arXiv:2601.06094v1 [eess.AS] 1 Jan 2026

听觉滤波器行为与更新后的估计常数

期刊标题 XX(X)：1–19
©作者 2025 重印与许可：
sagepub.co.uk/journalsPermissions.nav
DOI：10.1177/ToBeAssigned
www.sagepub.com/

SAGE

Samiya A Alkhairy[1]

摘要

伽马音调滤波器族中的滤波器常被用于模拟听觉信号处理，但用于拟合人类听觉的滤波器常数值大多是依据数十年前收集的历史心理声学数据设定的。在本文中，我们摒弃这一长期沿用的惯例，采用基于特性的框架，利用近期报道的一系列滤波器特性（例如品质因数，以及品质因数与峰值群延迟之间的比率）来估计滤波器常数；该框架阐明了滤波器行为与其底层常数之间的关系。通过采用能够捕捉某些滤波器类别在峰值区域共享行为的尖锐滤波器近似方法，我们分析了在充分利用滤波器全部自由度、而不是将滤波器阶数或指数固定为历史规定值时可实现的行为范围。我们使用基于幅度和基于相位的特性及其比率来刻画滤波器行为，从而揭示哪些特性有助于约束滤波器常数，哪些特性提供的约束较弱。我们表明，这些洞见和估计方法可扩展至伽马音调滤波器族中的多个可实现滤波器类别，并结合近期的生理学和心理声学观察结果，将其应用于推导人类听觉滤波器常数的约束条件并估计其数值。更广泛地说，该框架支持设计具有任意特性层级规格的听觉滤波器，并能够系统评估滤波器特性的变化如何影响听觉模型、感知研究发现以及依赖听觉滤波器组的技术。

关键词

听觉滤波器组、听觉滤波器、等效矩形带宽、滤波器设计、心理声学、同时掩蔽、前向掩蔽、调谐曲线、滤波器特性、群延迟、调谐比、参数空间、灵敏度、耳蜗建模

引言

研究动机

伽马音滤波器及相关滤波器类别通常用于模拟听觉信号处理。用于模拟人类信号处理的伽马音滤波器，其阶数固定为四阶，另一个参数通常根据等效矩形带宽（等效矩形带宽）设定，如Slaney 等人(1993年所述。滤波器阶数的选定值源于对数十年前由Glasberg 和 Moore(1990年）进行的同时掩蔽心理声学测量所得调谐曲线的拟合。

这带来了两个问题。第一个问题是，如何理解这些滤波器所能呈现的全部行为范围——不仅限于固定阶数的滤波器，以及它们对滤波器特性数值的影响，例如峰值频率、3 dB 品质因数、等效矩形带宽，以及峰值处的群延迟。第二个问题是，如何设计听觉滤波器，以纳入与同时掩蔽结果相矛盾的近期发现。

回答第一个问题，有助于确定某些类型的行为是否可由听觉滤波器实现，明确这些行为如何对应于对滤波器特性的要求，以及在合理的数值范围内，滤波器特性对滤波器常数变化的灵敏度。我们提出，这一分析至少同等重要——如果不是更加重要的话——而不是构建新的听觉滤波器类别并研究它们之间的差异。

回答第二个问题需要采用适当的方法，根据调谐曲线或报告的滤波器特性值来设计滤波器并估计滤波器常数。在此，我们选择后者，并指出，基于滤波器特性设计滤波器的适当方法，必须建立在对滤波器行为的分析，以及对滤波器特性相对于滤波器常数的灵敏度分析之上。另一种方法是根据新近报告的调谐曲线拟合滤波器，但这同样会导致滤波器常数取固定值，而无法理解这些常数与报告的滤波器特性中所编码的滤波器行为描述之间的关系。

目标与目的

这两个问题引导我们实现以下目标：根据近期报道的滤波器特性数值，以一种能够帮助我们理解滤波器特性的变化如何影响所估计滤波器常数的方式，设计人类听觉滤波器。我们通过实现三个目标来达成这一目的：(1) 分析滤波器的行为以及滤波器特性对滤波器常数的依赖关系；(2) 改进根据滤波器特性集合的规格估计滤波器常数的方法；以及 (3)

[1]麻省理工学院，美国；沙特阿拉伯阿卜杜勒阿齐兹国王科技城**通讯作者：** Samiya Alkhairy
Prepared using sagej.cls *[Version: 2017/01/17 v1.20]*

利用近期关于与人类相关的滤波器特性的观测结果和报道数值，估计对滤波器常数的约束及其数值。

我们的方法和估计适用于伽马音调滤波器族中的多个滤波器类别。在下一节中，我们将使用适用于各种滤波器类别的尖锐滤波器近似来实现前两个目标；在随后的章节中，我们将证明，对于至少三个在所关注参数区域的峰值区域内可由尖锐滤波器近似良好逼近的滤波器类别而言，我们的发现和方法同样适用。

随后，我们着手估计第三个目标所涉及的约束和滤波器常数值；在此过程中，我们举例说明如何利用上述基于特征的滤波器设计方法，根据少量已报告的特征值，估计人类听觉滤波器组的滤波器常数值。具体而言，我们采用了在龙猫中发现为恒定、并假定在不同物种之间相同的 a 比值的已报告数值 [Shera et al. (2010年)]，以及近期前向掩蔽心理声学实验中报告的等效矩形带宽 [Oxenham 和 Shera (2003年)]。

意义

除了根据近期实验估计人类听觉滤波器的滤波器常数外，我们还提出了在给定各种已报告特征集合的情况下估计滤波器常数的指导原则。所形成的直觉、滤波器设计方法，以及描述滤波器特性与滤波器常数之间关系的表达式，还可用于：(1) 根据任意滤波器特性值的规格设计滤波器（例如个性化滤波器，或用于模拟不同物种）；以及(2)系统地研究知觉研究和模型的发现及技术性能对滤波器特性的依赖关系，例如 [Dietzet al. (2011); Dimitriadis et al. (2010 年)] 。

尖锐滤波器近似

本节讨论几类可实现滤波器的尖锐滤波器近似，这些滤波器可用于模拟人类的听觉信号处理。该尖锐滤波器近似本身不可实现，但其形式简单，因此便于分析其行为，并开发相应方法，根据已报告（或期望）的滤波器特性估计用于参数化其传递函数的滤波器常数。正如本文后文所示，这些行为分析与估计方法也适用于我们关注的可实现滤波器。

传递函数

在这里，我们回顾各种滤波器类别的锐化滤波器近似的传递函数。我们给出以归一化频率表示的连续频域表达式，

$$\beta \triangleq \frac{f}{\mathrm{CF}} \tag{1}$$

其以频率 f 和特征频率 CF 表示。时域表达式则以缩放时间表示，

$$\tilde{t} \triangleq 2\pi \mathrm{CF} t \,. \tag{2}$$

这些传递函数并非定义在拉普拉斯域中，而是定义在归一化连续复频率 s 中，其中，

$$\mathrm{Im}\{s\} = \beta \,. \tag{3}$$

这些传递函数的形式为，

$$H_{\mathrm{sharp}} \propto (s-p)^{-B_u} \,, \tag{4}$$

其中，重复极点为 $p = -A_p + ib_p$，基滤波器传递函数的指数为 B_u。下文将 $(A_p,\ b_p,\ B_u) \in \mathbb{R}^{3+}$ 称为用于参数化该传递函数的滤波器常数组。

请注意，在上述表达式以及本文中其他传递函数和脉冲响应的表达式中，我们使用的是比例关系而非等式。这是因为我们并不关心如何将某一类滤波器的传递函数中的增益常数映射到其脉冲响应或尖锐滤波器近似的传递函数中。我们也不关心滤波器组中增益常数随特征频率的变化，或不同滤波器类别之间增益常数的差异。绘制频率响应时，我们将幅度归一化到峰值处的幅度，并对相位进行基准校正，使其从零开始。

该 H_{sharp} 是针对广义指数滤波器（GEFs/P） [Alkhairy(2025a)] 以及经典伽马音调滤波器（GTFs） [Holdsworth 等人(1988年); Darling (1991)]独立推导出的尖锐滤波器近似。请注意，滤波器常数集合（A_p, b_p, B_u）是GEF和 V（稍后章节将讨论）的传递函数的原生参数；我们将GTF也改写为这些参数，以便所有滤波器类别采用统一的参数化方式。对于较小的 H_{sharp} 值，传递函数 A_p 尤其能很好地近似上述听觉滤波器类别，尤其是在峰值附近的区域，如图1所示。

尽管这类滤波器本身不可实现，但其传递函数简单，因此我们能够用滤波器常数推导出滤波器特性的闭式表达式（主要围绕峰值），例如 3 dB 品质因数。这些表达式构成了我们所采用方法的基础，用于根据已报告的滤波器特性值估算滤波器常数。在接下来的几个小节中，我们将回到这些基本表达式，推导各种滤波器特性（包括特征比）的表达式，研究滤波器特性对极点和滤波器指数的依赖关系，并开发准确的方法，以给定的特性值设计滤波器；此外，还将根据已报告的观测结果和滤波器特性值，估算滤波器常数。

