之一，否则有 $b \cup b' = 0$。

证明。设 $b = \mathrm{N}^i(u^m)$ 且 $b' = \mathrm{N}^j(v^n)$，其中 $i, j \in \{0, 1\}$，$u = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ 和 $v = \beta_1 \cdots \beta_l$ 都是完全本原反路径，或都是完全本原路径，但 u 和 v 属于不同的旋转类。于是，如果 u 和 v 是反路径，而 u 和 v 是 A 的路径，则 $\mathrm{rot}^r(u^m)\,\mathrm{rot}^s(v^n)$ 永远不是反路径；如果 u 和 v 是路径，而 u 和 v 是 A 的路径，则它永远不是 A 的路径。否则它必然是完全的，这将意味着 u 和 v 属于同一个旋转类。因此，$b \cup b' = 0$ 在链层次上成立。同样地，如果 p 是一条极大反路径，那么对于任意非平凡反路径 p'，由于极大性，pp' 和 $p'p$ 都不可能是反路径。同样地，在此情形下，$p_\odot$ 是 A 的一条极大路径，因此当 u 是 A 的一条完全路径时，$p_\odot u \in I$。由此可知，当 u 是一条完全路径或完全反路径时，b 与 $(p, p_\odot)$ 在链层次上的杯积为零。

接下来，若 u 是完全反路径，而 v 是完全路径，使得 $(u^m, s(u^m)) \cup (s(v)\ s(v^n)) = \pm(u^m, v^n)$ 非零，则 $s(u) = s(v)$，并且我们必然有 $\alpha_1 = \beta_1$ 和 $\alpha_r = \beta_s$，由此得出 (u^m, v^n) 是一个余边界。若 p 和 p' 是两个极大反路径，则 $pp' \in I$，因此在链层次上 $(p, p_\odot) \cup (p', p'_\odot) = 0$。若 $b = (\alpha, \alpha)$，但 α 未出现在完全路径或反路径 u 中，且 b' 的形式为 $\mathrm{N}^s(u)$，则可得 $b \cup b' = 0$。□

以下是 [CSSS24, 定理 5.8] 在分次情形下的推广。

定理 3.4. 设 A是一个分次温和代数。令 H 表示由以下元素生成的自由分次交换代数:

- *edges $x_e \in Q_1 \setminus T_1$ with $|x_e| = 1$, where T is a fixed spanning tree of Q;*

- x_B，其中 B 是 Σ_A 的一个完全标记或未标记边界分支，并且

$$|x_B| = \begin{cases} \omega(B), & \text{if } \omega(B)\cdot \operatorname{char}\Bbbk \text{ is even;} \\ 2\omega(B), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- y_C，其中 C 是 Σ_A 的一个边界分支，且只有一个停止点； $|y_C| = \omega(C)$ 。

那么，存在一个分次代数同构

$$\mathrm{HH}^\bullet(A,A) \cong \mathcal{H}/\mathcal{J},$$

其中 J 是由以下形式的所有表达式生成的分次理想：

- $x_B \cdot x_{B'}$， $B \neq B'$</style>;
- $x_B \cdot y_C$;
- y_C^2;
- $x_e \cdot x_B - x_f \cdot x_B$，当 e 和 f 均出现在与 B对应的完全路径或反路径中时。

证明。设 u 是一个本原路径或反路径。若 $\omega(u)\cdot \operatorname{char}\Bbbk$ 为偶数，则将 x_{B_u} 与 $\mathrm{N}^0(u)$ 等同；否则，将其与 $\mathrm{N}^0(u^2)$ 等同。同样，将 y_C 与对应于 C的极大反路径或闭极大路径 p 的类 $(p, p_\odot)$ 或 $(s(p)\ p)$ 等同。最后，将 (α,α),$\alpha \in Q_1 \setminus T_1$ 与 x_α等同。由于 $\omega(u)$ 相对于域的特征满足度数条件，证明 3.1、证明 3.2 和证明 3.3 表明存在一个满态射 $\mathrm{H}/\mathrm{J} \to \mathrm{HH}^\bullet(A,A)$。接着按照 [CSSS24，定理 5.8] 的做法，可知该态射实际上是一个同构。□

