arXiv:2601.06070v1 [math.QA] 29 Dec 2025

具有 $E_8^{(1)}$-对称性的 3×3 线性 q-差分方程组

Takahiko Nobukawa *

谨以此文献给 *Yasuhiko Yamada* 教授，祝贺他 *65* 岁寿辰

摘要

我们提出一个秩 3 的线性 q-差分方程，它具有 $E_8^{(1)}$ 型仿射魏尔群对称性。我们进一步将该方程与 Moriyama–Yamada 的量子曲线进行比较，后者具有 $W(E_8^{(1)})$-对称性。我们方程的对称性由 q-中卷积给出，该中卷积由 Sakai–Yamaguchi 定义，并由 Arai–Takemura 重新表述。本文通过一个 q-Okubo 型方程，给出对 q-中卷积的重构。

1 引言

离散 Painlevé 方程是具有丰富对称结构的可积动力系统，其对称结构由仿射 Weyl 群支配。自 Sakai 的几何分类 [21], 以来，这些方程一直被理解为等单值变形的离散类比，并在可积系统理论中发挥着核心作用。分类总结如下图所示：

$$
\begin{array}{ll}
\text{elliptic} & E_8^{(1)} \\
\text{multiplicative} & E_8^{(1)} \to E_7^{(1)} \to E_6^{(1)} \to D_5^{(1)} \to A_4^{(1)} \to (A_2+A_1)^{(1)} \to (A_1+A_1)^{(1)} \to A_1^{(1)} \to \mathcal{D}_6 \\
\text{additive} & E_8^{(1)} \to E_7^{(1)} \to E_6^{(1)} \to D_4^{(1)} \to A_3^{(1)} \to (A_1+A_1)^{(1)} \to A_1^{(1)} \to \mathbb{Z}_2 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \searrow \qquad\quad \searrow \qquad\quad \downarrow \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A_2^{(1)} \to A_1^{(1)} \to 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathbb{Z} \\
\nearrow
\end{array}
$$

在 Sakai 的框架中，构造仿射魏尔群的双有理表示至关重要。本文聚焦于 q差分情形的 $E_8^{(1)}$。

在微分和差分情形下，Painlevé 方程与相关线性问题之间的对应关系已得到广泛研究（例如参见 [14] 及其中的参考文献）。特别是，具有等单值变形结构的线性微分方程或差分方程，为连接可积动力学、表示理论和数学物理提供了概念框架。

Katz [15] 提出、Dettweiler–Reiter [3, 4],发展的中卷积，是研究线性微分方程理论的有力工具。仿射魏尔群

*教育学部，皇學館大学，日本。电子邮箱：t-nobukawa@kogakkan-u.ac.jp

关键词：仿射魏尔群、 q-差分方程组、 q-中卷积。MSC2020：39A13。

第六 Painlev´e 方程的 $D_4^{(1)}$ 型对称性，可通过对相应的 Lax 线性方程应用中卷积来实现 [6, 25]（另见 [9]）。文献 [24] 研究了这一结果的 q 类比，即通过 q-中卷积 mc_λ [23] 实现的 $D_5^{(1)}$ 型仿射魏尔群对称性。由于 $mc_\lambda \circ mc_\mu = mc_{\lambda+\mu}$ 成立，且 $mc_0 = \mathrm{id}$ 在 GL 的规范变换下成立，因此 (q-)中卷积给出了方程系数矩阵各分量的双有理变换。(q-)中卷积有助于给出仿射魏尔群的双有理表示。

Yamada [27]给出了 q-Painlev´e 方程（类型为 $E_8^{(1)}$）的一个 Lax 方程。这个线性方程是一个秩 2 标量 q-差分方程。本文介绍了一个新的秩 3 线性 q-差分方程，该方程具有类型为 $E_8^{(1)}$ 的仿射魏尔群对称性，见下文的 (4.1)。主要结果是定理 4.4，它利用 q-中卷积给出了方程 (4.1) 的参数变换。我们还通过一个 q-Okubo 型方程重构了q-中卷积。大部分表述与 Arai–Takemura 的 q-中卷积 [1]相同。唯一不同的是对原点的处理，而这一点对于证明上述主要结果十分重要。 q-中卷积的性质将在第 3 节中讨论。

本段说明如何得到 (4.1)。第六个微分 Painlev´e 方程作为具有 4 个奇点的二阶 Fuchsian 微分方程的等单值变形出现在 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上。在微分情形中，奇点的位置可以固定，也可以通过 M¨obius 变换进行变换。换言之，对于微分方程而言，每个奇点都可以被平等地处理。在 [28]中，使用“民主”一词来表达这种处理方式。另一方面，我们无法将一般的 M¨obius 变换应用于q-差分方程，因为点 $x = 0$、 $x = \infty$ 是 q-移位算子T_x 的固定点： $x \mapsto qx$。对于 q-差分方程，仅能应用缩放 $x \to cx$ 和反演 $x \mapsto x^{-1}$。因此，上述 Fuchs 型微分方程存在若干种 q-类比。更准确地说，具有以下 4 个奇点的二阶 Fuchs 型微分方程的 q-类比并不等价:

$$\{t_1, t_2, t_3, t_4\}\ (\text{“democratic”}), \quad \{t_1, t_2, t_3, 0\}, \quad \{t_1, t_2, 0, \infty\}.$$

q-Painlev´e 型方程是上述 q-差分方程第一种情形的一种变形，而第三种情形则对应于 q-Painlev´e 型方程。关于 $E_7^{(1)}$ 情形的 Lax 形式，参见 [27] ；关于 $E_6^{(1)}$ 情形（即上述方程的第二种情形）的 Lax 形式，参见 [18, 22, 27] ；关于 $D_5^{(1)}$ 情形的 Lax 形式，参见 [12, 27] 。这些结果表明，考虑“民主型” q-差分方程有助于得到具有高阶对称性的方程。文献 [2] 指出， $E_6^{(1)}$、$E_7^{(1)}$ 和 $E_8^{(1)}$ 型加法 Painlev´e 方程分别源自秩为 3、4 和 6 的 Fuchs 微分方程的 Schlesinger 变换。这些 Fuchs 微分方程的谱型为

$$E_6^{(1)} : 111; 111; 111, \ E_7^{(1)} : 22; 1111; 1111, \ E_8^{(1)} : 33; 222; 111111. \tag{1.1}$$

因此，通过获得类型为 $E_6^{(1)}$ 的 q-Painlev´e 方程的 Lax 对，考虑具有 3 个奇点的秩 3 方程的 q- 类比是自然的。基于上述讨论，秩 3 Fuchs 微分方程的民主式 q- 类比可能具有高阶对称性。基于这一考虑，我们得到方程 (4.1)。我们注意到，Park[20] 给出的 Lax 线性方程是上述与 $E_6^{(1)}$ 相关的秩 3 方程的 q-类比。

Moriyama–Yamada 主要讨论了 [17], 型仿射魏尔群的量子表示。该表示是通过考察量子曲线的双有理变换得到的（关于这条曲线的性质，另见 [16] ）。量子 q-差分 Painlev´e

方程作为一项应用进行了研究。本文将我们的方程 (4.1) 与这条曲线进行比较。我们的方程 (4.1) 约化为标量方程，可以视为这条曲线的非自治版本（见命题 5.4）。因此，我们的结果可应用于一些量子可积系统，包括量子 Painlev´e 方程。

本文内容安排如下。第 2 节给出本文所用的记号。第 3 节通过 q-Okubo 型方程 (3.1) 研究 q- 中卷积。第 4 节引入一个三阶方程，并证明该方程具有 $W(E_8^{(1)})$- 对称性。第 5 节讨论我们的方程与 Moriyama-Yamada 的量子曲线之间的关系。第 6 节总结本文并讨论相关主题。为便于阅读，若干结果的证明列于附录中。

2 记号

本节给出全文通用的记号，并展示若干性质。这些性质主要用于第 3 节。我们固定 $q \in \mathbb{C}$，使其满足 $0 < |q| < 1$。令

$$T_x : f(x) \mapsto f(qx), \tag{2.1}$$

$$D_x = \frac{1}{(1-q)x}(1 - T_x) : f(x) \mapsto \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx}, \tag{2.2}$$

$$(x)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - xq^k), \tag{2.3}$$

$$\int_{[0,\tau]} f(t)d_qt = \int_0^\tau f(t)d_qt = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(\tau q^n)\tau q^n, \tag{2.4}$$

$$\int_{[0,\tau\infty]} f(t)d_qt = \int_0^{\tau\infty} f(t)d_qt = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tau q^n)\tau q^n, \tag{2.5}$$

$$\int_{[\tau_1,\tau_2]} f(t)d_qt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)d_qt = \int_{[0,\tau_2]} f(t)d_qt - \int_{[0,\tau_1]} f(t)d_qt,$$
$$(\tau_1,\ \ \tau_2 \in \mathbb{C} \cup \mathbb{C}\infty) \tag{2.6}$$

$$\int_{a_1C_1+\cdots+a_mC_m} f(t)d_qt = a_1\int_{C_1} f(t)d_qt + \cdots + a_m\int_{C_m} f(t)d_qt, \tag{2.7}$$

其中每个 C_i 都是区间 $[\tau_1, \tau_2]$ 的形式。本文将 C 称为（Jackson 积分的）路径，若 C 是区间的线性组合。

以下性质在本文中经常使用。

引理 2.1。 q-Leibniz 法则成立：

$$D_x(f(x)g(x)) = f(x)D_x(g(x)) + D_x(f(x))g(qx) = f(qx)D_x(g(x)) + D_x(f(x))g(x). \tag{2.8}$$

证明。 通过直接计算即可轻松验证。 □

引理 2.2. 对于路径 C，我们有

$$\int_C D_t f(t)dqt = [f(t)]_{t\in\partial C}, \tag{2.9}$$

$$\int_C T_t f(t)d_qt = q^{-1}\int_C f(t)d_qt - \frac{1-q}{q}[tf(t)]_{t\in\partial C}, \tag{2.10}$$

若积分收敛，其中 $f(\tau\infty) = \lim_{n\to-\infty} f(\tau q^n)$，且

$$[f(t)]_{t\in\partial[\tau_1,\tau_2]} = f(\tau_2) - f(\tau_1), \tag{2.11}$$
$$[f(t)]_{t\in\partial(a_1C_1+\cdots+a_mC_m)} = a_1[f(t)]_{t\in\partial C_1} + \cdots + a_m[f(t)]_{t\in\partial C_m}. \tag{2.12}$$

证明。 首先我们证明 (2.9)。只需证明

$$\int_{[\tau_1,\tau_2]} D_t f(t) d_q t = f(\tau_2) - f(\tau_1), \tag{2.13}$$

对于 τ_1， $\tau_2 \in \mathbb{C}\cup\mathbb{C}\infty$。对于 $\tau \in \mathbb{C}$，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\tau D_t f(t) d_q t &= \sum_{n=0}^{\infty}(f(\tau q^n) - f(\tau q^{n+1})) \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(f(\tau q^n) - f(\tau q^{n+1})) \\ &= \lim_{N\to\infty} f(\tau) - f(\tau q^{N+1}) = f(\tau) - f(0) = [f(t)]_{t\in\partial[0,\tau]},\end{aligned} \tag{2.14}$$

and

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau\infty} D_t f(t) d_q t &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(f(\tau q^n) - f(\tau q^{n+1})) \\ &= \lim_{M,N\to\infty}\sum_{n=-M}^{N}(f(\tau q^n) - f(\tau q^{n+1})) \\ &= \lim_{M,N\to\infty} f(\tau q^{-M}) - f(\tau q^{N+1}) = f(\tau\infty) - f(0) = [f(t)]_{t\in\partial[0,\tau\infty]}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

因此，方程 (2.13) 成立，特别是 (2.9) 的证明已经完成。根据q-Leibniz 法则，我们有

$$D_t(tf(t)) = qtD_t f(t) + f(t) = \frac{q}{1-q}(1-T_t)f(t) + f(t) = -\frac{q}{1-q}T_t f(t) + \frac{1}{1-q}f(t). \tag{2.16}$$

对两边积分，得到

$$[tf(t)]_{t\in\partial C} = -\frac{q}{1-q}\int_C T_t f(t) d_q t + \frac{1}{1-q}\int_C f(t) d_q t. \tag{2.17}$$

(2.10) 的证明至此完成。 □

注 2.3。 Jackson 积分与 q-移位算子之间的一些关系写在 [13] 中。例如，方程 (2.9) 在 [13,推论 201] 中进行了讨论。

3 q-中卷积

本节将通过 Okubo 型系统的 q 类比，重构 q-中卷积。大部分表述与 Arai–Takemura [1], 的表述一致，后者是对 Sakai–Yamaguchi 的 q-中卷积 [23] 的重新表述。我们的构造明确了 Euler 型 Jackson 积分变换的积分路径条件。

Fuchs 型微分方程的中卷积 [3, 4, 15] 通过以下三个步骤构造：

1. 将方程改写为 Okubo 型系统（$xI - S$） $\dfrac{dy}{dx} = Ay$，其中 $\underline{S}$为对角矩阵， A 为常矩阵，

2. 应用欧拉型积分变换 $y \mapsto \int y(t)(x-t)^{\lambda}dt$,

3. 将方程组投影到一个商空间。

接下来，我们按照这一方案构造 q-中卷积。

定义 **n 3.1.** 如果一个 q-差分方程组具有以下形式，则称其为 q-冈本型 :

$$(xI - S)D_x y = Ay, \tag{3.1}$$

其中 I 是单位矩阵， S 是对角矩阵， A是常矩阵。

定义 **3.2 定义**。我们将 q-欧拉型积分变换 $E_\lambda = E_{\lambda;C}$ 定义如下:

$$E_{\lambda;C}[f](x) = x^{\lambda}\int_C f(t)\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}d_q t. \tag{3.2}$$

注 3.3。由 q-二项式定理可得

$$x^{\lambda}\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty} \xrightarrow{q\to 1} x^{\lambda}(1-t/x)^{\lambda} = (x-t)^{\lambda}. \tag{3.3}$$