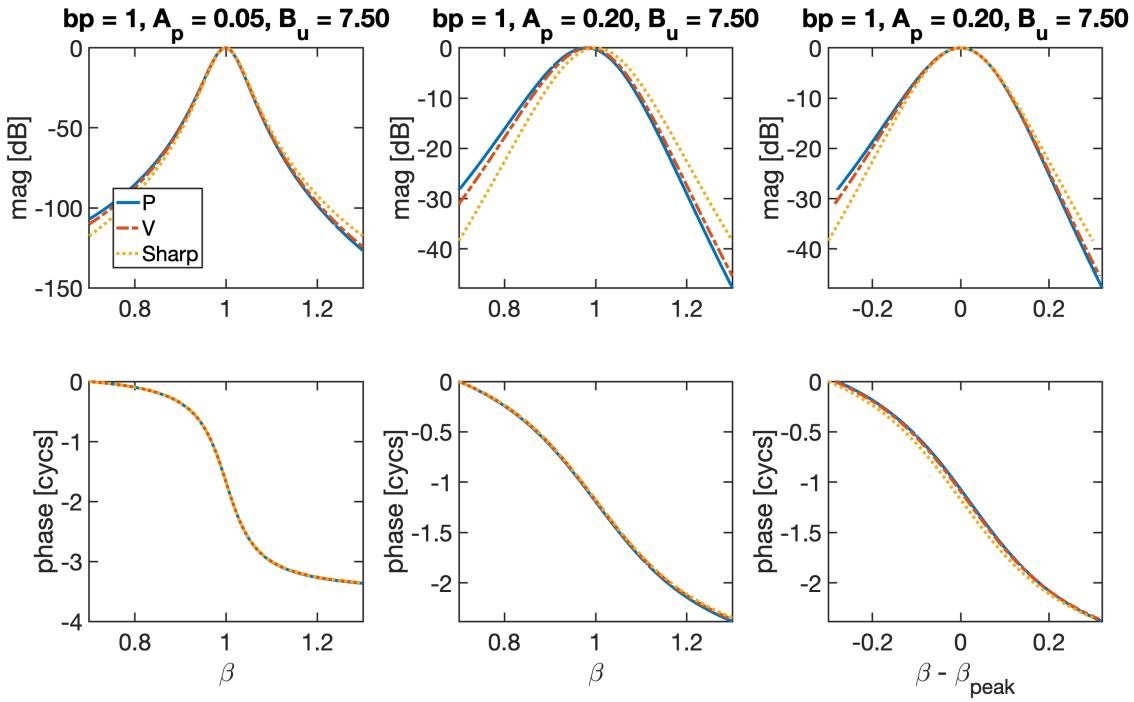


图1。 左侧和中间面板显示了以下传递函数随归一化频率 β 变化的波德图： H_P （蓝色实线）、 H_V （红色点划线）以及近似函数 H_{sharp} （黄色虚线）。我们利用该近似函数，以滤波器常数表示滤波器特性并推导相应表达式，进而建立基于特性的滤波器设计方法。左侧和中间面板采用两组不同的滤波器常数值生成（显示在面板标题中），这些数值取自我们认为适用于人类的范围。左侧面板更适用于特征频率较高的滤波器，而中间面板适用于特征频率较低的滤波器。左侧和中间面板显示，对于可实现滤波器 H_P 和 H_V， H_{sharp} 是传递函数的良好近似。在最右侧面板中，我们通过将 x 轴平移 β_{peak}，更清晰地展示了该近似对于中间面板中传递函数的有效性；对于各条曲线， β_{peak} 分别取以下值：$\beta_{\text{peak},\ P} = 0.9798$、 $\beta_{\text{peak},\ V} = 0.9852$ 和 $\beta_{\text{peak},\ \text{Sharp}} = 1$。

滤波器行为对常数的依赖关系

本节将展示滤波器行为可能呈现的丰富多样性，这些行为可通过滤波器特性加以量化；只要我们能够取用所有自由度 A_p、 B_u、 b_p 的取值范围，而不是像通常那样将 B_u 限制在某些特定值上，便能实现这些行为。我们将讨论滤波器特性对滤波器常数的依赖关系，以增进对滤波器的直观认识，根据观测结果推断滤波器常数的约束，并为开发根据滤波器特性规格估算滤波器常数的方法奠定第一步基础。我们将在此对 H_{sharp} 进行分析；它近似概括了伽马音调滤波器族中可实现滤波器类别的共同特征。在后文的一个章节中，我们将验证这些发现对可实现滤波器的有效性。

滤波器特性的表达式 我们仅讨论某些频域特性，不考虑伽马音调滤波器族中各类可实现滤波器的频率响应幅度所具有的根本性差异不对称性。我们在归一化频率（β）域中定义滤波器特性，并用一组滤波器常数（A_p、b_p、 B_u）来表示，这组常数对传递函数进行参数化。利用 H_{sharp} 的表达式（方程 4），我们推导出以下滤波器特性表达式，表示为滤波器常数的函数。这些特性包括基于幅度的特性（β_{peak}、Q_n、 Q_{erb}、 S_β）和基于相位的特性（β_{maxN}、 N_β、 ϕ_{accum}）。

$$
\begin{aligned}
\beta_{peak} &= b_p \\
Q_n &= \frac{b_p}{2A_p}\left(10^{\frac{n}{10B_u}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \\
Q_{\text{erb}} &= \frac{b_p}{\sqrt{\pi}A_p}\frac{\Gamma(B_u)}{\Gamma(B_u - \frac{1}{2})} \\
S_\beta &= \frac{20}{\log(10)}\frac{B_u}{A_p^2} \\
\beta_{maxN} &= b_p \\
N_\beta &= \frac{1}{2\pi}\frac{B_u}{A_p} \\
\phi_{accum} &= \frac{B_u}{2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

我们在本文附录中推导出表达式 Q_{erb} 。大多数其他特性的推导此前已在Alkhairy(2025a）中详细阐述。

特性随常数的变化接下来，我们将说明 H_{sharp} 的幅度滤波器特性和相位滤波器特性如何随滤波器常数而变化，这可由方程5中的闭式表达式加以指导。这些描述也适用于

稍后讨论的可实现类听觉滤波器。

第一种基于幅度的特性——峰值归一化频率 β_{peak}，取决于 H_{sharp} 的仅是 b_p，而我们通常将其设为 1。不过，如果我们想设计峰值频率（最佳频率）$f_{peak} = b_p$CF 不等于特征频率的滤波器，也可以改变 b_p 的值。例如，可以将 $b_p < 1$ 设为使 f_{peak} <CF（例如，用于描述较高声压级下的滤波器行为，而无需完全转向非线性滤波器）。

方程中两个品质因数5 ——基于 n 分贝带宽的品质因数 Q_n，以及基于等效矩形带宽（ERB）的品质因数 Q_{erb} ——二者都与 b_p 成正比，与 A_p成反比。品质因数也会随着滤波器指数 B_u 增加， n 但关系更复杂。对于较大的 n，分贝品质因数自然较小，例如 $Q_{15} < Q_3$。

方程5 中最后一个基于幅度的滤波器特征，是峰值频率处的向下凸度， S_β，单位为 dB。Alkhairy Alkhairy (2025年a将这一滤波器特征引入，称其为最以峰值为中心的基于幅度的滤波器特征，因为它仅取决于 β_{peak}处幅度（以 dB 为单位）的二阶导数。与在 β 域中定义的带宽类似，等效矩形带宽$_\beta$ 和 BW$_n$，凸度量 S_β是调谐尖锐度的一种度量。它不依赖于 b_p （如等效矩形带宽$_\beta$ 和 BW$_n$ ，但不同于Q_{erb} 和 Q_n），与 A_p^2 成反比，因此对其高度敏感；同时，它与 B_u呈简单的线性正比，因此是调谐尖锐度各项度量中最简单的一种。对于实验数据，其应用受采样率和信噪比的限制；但对于模型、滤波器、高信噪比下的高密度采样数据以及拟合数据，它都相当适用，例如 Tan and Carney (2003年)。

至于基于相位的特性：最大群延迟出现在 β_{maxN} 对于 H_{sharp}，其出现在 β_{peak}。然而，对于可实现滤波器，它们彼此相似，但并不完全相等，这一点可从图1中看出。

最大群延迟，或者等价地（对于H_{sharp}而言）峰值处的群延迟 N_β（以周期计），与 B_u 成正比，与 A_p 成反比。相位累积 ϕ_{accum} （以周期计）仅取决于滤波器指数 B_u，并与其成正比。不出所料，如果 $B_u = 1$ ——即我们用二阶滤波器描述阻尼谐振子——相位累积为半个周期。

关于 H_{sharp} 的滤波器特性依赖关系如图2所示。这些曲线图也可作为一种“查找表”，供设计滤波器的人使用：他们通过指定滤波器常数的取值，使滤波器特性满足特定规格。图中，为简单起见，我们设定 $b_p = 1$ （即 f_{peak} =特征频率）。我们将滤波器常数的取值范围限定在一个区间内——我们将在本文后文中发现，这一区间最适合用于模拟人类听觉信号处理的滤波器组。

特征比对滤波器常数的依赖关系某类滤波器特性定义为上述若干滤波器特性的组合。讨论这些组合特性对滤波器常数的依赖关系很有意义，因为我们随后会用它们来估算滤波器常数。

这源于近期研究的报告：某些上述特性的比率中存在与特征频率无关和／或物种不变的数值或模式，例如 $\frac{Q_{\text{erb}}}{N_\beta}$龙猫中跨特征频率的 $\frac{Q_{\text{erb}}}{Q_{10}}$跨物种和特征频率的 [Shera and Guinan Jr(2003年); Sheraet al.(2010年)]。接下来，我们将研究此类特征比对滤波器常数的依赖关系。我们只关注仅取决于 B_u 或仅取决于 A_p，且可利用方程5中的表达式推导出的特征比。

特别值得关注的是 α 和 g，我们可以根据方程5中的锐滤波器表达式将它们表示如下。在后文中，我们将利用上述特征比的已报告数值，为滤波器常数提供界限或估计值。

$$\begin{aligned} \alpha &\triangleq \frac{Q_{\text{erb}}}{Q_{10}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(B_u)}{\Gamma(B_u - \frac{1}{2})} \sqrt{10^{1/B_u} - 1} \\ g &\triangleq \frac{Q_{\text{erb}}}{N_\beta} = 2\sqrt{\pi} b_p \frac{\Gamma(B_u)}{B_u \Gamma(B_u - \frac{1}{2})} \,. \end{aligned} \tag{6}$$

在图3a中，我们绘制了以下滤波器特性比率的一个子集，这些比率针对 H_{sharp}，并且（使用方程5时）可以仅表示为滤波器指数 B_u的函数：

- $\frac{Q_{\text{erb}}}{Q_n} \equiv \frac{\text{BW}_{n,\beta}}{\text{ERB}_\beta}, \frac{Q_n}{Q_m} \equiv \frac{\text{BW}_{m,\beta}}{\text{BW}_{n,\beta}}$ which are dimensionless
- $\frac{Q_{\text{erb}}^2}{\beta_{peak}^2 S_\beta} \equiv (\text{ERB}_\beta^2 S_\beta)^{-1}, \frac{Q_n^2}{\beta_{peak}^2 S_\beta} \equiv (\text{BW}_{n,\beta}^2 S_\beta)^{-1}$ in dB^{-1}
- $\frac{Q_{\text{erb}}}{\beta_{peak} N_\beta} \equiv (\text{ERB}_\beta N_\beta)^{-1}, \frac{Q_n}{\beta_{peak} N_\beta} \equiv (\text{BW}_{n,\beta} N_\beta)^{-1}$ in cycs^{-1}