3.2. **Gerstenhaber 括号的计算**。 我们应用公式 (2.6)-(2.8) 来计算 Gerstenhaber 括号。与前文一样，我们将有限维分次向量空间$\prod_{i\geq 1} V_i$ 的乘积 V_i 赋予完备拓扑向量空间的结构，使得子集序列 $\{\prod_{i\geq j} V_i\}_{j\geq 1}$ 构成 0 的邻域基。

定义 3.5。 设 $d \in \mathbb{Z}$，并假设 $d\cdot \operatorname{char}\Bbbk$ 为偶数。定义（完备） d**-分次 Witt 代数**

$$\widehat{\mathcal{W}}_d^+ := \prod_{i\geq 1} \Bbbk[-i\cdot d]\cdot e_i, \tag{3.2}$$

将其视为分次向量空间范畴中的乘积，并赋予其分次李代数结构，使其具有满足 $[e_i, e_j] = (i-j)$ e_{i+j} 的唯一连续分次李括号。我们将 $\mathcal{W}_d^+ \subseteq \widehat{\ }\mathcal{W}_d^+$ 定义为由分次向量空间范畴中元素 e_i 的直和构成的李子代数。

根据定义，$\mathcal{W}_0^+$是通常的（非完备）Witt 代数，而 $\widehat{\ }\mathcal{W}_d^+$ 集中在次数$d, 2d, 3d, \ldots$。我们将在下文看到，与完备（反）路径相关联的形如 $\{\mathcal{N}^1(u^m)\}_{m\geq 1}$ 的元素构成一个分次 Witt 代数的副本，与[RR18]中讨论的例子类似。

注3.6。 （3.3）中的乘积是分次向量空间中的乘积，这意味着 $\widehat{\ }\mathcal{W}_d^+ = \mathcal{W}_d^+$ 当 $d \neq 0$ 时成立。我们仍作此区分，在我们的语境中有着更深层的根源，并且

与适当分次温和代数是导出完备的这一事实有关，参见 [BGO25]。这是以下事实的推广：分次多项式环 $\Bbbk[x]$（其中 $|x| \in \mathbb{Z}$）关于（x）-进拓扑为完备的分次环，当且仅当 $|x| \neq 0$；而对于 $|x| = 0$，其分次完备化就是通常的幂级数环。在此情形下，分次完备化与简单模 $\Bbbk[x]/(x)$ 处的导出完备化一致。

注 3.7。 d 或 $\operatorname{char}\Bbbk$ 为偶数的假设对于确保 $\widehat{\ }\mathcal{W}_d^+$ 上李括号的分次反对称性是必要的。

李代数 $\mathcal{W}_d^+$ 和 $\widehat{\ }\mathcal{W}_d^+$ 允许半直扩张 $\mathcal{U}_d$ 和 $\widehat{\ }\mathcal{U}_d^+$。后者的底层分次向量空间为

$$\widehat{\mathcal{U}}_d \coloneqq \prod_{i\geq 1} \Bbbk[-i\cdot d]\cdot e_i \times \prod_{i\geq 1} \Bbbk[-i\cdot d+1]\cdot f_i, \tag{3.3}$$

其中 $[e_i, e_j] = (i-j)e_{i+j}$、$[f_i, f_j] = 0$ 和 $[f_i, e_j] = if_{i+j}$。与 Witt 代数的情形一样，$\widehat{\ }\mathcal{U}_d$ 定义为$\mathcal{U}_d$ 的子空间，其通过将乘积替换为直和得到。我们注意到，作为分次李代数，$\mathcal{U}_0$ 同构于 $\mathrm{HH}^{\bullet+1}(\Bbbk[x], \Bbbk[x])$，$|x| = 0$，而 $\widehat{\ }\mathcal{U}_0$ 同构于 $\mathrm{HH}^{\bullet+1}(\Bbbk[t]/(t^2)\ \Bbbk[t]/(t^2)) \cong \mathrm{HH}^{\bullet+1}(\Bbbk[\![x]\!], \Bbbk[\![x]\!])$，其中 $|t| = 1$。