因此，变换 $E_{\lambda;C}$ 是欧拉型积分变换的 q-类比

$$f(t) \mapsto \int_C f(t)(x-t)^{\lambda}dt. \tag{3.4}$$

下面我们给出 q-欧拉型积分变换的一些性质。首先，我们推导 E_λ 与差分算子之间的两个交换关系。

引理 3.4。我们有

$$E_{\lambda;C}[T_x f](x) = q^{-\lambda-1}T_x E_{\lambda;C}[f](x) - x^{\lambda}\frac{1-q}{q}\left[t\frac{1-q^{-\lambda}t/x}{1-t/x}f(t)\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}\right]_{t\in\partial C}, \tag{3.5}$$

$$E_{\lambda;C}[D_x f](x) = q^{-\lambda}D_x E_{\lambda;C}[f](x) + x^{\lambda}\left[\frac{1-q^{-\lambda}t/x}{1-t/x}f(t)\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}\right]_{t\in\partial C}. \tag{3.6}$$

证明。 首先，我们证明（3.5）。我们有

$$\begin{aligned}
&\int_C T_t f(t)\cdot\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}d_q t\\
=&\int_C T_t T_x\left[f(t)\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}\right]d_q t\\
=&q^{-1}T_x\int_C f(t)\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}d_q t - \frac{1-q}{q}T_x\left[tf(t)\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}\right]_{t\in\partial C}\\
=&\,q^{-1}T_x\int_C f(t)\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}d_q t - \frac{1-q}{q}\left[t\frac{1-q^{-\lambda}t/x}{1-t/x}f(t)\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}\right]_{t\in\partial C}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

两边同时乘以 x^{λ}，得到 (3.6)。

接下来，我们证明 (3.6)。根据 q-Leibniz 法则，有

$$\begin{aligned} & D_t f(t) \cdot \frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty} \\ =& D_t\left[f(t)\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}\right] - T_t f(t) \cdot D_t \frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

经过简单计算，我们得到

$$D_t \frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty} = \frac{q}{(1-q)x}(1-q^{-\lambda}T_x^{-1})\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}. \tag{3.9}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} & \int_C D_t f(t) \cdot \frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty} d_q t \\ =& \left[f(t)\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty}\right]_{t\in\partial C} + \frac{q}{(1-q)x}(q^{-\lambda}T_x^{-1}-1)\int_C T_t f(t)\cdot\frac{(q^{1-\lambda}t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty} d_q t. \end{aligned} \tag{3.10}$$

两边乘以 x^λ 并利用 (3.5)，最终得到 (3.6)。 □

注 3.5. 方程 (3.6) 显然是一个 q-类比

$$\int_C \frac{d}{dt} f(t)\cdot(x-t)^\lambda dt = \frac{d}{dx}\int_C f(t)(x-t)^\lambda dt, \tag{3.11}$$

如果边界项消失。根据极限

$$\frac{1-q^\mu T_x}{1-q} f(x) \xrightarrow{q\to 1} (\vartheta_x + \mu) f(x), \tag{3.12}$$

其中 $\vartheta_x = x\dfrac{d}{dx}$，方程 (3.5) 被视为一个 q-类比

$$\int_C \vartheta_t f(t)\cdot(x-t)^\lambda dt = (\vartheta_x - \lambda - 1)\int_C f(t)(x-t)^\lambda dt. \tag{3.13}$$

下文中，我们考虑对该方程进行变换

$$D_x y = \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{x-t_i} y \quad (B_i : M\times M \text{ constant matrix}). \tag{3.14}$$

引理3.6。 假设 y 满足方程 (3.14)。令

$$Y_0 = {}^{\mathrm{T}}\left[\frac{y}{x-t_1}, \frac{y}{x-t_2}, \ldots, \frac{y}{x-t_N}\right], \tag{3.15}$$

其中 ${}^{\mathrm{T}}z$ 是 z 的转置矩阵。函数 Y_0 满足 q-Okubo 型系统

$$\left(xI - \frac{S}{q}\right) D_x Y_0 = \frac{1}{q}(B-I)Y_0, \tag{3.16}$$

其中 S和 B是由下式给出的 $MN\times MN$矩阵

$$S = \begin{bmatrix} t_1 I_M & O & \cdots & O \\ O & t_2 I_M & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & t_N I_M \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_N \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_N \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

证明。 根据 q-Leibniz 法则 (2.8)，我们有

$$\begin{aligned} D_x \frac{y}{x-t_i} &= \frac{1}{qx-t_i} D_x y + D_x \frac{1}{x-t_i} \cdot y \\ &= \frac{1}{qx-t_i} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{B_j - \delta_{i,j} I}{x-t_j} \right) y, \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中$\delta_{i,\ j}$ 是克罗内克δ。因此我们得到

$$(qx-t_i) D_x \frac{y}{x-t_i} = \sum_{j=1}^{N} (B_j - \delta_{i,j} I) \frac{y}{x-t_j}. \tag{3.19}$$

这就完成了方程(3.16)的证明。 □

命题3.7。 设 y 是方程(3.14)的一个解，且 Y_0 由(3.15)给出。我们假设路径 C 满足

$$\left[\frac{1-q^{-\lambda} t/x}{1-t/x} (tI - S) Y_0(t) \frac{(q^{1-\lambda} t/x)_\infty}{(qt/x)_\infty} \right]_{t \in \partial C} = 0. \tag{3.20}$$

则函数 $Y = E_{\lambda;C}[Y_0](x)$满足以下方程组：

$$(xI - S) D_x Y = \left(q^{\lambda} B + [\lambda] I \right) Y. \tag{3.21}$$

这里 S 和 B 由(3.17)给出，且 $[\lambda] = \dfrac{1-q^{\lambda}}{1-q}$。特别地， Y满足

$$D_x Y = \sum_{i=1}^{N} \frac{G_i}{x-t_i} Y, \tag{3.22}$$

其中

$$G_i = \begin{bmatrix} & & & O & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & O & & & \\ q^{\lambda} B_1 & \cdots & q^{\lambda} B_{i-1} & q^{\lambda} B_i + [\lambda] I & q^{\lambda} B_{i+1} & \cdots & q^{\lambda} B_N \\ & & & O & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & O & & & \end{bmatrix} \ i\text{-th block} \tag{3.23}$$

证明。 由引理3.6可得

$$\frac{1-T_x}{1-q} Y_0 - \frac{S}{q} D_x Y_0 = \frac{1}{q} (B - I) Y_0. \tag{3.24}$$

对两边应用 $E_{\lambda;C}$，可得

$$\frac{1-q^{-\lambda-1} T_x}{1-q} Y + -S q^{-\lambda-1} D_x Y = \frac{1}{q} (B - I) Y. \tag{3.25}$$

这里的边界项因 (3.20) 而消失。这等价于 (3.21)。在 (3.21) 两边左乘 $(xI - S)^{-1}$，即可导出方程 (3.22)。 □

定义 3.8. q-卷积 c_λ 由对应关系 $(B_1,\dots,B_N)\mapsto(G_1,\dots,G_N)$ 定义，其中 G_i 由 (3.23) 给出。

以下命题给出了 G_i-作用的不变空间，其中 c_λ：$(B_1,\ \dots\dots,\ B_N)\mapsto(G_1,\ \dots\dots,\ G_N)$。

命题 3.9 ([1,命题 3.9])。 我们定义

$$\mathcal{K}=\begin{bmatrix}\mathrm{Ker}B_1\\ \vdots\\ \mathrm{Ker}B_N\end{bmatrix}=\mathrm{Ker}B_1\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}B_N\subset\mathbb{C}^{MN},\tag{3.26}$$

$$\mathcal{L}=\mathrm{Ker}(G_1+\cdots+G_N)\subset\mathbb{C}^{MN}.\tag{3.27}$$

空间 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 在 $i=1,\ \dots\dots,\ N$ 时关于 G_i-作用是不变的。

证明。 这可以直接验证。 □

定义 3.10。 我们将由商空间 $\mathbb{C}^{MN}/(\mathcal{K}+\mathcal{L})$ 上的 G_i-作用诱导的矩阵记为 $\bar{G}_i(i=1,\ \dots\dots,\ N)$。$q$-中卷积 mc_λ 由对应关系 $(B_1,\ \dots\dots,\ B_N)\mapsto(G_1,\ \dots\dots,\ G_N)$ 定义。

注 3.11。 这种 q-中卷积与 Arai–Takemura 在定义 3.1] 中提出的方法几乎相同。因此，Arai–Takemura 的 q-中卷积的若干性质也适用于我们的 q-中卷积（参见命题 3.9、3.14、3.15、3.16 及定理 3.17）。唯一的区别在于对点 $x=0$ 的处理，这对于证明第 4 节中的若干结果很重要。在 Arai–Takemura 的构造中，即使相应的留数矩阵为 O，点 $x=0$ 也应视为一个奇点。

注 3.12. 通过与 Shunya Adachi 的私人交流，发展出了经由 q-Okubo 型方程构造 q-中间卷积的方法。

定义 3.13 ([1, 定义 5.1]). 设 V 和 W 为有限维向量空间，且 $\mathbf{B}=(B_1,\dots,B_N)$（分别地，$\mathbf{C}=(C_1,\dots,C_N)$）为 V（分别地，W）上的一组自同态。

(i) 若存在向量空间的同构 $\phi\colon V\to W$，使得对于 $i=1,\dots,N$，均有 $\phi\circ B_j=C_j\circ\phi$，则 $(V,\mathbf{B})$ 与 $(W,\mathbf{C})$ 同构。

(ii) 若子空间 $V'\subset V$ 满足对于所有 $j=1,..,N$ 均有 $B_jV'\subset V'$，且该子空间仅为 $V'=V$ 或 $V'=\{0\}$，则称 $(V,\mathbf{B})$ 不可约。

(iii) $(V,\ \mathbf{B})$ 满足 $(*)$，如果

$$\left(\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\mathrm{Ker}(B_i)\right)\cap\mathrm{Ker}(B_j+\tau)=\{0\}\quad\text{for any } j=1,\dots,N \text{ and } \tau\in\mathbb{C}.\tag{3.28}$$

(iv) $(V,\ \mathbf{B})$ 满足 $(**)$，若

$$\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\mathrm{Im}(B_i)\right)+\mathrm{Im}(B_j+\tau)=V\quad\text{for any } j=1,\dots,N \text{ and } \tau\in\mathbb{C}.\tag{3.29}$$

命题 3.14 ([1, 命题 5.6])。 条件 $(*)$ 和 $(**)$ 在q-中卷积 mc_λ下保持不变。

命题 3.15 ([1, 命题 5.7])。 若 $(V,\mathbf{B})$ 满足 $(*)$，则 $(mc_0(V)\ mc_0((B)))$ 与 $(V,\mathbf{B})$ 同构。

命题 3.16 ([1, 定理 5.9])。 若 $(V,\mathbf{B})$ 不可约，则 $(mc_\lambda(V)\ mc_\lambda(\mathbf{B}))$ 不可约，或者 $V=\{0\}$。

定理 3.17 ([1, 定理 5.8])。 设 $(V,\mathbf{B})$ 满足条件 $(*)$ 和 $(**)$.

(i) 对任意 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$，$(mc_{\lambda_2}(mc_{\lambda_1}(V))\ mc_{\lambda_2}(mc_{\lambda_1}(\mathbf{B})))$ 与 $(mc_{\lambda_1+\lambda_2}(V)\ mc_{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbf{B}))$ 同构。
(ii) 对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$，$(mc_{-\lambda}(mc_\lambda(V))\ mc_{-\lambda}(mc_\lambda(\mathbf{B})))$ 与 $(V,\mathbf{B})$ 同构。

注记 3.18. 命题 3.16 在本文中并未直接使用。

The q-中卷积是如下形式的 q-差分方程组的一种变换:

$$D_xy=\sum_{i=1}^{N}\frac{B_i}{x-t_i}\quad(B_i:\ M\times M\ \text{constant matrix}). \tag{3.30}$$

在微分情形中，还有另一种称为加法变换的变换。加法变换是与 $y\mapsto y(x-t_j)^\lambda$ 相关联的变换。尽管本文中不会用到，我们仍给出 q-差分方程组的加法变换。考虑上述方程的规范变换 $y\mapsto y'=y(x/t'_j)_\infty\,(x/t_j)_\infty\,(t_j\neq 0)$。经过简单计算，我们发现 y' 满足以下方程组:

$$D_xy'=\left(\sum_{i\neq j}\frac{B'_i}{x-t_i}+\frac{B'_j}{x-t'_j}\right)y', \tag{3.31}$$

其中

$$B'_i=\frac{t'_j}{t_j}\frac{t_i-t_j}{t_i-t'_j}B_i, \tag{3.32}$$

$$B'_j=\sum_{i\neq j}\frac{t'_j}{t_j}\frac{t'_j-t_j}{t'_j-t_i}B_i+\frac{t'_j}{t_j}B_j+\frac{t_j-t'_j}{t_j(1-q)}I. \tag{3.33}$$

定义 3.19 ([1, 节 2]). 我们将加法变换定义为

$$(t_1,\dots,t_N)\mapsto(t_1,\dots,t'_j,\dots,t_N)\quad\text{and}\quad(B_1,\dots,B_N)\mapsto(B'_1,\dots,B'_N). \tag{3.34}$$

注记 3.20. 令 $t'_j=q^\alpha t_j$。取经典极限 $q\to 1$，矩阵 $B'_i\,(i\neq i)$ 和B'_j 趋于

$$B'_i\to B_i,\quad B'_j\to B_j+\alpha I. \tag{3.35}$$

该变换是微分情形中的加法变换。我们注意到，规范因子 $(x/t'_j)_\infty\,(x/t_j)_\infty$趋于 $(1-x/t_j)^\alpha$。

注 3.21。 当 $t_j=0$ 时，我们应将规范变换 $y\mapsto yx^\alpha$ 视为微分情形的类比。方程 (3.31) 经此规范变换后变为

$$B_i\mapsto q^\alpha B_i\ (i\neq j),\quad B_j\mapsto q^\alpha B_j+[\alpha]I. \tag{3.36}$$

4 个 3×3 方程组

本节介绍一个秩 3 的 q-差分方程组，它具有 $E_8^{(1)}$ 型仿射魏尔群的对称性。我们证明，该仿射魏尔群的生成元由参数的置换和 q-中卷积给出。

本节考虑如下方程组:

$$T_x y = Ay, \tag{4.1}$$

$$A = A(x) = I + A^{(1)}x + A^{(2)}x^2 + \kappa I x^3 \ : \ 3 \times 3 \text{ matrix}, \tag{4.2}$$

$$\det A = \kappa^3 \prod_{i=1}^{9}(x + e_i) \quad (e_i \neq e_j \text{ for any } i \neq j). \tag{4.3}$$

条件

$$\kappa^3 \prod_{i=1}^{9} e_i = 1, \tag{4.4}$$

这是必要的，因为 $A(0) = I$。根据 (4.3)， A_1和 A_2的分量需要满足 8 个约束条件。方程 (4.1) 还具有 $GL(3)$规范自由度。总之，方程 (4.1) 本质上有两个附属参数。