对B_u 强烈依赖的比率的已报告数值可用于估算 B_u。然而，在关注范围内随 B_u 变化较小的比率（例如α ）不能用于确定 B_u，但可用于较有把握地估算 B_u 的界限（本文后文即如此）。对于较大的 B_u值， $\frac{g}{b_p}$ 也同样如此。

在图3b中，我们绘制了比率 $\frac{S_\beta}{N_\beta}$ （单位为 dB/周期）和$\frac{\phi_{accum}}{N_\beta}$（无量纲），它们是根据方程5 推导得出的，且仅为 A_p的函数。这些比率强烈依赖于 A_p，因此，如果获得这两个比率中任意一个的已报告数值，就可以确定 A_p的值。

表达式的使用在本节中，我们研究了滤波器特性（包括特征比）对滤波器常数的依赖关系。本文讨论的滤波器特性是本文所述三类可实现滤波器共有的，后文将展示我们的研究结果适用于这三类滤波器。

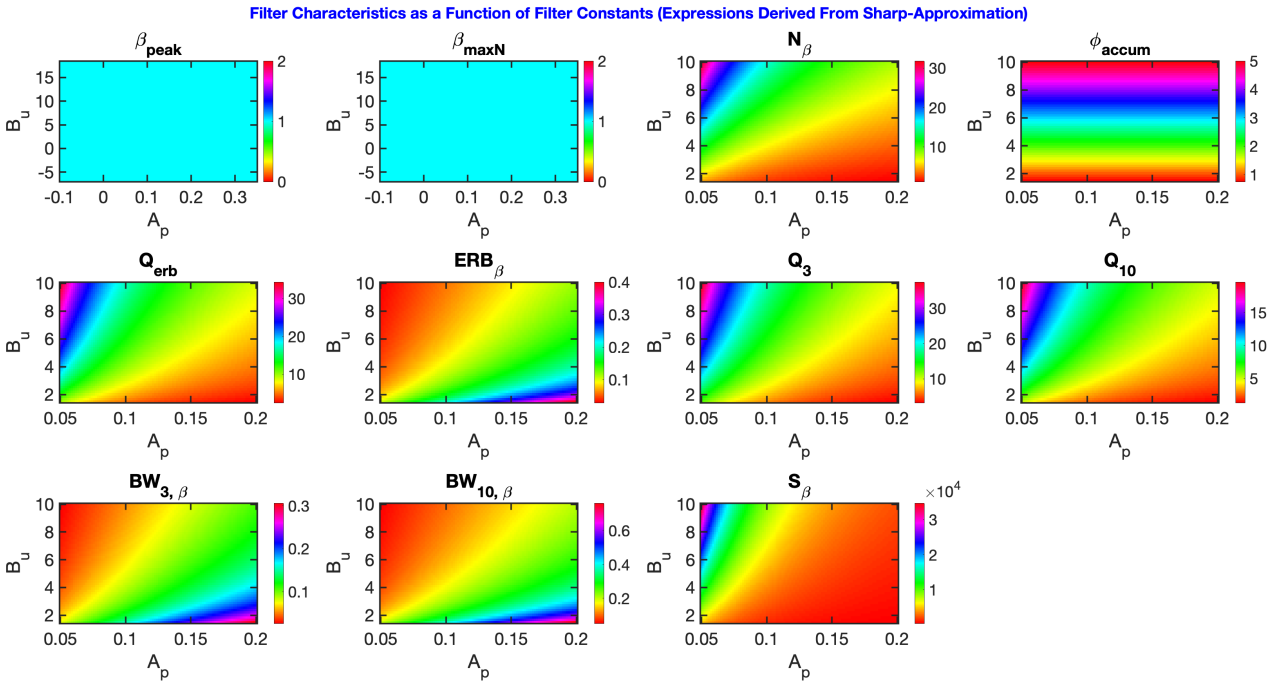


图2. 我们使用方程 H_{sharp} 中的闭式表达式，绘制了 A_p 和 B_u 随滤波器常数5变化的各种滤波器特性。对于品质因数 β_{peak} 和 β_{maxN}，它们取决于 b_p，我们使用了 $b_p = 1$ （即 f_{peak} = 特征频率）。这些曲线图（以及图3中的特征比曲线图）可用于了解改变滤波器指数和极点对行为的影响，理解各种特性之间的关系，也可作为查阅表，以便快速估计滤波器常数，或为基于特性的滤波器设计方法提供初始猜测。

滤波器类别之间本质上存在差异的特性，例如功率谱的不对称性，本文不予讨论。

我们展示了充分利用给定滤波器类别自由度时可实现的广泛滤波器特性。图2所示的完整行为范围应促使我们优先考虑正确估计滤波器常数，而非选择具有某种特定峰外行为的滤波器类别。我们还推导了特征比的表达式，随后用它们确定滤波器常数值的约束（尤其是 B_u），并据此确定在已知报告的滤波器特性值时估计常数的方法。

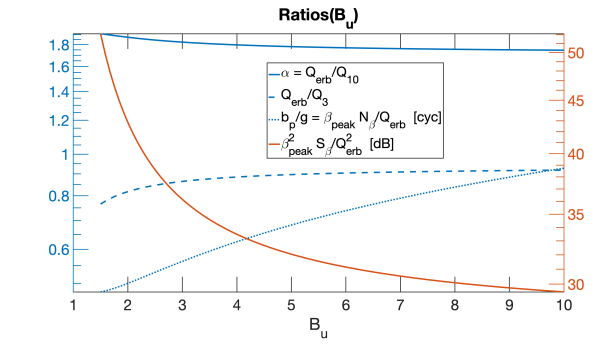
本节中的观察结果对基于特性的滤波器常数估计有直接影响：我们注意到，必须结合使用（非比率）特性才能估计滤波器常数。例如，报告的基于带宽的特性同时取决于极点和滤波器指数，仅凭这些特性估计滤波器常数会导致一个病态的逆问题，在该问题中， B_u 的微小变化可以通过改变 A_p来补偿。相比之下，仅使用主要取决于单个滤波器常数的特征比时，不会出现这种可辨识性问题。

根据特性估计滤波器常数的方法

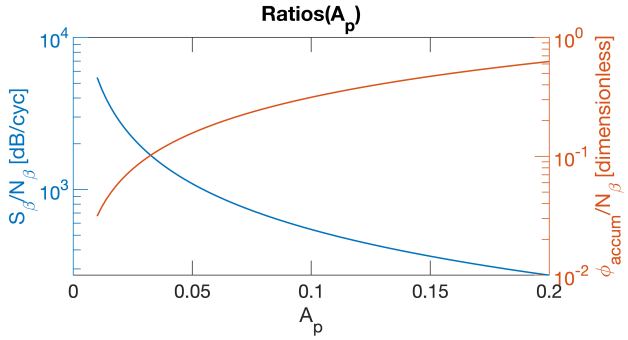
我们的目标是估计听觉滤波器的滤波器常数，使其能够模拟基于近期报道的滤波器特性和特征比率的人类信号处理。这需要开发准确的方法，以便根据滤波器特性的规格估计滤波器常数。在本节中，我们将讨论用于此估计的滤波器特性集合应如何选择。随后，我们将介绍基于特性的滤波器常数准确估计方法和滤波器设计方法，最后将所提方法与现有的基于特性的方法进行比较。

所用滤波器特性集合用于估计 b_p 的特性选择很简单——通常会提供 β_{peak} 和特征频率 CF，据此我们可以估计 b_p的值。不过，有必要讨论用于估计其余滤波器常数 A_p 和 B_u的特性。

用于估算滤波器常数的特性和／或特征比的具体选择，不仅取决于是否有已报告的数值，也取决于特定研究或应用的需求。例如，如果我们想设计调谐尖锐但群延迟有限的滤波器，那么同时指定一组混合的两种特性是很自然的：一种是基于幅度的特性，另一种是基于相位的特性（例如，等效矩形带宽和 N_β）；或者指定一组等效的特性与特征比（例如， Q_{erb} 和 g ，或 S_β 和 $\frac{S_\beta}{N_\beta}$ ）。同样，如果我们希望规定滤波器组中各滤波器的频率选择性和同步性，也会选择使用这类混合型规格。



(a) 比率(B_u)



(b) 比率(A_p)

图3. 我们绘制了若干仅取决于单个滤波器常数的滤波器特性比率随 A_p 或 B_u变化的曲线，这些比率是根据，利用方程5 中的表达式推导得出的。上图显示，某些取决于 B_u 的比率（例如 $Q_{\text{等效矩形带宽}}/Q_{10}$ ）变化缓慢，因此在感兴趣的参数区域内，无法据此有效确定 B_u 的具体取值，因为它们随 B_u 的变化幅度很小。值得注意的是，当 B_u 较大时，$\frac{g}{b_p}$ 和 $Q^2_{\text{等效矩形带宽}}\beta^2_{peak}S_\beta$ 的变化也较为平缓。相比之下，完全是 A_p 的函数的两个比率，即 $\frac{S_\beta}{N_\beta}$ 和 $\frac{\phi_{accum}}{N_\beta}$，对 A_p 的变化非常敏感，因此在可用时可用于可靠地确定该滤波器常数。

或者，如果所关注的应用或研究需要精细控制频率响应的幅度，那么同时指定一组由两种基于幅度的滤波器特性组成的规格（例如 S_β 和 Q_{erb}），或指定一组等效的滤波器特征与特征比，并据此估算滤波器常数，便是合适的。我们建议避免组合使用 Q_{erb} 和 Q_{10}，也不建议使用这两种特性之一与比率 α的组合。这是因为 α 随 B_u 变化缓慢——或者说，$|\frac{dB_u}{d\alpha}|$ 在关注区域内非常大（见图 3a），因此这些组合不适合用于可靠地估算滤波器常数。

如果我们设计滤波器是为了模拟听觉信号处理（如本例所示），而不是为了满足对特性任意设定的规格，就不会使用 ϕ_{accum} 特性来估算 B_u。这是因为这些滤波器类别都是根据调谐曲线的形状构建的。然而，这些曲线只在峰值附近的区域进行测量，而该区域对信号处理结果的影响最大。因此，尽管这些滤波器类别可以用于模拟某一特定物种的听觉信号处理，但不应声称这些滤波器（包括 ϕ_{accum}）的峰外行为与实际听觉系统的情况相仿。