引理 3.8. 设 u 是本原完全反路径或完全路径。那么对所有的 m、$n \geq 1$，

$$\left[\mathcal{N}^1(u^m), \mathcal{N}^1(u^n)\right] = \begin{cases} (m-n)\cdot \mathcal{N}^1(u^{m+n}), & \text{if } \omega(u^m) \text{ and } \omega(u^n) \text{ are even;} \\ m\cdot \mathcal{N}^1(u^{m+n}), & \text{if } \omega(u^m) \text{ is odd and } \omega(u^n) \text{ is even;} \\ 0, & \text{if } \omega(u^m) \text{ and } \omega(u^n) \text{ are odd;} \end{cases}$$

$$[\mathcal{N}^0(u^m), \mathcal{N}^1(u^n)] = \begin{cases} m\cdot (u^{m+n}, s(u)) & \text{if } \omega(u^n) \text{ is even;} \\ 0 & \text{if } \omega(u^n) \text{ is odd and } \omega(u^m) \text{ is even} \\ (-1)^{ml(u)}\cdot (u^{m+n}, s(u)) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，若 $h \in \mathrm{H}^1(A, A)$ 对应于元素 $f \in \mathrm{H}^1(\Sigma_A, \Bbbk)$ 的像，且 B_u 表示与 u 对应的 Σ_A 的未标记或完全标记的边界分支，那么

$$[h, \mathcal{N}^1(u^m)] = f(B_u)\cdot \mathcal{N}^1(u^m).$$

特别地，若对某个 $\alpha \in Q_1$ 有 $h = (\alpha, \alpha)$，则 $f(B_u)$ 等于 α 在 u^m 中出现的次数。同样，若 p 是满足 $p_\odot \neq \emptyset$ 的极大反路径，则 $[h, (p, p_\odot)] = f(B_p)(p, p_\odot)$；若 q 是 A 的闭极大路径，则 $[h, (s(q)\ q)] = f(B_q)(s(q)\ q)$。

证明。我们讨论完全反路径的情形。完全路径的情形类似。设$p = \alpha_1 \cdots \alpha_l$是长度为 l、$m \geq 0$ 和 $n \geq 1$的本原完全反路径。于是应用我们的

公式并利用 $|p^n| = |p|n$ 和 $|p|^2 \equiv |p|$ 模 2，可得

$$\begin{aligned}(\alpha_l p^m, \alpha_l) \circ (\alpha_l p^n, \alpha_l) &= (-1)^{(l(\alpha_l p^m)-1)(l(\alpha_l p^n)+|p^n|-1)} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j(-|p|^{n+1}+l(\alpha_l p^n)-1)} (\alpha_l p^{m+n}, \alpha_l) \\ &= (-1)^{m\cdot l(p)\cdot \omega(p^n)} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j\omega(p^n)} (\alpha_l p^{m+n}, \alpha_l) \\ &= \begin{cases} (m+1)(\alpha_l p^{m+n}, \alpha_l) & \text{if } \omega(p^n) \text{ is even;} \\ (\alpha_l p^{m+n}, \alpha_l) & \text{if } \omega(p^n) \text{ is odd and } m \text{ is even;} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}\end{aligned}$$

注意，若 $\omega(p^n) = n\omega(p)$ 是奇数，则 n 和 $\omega(p)$ 也都是奇数，因此 m 为偶数当且仅当 $\omega(p^m)$ 为偶数。假设 $m \geq 1$，我们得出

$$\left[\mathcal{N}^1(p^m), \mathcal{N}^1(p^n)\right] = \begin{cases} (m-n)\cdot \mathcal{N}^1(p^{m+n}), & \text{if } \omega(p^m) \text{ and } \omega(p^n) \text{ are even;} \\ m\cdot \mathcal{N}^1(p^{m+n}), & \text{if } \omega(p^m) \text{ is odd and } \omega(p^n) \text{ is even;} \\ 0, & \text{if } \omega(p^m) \text{ and } \omega(p^n) \text{ are odd;} \end{cases}$$