我们首先给出 A表达式的一个示例。如果矩阵 X_1、 X_2、 X_3 满足

$$X_1 X_2 X_3 = \kappa I, \tag{4.5}$$

$$\det(I + xX_1) = (1 + x/e_1)(1 + x/e_2)(1 + x/e_3), \tag{4.6}$$

$$\det(I + xX_2) = (1 + x/e_4)(1 + x/e_5)(1 + x/e_3), \tag{4.7}$$

$$\det(I + xX_3) = (1 + x/e_1)(1 + x/e_2)(1 + x/e_3), \tag{4.8}$$

那么， $A = (I + X_1)(I + X_2)(I + X_3)$满足条件 (4.2) 和 (4.3)。我们可以将$X_1$ 和 X_3 同时变换为

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1/e_1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1/e_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1/e_3 \end{bmatrix}, \ X_3 = \begin{bmatrix} 1/e_7 & 0 & 0 \\ a_4 & 1/e_7 & 0 \\ a_5 & a_6 & 1/e_9 \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

通过适当的 $GL(3)$规范变换。令

$$X_2 = \kappa X_1^{-1} X_3^{-1}. \tag{4.10}$$

条件

$$\det(I + X_2) = (1 + x/e_4)(1 + x/e_5)(1 + x/e_3) \tag{4.11}$$

可以通过将 a_1 和 a_2 取为关于参数以及 a_3、 a_4、 a_5、a_6的适当有理函数来求解。对角矩阵的规范变换保持 X_1 和 X_3的形式不变。这意味着 $T_x y = (I + X_1)(I + X_2)(I + X_3)y$ 具有二维规范自由度。因此，根据 (4.5)、(4.6)、(4.7) 和 (4.8)，只有两个参数（附属参数）是独立的。方程

$$T_x y = (I + X_1)(I + X_2)(I + X_3)y, \tag{4.12}$$

其中 X_1、 X_2 和 X_3 分别在 (4.9)、(4.10) 和 (4.11) 中给出，将在第 5 节中使用。

我们刻画方程 (4.1)。

定义 4.1 ([23, 定义 3.1、3.2、3.3])。 我们定义该方程的谱型 $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_0; \mathcal{S}_\infty; \mathcal{S}_{\mathrm{div}})$

$$T_x y = A(x)y = \sum_{k=0}^{N} A_k x^k y \quad (A_i\colon\ M \times M \text{ matrix}), \tag{4.13}$$

如下。

1. 设

$$A_0 \sim \bigoplus_{i=1}^{l} \bigoplus_{j=1}^{s_i} J(\alpha_i, t_{i,j}) \quad (J(\alpha, t)\colon \text{ Jordan cell, } t_{i,j} \geq t_{i,j+1}). \tag{4.14}$$

为 A_0 和 $m_i =$ 的约旦分解 $(m_{i,\ 1},\ m_{i,\ 2},\ \ldots,\ m_{i,\ t_{i,\ 1}})$， $t_i = (t_{i,\ 1},\ t_{i,\ 2},\ \ldots,\ t_{i,\ s_i})$ 的共轭杨图。令

$$\mathcal{S}_0 : m_{1,1} \ldots m_{1,t_{1,1}}, m_{2,1} \ldots m_{2,t_{2,1}}, \ldots, m_{l,1} \ldots m_{l,t_{l,1}}. \tag{4.15}$$

我们还以相同方式定义 $\mathcal{S}_\infty$，只需将 A_0 替换为 A_N。

2. 令 $Z_A = \{a \in \mathbb{C} \mid \det A\ (a)\ = 0\} = \{a_1, \ldots, a_l\}$。设 d_k $(1 \leq k \leq M,\ \ d_{k+1} | d_k)$ 是 $\det A\ (x)$ 的初等因子。对于 $a_i \in Z_A$，令 $\tilde{n}_k^i$ 为 d_k 的 a_i 的零点阶数。令 $n^i = (n_1^i,\ \ldots,\ n_{\tilde{n}_1^i}^i)$ 为 $\tilde{n}^i = (\tilde{n}_1^i,\ \ldots,\ \tilde{n}_M^i)$ 的共轭杨图。令

$$\mathcal{S}_{\mathrm{div}} : n_1^1, \ldots, n_{\tilde{n}_1^1}^1, n_1^2, \ldots, n_{\tilde{n}_1^2}^2, \ldots, n_1^l, \ldots, n_{\tilde{n}_1^l}^l. \tag{4.16}$$

我们通过谱型刻画方程 (4.1)。

命题 4.2. 假设该方程的谱型

$$T_x y = A(x)y, \tag{4.17}$$

由下式给出

$$(3; 3; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1). \tag{4.18}$$

那么矩阵 $A(x)$ 满足以下条件：

$$A(x) = A^{(0)} + A^{(1)}x + A^{(2)}x^2 + A^{(3)}x^3 \quad (A^{(i)};\ 3 \times 3 \text{ matrix}), \tag{4.19}$$

$$A^{(0)} = aI,\ A^{(3)} = bI, \tag{4.20}$$

$$\det A(x) = b^3 \prod_{i=1}^{9} (x + c_i), \tag{4.21}$$

其中 a、 b、 $c_i \in \mathbb{C}^\times$ 是适当的参数，使得

$$c_i \neq c_j\ (i \neq j), \quad b^3 \prod_{i=1}^{9} c_i = a^3. \tag{4.22}$$

特别地，方程 (4.1) 由上述谱型刻画。

证明。 由 $\mathcal{S}_0$ 和 $\mathcal{S}_\infty$，我们得到矩阵

$$A(x) = \sum_{k=0}^{N} A^{(k)} x^k, \tag{4.23}$$

是一个 3×3 矩阵，并且存在 a、 $b \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$A^{(0)} = aI, \ A^{(N)} = bI. \tag{4.24}$$

由于 $\mathcal{S}_{\text{div}}$，存在互不相同的 c_1，...， $c_9 \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\det A(x) = b^3 \prod_{i=1}^{9} (x + c_i). \tag{4.25}$$

因此我们得到 $N = 3$。这就完成了 $A(x)$ 的条件证明。通过 x^α 进行规范变换，其中 $q^\alpha = a$，方程 $T_x y = A(x)y$ 变为

$$T_x y = \frac{1}{a} A(x) y. \tag{4.26}$$

该方程等价于满足 $c_i = e_i$ 和 $\dfrac{b}{a} = \kappa$的方程 (4.1)。 □

注 4.3。 谱型 $\mathcal{S}_0 = 3$ （分别为 $\mathcal{S}_\infty = 3$）表示点 $x = 0$ （分别为 $x = \infty$）经过规范变换后是正则的。谱型 $\mathcal{S}_{\text{div}} = 1, 1、 1、 1、 1、 1、 1、 1、 1$ 可能意味着，对于方程的 $q \to 1$ 经典极限，在 $\mathbb{C}^\times$ 上存在 3 个奇点。特别地，方程 (4.1) 可视为与加性 Painlev´ 方程 $E_6^{(1)}$ 相关的秩 3 Fuchs 微分方程的一个民主式 q-类比。

显然，对称群 $\mathfrak{S}_9$ 通过以下方式作用于方程 (4.1)：

$$\sigma \in \mathfrak{S}_9 : e_i \mapsto e_{\sigma(i)}. \tag{4.27}$$

以下定理对于构造 $E_8^{(1)}$ 型仿射魏尔群对称性至关重要。

定理 4.4. 令 $g = (-x/e_1)_\infty (-x/e_2)_\infty (-x/e_3)_\infty$ 以及 $q^\lambda = (\kappa e_1 e_2 e_3)^{-1}$。我们依次对方程 (4.1)施加以下变换：

1. 通过 g进行规范变换，

2. q-中卷积 mc_λ，3. 通过 g^{-1}进行
规范变换。

那么，变换后的方程如下：

$$T_x y = \tilde{A} y, \tag{4.28}$$

$$\tilde{A} = I + \tilde{A}^1 x + \tilde{A}^2 x^2 + \tilde{\kappa} I x^3 \ : \ 3 \times 3 \text{ matrix}, \tag{4.29}$$

$$\det \tilde{A} = \tilde{\kappa}^3 \prod_{i=1}^{9} (x + \tilde{e}_i), \tag{4.30}$$

其中

$$\tilde{e}_i = \begin{cases} e_i & (i = 1, 2, 3) \\ \kappa e_1 e_2 e_3 e_i & (i = 4, 5, 6, 7, 8, 9) \end{cases}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{1}{\kappa (e_1 e_2 e_3)^2}. \tag{4.31}$$

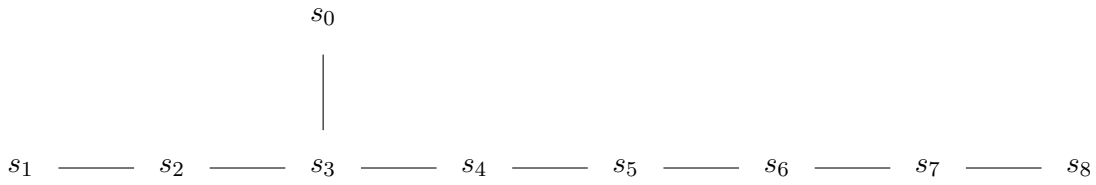
证明。 见附录 A。 □

根据命题 4.4，作用

$$s_0 \colon [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, \kappa] \\ \mapsto [e_1, e_2, e_3, \kappa e_1 e_2 e_3 e_4, \kappa e_1 e_2 e_3 e_5, \kappa e_1 e_2 e_3 e_6, \kappa e_1 e_2 e_3 e_7, \kappa e_1 e_2 e_3 e_8, \kappa e_1 e_2 e_3 e_9, \kappa^{-1}(e_1 e_2 e_3)^{-2}], \tag{4.32}$$

对参数的作用可以通过使用 q-中卷积来描述。我们令 $s_i : e_i \leftrightarrow e_{i+1} (i = 1, \ldots, 8)$。方程 (4.1) 具有 $E_8^{(1)}$ 型仿射魏尔群对称性，其在参数上的作用为:

命题 4.5。 映射 $s_0, s_1, \ldots, s_8$ 在 $\{[e_1, \ldots, e_9, \kappa] \mid \kappa^3 e_1 \cdots e_9 = 1\}$ 上满足 $E_8^{(1)}$ 型考克斯特关系。Dynkin 图如下:



证明。 这可以直接验证。 □

我们定义 A_i 为

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{A_i}{x + e_i} = \frac{I - A'}{(1 - q)x}, \quad A' = \frac{A}{(1 + x/e_1)(1 + x/e_2)(1 + x/e_3)}, \tag{4.33}$$

并假设 (A_1, A_2, A_3) 满足下文定义 3.13 (iii) 和 (iv) 中的条件 $(*)$ 和 $(**)$。此假设将在下文命题 4.6 的证明中使用。我们通过方程 (4.1) 的变换，给出仿射魏尔群 $W(E_8^{(1)})$ 的双有理表示。我们假设 $\kappa e_i e_j e_k \neq 1$，其中 $i \neq j \neq k \neq i$。对于矩阵 B，若存在 G 使得 $G^{-1} B G = C$，则记作 $B \simeq C$；并且 C。我们令 $s_0.A = \tilde{A}$，其中 $\tilde{A}$ 由定理 4.4 给出。换言之， s_0 定义为 $s_0 = g^{-1} \circ mc_\lambda \circ g$，其中 $g = (-x/e_1)_\infty (-x/e_2)_\infty (-x/e_3)_\infty$ 且 $q^\lambda = (\kappa e_1 e_2 e_3)^{-1}$。下面的命题至关重要。

命题 4.6。我们有

$$s_0.s_i.A \simeq s_i.s_0.A \quad (i \neq 0, 3), \tag{4.34}$$

$$s_0.s_0.A \simeq A. \tag{4.35}$$

证明。 参见附录 B。 □

显然，映射 s_0 在 A的各分量上定义了一个有理变换。由（4.35）可知， $s_0^2 =$在经 $GL(3)$ 共轭后等于恒等映射。从这个意义上说，映射 s_0 是双有理的。

猜想 4.7。集合

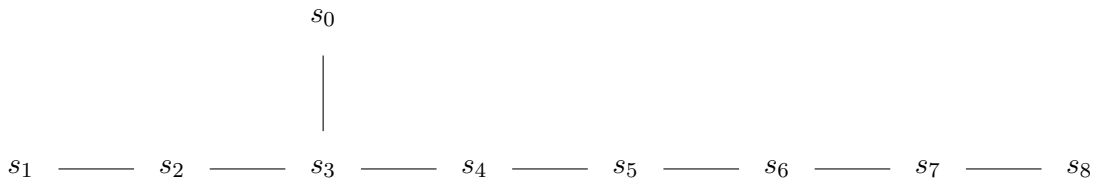
$$\{A \mid A \text{ satisfies (4.2) and (4.3)}, e_1, \ldots, e_9, \kappa \in \mathbb{C}^\times \text{ such that } \kappa \prod_{i=1}^{9} e_i = 1, e_i \neq e_j \ (i \neq j)\} / \simeq, \tag{4.36}$$

在仿射魏尔群 $W(E_8^{(1)})$ 上具有双有理作用。各个作用及其对应的 Dynkin 图如下:

$$s_0 = g^{-1} \circ mc_\lambda \circ g \quad (g = (-x/e_1)_\infty(-x/e_2)_\infty(-x/e_3)_\infty \text{ and } q^\lambda = (\kappa e_1 e_2 e_3)^{-1}), \tag{4.37}$$

$$s_i : e_i \leftrightarrow e_{i+1} \quad (i \neq 3), \tag{4.38}$$

$$s_3 : e_3 \leftrightarrow e_4, \quad \text{以双有理方式作用于附属参数} \tag{4.39}$$



命题 4.5 促使我们寻找 s_3 和 s_i 作为方程 (4.1) 上的运算时所满足的辫群关系。s_3 的构造及相应的辫群关系一般仍是开放问题。数值实验支持这一猜想。该猜想的陈述给出了 $W(E_8^{(1)})$ 的双有理表示，因此证明这一猜想十分重要。

5 标量方程

本节将方程 (4.12) 化为秩 3 标量方程。我们还将这个标量方程与 Moriyama–Yamada 的量子曲线 [17]进行比较。首先回顾 [8]中引入的 q-差分方程的点配置。这是刻画线性 q-差分方程的一种工具。