所提方法选定要使用的特性后，我们便开始采用滤波器常数估计方法。我们不同时求解各个滤波器常数，而是先估计 b_p，接着估计 B_u，最后估计 A_p。

如上所述，我们可以根据 β_{peak}估计b_p 的值。或者，如果我们只关注单一声级，可以直接设定 $b_p = 1$。然后，我们可以利用仅取决于B_u的已报告（或计算得出的）滤波器特性比率来估计 B_u 。与 BW3,$_\beta$ ERB$_\beta$ 或 BW3,$_\beta$ BW10,$_\beta$ 等特征比相比，ERB$_\beta N_\beta$, BW3,$_\beta N_\beta$, ERB$^2_\beta S_\beta$, BW23,$_\beta S_\beta$ 等特征比或其组合更为合适，因为后者在关注的参数区域内对B_u的变化并不十分敏感，因此无法据此可靠地估计 B_u 。得到（或计算出）依赖于 B_u的特征比后，我们通过求解特征比的非线性方程（基于方程方程5）来估计 B_u。

然后，我们使用 B_u 和 b_p的估计值，以及一个已报告特征的值（例如Q_{erb}），再结合方程5中相应滤波器特征的表达式，求解 A_p。这是一个简单的线性方程，可以直接求得 A_p。我们将在后续章节中回到这些方法，并利用它们根据近期报告的滤波器特性估计滤波器常数。

我们注意到，与其先估计 B_u 再估计A_p，不如反过来——在估计 b_p 后，我们可以首先使用某个依赖于A_p的特征比的表达式（例如 $\frac{S_\beta}{N_\beta}$，$\frac{\phi_{accum}}{N_\beta}$）估计 A_p，然后再估计 B_u。然而，如前所述，我们避免使用基于ϕ_{accum}设计的滤波器，并注意到 S_β 目前尚未报告。

与现有方法的比较 上述估计 b_p 的值的方法随后求解关于 B_u 的线性方程 A_p 能够根据报告的特性更准确地设计滤波器（如果使用 Q_{erb}），优于先前提出的基于特性的滤波器设计方法 [Alkhairy(2025a)]。以往的方法涉及推导并使用关于所需滤波器特性的各个滤波器常数的显式表达式。这一额外步骤使滤波器常数估计问题（以及滤波器设计方法）更加直接，并且不需要求解非线性方程（使用Q_{erb}时）。然而，对于 Q_{erb} 的情况，除了尖锐滤波器近似之外，还需要进行额外近似——尖锐滤波器近似使我们能够将 log(等效矩形带宽$_\beta$)表示为log(A_p)和log(B_u)的线性组合。与本节介绍的方法相比，这降低了该方法的准确性；本节方法除用于推导方程5的尖锐滤波器近似外，不需要任何额外近似。

因此，如果我们希望设计精度更高的听觉滤波器，建议使用上述方法。在求解关于 B_u的非线性方程这一步，我们可以根据先前用于滤波器常数估计的直接方法，为 B_u 提供初始估计；或者直接使用图2 和3a 作为查找表来确定初始估计值。

或者，如果我们有兴趣系统地、半解析地研究感知模型的发现或技术贡献对滤波器特性的依赖关系，那么直接处理前面推导出的方法可能更为合适。这些方法以滤波器特性为依据，给出了滤波器常数的显式表达式（因而也给出了这些研究认为有用的滤波器常数的任意函数）。

可实现滤波器

本节确立了上一节推导出的特性—常数关系和方法并非某一特定类别的产物，而是广泛适用于常用的伽马音调滤波器族滤波器。在上一节中，我们研究了传递函数 H_{sharp} ，该传递函数近似于伽马音调滤波器族中若干可实现滤波器类别的传递函数。我们首先回顾了由滤波器常数参数化的归一化频域中的 H_{sharp} 表达式。随后，我们给出了用滤波器常数表示 H_{sharp} 的滤波器特性的表达式，分析了这些滤波器的行为以及在所关注的参数区域内其滤波器特性对滤波器常数变化的灵敏度，并建立了滤波器设计方法（即根据滤波器特性的任意规格估计滤波器常数）。具有 H_{sharp} 的滤波器本身是不可实现的，但当 A_p 较小时——对于模拟人类处理过程的滤波器而言情况正是如此——它在峰值区域近似于若干类可实现滤波器。

本节重点讨论可实现滤波器的类别，其传递函数在峰值区域内可由 H_{sharp} 近似。我们首先回顾这些滤波器类别，并说明它们都由同一组滤波器常数参数化。随后我们证明，描述这些可实现滤波器类别的峰值中心特征，其行为及依赖关系与针对具有 H_{sharp}的滤波器所得到的结果一致。因此，如果我们利用峰值中心特征来估计滤波器常数，无论属于哪种滤波器类别，都只需进行一次。请注意，我们不关注各类别之间有所不同的特征，例如不对称性，或与峰值处幅度有关的特征。

可实现滤波器的类别

我们在此研究的可实现滤波器类别包括：广义指数滤波器（GEFs/P 滤波器）、V 滤波器和经典伽马音调滤波器（GTF）。这些滤波器与全极点伽马音调滤波器（APGF）、单零点伽马音调滤波器（OZGF），以及 Q 滤波器和微分全极点伽马音调滤波器（DAPGF），如表1所述。因此，我们预计，关于结论和方法适用性的结论H_{sharp} 不仅适用于 GEFs/P 、 V 滤波器和 GTF，也适用于表中其他滤波器类别。

广义指数（P）滤波器我们结论 H_{sharp}适用的第一类可实现滤波器，是广义指数（或 P）滤波器类别，其传递函数为，

$$H_P(s; A_p, b_p, B_u) \propto \left((s-p)(s-\overline{p})\right)^{-B_u} . \quad (7)$$

在另一项独立研究中，我们曾证明，指数取有理数值的 GEF 可在软件中实现，并用于处理信号 B_u ， [Alkhairy(2025b)]。因此，我们不必将 B_u 限定为整数值。

在图1中，我们展示了 GEF（蓝色实线）和尖锐滤波器近似（黄色点线）在几组值得关注的不同滤波器常数值下的频率响应幅值和相位。图中显示， H_P 的带宽可由 H_{sharp} 很好地近似，尤其是当我们将频率响应幅值绘制为 $\beta - \beta_{peak}$的函数时。

GEF 的脉冲响应可表示为˜以 $t = 2\pi$特征频率t为参数的形式；对于 B_u 的整数值和半整数值，可表示如下：

$$g_P \propto e^{-A_p\tilde{t}}\tilde{t}^{B_u-\frac{1}{2}} J_{B_u-\frac{1}{2}}(b_p\tilde{t})u(\tilde{t}) \quad \text{for } B_u \in \frac{\mathbb{Z}^+}{2} , \quad (8)$$

其中， $u(\tilde{t})$ 是 Heaviside阶跃函数，而$J_{B_u-\frac{1}{2}}(b_p\tilde{t})$是第一类贝塞尔函数。

我们可以用以下项近似脉冲响应（对于 $\tilde{t} \geq 0$）：

$$g_P \overset{\propto}{\sim} e^{-A_p\tilde{t}}\tilde{t}^{B_u-1} \cos(b_p\tilde{t} - B_u\frac{\pi}{2}) \quad \text{for } B_u \in \frac{\mathbb{Z}^+}{2} , \quad (9)$$

如Alkhairy (2025b所述）。这种形式与伽马音滤波器（GTF）相似，但其振荡分量的相移与滤波器指数 B_u 相关联，而且我们将B_u 的定义域扩展到了正整数之外。我们将这一版本的 GTF 称为 P-GTF滤波器，以区别于经典GTF滤波器；它额外具有一个相移自由度。正如 Darling (1991指出的，相移的选择对功率谱影响可以忽略不计。

我们注意到，GEFs/P 的传递函数与 APGF滤波器的传递函数本质上相同，但不要求 B_u 为整数。因此，我们关于将 H_{sharp} 中的发现和方法应用于 H_P 的适用性所作的任何结论，也同样适用于 H_{APGF}。我们在此直接使用 GEFs/P（及其记法），而非更广为人知的 APGF滤波器，原因如下：

- GEF/P 滤波器不要求滤波器指数 B_u 为整数。这使我们能够获得更广泛的滤波器特性，并根据滤波器特征的期望值对滤波器进行更精细的调整。

总结 Reference	（重复）极点对	带零点 I	带零点 II
Alkhairy （2025a）	GEFs/P • 有理指数 • 相关 to 差异- 微分 压力 in 耳蜗模型	V • 有理指数 •与速度相关 in 耳蜗 模型（如果参数化为 B_u+1） • 零点等于 实部的负值 极点的	Q 和广义 Q • 有理指数 • Q 有一个重 零点位于零点处 • 广义 Q 有一个 重复的 任意 远离 峰值的零点
Katsiamis 等人(2007)	APGF • 整数指数 • 硬件（不只是 软件）实现- 参数	OZGF • 整数指数 • 任意零引入了额外的 自由度 自由度 • 硬件（不仅是 软件) 实现—— 方式	DAPGF • 整数指数 • 在以下位置有一个零点 zero • 硬件（不仅限于 软件）实现 方式

表 1. 伽马音调滤波器族中各种可实现听觉滤波器类别的描述。这些滤波器在峰值处的行为相同，因此我们可以使用基于峰值中心滤波器特性的滤波器设计方法，估算其滤波器常数；这些方法是为 H_{sharp} 推导的

•我们评估了以往基于特性的滤波器设计方法对 GEF 的准确性。

•GEF/P 滤波器源自统一模型，既可用作听觉滤波器，也可作为耳蜗模型的一部分，用于理解耳蜗单分区盒式模型的潜在机制（其中，GEF/P 滤波器与模型中柯蒂氏器两侧的压力差相关）。因此，若能根据滤波器特性的规格设计这些滤波器，也就可以研究相关耳蜗模型机制对观测到的特性的依赖关系，具体如Alkhairy （2024）所述。

V 滤波器 另一类滤波器的传递函数可由 H_{sharp} 近似，因此也可以使用为基于特性的滤波器设计所开发的同一组方法进行设计。这类滤波器是 V 类滤波器，其传递函数为：

$$H_V(s;A_p,b_p,B_u)\propto(s+A_p)\left((s-p)(s-\overline{p})\right)^{-B_u}. \tag{10}$$

如图1所示，GEF 和 V 滤波器具有不同的峰外行为（尤其是峰值两侧幅度的不对称性），但在峰值区域相当相似，二者的传递函数都可以近似表示为 H_{sharp}。

我们注意到，V滤波器与OZGF相似，但少一个自由度。因此，我们关于研究结果和方法从 H_{sharp} 到 H_V 的适用性所作出的任何结论，同样适用于 H_{OZGF}，前提是在位置零点影响可以忽略的方面。出于以下原因，我们选择在此描述V而不是OZGF，