当 $\omega(p^m)$ 为偶数而 $\omega(p^n)$ 为奇数时，括号的值可由反对称性推出。特殊情形 $m = 0$ 表明

$$[(\alpha_l, \alpha_l), \mathcal{N}^1(p^n)] = -(-1)^{0\cdot\omega(p^n)}[\mathcal{N}^1(p^n), (\alpha_l, \alpha_l)] = n\mathcal{N}^1(p^n) = f_{\alpha_l}(B_p)\cdot \mathcal{N}^1(p^n),$$

其中 $f_{\alpha_l} \in \mathrm{H}^1(\Sigma_A, \Bbbk)$ 是 $(\alpha_l, \alpha_l) \in \mathrm{HH}^1(A, A)$ 在证明 2.16 中所述映射下的原像。另一方面，若 β 是一个未出现在 p 中的箭，则 $[(\beta,\beta), \mathcal{N}^1(p^n)] = 0 = f_\beta(B_p)$，因此第二个断言由线性性得出。对于第二个断言，我们注意到，对于所有 $1 \leq i \leq l(\alpha_l p^n)$，都有 $(\alpha_l p^n, \alpha_l) \circ_i (p^m, s(p)) = 0$，并且与之前类似，我们有

$$\begin{aligned}[\mathcal{N}^0(p^m), \mathcal{N}^1(p^n)] &= (p^m, s(p)) \circ (\alpha_l p^n, \alpha_l) \\ &= (-1)^{(l(p^m)-1)(l(\alpha_l p^n)+|p^n|-1)} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i(l(\alpha_l p^n)-1)+i|p||p^n|} (p^{m+n}, s(p)) \\ &= (-1)^{(ml(p)-1)\omega(p^n)} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i\omega(p^n)} (p^{m+n}, s(p)) \\ &= \begin{cases} m\cdot (p^{m+n}, s(p)) & \text{if } \omega(p^n) \text{ is even;} \\ 0 & \text{if } \omega(p^n) \text{ is odd and } \omega(p^m) \text{ is even} \\ (-1)^{ml(p)}\cdot (p^{m+n}, s(p)) & \text{if } \omega(p^n) \text{ and } \omega(p^m) \text{ are odd.} \end{cases}\end{aligned}$$

接下来，若 p 是一个极大反路径，满足 $p_\odot \neq \emptyset$，则 $(p, p_\odot) \circ (\alpha, \alpha) = (p, p_\odot)$，当且仅当 α 出现在 p 中，否则为零。同样地，$p_\odot$ 的极大性意味着，当 α 出现在 $p_\odot$ 中时，$(\alpha, \alpha) \circ (p, p_\odot) = (p, p_\odot)$。考虑符号后，我们再次得到 $[(\alpha, \alpha), (p, p_\odot)] = f_\alpha(B_p)\cdot (p, p_\odot)$，结论由线性性得出。最后一种类似情形 $[(\alpha, \alpha), (s(q)\ q)]$，我们略去，其中 q 是 A 的闭极大路径。□

注 3.9。在 $[\mathcal{N}^0(u^m), \mathcal{N}^1(u^n)]$ 的第三种情形中，对 $l(p)$ 奇偶性的依赖，在 $\mathcal{N}^0(u^m)$ 和 $\mathcal{N}^1(u^n)$ 为非平凡霍赫希尔德类的情况下实际上消失了，因为这种情形只有在 $\mathrm{char}\,\Bbbk$ 为偶数时才会出现，因此符号不再重要。

推论 3.10。 设 u 是 u 的一个本原完全反路径（分别为路径）。如果 $\omega(u)$ 或 $\operatorname{char}\Bbbk$ 为偶数，则霍赫希尔德类 $N^0(u^m)$、$N^1(u^m)$、 $m \geq 1$ 张成一个分次李子代数$\mathrm{HH}^{\bullet+1}(A, A)$，该代数同构于$\hat{}U^{\omega(u)}$ （分别为 $U^{\omega(u)}$）。