定义 5.1 ([8])。设 $L = \sum_M \sum_N a_{i,j} x^i T_x^j$ 为线性 q-差分算子，其中 $a_{i,j} \in \mathbb{C}_{i=0\ j=0}$

1. 若 $a_{0,0}, a_{0,N}, a_{M,0}, a_{M,N} \neq 0$[1]，则称方程 $Ly = 0$ 为福克斯 q-差分方程。

2. i. 将 $L = \sum_M x^i L_i(T_x)$ 改写为 $L = \sum_N x^i L_i(T_x)$。$L_0(y)$ 的根 $= 0$ 称为 $x = 0$处的特征$_{i=0}$根。同理，$L_M(y)$ 的根 $= 0$ 称为 $x = \infty$处的特征根。ii. 将 $L = \sum_N P_j(x) T_x^j$ 改写为 $L = \sum_M P_j(x) T_x^j$。$P_0(x)$ 的根 $= 0$称为 $T_x = 0$处的特征$_{j=0}$根，而 $P_N(y)$ 的根 $= 0$ 称为$x = \infty$处的特征根。

3. i. 假设 e、eq、.....、eq^{k-1} 是 $x = 0$（分别是 $T_x = 0$）处的特征根。如果 $\{e, eq, \ldots, eq^{k-1}\}$ 满足下式，则称其为“k 阶特征根”

$$\begin{cases} L_0(T_x) \propto (T_x - e)(T_x - eq) \cdots (T_x - eq^{k-2})(T_x - eq^{k-1}), \\ L_1(T_x) \propto (T_x - e)(T_x - eq) \cdots (T_x - eq^{k-2}), \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ L_{k-1}(T_x) \propto (T_x - e) \end{cases}$$

[1]此条件意味着 $x = 0$ 和 $x = \infty$ 是正则奇点。

$$\left(\text{resp.} \begin{cases} P_0(x) \propto (x-e)(x-eq)\cdots(x-eq^{k-2})(x-eq^{k-1}), \\ P_1(x) \propto (x-e)(x-eq)\cdots(x-eq^{k-2}), \\ \quad \vdots \qquad\qquad \ddots \\ P_{k-1}(x) \propto (x-e) \end{cases} \right).$$

ii. 假设 e、eq^{-1}、.....、$eq^{-(k-1)}$ 分别是 $x=\infty$（或 $T_x=\infty$）处的特征根。若满足以下条件，我们称之为 $\{e, eq, \ldots, eq^{k-1}\}$ k 次根:

$$\begin{cases} L_M(T_x) \propto (T_x-e)(T_x-eq^{-1})\cdots(T_x-eq^{-(k-2)})(T_x-eq^{-(k-1)}), \\ L_{M-1}(T_x) \propto (T_x-e)(T_x-eq^{-1})\cdots(T_x-eq^{-(k-2)}), \\ \quad \vdots \qquad\qquad \ddots \\ L_{M-k+1}(T_x) \propto (T_x-e) \end{cases}$$

$$\left(\text{resp.} \begin{cases} P_N(x) \propto (x-e)(x-eq^{-1})\cdots(x-eq^{-(k-2)})(x-eq^{-(k-1)}), \\ P_{N-1}(x) \propto (x-e)(x-eq^{-1})\cdots(x-eq^{-(k-2)}), \\ \quad \vdots \qquad\qquad \ddots \\ P_{N-k+1}(x) \propto (x-e) \end{cases} \right).$$

4. 对于 Fuchsian q-差分方程 $Ly=0$, $Ly=0$ 的点配置是一幅概括其特征根和非对数根的图，定义规则如下:

i. 绘制 4 条直线 $x=0$, $x=\infty$, $T_x=0$, $T_x=\infty$。 ii. 在对应直线上标出所有特征根，位置为 $x=0$, $x=\infty$, $T_x=0$, $T_x=\infty$ 。 iii. 用第 k 个点表示第 k 个特征根。

引理 5.2 ([8, 17])。Fuchsian q-差分方程 $Ly=0$ 的所有特征根为

- $a_1, \ldots, a_N$在 $x=0$,
- $b_1, \ldots, b_N$在 $x=\infty$,
- $c_1, \ldots, c_M$在 $T_x=0$,
- d_1, ..., d_M处 $T_x=\infty$。

于是我们得到

$$a_1\cdots a_N d_1\cdots d_M = b_1\cdots b_N c_1\cdots c_M. \tag{5.1}$$

这称为 q-Fuchs 关系。

证明。 </style}通过比较 L的两个表达式，可以得到 q-Fuchs关系:

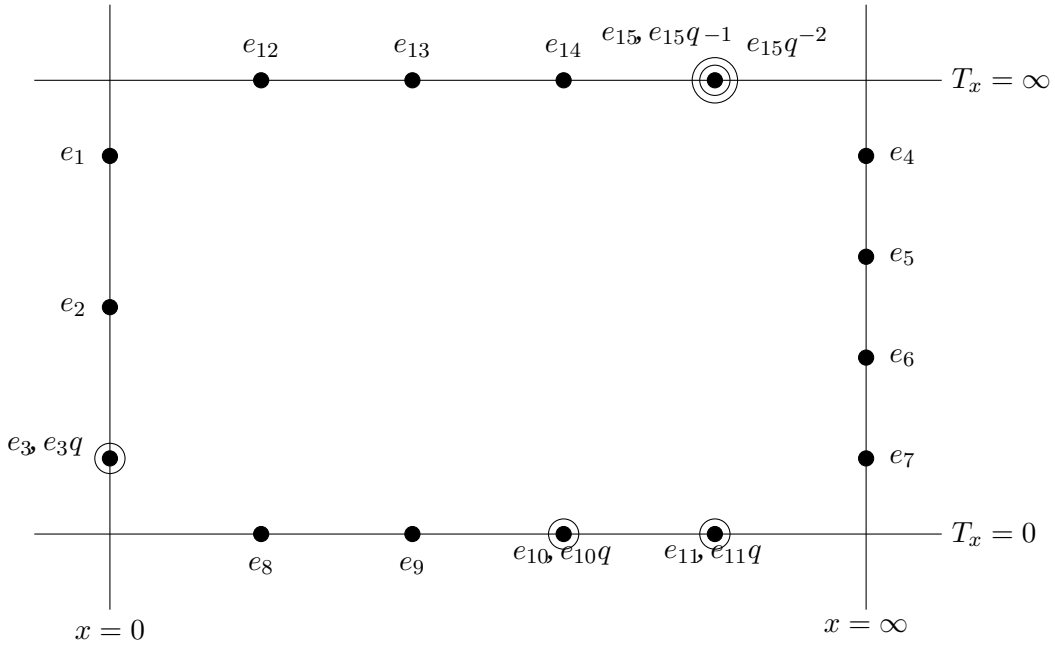
$$L=\sum_{i=0}^{M} x^i L_i(T_x) = \sum_{j=0}^{N} P_j(x) T_x^j. \tag{5.2}$$

□

6 4**例 5.3**。 考虑一个 Fuchs 型 q-差分方程 $Ly = \sum_{i=0}^{} \sum_{j=0}^{} a_{i,\ j} x^i T_x^j y = 0$ 其具有以下根:

1. e_1, e_2, $\{e_3, e_3 q\}$ （二重根）位于 $x = 0$。2. e_4, e_5, e_6, e_7 位于 $x = \infty$。
3. e_8, e_9, $\{e_{10}, e_{10} q\}$ （二重根）， $\{e_{11}, e_{11} q\}$ （二重根）位于 $T_x = 0$。
4. e_{12}, e_{13}, e_{14}, $\{e_{15}, e_{15} q^{-1}, e_{15} q^{-2}\}$ （三重根）位于 $T_x = \infty$。

相应的点配置如下。



The q本例的 Fuchs 关系为 $e_1 e_2 e_3^2 q \cdot e_{12} e_{13} e_{14} e_{15}^3 q^{-3} = e_4 e_5 e_6 e_7 \cdot e_8 e_9 e_{10}^2 q e_{11}^2$ q.

我们考虑将 q-差分方程 (4.12) 变换为一个秩 3 的标量 q-差分方程。

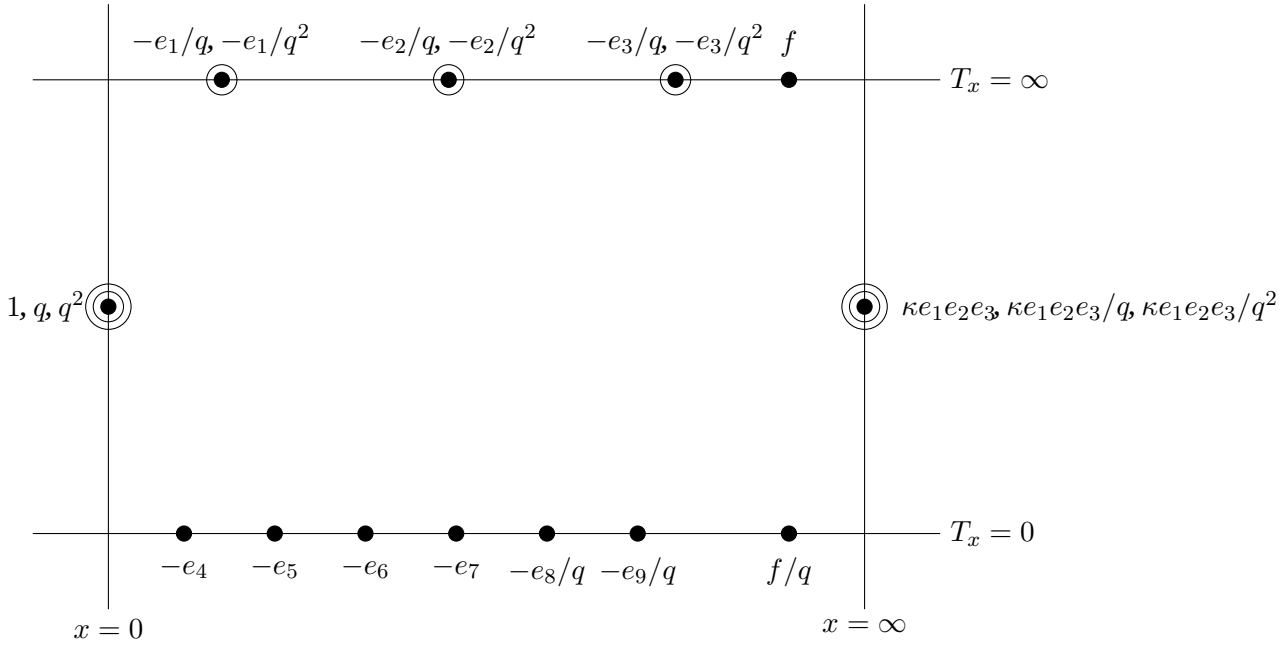
命题 5.4. 假设 $y = \mathrm{T}(y_1, y_2, y_3)$ 满足方程 (4.12)。那么函数 $z = ((-x/e_1)_\infty (-x/e_2)_\infty (-x/e_3)_\infty)^{-1} y_1$ 满足一个 Fuchs 型 q-差分方程

$$Lz = \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{3} a_{i,j} x^i T_x^j z = \sum_{j=0}^{3} P_j(x) T_x^j z = 0, \tag{5.3}$$

其点配置如下。此外，存在 c 使得

$$P_3(f/q) = c P_2(f),\ P_2(f/q) = c P_1(f),\ P_1(f/q) = c P_0(f). \tag{5.4}$$

这里的 f 是由 A 的分量确定的一个合适值。



证明。 参见附录 C。 □

注 5.5。 仿照微分情形，我们将 T_x 上标量线性 q 差分算子的最高/低阶系数的根称为“奇点”。从一阶 q 差分方程组 $T_xy = Ay$ 构造标量 q 差分方程时，$\det A$ （或 $\det T_x^{\pm 1}A$、$\det T_x^{\pm 2}A$, ...）的根会成为奇点。由于 $fq^{\mathbb{Z}}$ 没有 $\det A$ 的根，因此 f 是差分方程 (5.3) 的一个“表观奇点”。条件 (5.4) 将给出表观奇点的条件。我们指出，表观奇点的概念是在 [7] 中引入的，并在那里讨论了若干性质。另见 [20]。

本文讨论具有 $W(E_8^{(1)})$对称性的量子曲线，并通过对该量子曲线进行变换，给出$W(E_8^{(1)})$的量子表示。设 x、y 为 q-可交换变量，即 $yx = qxy$。量子曲线 C 如下：

- C： $F(x, y) = 0$。
- $F(x, y)$：关于 x 和 y的多项式，$\deg_x F(x, y) = 6$，$\deg_y F(x, y) = 3$。
- 曲线 C 经过以下11个点，其对应的重数为：

$$(-e_i, 0) : \text{multiplicity } 1 \ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \tag{5.5}$$

$$\left(-\frac{h_1}{e_i}, \infty\right) : \text{multiplicity } 2 \ (i = 7, 8, 9), \tag{5.6}$$

$$\left(\infty, -\frac{e_{10}}{h_2}\right) : \text{multiplicity } 3, \tag{5.7}$$

$$\left(0, -\frac{1}{e_{11}}\right) : \text{multiplicity } 3 \tag{5.8}$$

由于变量 x和 y满足 q-交换关系，多项式 $F(x, y)$ 可视为关于 x的线性 q-差分算子。从这个意义上说，曲线 C 可视为一个q-差分方程。命题 5.4 中的 q-差分方程，是通过适当的参数变换和一些规范变换得到的曲线 C 的非自治情形。

注 5.6. 在 Painlev´é 方程的背景下，量子曲线通常是非自治 Painlev´é 方程的 Lax 线性方程的特化。虽然这里我们没有构造方程 (4.1) 的变形方程，但可以预期，q-Painlev´é $E_8^{(1)}$ 型方程可由方程 (4.1) 及其变形的相容条件导出。我们注意到，若将两个附属参数之一特化为 $f = -e_7$，算子 L (5.3) 将化为双次数为 (6，3) 的多项式。此特化恢复了原始的 Moriyama–Yamada 曲线。换言之，特化 $f = -e_7$ 是我们方程的一种自治化。