• 与OZGF不同，它具有与 $H_{\text{锐利}}$

•与 GEF 一样，V 滤波器的指数不必是整数。

• 与 GEF 一样，V 滤波器也与统一耳蜗模型相关——V 与耳蜗分隔膜在特定位置或特征频率处的向上速度 $\mathcal{V}$之间的关系如下（注意指数的差异）：

$$\mathcal{V}_{\text{CF}}(s;A_p,b_p,B_u)\propto H_V(s;A_p,b_p,B_u+1)\,. \tag{11}$$

伽马音滤波器 尖锐滤波器近似得出的结论也适用于经典伽马音调滤波器（GTF） [Holdsworth 等人(1988年)]。这是最常用的听觉滤波器，其脉冲响应通常表示为：

$$h_{GTF}\propto t^{n-1}e^{-2\pi bt}\cos(2\pi f_c t+\phi)u(t)\,, \tag{12}$$

其中，f_c 为音调频率，n称为滤波器阶数（经典情况下规定为正整数），b 通常称为带宽参数。这种说法可能会造成误导，因为 b和 n都可以用来控制带宽。不过，这一术语的由来是通常将 n 设为常数。

˜上述脉冲响应可用 t 表示，并可使用与参数化 H_{sharp}、H_P 和 H_V 相同的一组滤波器常数进行参数化，前提是我们采用以下映射，

$$\begin{aligned} f_c &= b_p\text{CF}\\ n &= B_u\\ b &= A_p\text{CF}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

我们注意到，在比较整数和半整数的GTF近似的脉冲响应时

GEF（P-GTF滤波器）—方程 9与经典GTF滤波器的脉冲响应—方程 12，并施加 $\phi = -\frac{\pi}{2} B_u$后，我们发现二者等价。GTF滤波器是最常用的一类听觉滤波器，因此显然适合纳入本文。GTF滤波器已广泛应用于诸多领域，包括传统上与听觉信号和系统无关的研究和应用，例如 Valero 和 Alias(2012); Jin 等人 (2017); Matsumoto 等人(2011). 即使在此类应用中，所用滤波器常数通常仍是历史上用于人类听觉滤波器组的那些数值。

接下来，我们将探讨研究结果的适用性，以及基于尖锐滤波器近似所开发的基于特性的滤波器设计方法对于 GEF、V 和 GTF 情形的适用性。这些滤波器类别的传递函数在峰值区域（即大部分功率所在的区域）尤为相似。当 A_p 较小时，这一点尤其成立，也就是说，尖锐滤波器近似成立。因此，我们预计， H_{sharp} 中的结论也适用于这些滤波器类别。我们还预计，我们的结论可直接推广到与 GEF 相同的 APGF。结论也适用于幅度斜率和对称性不同的滤波器类别，例如 OZGF、双全极点广义滤波器和 Q 滤波器，但仅限于滤波器常数取值范围足以使峰值区域几乎不受影响的情况（例如，零点距离峰值足够远）。

可实现滤波器的行为与设计

在前面的章节中，我们讨论了 H_{sharp}可能呈现的行为范围，以及估算滤波器常数的方法。然而，我们的目标是研究可实现听觉滤波器类别的行为，并估算其滤波器常数。因此，有必要证明，我们的发现以及用于 H_{sharp} 的方法同样适用于可实现的滤波器类别。我们重点考察各类可实现滤波器的滤波器特性误差随滤波器常数变化的情况。无需进一步讨论滤波器设计方法应用于可实现滤波器时的误差，因为根据滤波器特性估算滤波器常数时，这些表达式之间不需要额外近似。

对 *GEFs/P* 的适用性 我们首先讨论这些发现（方程 5）对 GEF 的适用性。在滤波器常数的一个范围内，只要 A_p 较小——其中包括我们认为最适合用于模拟人类听觉信号处理的滤波器组的区域， H_{sharp} 就是 H_P 的良好近似，如图 1所示。

对H_P 相位$\{H_{\text{sharp}}\}$ 相位的近似比对$\{H_P\}$ 幅值$\{H_{\text{sharp}}\}$ 幅值的近似更准确，这一点也可以从图1中看出。因此，我们针对5式所给出的基于相位的特性（例如N_β 和 ϕ_{accum} ）的闭式表达式，通常比我们针对基于幅值的滤波器特征给出的表达式更准确。

例如 Q_{erb} 和 Q_n ——不过，带宽的表达式比品质因数更准确，品质因数会受到 β_{peak}误差的影响。对于较大的 n，更侧重峰值的调谐尖锐度度量表达式，比那些与带宽相关的表达式更准确。

通过对 H_P的频率响应进行数值计算，得到相关特征比率后，我们发现，在最关注的 A_p 或 B_u 取值范围内，这些比率确实近似为单变量函数。我们还发现，从定量角度看，数值计算得到的比率与图3 中的比率以及方程5中的闭式表达式吻合良好。

我们以图4中的 GEFs/P 为例，展示用常数表示特征的表达式有多准确。图中显示了一组滤波器特性的相对误差如何随滤波器常数 A_p 和 B_u 变化（同时固定 $b_p = 1$）。对于某个滤波器特性 γ，在 $(A_p, B_u, b_p = 1)$ 的某个取值下，我们将相对误差定义为 $\gamma_{\text{num-P}}$ 与 γ_{analytic} 之比相对于 1 的偏差，其中 $\gamma_{\text{num-P}}$是根据频率响应，对采用指定滤波器常数设计的 GEF 进行数值计算所得的 γ 值； γ_{analytic}则是使用相同的指定滤波器常数，根据锐滤波器表达式（方程5）得到的 γ 值。我们不取绝对值，以便判断是否持续高估或低估某些滤波器特性。例如， Q_{erb} 中的误差定义为 $\varepsilon_{Q_{\text{erb}},P} \triangleq 1 - \frac{Q_{\text{erb}}}{Q_{\text{erb}}^{num-P}}$ ，解析值。图4所示的相对误差表明，使用方程5中的表达式来确定 GEF 的行为，并根据滤波器特性规格估算其滤波器常数，是恰当的。

*V*滤波器和*P-GTF*滤波器的适用性 我们还展示了另外两类可实现滤波器的相对误差， V以及 $P-GTFs$(具有 $\phi = -B_u \frac{\pi}{2}$ 的 GTF) *，分别见图 5 和 6 。

在图5中，我们展示了在 H_V 情况下，各种滤波器特性的相对误差都很小——尤其是当 A_p 取值较小时，这符合尖锐滤波器近似假设成立的要求。 的传递函数在 $-A_p$处有一个 A_p 零点（对人类而言，该值尤其小）。因此，与 H_P相比， H_V 的幅度对称性实际上更接近 H_{sharp}。因此，尽管我们推导出 H_{sharp} 作为 H_P的近似，但滤波器特性关于滤波器常数的表达式，对于 H_V 通常实际上比对于 H_P更准确。

在图 6 中，我们展示了P-GTF滤波器情况下某些滤波器特性的相对误差。先前的研究曾推导出 H_{sharp} 作为 h_{GTF} 在尖锐滤波器近似成立时的近似传递函数 [Holdsworth等人 (1988年); Darling (1991)]。事实上，我们发现，图6 中的误差在感兴趣的参数区域内都很小。

*如前所述，Darling (1991) 已表明，相移的数值对频率响应幅值的影响可以忽略不计

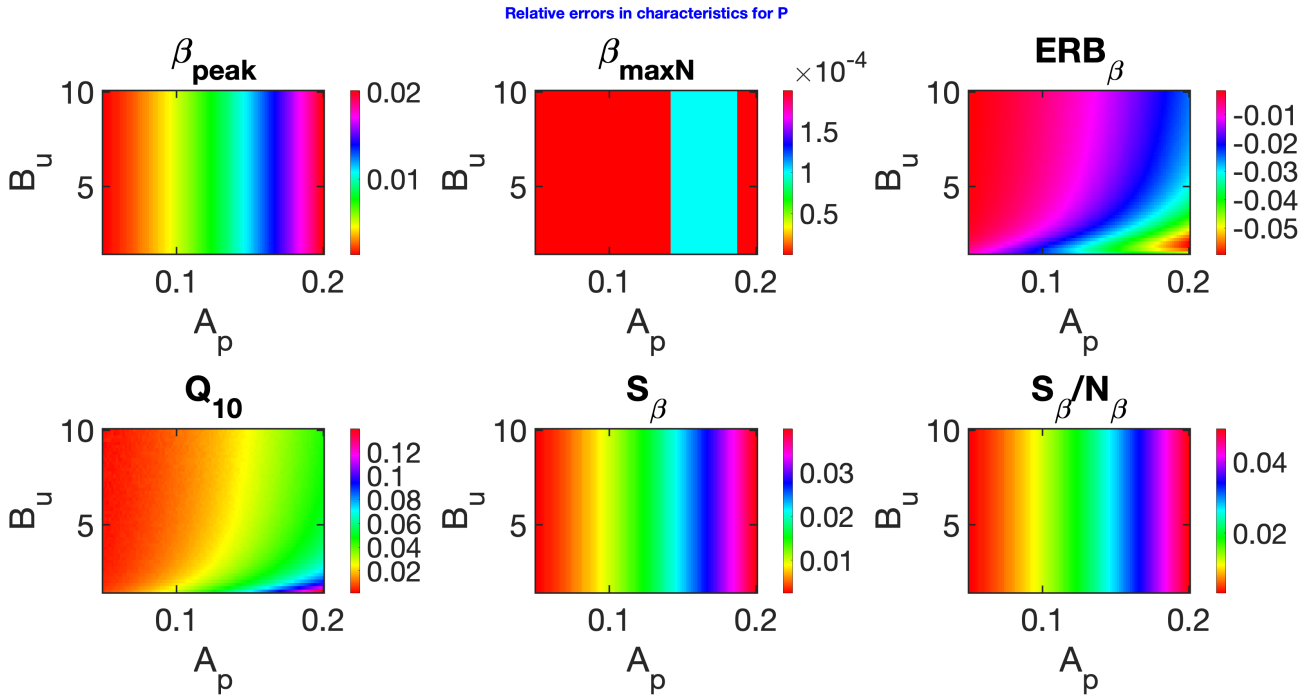


图4. 我们展示了使用闭式表达式（基于尖锐滤波器近似）得到的滤波器特性值相对于根据 H_P 数值计算所得值的相对误差（将 $b_p = 1$ 固定时，作为滤波器常数 A_p 和 B_u 的函数）。从色条可以看出，相对误差较小，这表明，对于 GEF，关于滤波器常数的滤波器特性表达式准确性较高，因此依赖这些表达式的滤波器设计方法也准确。误差通常会随着 A_p 增大而增大，即尖锐滤波器近似开始失效。