引理 3.11. 设 b 和 b' 是证明 *2.18* 中基的元素。那么，除非对 (b, b') 这一对（交换 b 和 b' 的角色后）属于证明 *3.8* 中的某种情形，否则有 $[b, b'] = 0$。

证明。 设 p, p' 为本原完全反路径， q, q' 为本原完全路径， u, u' 为互不相同的极大反路径，满足 $u_\odot \neq \emptyset \neq u'_\odot$ 且 v, v' 是 A 的互不相同的闭极大路径。设 b, b' 是集合中的任意两个不同元素

$$\{\mathcal{N}^0(p), \mathcal{N}^0(p), \mathcal{N}^0(q), \mathcal{N}^0(q'), (u, u_\odot), (u', u'_\odot), (s(v), v), (s(v'), v')\}. \tag{3.4}$$

回顾既定假设：(Q, I) 不是环，也不是 Kronecker 箭图。通过计算可知，对于 $(\alpha, \beta) \in C_{\mathcal{P}}(A)$，$z := (u, u_\odot) \circ (\alpha, \beta)$ 等于 0，是一个秩 1 的原子余边界（其余边界性质可由证明 2.15 验证）；或者有 $z = (\alpha, u_\odot)$， $l(u) = 1$ 和 $\beta = u$；或者有 $z = (u, u_\odot)$， $l(u) > 1$，且 $\alpha = \beta$ 是出现在 u 中的一支箭。因此，对于任意 $w \in \{(u', u'_\odot), \mathrm{N}^0(p), \mathrm{N}^0(q), (s(v)\ v)\}$，$(u, u_\odot) \circ w$ 都是余边界。类似地，另一个计算表明，$\mathrm{N}^0(p) \circ b'$ 总是为零。这意味着集合 $\{\mathrm{N}^0(p), \mathrm{N}^0(p'), (u, u_\odot), (u', u'_\odot)\}$ 中的所有元素相对于 $[-, -]$ 两两正交。由于当 $l(\alpha) = 0$ 时，$(\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta) = 0$，我们现在还可得出结论：$\mathrm{N}^0(q)$ 和 $(s(v)\ v)$ 与 (3.4) 中所有其他元素正交。最后， $\cup$ 和 $[-, -]$ 的相容性，以及 $\mathrm{N}^1(p)$ 和 $\mathrm{N}^1(q)$ 分别与乘积 $(\alpha, \alpha) \cup \mathrm{N}^0(p)$ 和 $(\alpha, \alpha) \cup \mathrm{N}^0(q)$ 相差一个符号这一事实，推出了剩余涉及 $\mathrm{N}^1(p)$ 和 $\mathrm{N}^1(q)$ 的情形中的正交性。□

4. 本征形式温和代数的应用

回顾一下，若每个 A_∞-代数 C 都满足 $\mathrm{H}^\bullet(C) \cong B$ 与 C 作为分次代数同构，则分次代数 B 称为本征形式的，也就是说，它拟同构于其上同调。下面的定理在一个温和的假设下刻画了本征形式的分次温和代数。

定理 4.1。设 A 是一个分次温和代数。假设 Σ_A 不含只有一个停止点且绕数为2的边界分支。那么， A 是本征形式的，当且仅当 Σ_A 没有绕数为2的未标记边界分支。

证明。 我们假设读者熟悉 [HKK17]中的术语。首先，我们证明，如果 Σ_A 包含一个绕数为 2 的未标记分支，那么 A 不是内在形式的。关于不存在带有单个标记区间的某些分支这一假设，仅在反方向的证明中需要。如果 B 是一个绕数为 2 的未标记分支 B，这意味着 A 具有一个本原完全反路径 $u = \alpha_1 \cdots \alpha_n$，使得 $\omega(u) = 2$，并且通过向 B 粘合一个圆盘，我们得到一个分次标记曲面 $\Sigma' \supseteq \Sigma_A$。这里使用关于 B 绕数的假设，是为了保证 Σ_A 上的线场能够延拓为 Σ'上的线场。代数 A 对应于 Σ' 上的一个弧系 $\mathcal{A}$ （甚至对应于 Σ_A上的一个弧系），其中反路径 u的存在意味着一个圆盘序列的存在。根据 [HKK17，第 3.3]节， A因此可以赋予一个极小的 A_∞-结构，该结构具有非平凡的高阶 A_∞-乘法，并且延拓了 A上的乘法。将这个 A_∞-代数记为 A'，由[HKK17，引理 3.2] 之前的讨论可知，在$\mathcal{K}_0(A')$中，类之间存在一个非平凡关系