6 总结与讨论

本文构造了一个具有 $E_8^{(1)}$ 型仿射魏尔群对称性的 q-差分方程 (4.1)。我们还发现，其中一个生成元可通过 q-中卷积给出，其余生成元则是参数的相邻换位。在第 3 节中，我们通过 q-Okubo 型方程引入了 q-中卷积。这种表述明确了路径的一个条件。本文的主要结果是定理 4.4，它利用 q-中卷积给出了方程 (4.1) 的一个变换。由此可知，该方程具有 $W(E_8^{(1)})$-对称性（见命题 4.5）。在第 5 节中，我们将方程 (4.1) 化为标量方程 (5.3)，并通过点配置对其进行刻画。这个标量方程是 Moriyama–Yamada 的曲线 [17] 的非自治扩展；该曲线出现于拓扑弦理论中，并应用于量子 Painlev´e 方程。因此，这为将我们的结果应用于量子可积系统开辟了可能性。

给出猜想 4.7 中讨论的 s_3-作用非常重要。通过对矩阵 A 方程 (4.1) 作出某些假设来描述这些条件也很重要。此外还有许多相关问题。

1. 方程 (4.1) 具有 $W(E_8^{(1)})$-对称性。构造方程 (4.1) 及其变形方程的显式表达式是基础且非常重要的。如果能够构造出来，我们或许可以得到 q-Painlev´e 方程（类型为 $E_8^{(1)}$）的 Lax 形式化（另见注 5.6）。将已建立的 q-$P(E_8^{(1)})$ Lax 对进行比较也很有意思（参见 [27]）。值得注意的是，[27]中的 Lax 线性方程是二阶的，而我们的方程是三阶的。另见 [19, 26]，其中讨论了 [27] 中与 Lax 方程相关的主题。

2. 求出方程 (4.1) 的特殊解很有意义。根据刻画 (4.18)，方程 (4.1) 可视为具有 3 个奇点的三阶 Fuchs 微分方程在 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的 q-类比。该微分方程的特殊解可用广义超几何级数 ${}_3F_2$ 和 Dotsenko–Fateev 积分 [5] 表示。从这个意义上说，预期方程 (4.1) 存在由某些 q-超几何级数和积分给出的特殊解。关于包含 Dotsenko– Fateev积分的 q-类比的 q-Selberg 型积分及其性质，参见 [10, 11]。已经得到了用非常良好的配平 q-超几何级数 ${}_{10}W_9$ 表示的方程 (4.1) 的一个特殊解。这一结果将在下一篇论文中讨论。

3. 在 Sakai 的分类 [21], 中，q-Painlev´e 方程 q-$P(E_8^{(1)})$ 退化为$E_7^{(1)}$、$E_6^{(1)}$、$D_5^{(1)}$ 型方程以及若干其他方程。讨论方程 (4.1) 的退化十分重要。在 [20], 中，q-$P(E_6^{(1)})$ 的一个 Lax对由如下形式的秩 3 q-差分方程给出

$$T_x y = (A^{(0)} + xA^{(1)})y, \tag{6.1}$$

及其变形方程。这个三阶方程的特征是谱型 (111; 111; 111)，因此它与我们的方程 (4.1) 的一种退化有关。

定理 4.4 的证明

在本附录中，我们证明定理 4.4。

定理 *4.4* 的证明。证明通过分析不变子空间 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$，然后对变换后的系数矩阵进行显式计算来展开。首先，通过对 g 进行规范变换，方程 (4.1) 变为

$$T_x y = A' y, \quad A' = \frac{A}{(1+x/e_1)(1+x/e_2)(1+x/e_3)}. \tag{A.1}$$

利用 D_x 重写该方程，由于在 $x=0$ 处 $A = I + O(x)$，我们得到

$$D_x y = \sum_{i=1}^{3} \frac{A_i}{x+e_i} y, \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{A_i}{x+e_i} = \frac{I - A'}{(1-q)x}, \tag{A.2}$$

其中 A_i 是一个常矩阵。令

$$G_1 = \begin{bmatrix} q^\lambda A_1 + [\lambda] I & q^\lambda A_2 & q^\lambda A_3 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix}, \tag{A.3}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} O & O & O \\ q^\lambda A_1 & q^\lambda A_2 + [\lambda] I & q^\lambda A_3 \\ O & O & O \end{bmatrix}, \tag{A.4}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ q^\lambda A_1 & q^\lambda A_2 & q^\lambda A_3 + [\lambda] I \end{bmatrix}. \tag{A.5}$$

我们考虑不变空间

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{Ker}(A_1) \\ \mathrm{Ker}(A_2) \\ \mathrm{Ker}(A_3) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \mathrm{Ker}(G_1 + G_2 + G_3), \tag{A.6}$$

特别地，我们讨论 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 的维数。由 A_i (A.2) 的构造，我们有

$$\begin{aligned} A_i &= \lim_{x \to -e_i} \frac{I - A'}{(1-q)x}(x+e_i) \\ &= \lim_{x \to -e_i} \frac{I - A(x)/((1+x/e_1)(1+x/e_2)(1+x/e_3))}{(1-q)x}(x+e_i) \\ &\propto A(-e_i). \end{aligned} \tag{A.7}$$

[9]由于 $\det A(x) = \kappa^3 \prod (x+e_i)$ 且 $e_i \neq e_j (i \neq j)$，我们得到 $\dim \mathrm{Ker}(A_i) = 1$。令 $a_i \in \mathrm{Ker}(A_i)_{i=1}$为 $a_i \neq 0$，并

$$k_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}, k_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix}, \tag{A.8}$$

那么 $\{k_1, k_2, k_3\}$ 构成 $\mathcal{K}$的一组基。特别地，我们有 $\dim \mathcal{K} = 3$。我们如下计算 $G_1 + G_2 + G_3$ 的特征多项式:

$$\begin{aligned}
&\det(G_1 + G_2 + G_3 - zI) \\
&= \det\left(q^{\lambda} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} + ([\lambda] - z) \begin{bmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{bmatrix} \right) \\
&= \det\left(q^{\lambda} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} + ([\lambda] - z) \begin{bmatrix} I & O & O \\ -I & I & O \\ -I & O & I \end{bmatrix} \right) \\
&= \det\left(q^{\lambda} \begin{bmatrix} A_1 + A_2 + A_3 & A_2 & A_3 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} + ([\lambda] - z) \begin{bmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{bmatrix} \right) \\
&= ([\lambda] - z)^6 \det(q^{\lambda}(A_1 + A_2 + A_3) + ([\lambda] - z)I). \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

由 (A.2)，我们有

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 &= \lim_{x \to \infty} \frac{I - A'}{1 - q} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{I - A(x)/((1 + x/e_1)(1 + x/e_2)(1 + x/e_3))}{1 - q} = \frac{1 - \kappa e_1 e_2 e_3}{1 - q} I. \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\det(q^{\lambda}(A_1 + A_2 + A_3) + ([\lambda] - z)I) = \left(\frac{1 - q^{\lambda} \kappa e_1 e_2 e_3}{1 - q} - z \right)^3. \qquad \text{(A.11)}$$

令 $q^{\lambda} = (\kappa e_1 e_2 e_3)^{-1}$，则有 $\dim \mathcal{L} \leq 3$。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
&(G_1 + G_2 + G_3) \begin{bmatrix} v \\ v \\ v \end{bmatrix} \quad (v \in \mathbb{C}^3) \\
&= \begin{bmatrix} (q^{\lambda}(A_1 + A_2 + A_3) + [\lambda]I)v \\ (q^{\lambda}(A_1 + A_2 + A_3) + [\lambda]I)v \\ (q^{\lambda}(A_1 + A_2 + A_3) + [\lambda]I)v \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Ov \\ Ov \\ Ov \end{bmatrix} = 0. \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}$$

因此，我们有 $\mathcal{L} = \{{}^T[v, v, v] \mid v \in \mathbb{C}^3\}$，$\dim\ \mathcal{L} = 3$ 和 $\dim(\mathcal{K} + \mathcal{L}) = 6$。令 l_1，l_2，l_3 为 $\mathcal{L}$ 的一组基，且 u_1，u_2，u_3 为 $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ 在 $\mathbb{C}^9$ 中的补空间的一组基。我们有

$$R^{-1} G_i R = \begin{bmatrix} \tilde{G}_i & O \\ * & H_i \end{bmatrix}, \quad R = [u_1, u_2, u_3, k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3], \qquad \text{(A.13)}$$

˜其中 G_i 是一个 3×3 矩阵。利用 G_i，我们得到一个方程

$$D_x y = \sum_{i=1}^{3} \frac{\tilde{G}_i}{x + e_i} y, \qquad \text{(A.14)}$$

通过 q-中卷积 mc_λ。重写这个方程，我们得到

$$T_x y = \left[I - (1-q)x \sum_{i=1}^{3} \frac{\tilde{G}_i}{x+e_i} \right] y. \tag{A.15}$$

通过对 g^{-1}施加规范变换，我们最终得到

$$T_x y = \tilde{A} y, \quad \tilde{A} = \tilde{A}(x) = (1+x/e_1)(1+x/e_2)(1+x/e_3) \left[I - (1-q)x \sum_{i=1}^{3} \frac{\tilde{G}_i}{x+e_i} \right]. \tag{A.16}$$

显然， $\tilde{A}$ 是关于 x的三次多项式。下面我们展示 $\tilde{A}$的性质，即证明 $\tilde{A}$ 具有（4.29）的形式，且 $\tilde{A}$满足（4.30）。显然，我们有 $\tilde{A}(0) = I$。 $\tilde{A}$ 的最高次项为

$$\lim_{x\to\infty} x^{-3} \tilde{A}(x) = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[I - (1-q) \sum_{i=1}^{3} \tilde{G}_i \right]. \tag{A.17}$$

下面我们计算 $\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2 + \tilde{G}_3$。我们注意到

$$R^{-1}(G_1+G_2+G_3)R = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1+\tilde{G}_2+\tilde{G}_3 & O \\ * & H_1+H_2+H_3 \end{bmatrix}. \tag{A.18}$$

由于

$$R = [u_1, u_2, u_3, k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3], \quad l_i \in \mathcal{L} = \mathrm{Ker}(G_1+G_2+G_3), \tag{A.19}$$

我们有

$$R^{-1}(G_1+G_2+G_3)R = [*, *, *, *, *, *, 0, 0, 0]. \tag{A.20}$$

综上所述，我们得到

$$R^{-1}(G_1+G_2+G_3)R = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1+\tilde{G}_2+\tilde{G}_3 & O_{3\times3} & O_{3\times3} \\ J_1 & J_2 & O_{3\times3} \\ J_3 & J_4 & O_{3\times3} \end{bmatrix}. \tag{A.21}$$

回想一下， $G_1+G_2+G_3$ 的特征值为 $[\lambda]$ ，其重数为 6。我们还有

$$G_1+G_2+G_3-[\lambda]I = q^\lambda \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \to q^\lambda \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix}, \tag{A.22}$$

通过初等行变换。因此， $[\lambda]$的特征子空间维数为 6。这引出

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_1+\tilde{G}_2+\tilde{G}_3 & O_{3\times3} \\ J_1 & J_2 \end{bmatrix} = [\lambda]I, \tag{A.23}$$

特别地，我们有$\tilde{G}_1+\tilde{G}_2+\tilde{G}_3 = [\lambda]I$。总之， $\tilde{A}$ 的最高项是

$$\frac{1}{e_1e_2e_3}\left[I - (1-q)\sum_{i=1}^{3}\tilde{G}_i \right] = \frac{1}{e_1e_2e_3}(1-(1-q)[\lambda])I = \frac{q^\lambda}{e_1e_2e_3}I = \frac{1}{\kappa(e_1e_2e_3)^2}I = \tilde{\kappa}I. \tag{A.24}$$

˜这就完成了 A为（4.29）形式的证明。下面证明（
4.30）。我们首先证明

$$H_1 = \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\lambda] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\lambda] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.25}$$

我们这里只展示 H_1 的情形。其他情形可以用类似的方法证明。我们将9×6 矩阵 $\begin{bmatrix} O_{3\times 6} \\ H_1 \end{bmatrix}$ 分解为列向量，得到

$$\begin{bmatrix} O \\ H_1 \end{bmatrix} = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6]. \tag{A.26}$$

我们回顾一下

$$R^{-1} G_1 R = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & O \\ * & H_1 \end{bmatrix} = [*, *, *, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6]. \tag{A.27}$$

由于

$$G_1 = \begin{bmatrix} q^\lambda A_1 + [\lambda] I & q^\lambda A_2 & q^\lambda A_3 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix}, \tag{A.28}$$

$$R = [u_1, u_2, u_3, k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3], \tag{A.29}$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}, k_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad a_i \in \mathrm{Ker}(A_i), \tag{A.30}$$

我们有

$$G_1 R = [*, *, *, [\lambda] k_1, 0, 0, *, *, *]. \tag{A.31}$$

根据 R 的定义，我们得到

$$R^{-1} G_1 R = [*, *, *, [\lambda] p_4, 0, 0, *, *, *], \tag{A.32}$$

其中， p_i 是 $\mathbb{C}^9$中的标准单位向量。因此，我们得到

$$[h_1, h_2, h_3] = [[\lambda] p_4, 0, 0]. \tag{A.33}$$

由于

$$G_1 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} O & O & O \\ * & * & * \\ O & O & O \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ * & * & * \end{bmatrix}, \tag{A.34}$$

我们有

$$G_1 R = \begin{bmatrix} * & * & F_1 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix}, \quad G_2 R = \begin{bmatrix} O & O & O \\ * & * & F_2 \\ O & O & O \end{bmatrix}, \quad G_3 R = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ * & * & F_3 \end{bmatrix}, \tag{A.35}$$

其中， F_i 是一个合适的 3×3 矩阵。因此我们有

$$(G_1+G_2+G_3)R=\begin{bmatrix}* & * & F_1\\ * & * & F_2\\ * & * & F_3\end{bmatrix} \tag{A.36}$$

根据 R的定义：

$$R=[u_1,u_2,u_3,k_1,k_2,k_3,l_1,l_2,l_3],\quad l_i\in\mathcal{L}=\mathrm{Ker}(G_1+G_2+G_3), \tag{A.37}$$

我们有 $F_1=F_2=F_3=O$。因此，我们得到

$$\begin{bmatrix}\tilde{G}_1 & O\\ * & H_1\end{bmatrix}=R^{-1}G_1R=R^{-1}\begin{bmatrix}* & * & F_1\\ O & O & O\\ O & O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}* & * & O\\ * & * & O\\ * & * & O\end{bmatrix}, \tag{A.38}$$

特别地，我们有

$$[h_4,h_5,h_6]=[0,0,0]. \tag{A.39}$$

由 (A.33)、(A.39)，最终我们得到

$$H_1=\begin{bmatrix}[\lambda] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{A.40}$$