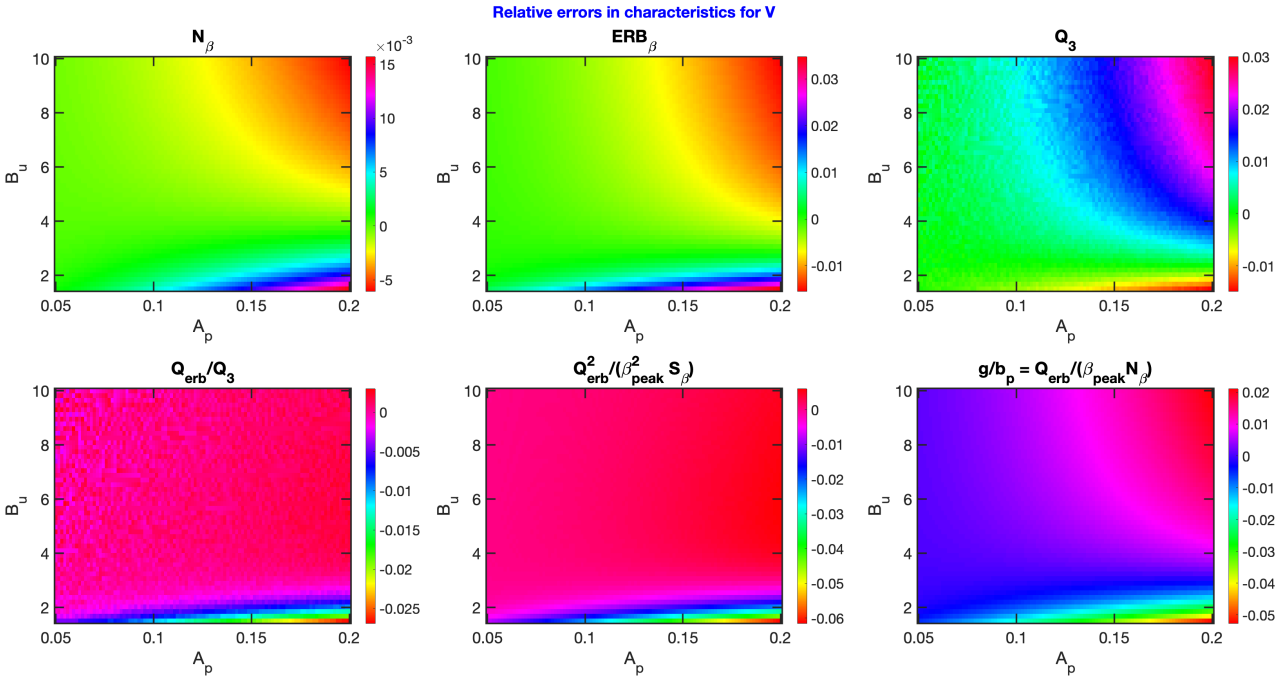


图5. 从色条可以看出，对于 V滤波器，滤波器特性的相对误差较小，这表明我们针对这类滤波器提出的表达式和方法具有较高的准确性。

滤波器指数的约束与估计

在前面的部分中，我们研究了滤波器特性对滤波器常数的依赖关系，这对于确定哪些滤波器特性能够可靠地.....至关重要用于估计滤波器常数。我们还介绍了根据一组滤波器特性估计滤波器常数的方法。

在本节中，我们通过推导滤波器常数的约束，进一步推进对其进行估计的工作，

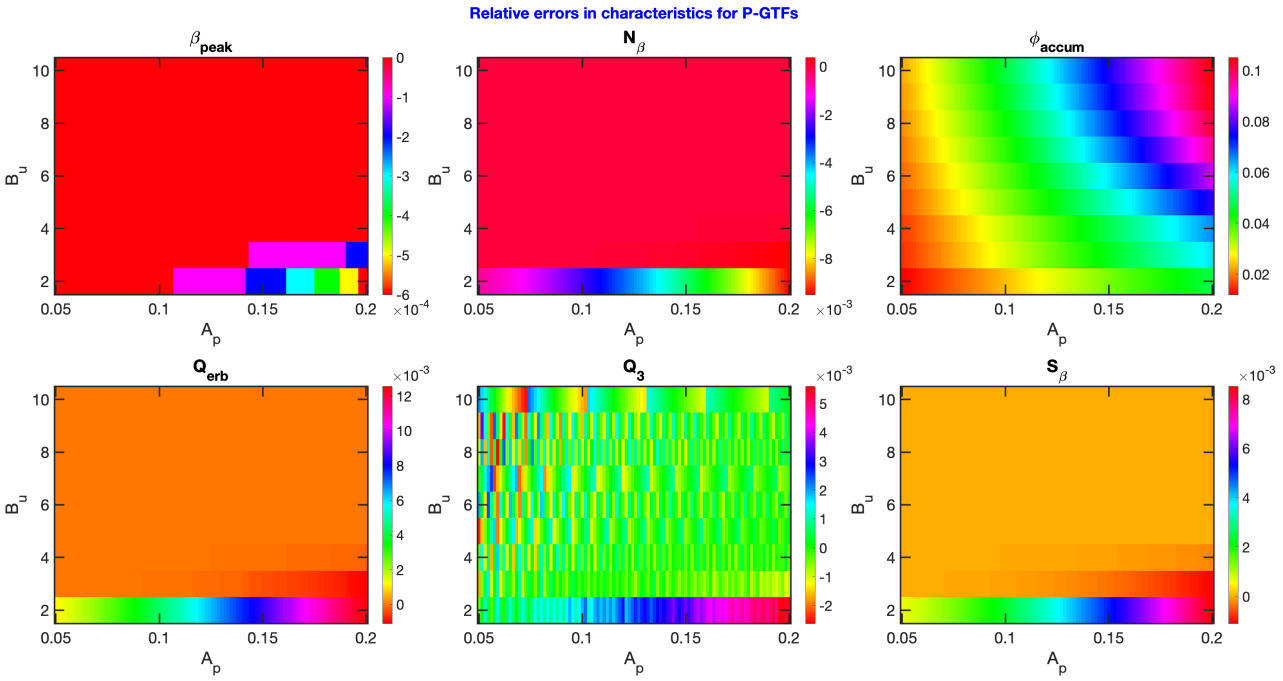


图6。 对于 P-GTF滤波器（具有 $-B_u \frac{\pi}{2}$ 相移的 GTF，该相移基于对 GEF滤波器脉冲响应的近似而推导得出，但最低时间段除外），从色条可以看出，滤波器特性的相对误差较小，这表明我们的表达式和方法对于此类滤波器是准确的。

并基于各种定性和定量观察，对滤波器指数进行估计 B_u 。我们在表2中总结了这些约束和估计。如前所述，我们采用的方法是先估计B_u （在本节中进行），然后估计 A_p （在下一节中完成）。下文讨论的各种约束各有不同作用：有些给出界限，有些提供点估计，还有一些仅表明滤波器指数可能近似具有CF不变性。

历史估计

历史上基于将传递函数拟合到人类同时掩蔽心理声学实验所得频率响应幅值而选定的 B_u 值为$B_{u,\ 0} = 4$。根据相同的同时掩蔽实验，历史上认为理想的 B_u 范围为 $3 \leq B_u \leq 5$)*。这些结果基于数十年前进行的同时掩蔽实验，并涉及对调谐曲线的拟合。

如果我们获得了一条调谐曲线——无论其测量方式如何——并且只关注于拟合该调谐曲线，那么估计滤波器常数最合适的方法，就是使用经典滤波器设计方法对调谐曲线进行拟合；这类方法以一段频率范围内的频率响应幅值为输入，并返回估计的滤波器常数。只要心理声学调谐曲线中的个体数据是可靠的，这种方法就是适用的；但当我们需要对多个试次、受试者或实验进行平均，或者当记录的曲线偏离其形状时，则不适用滤波器类别。在这些情况下，使用基于特性的方法比拟合更为合适。

更重要的是，对调谐曲线进行拟合会使我们得到一组仅适用于特定情况的滤波器常数，却无法直观了解这些常数与滤波器行为之间的关系。此外，报告数据通常以滤波器特性的形式呈现。在下文中，我们将重点关注基于滤波器特性可以获得的 B_u 约束和估计值。我们关注那些与设计能够模拟健康人类信号处理过程的听觉滤波器相关的观察结果，同时也推导出适用于任何物种的条件。此外，下面的分析还更普遍地展示了如何使用基于特性的设计方法——在给定关于滤波器特性的任意规格或已报告规格的情况下，根据观察结果提出约束，并确定哪些滤波器特性（包括比率）最具信息量。

滤波器常数随*CF*变化的条件

我们得到的第一组关于 B_u 的条件，涉及其相对于CF的变化。

品质因数的趋势其中一个条件源于报告的品质因数所呈现的定性趋势。我们的传递函数采用归一化频率表示， β，并据此定义滤波器常数。我们注意到，在滤波器组中的各个滤波器上固定 A_p、b_p、B_u 的值，会产生恒定 Q 滤波器（换言之，在 f 中定义的带宽会随CF成比例增加）。然而，实验观察表明，CF越大，品质因数越高 [Robles和

*严格来说，这是历史上经过研究，并通过拟合同时掩蔽实验中的调谐曲线（通常采用 Roex 滤波器拟合）后被认为合适的一组整数，$B_u \in \{3, 4, 5\}$

#	Data	B_u 条件/数值
N/A	半整数域脉冲响应包络条件	$\frac{3}{2} \leq B_u$
N/A	α 的范围（生理学的，涵盖实验室物种）	$3.86 \leq B_u$
$B_{u,0}$	历史的 （基于设计的 GTFs 基于 on 同时 掩蔽人类心理物理实验）	$B_u = 4$ （更一般地说，$B_u \in \{3, 4, 5\}$）
$B_{u,1}$	$g = g_1$ (龙猫生理数据——具体而言是听神经纤维维纳核)	$B_u \approx 7.2$
$B_{u,2}$ 对于特征频率 >特征频率$_{a\|b}$	$g = g_2$ (根据 r 发现，其与人类的情况具有物种不变性来自 Q_{erb} 前向掩蔽心理声学实验，以及人类 N_{sfoae} 采用Shera etal. (2010年)；以及来自跨物种的（保守）范围)	$2 \leq B_u$