$[x]$、 $x \in Q_0$，它们对应于 A' (=的顶点 A的顶点)。如果 A 是同调光滑的，则可以按照 [HKK17, 定理 5.1]中的论证，得出$\mathcal{K}_0(A)$作为一个阿贝尔群由这些类 $[x]$ 自由生成，因此$\mathcal{K}_0(A) \ncong \mathcal{K}_0(A')$。由此可知， A' 不可能是形式的。每个分次温和代数都是某个同调光滑分次温和代数的幂等子代数：只需将 Σ_A 的所有未标记分支变为完全标记分支，并向弧系$\mathcal{A}$ 中添加额外的弧，从而得到这个新曲面的完整形式弧系即可。由于自由阿贝尔子群的子群仍然是自由阿贝尔群，$\mathcal{K}_0(A)$ 是秩为 $|\mathcal{A}|$ 的自由阿贝尔群，因此我们可以用同样的方式导出矛盾。

反过来，我们使用卡代什维利判据 [Kad88]。该判据指出，若分次代数 B 满足对所有 $n \geq 3$，都有 $\mathrm{HH}^{n,\,2-n}(B,\ B) = 0$，则它具有内在形式性。首先注意，温和代数 A 的完全标记分支和闭极大路径所产生的所有贡献都属于 $\mathrm{HH}^{s,\,\bullet}(A,\ A)$， $s \in \{0,\ 1\}$，因此与我们无关。$\mathrm{H}^1(\Sigma_A,\ \Bbbk)$ 也是如此，其贡献属于 $\mathrm{HH}^{1,0}(A,\ A)$。因此，根据我们的假设，我们可以得出，对所有 $n \geq 2$，都有 $\mathrm{HH}^{n,\,2-n}(A,\ A) = 0$，于是由卡代什维利判据可得所述结论。□

前述定理的一个特别推论是：满足证明 4.1 的假设（这些假设在导出等价下不变）的分次温和代数的内在形式性是莫里塔不变量。这意味着，这样的分次温和代数 A 具有内在形式性，当且仅当所有与之导出等价的分次温和代数也具有内在形式性。对于一般的分次代数而言，这远非事实。

注 4.2。 计算表明，去掉证明 4.1 中关于仅有一个停止点的边界分支的假设 Σ_A 后，证明 4.1 仍然成立。相应的霍赫希尔德余循环 $f = (\alpha, \alpha_{\odot})$ 是霍赫希尔德复形中的一个毛雷尔–卡当元素，其结构由微分分次李代数结构给出。因此，(A, f) 定义了 A 上一个非平凡的最小 A_∞-结构；按照 [Sei08] 的意义，它似乎可通过一个形式微分同胚 变为形式的。这似乎也适用于同一形式元素的线性组合。若不存在绕数为 2 的未标记分支，则对所有 $n \geq 2$，$\mathrm{HH}^{n,\,2-n}(A, A)$ 都由这类元素生成。我们预计，可以通过改造卡代什维利形式性判据的证明，证明 A 仍然是内禀形式的。