这就完成了 (A.25) 的证明。

我们回顾一下，

$$R^{-1}G_iR=\begin{bmatrix}\tilde{G}_i & O\\ * & H_i\end{bmatrix},\quad \tilde{A}=(1+x/e_1)(1+x/e_2)(1+x/e_3)\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^{3}\frac{\tilde{G}_i}{x+e_i}\right]. \tag{A.41}$$

我们按如下方式计算 $\det\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^{3}\dfrac{G_i}{x+e_i}\right]$：

$$\begin{aligned}
&\det\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^{3}\frac{G_i}{x+e_i}\right]\\
&=\det\left[I-(1-q)x\begin{bmatrix}\dfrac{q^\lambda A_1+[\lambda]}{x+e_1} & \dfrac{q^\lambda A_2}{x+e_1} & \dfrac{q^\lambda A_3}{x+e_1}\\ \dfrac{q^\lambda A_1}{x+e_2} & \dfrac{q^\lambda A_2+[\lambda]}{x+e_2} & \dfrac{q^\lambda A_3}{x+e_2}\\ \dfrac{q^\lambda A_1}{x+e_3} & \dfrac{q^\lambda A_2}{x+e_3} & \dfrac{q^\lambda A_3+[\lambda]}{x+e_3}\end{bmatrix}\right]\\
&=\frac{1}{((x+e_1)(x+e_2)(x+e_3))^3}\\
&\quad\times\det\left[\begin{bmatrix}x+e_1 & & \\ & x+e_2 & \\ & & x+e_3\end{bmatrix}-(1-q)[\lambda]I-(1-q)xq^\lambda\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ A_1 & A_2 & A_3\end{bmatrix}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{((x+e_1)(x+e_2)(x+e_3))^3} \\
&\quad \times \det\left[\begin{bmatrix} q^\lambda x+e_1 & & \\ & q^\lambda x+e_2 & \\ & & q^\lambda x+e_3 \end{bmatrix} - (1-q)xq^\lambda \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{((x+e_1)(x+e_2)(x+e_3))^3} \\
&\quad \times \det\left[\begin{bmatrix} q^\lambda x+e_1 & & \\ -(q^\lambda x+e_1) & q^\lambda x+e_2 & \\ -(q^\lambda x+e_1) & & q^\lambda x+e_3 \end{bmatrix} - (1-q)xq^\lambda \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\right] \\
&= \frac{((q^\lambda x+e_1)(q^\lambda x+e_2)(q^\lambda x+e_3))^3}{((x+e_1)(x+e_2)(x+e_3))^3} \\
&\quad \times \det\left[\begin{bmatrix} I & & \\ -I & I & \\ -I & & I \end{bmatrix} - (1-q)xq^\lambda \begin{bmatrix} \dfrac{A_1}{q^\lambda x+e_1} & \dfrac{A_2}{q^\lambda x+e_2} & \dfrac{A_3}{q^\lambda x+e_3} \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\right] \\
&= \frac{((q^\lambda x+e_1)(q^\lambda x+e_2)(q^\lambda x+e_3))^3}{((x+e_1)(x+e_2)(x+e_3))^3} \\
&\quad \times \det\left[\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} - (1-q)xq^\lambda \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^3 \dfrac{A_i}{q^\lambda x+e_i} & \dfrac{A_2}{q^\lambda x+e_2} & \dfrac{A_3}{q^\lambda x+e_3} \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\right] \\
&= \frac{((q^\lambda x+e_1)(q^\lambda x+e_2)(q^\lambda x+e_3))^3}{((x+e_1)(x+e_2)(x+e_3))^3} \det\left[I-(1-q)xq^\lambda \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{q^\lambda x+e_i}\right]. \qquad \text{(A.42)}
\end{aligned}
$$

由于

$$
\sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{x+e_i} = \frac{I-A'(x)}{(1-q)x}, \quad A'(x) = \frac{A(x)}{(1+x/e_1)(1+x/e_2)(1+x/e_3)}, \qquad \text{(A.43)}
$$

$$
\det A(x) = \kappa^3 \prod_{i=1}^9 (x+e_i), \qquad \text{(A.44)}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\det\left[I-(1-q)xq^\lambda \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{q^\lambda x+e_i}\right] = \det A'(q^\lambda x) \\
&= \frac{1}{((1+q^\lambda x/e_1)(1+q^\lambda x/e_2)(1+q^\lambda x/e_3))^3} \kappa^3 \prod_{i=1}^9 (q^\lambda x+e_i). \qquad \text{(A.45)}
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\det\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^3 \frac{G_i}{x+e_i}\right] = \frac{(\kappa e_1e_2e_3)^3}{((x+e_1)(x+e_2)(x+e_3))^3} \prod_{i=1}^9 (q^\lambda x+e_i) \qquad \text{(A.46)}
$$

另一方面，我们有

$$
\det\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^3 \frac{G_i}{x+e_i}\right] = \det R^{-1}\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^3 \frac{G_i}{x+e_i}\right] R
$$

$$= \det\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^{3}\frac{\begin{bmatrix}\tilde{G}_i & O\\ * & H_i\end{bmatrix}}{x+e_i}\right]$$
$$= \det\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^{3}\frac{\tilde{G}_i}{x+e_i}\right]\cdot\det\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^{3}\frac{H_i}{x+e_i}\right]. \tag{A.47}$$

利用 H_i 的表达式 (A.25)，可得

$$\det\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^{3}\frac{H_i}{x+e_i}\right]=\prod_{i=1}^{3}\left(1-(1-q)x\frac{[\lambda]}{x+e_i}\right)=\prod_{i=1}^{3}\frac{q^{\lambda}x+e_i}{x+e_i}. \tag{A.48}$$

总结 (A.46) 和 (A.48)，我们得到

$$\det\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^{3}\frac{\tilde{G}_i}{x+e_i}\right]=\frac{(\kappa e_1e_2e_3)^3}{((x+e_1)(x+e_2)(x+e_3))^2}\prod_{i=4}^{9}(q^{\lambda}x+e_i). \tag{A.49}$$

由于

$$\tilde{A}=(1+x/e_1)(1+x/e_2)(1+x/e_3)\left[I-(1-q)x\sum_{i=1}^{3}\frac{\tilde{G}_i}{x+e_i}\right], \tag{A.50}$$

我们最终得到

$$\det\tilde{A}=((1+x/e_1)(1+x/e_2)(1+x/e_3))^3\cdot\frac{(\kappa e_1e_2e_3)^3}{((x+e_1)(x+e_2)(x+e_3))^2}\prod_{i=4}^{9}(q^{\lambda}x+e_i)$$
$$=\tilde{\kappa}^3\prod_{i=1}^{9}(x+\tilde{e}_i). \tag{A.51}$$

至此，定理 4.4 的证明完成。 □

B 命题 4.6 的证明

在本附录中，我们证明命题 4.6。

命题 *4.6* 的证明。我们首先证明 (4.34)。由于 $s_i.g=g$ $(i\neq 3)$ 和 $s_i.\lambda=\lambda$ $(q^{\lambda}=(\kappa e_1e_2e_3)^{-1})$，可得 $s_0.s_i.A=g\circ mc_{\lambda}\circ g.(A|_{e_i\leftrightarrow e_{i+1}})$ 和 $s_i.s_0.A=g.(mc_{\lambda}\circ g.A)|_{e_i\leftrightarrow e_{i+1}}$。我们将 A_j 设为 (A.2)。我们将 G_j 定义为 (A.3)、(A.4) 和 (A.5)。由附录 A 中的计算可知，存在一个矩阵 R，使得

$$R^{-1}G_jR=\begin{bmatrix}\tilde{G}_j & O\\ * & H_j\end{bmatrix}, \tag{B.1}$$

˜其中，G_j 是一个 3×3 矩阵，H_j 由（A.25）给出。利用这个 G_j，$s_i.s_0.A$ 由下式给出

$$(1+x/e_1)(1+x/e_2)(1+x/e_3)\left(I-(1-q)x\sum_{j=1}^{3}\frac{\tilde{G}_j}{x+e_j}\right)\Bigg|_{e_i\leftrightarrow e_{i+1}}. \tag{B.2}$$

接下来我们计算 $s_0.s_i.A$。令 $A = \overline{s_i.A}$ 并定义 A_j、 G_j 如下

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\overline{A}_j}{x + s_i.e_j} = \frac{I - \overline{A}}{(1-q)x}, \tag{B.3}$$

$$\overline{G}_1 = \begin{bmatrix} q^{\lambda}\overline{A}_1 + [\lambda]I & q^{\lambda}\overline{A}_2 & q^{\lambda}\overline{A}_3 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix}, \tag{B.4}$$

$$\overline{G}_2 = \begin{bmatrix} O & O & O \\ q^{\lambda}\overline{A}_1 & q^{\lambda}\overline{A}_2 + [\lambda]I & q^{\lambda}\overline{A}_3 \\ O & O & O \end{bmatrix}, \tag{B.5}$$

$$\overline{G}_3 = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ q^{\lambda}\overline{A}_1 & q^{\lambda}\overline{A}_2 & q^{\lambda}\overline{A}_3 + [\lambda]I \end{bmatrix}. \tag{B.6}$$

根据附录 A 中的计算，存在一个矩阵 S，使得

$$S^{-1}\overline{G}_j S = \begin{bmatrix} G'_j & O \\ * & H_j \end{bmatrix}. \tag{B.7}$$

根据矩阵 G_j 和 G_j 的定义，我们有

$$\overline{G}_j = \begin{cases} G_j|_{e_i \leftrightarrow e_{i+1}} & (i \neq 1, 2) \\ R_{1,2}^{-1}(G_j|_{e_i \leftrightarrow e_{i+1}})R_{1,2} & (i = 1) \\ R_{2,3}^{-1}(G_j|_{e_i \leftrightarrow e_{i+1}})R_{2,3} & (i = 2) \end{cases}, \tag{B.8}$$

其中

$$R_{1,2} = \begin{bmatrix} O & I & O \\ I & O & O \\ O & O & I \end{bmatrix}, \; R_{2,3} = \begin{bmatrix} I & O & O \\ O & O & I \\ O & I & O \end{bmatrix}. \tag{B.9}$$

特别地，我们有

$$I - (1-q)x \sum_{j=1}^{3} \frac{\overline{G}_j}{x + s_i.e_j} \simeq \left[I - (1-q)x \sum_{j=1}^{3} \frac{G_j}{x + e_j} \right] \Bigg|_{e_i \leftrightarrow e_{i+1}}. \tag{B.10}$$

利用关系式 (B.1)，我们得到

$$I - (1-q)x \sum_{j=1}^{3} \frac{\begin{bmatrix} G'_j & O \\ * & H_j \end{bmatrix}}{x + s_i.e_j} \simeq \left[I - (1-q)x \sum_{j=1}^{3} \frac{\begin{bmatrix} \tilde{G}_j & O \\ * & H_j \end{bmatrix}}{x + e_j} \right] \Bigg|_{e_i \leftrightarrow e_{i+1}}. \tag{B.11}$$

我们定义

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{3\times 3} & C_{12}^{3\times 6} \\ C_{21}^{6\times 3} & C_{22}^{6\times 6} \end{bmatrix} \tag{B.12}$$

使得

$$C \left[I - (1-q)x \sum_{j=1}^{3} \frac{\begin{bmatrix} G'_j & O \\ * & H_j \end{bmatrix}}{x + s_i.e_j} \right] C^{-1} = \left[I - (1-q)x \sum_{j=1}^{3} \frac{\begin{bmatrix} \tilde{G}_j & O \\ * & H_j \end{bmatrix}}{x + e_j} \right] \Bigg|_{e_i \leftrightarrow e_{i+1}}. \tag{B.13}$$

注意到， C 与 x相互独立。通过简单计算，我们发现 C_{12} 的第 k列向量 c_k 满足

$$\left[I-(1-q)x\sum_{j=1}^{3}\frac{\tilde{G}_j}{x+e_j}\right]\Big|_{e_i\leftrightarrow e_{i+1}}c_k=h_kc_k, \tag{B.14}$$

其中

$$I-(1-q)x\sum_{j=1}^{3}\frac{H_j}{x+e_j}=\mathrm{diag}(h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6). \tag{B.15}$$

由表达式 (A.25)，可得

$$h_j=\begin{cases}\dfrac{q^\lambda x+e_j}{x+e_j} & (j=1,2,3)\\ 1 & (j=4,5,6)\end{cases}. \tag{B.16}$$

令 $x=-q^{-\lambda}e_j(j=1,2,3)$。于是可得 $h_j=0$。另一方面，由于 (A.49) 和 $e_i\neq e_j(i\neq j)$，有 $\det\left[I-(1-q)x\sum_{j=1}^{3}\frac{G_j}{x+e_j}\right]\Big|_{e_i\leftrightarrow e_{i+1}}\neq 0$。因此可得$c_j=0$。我们还在 (B.14) 中

取 $x\to\infty$，其中 $k=4,5,6$。由 (A.23) 可得$[\lambda]c_k=c_k$，特别是，由于假设 $[\lambda]=(1-(\kappa e_1e_2e_3)^{-1})/(1-q)\neq 1$，有 $c_k=0$。因此可得 $C_{12}=O$。由此可得

$$I-(1-q)x\sum_{j=1}^{3}\frac{G'_j}{x+s_i.e_j}=C_{11}\left[I-(1-q)\sum_{j=1}^{3}\frac{\tilde{G}_j}{x+e_j}\right]\Big|_{e_i\leftrightarrow e_{i+1}}C_{11}^{-1}. \tag{B.17}$$

至此，(4.34) 得证。

接下来证明 (4.35)。作为参数的作用，我们有

$$s_0.e_i=\begin{cases}e_i & (i=1,2,3)\\ \kappa e_1e_2e_3e_i & (i=4,5,6,7,8,9)\end{cases},\quad s_0.\kappa=\frac{1}{\kappa(e_1e_2e_3)^2}. \tag{B.18}$$

因此我们得到

$$s_0.g=g,\quad s_0.\lambda=-\lambda, \tag{B.19}$$

其中 $g=(-x/e_1)_\infty(-x/e_2)_\infty(-x/e_3)_\infty$ 和 $q^\lambda=(\kappa e_1e_2e_3)^{-1}$。因此我们有

$$s_0.s_0.A=g^{-1}\circ mc_{-\lambda}\circ g\circ g^{-1}\circ mc_\lambda\circ g.A=g^{-1}\circ mc_{-\lambda}\circ mc_\lambda\circ g.A. \tag{B.20}$$