表2. 该表总结了基于历史扩展以及报告的特征比数值，对滤波器指数的条件和估计值。表中未提及关于 B_u 与特征频率近似无关的条件，相关细节见正文。

Ruggero (2001); Glasberg 和 Moore (1990年)]。根据方程5 和图2，这意味着，对于特征频率较高的滤波器， A_p的值应更小，和/或对于特征频率较高的滤波器， B_u 的值应更大。

行波模型条件 第二组观察结果同样涉及我们预期滤波器常数如何随特征频率变化。让我们回到 GEF 和 V滤波器的起源，它们为耳蜗的滤波器组和单分区箱式模型提供了统一框架。该模型将行波和传递函数两种视角联系起来。由于镫骨输入耳蜗的能量预计主要沿正向传播（即从基底到顶端），因此模型中用于参数化波数的常数必须随 x * 缓慢变化。因此，我们预期，用于参数化传递函数的滤波器常数——在此情况下与模型常数相同——必须随特征频率缓慢变化。

极性条件关于 B_u 相对于特征频率的变化，一个更严格的条件来自一项观察：听神经纤维（ANF）点击声响应的极性和过零点沿耳蜗全长保持一致[Guinan Jr (2017)]。从耳蜗机制的角度来看，这种现象为何会发生尚不清楚，因为耳蜗模型中的 B_u 值隐含地取决于材料和几何性质，而这些性质 确实 会随x变化。尽管如此，这一观察为大多数滤波器类别的脉冲响应振荡分量提供了一个极性条件。该条件适用于尖锐滤波器近似、GEF、 V 滤波器和P-GTF滤波器，但不适用于经典GTF滤波器，因为后者音调分量的相移并不与 B_u相关联。结合上述滤波器常数必须随特征频率缓慢变化这一条件，可得出 B_u 相对于特征频率近似恒定这一条件。 B_u 近似不随特征频率变化，也意味着 B_u 特征比（如公式 6 和图 3a中的特征比，以及后文将进一步讨论的特征比）的值近似恒定。由于这一条件取决于滤波器类别——更准确地说，取决于滤波器指数是否与脉冲响应音调分量的相移相关联；这里考察的是实际听神经纤维，而非我们试图

在设计时，我们考虑到这一条件未必成立。不过，稍后我们会根据已报告的 g 单独得出关于 B_u 的一个条件，该条件也表明 B_u 是 CF 不变的，因此我们据此继续。

相位累积的观察结果 B_u 的恒定特性意味着相位累积在不同特征频率下保持不变。然而，目前我们没有远离峰值处的频率响应相位测量数据。此外，这些滤波器类别的构建主要是为了拟合峰值频率附近的响应，在峰值之外并未经过测试；在这些区域，幅度可以忽略不计，数据也不可靠。因此，对于相位累积的观察结果，我们并不十分重视，唯一的例外是使用峰值区域内的部分相位累积量；它为相位累积提供了下限，进而也为 $\frac{B_u}{2}$ 提供了下限。

—

已有的变化报告 上述关于B_u 不随特征频率变化的结论，似乎与此前对龙猫 B_u 的估计相矛盾，相关报告见Alkhairy 和 Shera (2019)。这些估计是通过拟合方程 $\mathcal{V}_{\mathrm{CF}}$ 的11 （该方程与 GEF 和 V 滤波器相关，但指数为 $B_u + 1$）得出的，所用数据来自龙猫听神经纤维的维纳核（WK）数据。具体而言，Alkhairy 和 Shera (2019) 表明， $B_u + 1$ 的趋势线从最低特征频率处约 4 到最高特征频率处约 6 不等。然而，对于此前的研究结果，我们有以下几点说明：（1）听神经纤维维纳核数据得出的 B_u 估计值分布范围很大，约为 1.75 至 7.75；其中包括在不同龙猫身上、于相同特征频率处采集的维纳核数据所估计出的 B_u 值也存在很大差异，这意味着仅凭趋势线提供的信息不足；（2）听神经纤维维纳核数据中包含峰值处噪声很大的数据；（3）虽然尖锐滤波器近似适用于龙猫基底部，但在龙猫的特征频率低于 5 千赫时，可靠性较低；（4）对 A_p 人为施加了一个下限，这影响了 B_u的估计。因此，我们以 B_u 近似不随特征频率变化这一发现为基础。

*我们注意到，对于另一类模型——一维双向波动方程（例如描述传输线模型的方程），最容易推导出这一条件，这一条件称为 WKB条件。我们的耳蜗模型是由二维模型简化而来的短波模型，归结为单向一维波动方程，因此需要单独推导相应的数学条件，即

脉冲响应包络形状约束

脉冲响应包络的形状给出了 B_u取值的下限。不同物种和特征频率下，活体动物的脉冲或点击声响应大致可描述为：一个音调受包络调制，包络先增长、随后衰减，而非单纯衰减（此处不讨论频率滑移或增强与减弱现象）。根据对具有整数和半整数B_u 的 GEF（方程 9）脉冲响应的近似，这意味着需满足约束 $B_u \geq \frac{3}{2}$，因为 $B_u = 1$ 会产生单纯衰减的脉冲响应。这也适用于其他滤波器类别，因为它们的脉冲响应也可以用方程 9来近似。

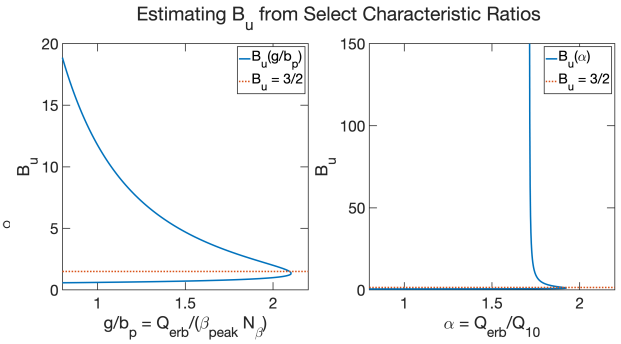


图 7。 B_u 随两个特征比（$\frac{g}{b_p}$ 和 α）的变化情况（蓝色实线）。图中还标出了 $B_u = \frac{3}{2}$（红色虚线），以表示可接受 B_u 的下限。若纳入此约束，我们便可将 B_u 表示为滤波器特征比的函数。值得注意的是，尤其对于 $\alpha < 1.75$，这一报告的特征比在估算 B_u 方面几乎没有价值。这是因为在此范围内，$|\frac{dB_u}{d\alpha}|$ 相对较大，因此报告的 α 数值即使有微小差异，也可能导致 B_u 的数值出现巨大差异；因此，我们无法在此范围内根据 α 得出可信的 B_u 估计值。对于较小的 $\frac{g}{b_p}$（对应较大的 B_u），情况也相同，只是程度较轻。 —

特征比值约束

最后一类约束来自已报道的滤波器特性比率值及其范围。其中一些依赖于 B_u的特征比率（具体为 α 和 g）的表达式已在方程6中给出。

品质因数之比第一个观察结果涉及方程 $\alpha \triangleq \frac{Q_{\text{erb}}}{Q_{10}}$ 中的比率6。Sheraand Guinan Jr (2003年)发现，在不同物种和特征频率之间，$1.7 \leq \alpha \leq 1.8$。使用 $1.7 \leq \alpha \leq 1.8$ 并根据方程6，我们得出滤波器指数可能取值范围的一个条件：$3.86 \leq B_u$。图7 显示了 B_u 对 α 的依赖关系，并说明在该范围内，α 只能用于给出下界，不能用于可靠地估计 B_u的具体值。

请注意，B_u 的界限还可能从 $1.7 \leq \alpha \leq 1.8$推断出来。另一种可能性是 $0.73 \leq B_u \leq 0.8$。然而，这与我们此前对 B_u 施加的、旨在保证GEF的脉冲响应包络先增长后衰减的最低条件不一致，也与本文后面详细介绍的其他观察结果相矛盾。

品质因数与峰值群延迟之比我们还报告了另一种特征比的数据，该特征比对以下参数提供约束：B_u 其比值为$g \triangleq \frac{Q_{\text{erb}}}{N_\beta}$该比值此前在方程 6 中定义。在以下讨论中，我们设定 $b_p = 1$，使得 g完全是 B_u 的函数。报告的 g 数值可对以下参数提供约束（或估计）：B_u。在图 7 中，我们展示了 B_u 估计值随 g 的变化。接下来，我们将讨论与 g 相关的两组观测——我们将其称为 g_1 和 g_2，它们对以下参数形成约束：B_u。

首次估计关于 g 的一个已报告数值来自Sheraet al. (2010年，他们将 g 计算为Q_{erb} 与 N_β 的比值；二者均根据龙猫在低声压级下听神经纤维维纳核的频率响应曲线计算得出。我们将这一 g 的估计值称为 g_1，其报告值为 $g_1 \approx 1.25(\pm 0.02$，且沿耳蜗全长保持不变。对方程6 求解 B_u（并取大于 1 的解），可得到一个近似 CF 不变的值 $B_{u,\,1} \approx 7.2$，来源于 g_1。

我们注意到，之前我们曾在Alkhairy (2024)中，通过比值$\nu \triangleq \frac{Q_{10}}{N_\beta} \equiv \frac{g_1}{\alpha}$采用一种更繁复的方法，计算出 B_u 基于 g_1 的估计值。当时之所以这样做，是因为我们已经推导出 N_β 和 Q_{10} 的表达式，但尚未推导出 Q_{erb}的表达式。此外，我们还报告了 B_u 最接近的整数，并得出 $B_u = 7$。这与我们目前基于g_1 对 B_u 得出的估计值$B_{u,\,1} \approx 7.2$一致。随后，我们将该$B_{u,\,1}$ 估计值与两组已报告的 Q_{erb} 结合起来，以估计滤波器常数 A_p。

第二种估计 我们还可以通过对 g 的第二种估计来获得 B_u的估计值，我们将其称为 g_2。我们根据调谐比 r和比值 η，将 g 的这一估计值计算为 $g = r\eta$。