参考文献

[AAG08] D. Avella-Alaminos 和 C. Geiss。温和代数的组合导出不变量。《纯粹与应用代数杂志》，212(1):228–243，2008年。[APS23] C. Amiot、P.-G. Plamondon 和 S. Schroll。通过绕数和阿尔夫不变量给出温和代数的完全导出不变量。《数学选刊（新辑）》，29(2):第30号论文，36页，2023年。[AS87] I. Assem 和 A. Skowroński。类型为 $\tilde{A}_n$ 的迭代倾斜代数。《数学杂志》，195:269–290，1987年。[BGO25] M. Booth、I. Goodbody 和 S. Opper。代数与拓扑中的自反微分分次范畴。*arXiv:2506.11213*，2025年。[Boc16] R. Bocklandt。带 puncture 曲面的非交换镜像对称。《美国数学会汇刊》，368(1):429–469，2016年。附录由 Mohammed Abouzaid 撰写。[BRyD23] B. Briggs 和 L. Rubio y Degrassi。HH^1 及基本群中的极大环面。《国际数学研究通知》，(7):5538–5568，2023年。[BSS$^+$] X. Bian、S. Schroll、A. Solotar、X.-C. Wang 和 C. Wen。分次斜温和代数的霍赫希尔德上同调：格斯滕哈伯代数结构及几何解释。准备中。

[BSW25] S. Barmeier、S. Schroll 和 Z. Wang。曲面部分缠绕 Fukaya 范畴的变形。arXiv:2512.16354，2025年。[BvdK24] R. Bocklandt 和 J. van de Kreeke。温和 A_∞-代数的变形。载于《非交换代数与几何的最新进展》，《当代数学》第801卷，第17–50页。美国数学会，[普罗维登斯],RI， [2024] ©2024。[CSSS24] C. Chaparro、S. Schroll、A. Solotar 和 M. Suárez-Álvarez。温和代数的霍赫希尔德（上）同调。arXiv:2311.08003，2024年。[dlPnS01] J. Antonio de la Peña 和 M. Saorín。关于代数的第一霍赫希尔德上同调群。《数学手稿》，104(4):431–442，2001年。[HKK17] F. Haiden、L. Katzarkov 和 M. Kontsevich。平坦曲面与稳定性结构。《高等科学研究所数学出版物》，126:247–318，2017年。[JSW23] H. Jin、S. Schroll 和 Z. Wang。分次温和代数的完全导出不变量与 silting 理论。arXiv:2303.17474，2023年。[Kad88] T. V. Kadeishvili。 $A(\infty)$-代数的结构，以及霍赫希尔德上同调与哈里森上同调。《格鲁吉亚苏维埃社会主义共和国科学院拉兹马泽第比利斯数学研究所学报》，91:19–27，1988年。[LP20] Y. Lekili 和 A. Polishchuk。通过 Fukaya 范畴研究温和代数的导出等价。《数学年刊》，376:187–225，2020年。[MVD83] R. Martínez-Villa 和 J.A. De la Peña。带关系的箭图的万有覆盖。《纯粹与应用代数杂志》，30(3):277–292，1983年。[Opp19] S. Opper。关于温和代数的自等价与完全导出不变量。arXiv:1904.04859，2019年。[Opp25a]S. Opper。曲面 Fukaya 范畴与分次温和代数的自等价。arXiv:2510.11543，2025年。[Opp25b] S. Opper。霍赫希尔德上同调的积分、导出皮卡群与提升的唯一性。arXiv:2405.14448，2025年。[OPS18] S. Opper、P-G. Plamondon 和 S. Schroll。温和代数导出范畴的几何模型。arXiv:1801.09659，2018年。[PPP19] Y. Palu、V. Pilaud 和 P.-G. Plamondon。局部 gentle 代数的非亲吻复形与非交叉复形。《组合代数杂志》，3(4):401–438，2019年。[RR18] M. Redondo 和 L. Román。二次弦代数霍赫希尔德上同调上的格斯滕哈伯代数结构。《代数表示论》，21(1):61–86，2018年。[RW11] C. Roitzheim 和 S. Whitehouse。 A_∞-结构的唯一性与霍赫希尔德上同调。《代数与几何拓扑》，11(1):107–143，2011年。[Sei08] P. Seidel。Fukaya 范畴与皮卡-勒夫谢茨理论。Zur. Lect. Adv. Math. Zürich：欧洲数学学会（EMS），2008年。[Tam21] P. Tamaroff。单项式代数的极小模型。《同调、同伦与应用》，23(1):341–366，2021年。

查理大学代数系，捷克布拉格8区 Sokolovská49/83电子邮箱地址：
opper@karlin.mff.cuni.cz