利用定理 3.17 (ii)，我们得到

$$g^{-1}\circ mc_{-\lambda}\circ mc_\lambda\circ g.A\simeq g^{-1}\circ g=\mathrm{id}. \tag{B.21}$$

至此，(4.35) 得证。

□

注 B.1。 我们希望通过适当设置 s_3-作用，使 $s_0.s_3.s_0.A\simeq s_3.s_0.s_3.A$、 $s_3.s_3.A\simeq A$ 和 $s_i.s_3.A\simeq s_3.s_i.A$ （$i\neq 0$）成立。由直接计算可得

$$s_3.s_0.s_3.A=(g'')^{-1}.s_3.(mc_\mu\circ g'.s_3.A), \tag{B.22}$$

$$s_0.s_3.s_0.A=(g'')^{-1}\circ mc_\nu.s_3(mc_\lambda\circ g.A), \tag{B.23}$$

其中 $g'=(-x/e_1)_\infty(-x/e_2)_\infty(-x/e_3)_\infty$， $g''=(-x/e_1)_\infty(-x/e_2)_\infty(-x/\kappa e_1e_2e_3e_4)_\infty$， $q^\mu=(\kappa e_1e_2e_4)^{-1}$ 和 $q^\nu=e_3/e_4$。我们注意到 $mc_\nu\circ mc_\lambda\simeq mc_\mu$，因为 $\nu+\lambda=\mu$。

C 命题 5.4 的证明

在本附录中，我们证明命题 5.4

命题 *5.4* 的证明。我们定义

$$A = (I + xX_1)(I + xX_2)(I + xX_3) = I + A^{(1)}x + A^{(2)}x^2 + \kappa I x^3, \tag{C.1}$$

其中 X_1、 X_2、 X_3 由 (4.9)、(4.10) 和 (4.11) 给出，即

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1/e_1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1/e_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1/e_3 \end{bmatrix},\ X_3 = \begin{bmatrix} 1/e_7 & 0 & 0 \\ a_4 & 1/e_8 & 0 \\ a_5 & a_6 & 1/e_9 \end{bmatrix}, \tag{C.2}$$

$$X_2 = \kappa X_1^{-1} X_3^{-1}, \tag{C.3}$$

$$\det(I + X_2) = (1 + x/e_4)(1 + x/e_5)(1 + x/e_3). \tag{C.4}$$

我们令

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix},\ (T_x A)A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix},\ (T_x^2 A)(T_x A)A = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}. \tag{C.5}$$

若 $y = {}^{\mathrm{T}}(y_1, y_2, y_3)$ 满足方程 (4.12)，则有

$$T_x y_1 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3,\ T_x^2 y_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3,\ T_x^3 y_1 = d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3. \tag{C.6}$$

由此可得

$$(p_3 T_x^3 + p_2 T_x^2 + p_1 T_x + p_0) y_1 = 0, \tag{C.7}$$

其中

$$p_3 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix},\ p_2 = -\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix},\ p_1 = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix},\ p_0 = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{C.8}$$

经过简单计算可知， p_0 可被 $\det A$ 整除。由于 $A = I + O(x)$ 在 $x = 0$处以及 $A = \kappa I x^3 + O(x^2)$ 在 $x = \infty$处，因此存在多项式 $p_i'(i = 0,1,2,3)$，使得

$$p_i = x^3 p_i', \tag{C.9}$$

$$\deg p_0' = 12,\ \deg p_1' = 9,\ \deg p_2' = 6,\ \deg p_3' = 3. \tag{C.10}$$

当我们施行规范变换 $Y = Cy$ 时，其中

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}, \tag{C.11}$$

Y_1 满足的方程与 y_1满足的方程相同。根据条件 $e_8 \neq e_9$，存在一个具有上述形式的矩阵 $C \in GL(3)$，使得

$$(I + (-e_8)X_3)C = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}. \tag{C.12}$$

因此，我们有

$$C^{-1}AC|_{x\to -e_8}=\begin{bmatrix}*&*&0*&*&0*&*&0\end{bmatrix}, \tag{C.13}$$

$$C^{-1}(T_xA)AC|_{x\to -e_8}=\begin{bmatrix}*&*&0*&*&0*&*&0\end{bmatrix}, \tag{C.14}$$

$$C^{-1}(T_x^2A)(T_xA)AC|_{x\to -e_8}=\begin{bmatrix}*&*&0*&*&0*&*&0\end{bmatrix}. \tag{C.15}$$

因此，我们得到 $p_i'(-e_8)=0$。以类似的方式，我们得到 $p_i'(-e_9)=0$。令 $p_i''=p_i/(x+e_8)(x+e_9)$，则 $p_i'(i=0,1,2,3)$ 是关于 x 的多项式，并且

$$(p_3''T_x^3+p_2''T_x^2+p_1''T_x+p_0'')y_1=0, \tag{C.16}$$

$$\deg p_0''=10,\ \deg p_1''=7,\ \deg p_2''=4,\ \deg p_3''=1. \tag{C.17}$$

我们将 f定义为 $p_3''(f)=0$。我们将 p_3''缩放为 $x-f$。

令 $x=-e_8/q$。由于 A的行列式， $A(-e_8/q)$ 可逆。因为

$$p_3(x)A(q^2x)A(qx)A(x)+p_2(x)A(qx)A(x)+p_1(x)A(x)+p_0(x)I=\begin{bmatrix}0&0&0*&*&**&*&*\end{bmatrix}, \tag{C.18}$$

我们有

$$p_3(-e_8/q)A(-e_8q)A(-e_8)+p_2(-e_8/q)A(-e_8)+p_1(-e_8/q)I+p_0(-e_8/q)A(-e_8/q)^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0*&*&**&*&*\end{bmatrix}. \tag{C.19}$$

与上述方法类似，我们有 $p_0(-e_8/q)=0$ 以及 $p_0(-e_9/q)=0$。

我们总结上述计算。我们有

$$(p_3''T_x^3+p_2''T_x^2+p_1'T_x+p_0)y_1=0, \tag{C.20}$$

$$\deg p_0''=10,\ \deg p_1''=7,\ \deg p_2''=4,\ \deg p_3''=1, \tag{C.21}$$

$$p_0''\propto(x+e_1)(x+e_2)(x+e_3)(x+e_4)(x+e_5)(x+e_6)(x+e_7)(qx+e_8)(qx+e_9). \tag{C.22}$$

我们应用规范变换 $z=((-x/e_1)\infty(-x/e_2)\infty(-x/e_3)\infty)^{-1}y_1$ 然后有 e

$$(P_3T_x^3+P_2T_x^2+P_1T_x+P_0)z=0, \tag{C.23}$$

$$P_3=(x-f)\prod_{i=1}^{3}(1+qx/e_i)(1+q^2x/e_i), \tag{C.24}$$

$$P_2=p_2''\prod_{i=1}^{3}(1+qx/e_i), \tag{C.25}$$

$$P_1=p_1'', \tag{C.26}$$

$$P_0=p_0''\prod_{i=1}^{3}(1+x/e_i)^{-1}\propto(x+e_4)(x+e_5)(x+e_6)(x+e_7)(qx+e_8)(qx+e_9), \tag{C.27}$$

$$\text{度 } P_i=7. \tag{C.28}$$

这表明方程 (C.23) 具有以下特征根：

- $-e_4$, $-e_5$, $-e_6$, $-e_7$, $-e_8/q$, $-e_9/q$ 以及另一个根 $x=0$,
- $\{e_i/q, e_i/q^2\}$（$i=1$的二重根，2，3 和 f）。

另一个位于 $x=0$ 的根将在后文中求得。

接下来，我们推导 (C.23) 在 $x=0$ 和 $x=\infty$处的特征根。令

$$B = A/(1+x/e_1)(1+x/e_2)(1+x/e_3). \tag{C.29}$$

我们有

$$T_x y' = By', \quad y' = ((-x/e_1)_\infty(-x/e_2)_\infty(-x/e_3)_\infty)^{-1}y. \tag{C.30}$$

定义

$$B_0 = \frac{I-B}{x}, \quad B_\infty = x(I-\kappa' B) \tag{C.31}$$

其中 $\kappa' = (\kappa e_1e_2e_3)^{-1}$。于是有

$$D_0 y' = B_0 y', \quad D_\infty y' = B_\infty. \tag{C.32}$$

其中 $D_0 = \frac{1}{x}(1-T_x)$, $D_\infty = x(1-\kappa' T_x)$。经过简单计算可得

$$D_0^2 y' = (D_0B_0 + (T_xB_0)B_0)y', \tag{C.33}$$
$$D_0^3 y' = [D_0(D_0B_0 + (T_xB_0)B_0) + T_x(D_0B_0 + (T_xB_0)B_0)B_0]y', \tag{C.34}$$
$$D_\infty^2 y' = (D_\infty B_\infty + (T_xB_\infty)B_0\kappa' x^2)y', \tag{C.35}$$
$$D_\infty^3 y' = [D_\infty(D_\infty B_\infty + (T_xB_\infty)B_0\kappa' x^2) + T_x(D_\infty B_\infty + (T_xB_\infty)B_0)B_0\kappa' x^2]y' \tag{C.36}$$

由于

$$B_0 = B_0^{(0)} + O(x) \text{ (at } x=0), \tag{C.37}$$
$$B_0 = B_0^{(\infty)}x^{-2} + O(x^{-3}) \text{ (at } x=\infty), \quad B_\infty = B_\infty^{(\infty)} + O(x^{-1}) \text{ (at } x=\infty), \tag{C.38}$$

我们有

$$D_0 y' = O(1)y',\ D_0^2 y' = O(1)y',\ D_0^3 y' = O(1)y' \quad (\text{at } x=0), \tag{C.39}$$
$$D_\infty y' = O(1)y',\ D_\infty^2 y' = O(1)y',\ D_\infty^3 y' = O(1)y' \quad (\text{at } x=\infty). \tag{C.40}$$

因此，方程 (C.23) 可改写为

$$(r_3^{(0)}D_0^3 + r_2^{(0)}D_0^2 + r_1^{(0)}D_0 + r_0^{(0)})z = 0, \tag{C.41}$$
$$(r_3^{(\infty)}D_\infty^3 + r_2^{(\infty)}D_\infty^2 + r_1^{(\infty)}D_\infty + r_0^{(\infty)})z = 0, \tag{C.42}$$

其中

$$r_i^{(0)} = O(1) \text{ at } x=0,\ r_i^{(\infty)} = O(1) \text{ at } x=\infty. \tag{C.43}$$

作为算子，我们发现

$$D_0 = \frac{1}{x}(1-T_x),\ D_0^2 = \frac{1}{x^2}(1-T_x)(1-T_x/q),\ D_0^3 = \frac{1}{x^3}(1-T_x)(1-T_x/q)(1-T_x/q^2), \tag{C.44}$$

$$D_\infty = x(1-\kappa' T_x) \quad D^2{}_\infty = x^2(1-\kappa' T_x)(1-\kappa' q T_x) \quad D^3{}_\infty = x^3(1-\kappa' T_x)(1-\kappa' q T_x)(1-\kappa' q^2 T_x)。 \tag{C.45}$$

这意味着方程 (C.23) 在 $x = 0$ 处有三重根 $\{1, q, q^2\}$，并在 $x = \infty$ 处有三重根 $\{\kappa e_1 e_2 e_3, \kappa e_1 e_2 e_3 q^{-1}, \kappa e_1 e_2 e_3 q^{-2}\}$。由 q-Fuchs 关系可得，(C.23) 在 $x = 0$ 处的最后一个根为 f/q。至此，证明了 (C.23) 具有命题 5.4 中的点配置。

我们最终证明条件 (5.4)。根据上述计算，我们有

$$P_3(T_x^2 B)(T_x B)B + P_2(T_x B)B + P_1 B + P_0 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}. \tag{C.46}$$

由于 $P_3(f) = P_0(f/q) = 0$，我们有

$$P_2(f)B(fq)B(f) + P_1(f)B(f) + P_0(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \tag{C.47}$$

$$P_3(f/q)B(fq)B(f)B(f/q) + P_2(f/q)B(f)B(f/q) + P_1(f/q)B(f/q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}. \tag{C.48}$$

由后一个方程可得

$$P_3(f/q)B(fq)B(f) + P_2(f/q)B(f) + P_1(f/q)I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}. \tag{C.49}$$

我们聚焦于（C.47）和（C.49）的第一分量。元组（$P_2(f)$ $P_1(f)$ $P_0(f)$）和（$P_3(f/q)$ $P_2(f/q)$ $P_1(f/q)$）满足同一个线性方程组。根据 B 的形式，该方程组的秩一般为 2 或 3。因此，（$P_2(f)$ $P_1(f)$ $P_0(f)$）与（$P_3(f/q)$ $P_2(f/q)$ $P_1(f/q)$）成比例。

□

注C.1。 f 的显式表达式为

$$f = \frac{f_1}{f_2}, \tag{C.50}$$

$$\begin{aligned} f_1 =& -\kappa^2 a_1^2 a_3^3 a_6^2 e_1^2 e_3^3 e_8^3 e_9^3 e_2^3 - \kappa^3 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^3 e_9^3 e_2^3 + \kappa^2 a_1 a_2 a_3^2 a_6^2 e_1 e_3^3 e_8^3 e_9^3 e_2^3 - \kappa^3 a_1^2 a_3 e_1^2 e_3^3 e_8^2 e_9^3 e_2^3 \\ &+ \kappa^2 a_1^2 a_3^2 a_6 e_1 e_3^3 e_8^2 e_9^3 e_2^3 - \kappa^2 a_1^2 a_3^2 a_6 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^3 e_2^3 - \kappa^3 a_1 a_2 e_1^2 e_3^2 e_8^3 e_9^2 e_2^3 + 2\kappa^2 a_1^2 a_3^2 a_6 e_1^2 e_3^2 e_8^3 e_9^2 e_2^3 \\ &+ 2\kappa^2 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1 e_3^2 e_8^3 e_9^2 e_2^3 - q\kappa^2 a_1^2 a_3^2 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^2 e_9^2 e_2^3 + \kappa^2 a_1^2 a_3 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^3 - \kappa^2 a_1^2 a_3 e_1^2 e_3 e_8^2 e_9^2 e_2^3 \\ &+ q\kappa^2 a_1^2 a_3 e_1^2 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2^3 + \kappa^2 a_1^2 a_3 e_1^2 e_3 e_8^3 e_9 e_2^3 + \kappa^2 a_1 a_2 e_1 e_3 e_8^3 e_9 e_2^3 - q\kappa^2 a_1^2 a_3 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9 e_2^3 \\ &- 2\kappa^2 a_1 a_2 a_3^2 a_6^2 e_1^2 e_3^3 e_8^3 e_9^3 e_2^2 + \kappa^3 a_2^2 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^3 e_9^3 e_2^2 - \kappa^2 a_2^2 a_3 a_6^2 e_1 e_3^3 e_8^3 e_9^3 e_2^2 + \kappa^3 a_1 a_2 e_1^2 e_3^3 e_8^2 e_9^3 e_2^2 \\ &+ \kappa^2 a_1^2 a_3^2 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^2 e_9^3 e_2^2 + 2\kappa^2 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^3 e_2^2 + \kappa^2 a_1^2 a_3 e_1 e_3^3 e_8 e_9^3 e_2^2 - q\kappa a_1 a_2 e_1 e_3 e_8^2 e_2^2 \\ &- 2\kappa^2 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1^2 e_3^2 e_8^3 e_9^2 e_2^2 - \kappa^2 a_2^2 a_6 e_1 e_3^2 e_8^3 e_9^2 e_2^2 - q\kappa a_1^2 a_3 e_1 e_3^2 e_9^2 e_2^2 + 2q\kappa^2 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^2 e_9^2 e_2^2 \\ &+ \kappa^2 a_1^2 a_3 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^2 - \kappa a_1 a_2 a_3 a_6 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^2 - 2\kappa a_1^2 a_3^2 a_6 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^2 + \kappa^2 a_1 a_2 e_1^2 e_3 e_8^2 e_9^2 e_2^2 \\ &- \kappa a_1 a_2 a_3 a_6 e_1 e_3 e_8^2 e_9^2 e_2^2 - q\kappa^2 a_1 a_2 e_1^2 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2^2 - \kappa a_1^2 a_3 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2^2 - q\kappa a_1 a_2 a_3 a_6 e_1 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2^2 \\ &+ \kappa a_1^2 a_3 e_1 e_3 e_8 e_9^2 e_2^2 + q\kappa^2 a_1 a_2 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9 e_2^2 - q\kappa a_1 a_2 a_3 a_6 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9 e_2^2 - \kappa a_1 a_2 e_1 e_8^2 e_9 e_2^2 \\ &- \kappa a_1 a_2 e_3 e_8^2 e_9 e_2^2 - 2\kappa a_1^2 a_3 e_1 e_3 e_8^2 e_9 e_2^2 + q\kappa a_1^2 a_3 e_1 e_3^2 e_8 e_9 e_2^2 + q\kappa a_1 a_2 e_1 e_3 e_8 e_9 e_2^2 \\ &+ \kappa^2 a_2^2 a_3 a_6^2 e_1^2 e_3^3 e_8^3 e_9^3 e_2 - 2\kappa^2 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^2 e_9^3 e_2 - \kappa^2 a_2^2 a_6 e_1 e_3^3 e_8^2 e_9^3 e_2 - \kappa^2 a_2^2 a_6 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^3 e_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \kappa^2 a_1 a_2 e_1 e_3^3 e_8 e_9^3 e_2 + q\kappa a_1 a_2 e_1 e_3^2 e_9^2 e_2 - q\kappa^2 a_2^2 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^2 e_9^2 e_2 - \kappa^2 a_1 a_2 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2 \\
&+ \kappa a_2^2 a_6 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2 + 3\kappa a_1 a_2 a_3 a_6 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2 + \kappa a_2^2 a_6 e_1 e_3 e_8^2 e_9^2 e_2 + \kappa a_1 a_2 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2 \\
&- \kappa a_1^2 a_3 e_1 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2 + q\kappa a_2^2 a_6 e_1 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2 - \kappa a_1 a_2 e_1 e_3 e_8 e_9^2 e_2 + q a_1 a_2 e_3 e_8 e_2 + q\kappa a_2^2 a_6 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9 e_2 \\
&+ \kappa a_1 a_2 e_1 e_3 e_8^2 e_9 e_2 - q a_1 a_2 e_3 e_9 e_2 - q\kappa a_1 a_2 e_1 e_3^2 e_8 e_9 e_2 + a_1 a_2 e_8 e_9 e_2 + a_1^2 a_3 e_3 e_8 e_9 e_2 \\
&- q a_2^2 a_6 e_3 e_8 e_9 e_2 + \kappa^2 a_2^2 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^2 e_9^3 - \kappa a_2^2 a_6 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 + \kappa a_1 a_2 e_1 e_3^2 e_8 e_9^2 - a_1 a_2 e_3 e_8 e_9, \qquad \text{(C.51)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2 &= \kappa^3 a_1^2 a_3^2 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^3 e_9^3 e_2^3 - \kappa^3 a_1^2 a_3 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^3 e_2^3 + \kappa^3 a_1^2 a_3 e_1^2 e_3^2 e_8^3 e_9^2 e_2^3 - q\kappa^3 a_1^2 a_3 e_1^2 e_3^3 e_8^2 e_9^2 e_2^3 \\
&- q\kappa^3 a_1 a_2 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^3 + q\kappa^2 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^3 + q\kappa^2 a_1^2 a_3 e_1 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2^3 + q\kappa^2 a_1 a_2 e_1 e_3 e_8^2 e_9 e_2^3 \\
&- 2\kappa^3 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^3 e_9^3 e_2^2 + \kappa^3 a_1 a_2 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^3 e_2^2 + \kappa^2 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^3 e_2^2 + \kappa^2 a_1^2 a_3 e_1 e_3^2 e_8 e_9^3 e_2^2 \\
&- q\kappa a_1 a_2 e_1 e_8^2 e_2^2 - \kappa^3 a_1 a_2 e_1^2 e_3^2 e_8^3 e_9^2 e_2^2 + \kappa^2 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1 e_3^2 e_8^3 e_9^2 e_2^2 - q\kappa a_1^2 a_3 e_3^2 e_9^2 e_2^2 \\
&+ q\kappa^3 a_1 a_2 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^2 + q\kappa^2 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^2 - q\kappa a_2^2 a_3 a_6^2 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^2 + q\kappa^2 a_1 a_2 a_3 a_6 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^2 \\
&- q\kappa a_1 a_2 a_3^2 a_6^2 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^2 - \kappa^2 a_1^2 a_3 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^2 + q\kappa^2 a_2^2 a_6 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2^2 - \kappa^2 a_1 a_2 e_1 e_3 e_8^2 e_9^2 e_2^2 \\
&+ q\kappa^2 a_1^2 a_3 e_1 e_3^3 e_8 e_9^2 e_2^2 + q\kappa^2 a_1^2 a_3 e_1^2 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2^2 - 2q\kappa a_1 a_2 a_3 a_6 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2^2 + q\kappa^2 a_1 a_2 e_1 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2^2 \\
&- q\kappa a_1^2 a_3^2 a_6 e_1 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2^2 + \kappa^2 a_1 a_2 e_1 e_3 e_8^3 e_9 e_2^2 - q\kappa^2 a_1 a_2 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9 e_2^2 + q\kappa^2 a_1 a_2 e_1^2 e_3 e_8^2 e_9 e_2^2 \\
&- q\kappa a_2^2 a_6 e_3 e_8^2 e_9 e_2^2 - 2q\kappa a_1 a_2 a_3 a_6 e_1 e_3 e_8^2 e_9 e_2^2 - q\kappa a_1 a_2 e_3 e_8 e_9 e_2^2 - q\kappa a_1^2 a_3 e_1 e_3 e_8 e_9 e_2^2 \\
&+ \kappa^3 a_2^2 a_6 e_1^2 e_3^3 e_8^3 e_9^3 e_2 - \kappa^2 a_2^2 a_6 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^3 e_2 - \kappa^2 a_1 a_2 e_1 e_3^2 e_8 e_9^3 e_2 - \kappa^2 a_2^2 a_6 e_1 e_3^2 e_8^3 e_9^2 e_2 \\
&- q\kappa a_1^2 a_3 e_1 e_3^2 e_9^2 e_2 - q\kappa^2 a_2^2 a_6 e_1 e_3^3 e_8^2 e_9^2 e_2 - q\kappa^2 a_2^2 a_6 e_1^2 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2 + q\kappa a_2^2 a_3 a_6^2 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2 \\
&+ \kappa^2 a_1 a_2 e_1 e_3^2 e_8^2 e_9^2 e_2 + \kappa a_2^2 a_6 e_3 e_8^2 e_9^2 e_2 - q\kappa^2 a_1 a_2 e_1 e_3^3 e_8 e_9^2 e_2 - q\kappa^2 a_1 a_2 e_1^2 e_3^2 e_8 e_9^2 e_2 \\
&+ \kappa a_1 a_2 e_3 e_8 e_9^2 e_2 + q a_1 a_2 e_8 e_2 + q\kappa a_2^2 a_6 e_3^2 e_8^2 e_9 e_2 - \kappa a_1 a_2 e_3 e_8^2 e_9 e_2 + q\kappa a_2^2 a_6 e_1 e_3 e_8^2 e_9 e_2 \\
&+ q a_1^2 a_3 e_3 e_9 e_2 + q\kappa a_1 a_2 e_3^2 e_8 e_9 e_2 + q a_1 a_2 a_3 a_6 e_3 e_8 e_9 e_2 + q\kappa a_1 a_2 e_1 e_3^2 e_9^2 + q\kappa a_2^2 a_6 e_1 e_3^2 e_8 e_9^2 \\
&- q a_1 a_2 e_3 e_9 - q a_2^2 a_6 e_3 e_8 e_9 \qquad \text{(C.52)}
\end{aligned}
$$

这可以通过直接计算（借助某些软件）来验证。

致谢

作者谨此感谢 Yasuhiko Yamada 富有成效的讨论和持续的鼓励。作者也感谢 Shunya Adachi 长期以来就（q-）中卷积进行的讨论；尤其是通过与他的私人交流，构造出了经由 q-Okubo 型方程引入 mc_λ 的方法。

参考文献

[1]Y. Arai 和 K. Takemura， q-中卷积的重新表述及其应用，arXiv:2503.11214。[2] P. P. Boalch，箭图与差分 Painlev´e 方程，载于 群与对称性，第 25–51 页，CRM 讲义录，47，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。[3] M. Dettweiler 和 S. Reiter，Katz 算法及其在逆 Galois 问题中的应用，J. Symbolic Comput. **30**（2000），第 6 期，761–798。[4] M. Dettweiler 和 S. Reiter，Fuchs 型系统的中卷积与刚性微分系统的构造，J. Algebra **318**（2007），第 1 期，1–24。

[5] V. S. Dotsenko 和 V. A. Fateev，共形代数与二维统计模型中的多点关联函数，Nuclear Phys. B 240（1984），第 3 期，312–348。[6] G. V. Filipuk，关于中卷积与第六 Painlev´e 方程的双有理对称性，Kumamoto J. Math. 19（2006），15–23。[7] B. Feigin、M. Jimbo 和 E. Mukhin，关于源自量子环面代数的 q-差分 opers，J. Phys. A: Math. Theor. 57（2024）485201，共 32 页。[8] T. Fujii 和 T. Nobukawa， q-超几何方程变体的超几何解，arXiv:2207.12777，即将在 Funkcial. Ekvac. 发表。[9] Y. Haraoka 和 G. V. Filipuk，Fuchs 型系统的中卷积与变形，J. Lond. Math. Soc. (2) 76（2007），第 2 期，438–450。[10] M. Ito，对称 Selberg 型 Jackson 积分的 q-差分系统，SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 16（2020），论文编号 113，共 31 页。[11] M. Ito，对称 Selberg 型 Jackson 积分的 Gauss 分解与 q-差分方程，Ryukyu Math. J. 36（2023），1–47。[12] M. Jimbo 和 H. Sakai，第六 Painlev´e 方程的 q-类比，Lett. Math. Phys. 38（1996），第 2 期，145–154。[13] V. G. Kac 和 P. Cheung，量子微积分，Universitext，Springer，纽约，2002。[14] K. Kajiwara、M. Noumi 和 Y. Yamada，Painlev´e 方程的几何方面，J. Phys. A: Math. Theor. 50（2017），073001，共 164 页。[15] N. M. Katz，刚性局部系统，Annals of Mathematics Studies，139，Princeton Univ. Press，普林斯顿，新泽西州，1996。[16] S. Moriyama，del Pezzo 几何上的谱理论与拓扑弦，J. High Energy Phys. 2020，第 10 期，154，共 53 页。[17] S. Moriyama 和 Y. Yamada，仿射魏尔群的量子表示及相关量子曲线，SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 17（2021），论文编号 076，共 24 页。[18] M. Murata， q-Painlev´e 方程的 Lax 形式，J. Phys. A 42（2009），第 11 期，115201，共 17 页。[19] M. Noumi、S. N. M. Ruijsenaars 和 Y. Yamada，椭圆 Painlev´e Lax 方程与 van Diejen 的八耦合椭圆哈密顿量，SIGMA Symmetry I ntegrability Geom. Methods Appl. 16（2020），论文编号 063，共 16 页。[20] K. Park，一种适用于 q-Painlev´e 方程（类型为 E_6）的 3×3 Lax 形式，SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 19（2023），论文编号 094，共 17 页。[21] H. Sakai，与仿射根系相关的有理曲面及 Painlev´e 方程的几何，Comm. Math. Phys. 220（2001），第 1 期，165–229。[22] H. Sakai，与 $A_2^{(1)}$ 曲面相关的 q-Painlev´e 方程的 Lax 形式，J. Phys. A 39（2006），第 39 期，12203–12210。

[23] H. Sakai 和 M. Yamaguchi，线性 q-差分方程的谱类型及 q-中卷积的类比，《国际数学研究通知》**2017**，第 7 期，1975–2013 页。[24]S. Sasaki、S. Takagi 和 K. Takemura， q-中卷积与 q-Painlev´e 方程，SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.18(2022)，论文编号 056，共 21 页。[25] K. Takemura，中卷积与 Heun 方程，SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **5** (2009)，论文 040，共 22 页。[26] K. Takemura，Ruijsenaars–van Diejen 算子的退化与 q-Painlev´e 方程，《可积系统杂志》**2** (2017)，第 1 期，xyx008，共 27 页。[27] Y. Yamada，具有 $E_n^{(1)}$型仿射魏尔群对称性的 q-Painlev´e 方程的 Lax 形式，《国际数学研究通知》**2011**，第 17 期，3823–3838 页。[28]M. Yoshida，超几何函数，我的挚爱，《数学专题》E32，Friedr. Vieweg，不伦瑞克，1997 年。