调谐比 r由Shera et al. (2010年)定义为：

$$r\left(\frac{\text{CF}}{\text{CF}_{a|b}}\right) \triangleq \frac{Q_{\text{erb}}}{N_{\text{sfoae}}}, \tag{14}$$

其中，$\text{CF}^{a|b}$ 是顶端-基底过渡区的特征频率，N_{sfoae} 是自发性耳声发射在对应于相关滤波器特征频率的频率处的归一化群延迟。

我们将比值 η 定义为：

$$\eta \triangleq \frac{N_{\text{sfoae}}}{N_\beta}. \tag{15}$$

下文将讨论已报道的 r 和 η值，然后将 g 计算为 $g = r\eta$，进而基于这些已报道值为 B_u 提供一个替代条件。

此前已有报告指出，包括人类在内的多个物种都存在调谐比值 r。最早报告的 r 数值（我们称之为 r_2）是通过计算得出的

采用 $N_{\text{sfoae}} = N_{\text{sfoae, shera}}$ 根据 Shera et al. （2010年）中所述的方法采集和处理自发性耳声发射。对于大多数物种，用于计算 r_2 的Q_{erb} 基于生理实验。对于人类，Q_{erb} 则通过非侵入性实验计算得出。更具体地说，该研究采用了 Oxenham 和 Shera （2003年）所述的前向掩蔽范式，以提供$Q_{\text{erb}} = Q_{\text{forw}}$。该研究报告称，以这种方式计算得出的 $r_2\left(\frac{\text{特征频率}}{\text{特征频率}_{a|b}}\right)$在不同物种间大致保持不变。

根据Shera et al. (2010年的图9，我们估算出 $0.8 \leq r_2\left(\frac{\text{特征频率}}{\text{特征频率}_{a|b}}\right) \leq 1$ 对应于特征频率 特征频率$_{a|b} > 1$。我们注意到，其他研究也给出了（或可用于计算）r 的数值，但这些数值似乎与上述估算值相当不一致，例如：Bentsen et al. (2011)、LinetonandWildgoose (2009)以及Schaireretal.(2006)。我们认为，这些不同的 r 估算值以及人类与其他物种之间的任何差异，很大程度上是由于获取自发性耳声发射和心理声学调谐曲线时所采用的范式不同所致。因此，在利用 r 与另一种滤波器特征（例如 N_{sfoae} 或 Q_{erb}）的数值来估算一组滤波器常数时，必须特别谨慎。尤其是，我们必须确保所采用的报告数值在定义和方法上保持一致。

关于 η，我们注意到，虽然基于 Shera 等（2010）的图 7 可以对 η施加更严格的条件，但我们采用了一个相对宽松的条件，即 $1 \leq \eta_2 \leq 2$ *。根据 r_2和 η_2，我们得到 g的第二种估计。具体而言，$0.8 \leq g_2 \leq 2$。利用方程 6 计算 B_u 的范围（并取大于 1 的值），我们得到一个近似条件$2 \leq B_{u,2} \leq 18.85$，适用于 CF $>$ CF$_{a|b}$。由于在这一参数区域中，B_u 对 g 数值的微小变化非常敏感（与g_1所规定的区域不同），因此上限并不可靠，故未将其列入表2，也未将其用于估计滤波器常数 A_p。

指数的历史取值作为参考，我们在此讨论历史上选取的 B_u 值与报告的（及计算得出的）α 和 g值或范围是否一致。一致并不意味着 B_u 的历史取值提供了“正确”的解，而是说它们是许多可能的一致解之一。

回顾一下，报告的 α 范围为 $1.7 \leq \alpha \leq 1.8$，这会导致条件 $3.86 \leq B_u$。人类中历史上选定的 B_u 值（$B_{u,0} = 4$）对应于 $\alpha = 1.8$。根据相同的同时掩蔽实验（$3 \leq B_u \leq 5$），历史上认为理想的 B_u 范围对应于 $1.78 \leq \alpha \leq$1。82。

我们注意到，g_1（基于对龙猫的生理学观察，并预期也适用于人类）得出的$B_u = B_{u,1} = 7.2$ 值高于基于人类同时掩蔽心理声学实验而历史上设定的$B_u = B_{u,0} = 4$ 值。另一方面，$B_{u,0}$ 处于物种不变值 g_2 针对 CF $>$CF$_{a|b}$所规定的$B_{u,2}$ 宽泛范围之内。与之对应的 g 历史的 $B_{u,0} = 4$ 的值为 $g = g_0 = 1.6$，且 B_u 处于历史上被认为理想的范围内，$3 \leq B_u \leq 5$对应于 $1.46 \leq g \leq 1.78$。

滤波器极点的估计值

在上一节中，我们利用观察结果估算了滤波器指数 B_u 的取值（或取值范围）。在此，我们根据若干组滤波器特性（包括特征比）的观察结果，为人类听觉滤波器组中要使用的最后一个滤波器常数 A_p提供估算值。随后，我们讨论这些方法和估算值的局限性。

在选择用于估算A_p （此前也包括 B_u）的观察结果时，我们会考虑感兴趣的应用、可靠数据集的可用性，以及估算值对所观察特性的灵敏度。

按照前文所述的方法，我们先估算 b_p，再估算 B_u，最后估算 A_p。我们将峰值频率设为特征频率 CF，因此设定 $b_p = 1$，并考虑 B_u的两个估算值：$B_{u,0} = 4$，这是基于对同时掩蔽曲线拟合而得、历史上一直使用的值；以及$B_{u,1} = 7.2$，它取自 $g_1 = 1.25$ †。

随后，我们将这些 B_u 取值分别与报告的 Q_{erb} 取值（见图9 ‡）结合起来，推导出 A_p 关于 CF 的表达式，如图8所示。在图10中，我们展示了人类听觉滤波器滤波器常数随 CF 变化的各种估计结果。在估算 A_p 时，我们确保所用的品质因数与 B_u一致。例如，估算 A_p时，我们不能将前向掩蔽实验获得的品质因数，与通过将滤波器拟合至同时掩蔽实验所得调谐曲线而获得的 B_u 估计值结合使用。我们注意到，与和 Q_{sim}紧密相关的 $B_{u,0}$ 不同，基于 g_1，我们并不知道对于 $B_{u,1}$而言，Q_{erb} 应当取何值。因此，我们使用 $B_{u,1}$ 和两种可能的 Q_{erb}取值，计算出两个 $A_{p,1}$ 估计值。

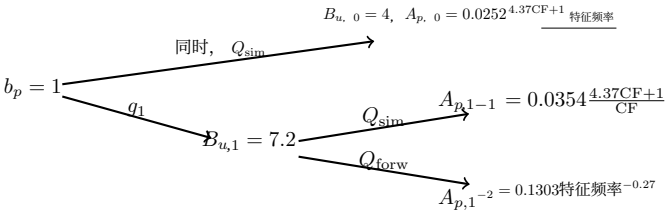


图8。得出人类听觉滤波器估计常数的过程，以及滤波器常数的估计值。特征频率的单位为千赫，滤波器常数为无量纲。

根据同时掩蔽实验的调谐曲线

作为参考，我们首先给出基于历史测量的A_p 值。根据关于 Q_{erb}的方程5，并使用历史的$B_u = B_{u,0} = 4$ 我们得出$A_p = A_{p,0} = \frac{1.0186}{Q_{\text{sim}}}$。这与

*这样做是考虑到相干反射理论原本预期该比值为 2，但目前该比值为何偏离这一数值仍有待解决；此外，龙猫的这些数值似乎也不同于此前针对猫和豚鼠报告的数值Shera and Guinan Jr (2003年)

†我们假设其不受物种影响，并根据Shera and Guinan Jr （2003年）；Shera等人 （2010年）中的论据将其外推至人类

‡请注意，所报告的$Q_{\text{等效矩形带宽}}$值对应某个特定特征频率，但我们已将其扩展到更宽的特征频率范围，以用于图10

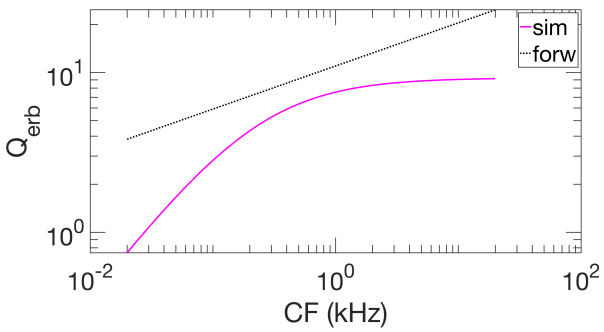


图9。 报告的 Q_{erb} 值与特征频率 CF 的关系。我们利用 Q_{erb} 的值，根据 B_u 和 b_p的估计值来估计滤波器常数 A_p 。所使用的 Q_{erb} 公式基于同时掩蔽（洋红色实线）和前向掩蔽范式（黑色点线）。两者均经过外推，以覆盖人类特征频率 CF 的范围。

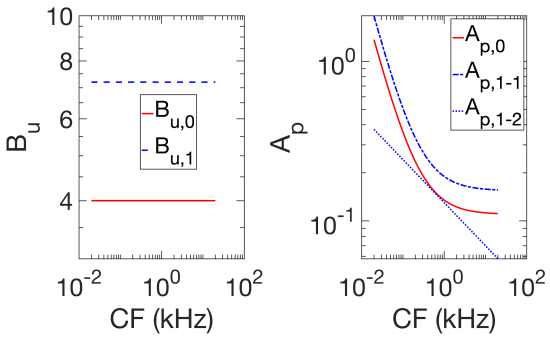


图10。 模拟人类加工过程的滤波器组的滤波器常数估计值。这些估计基于若干组已报告的滤波器特性值，包括正文中详细说明的特征比。对于所有这些估计，$b_p = 1$。在左图中，估计值 $B_{u,\,0}$ （红色实线）为历史选择，而估计值 $B_{u,\,1}$ 则通过将 $g = g_1$ 外推至人类而获得。在右图中，估计值 $A_{p,\,0}$ （红色实线）基于历史的Q_{sim} 和$B_{u,\,0}$。估计值 $A_{p,\,1-1}$ （蓝色点划线）由$B_{u,\,1}$ 和 Q_{sim}计算得到，而估计值 $A_{p,\,1-2}$ （蓝色点线）由$B_{u,\,1}$ 和 Q_{forw}计算得到。

采用 $b = 1.019$(等效矩形带宽f) 的数据，来源于 Holdsworth 等人(1988年) 和 Patterson 等人 (1992年)。结合根据同一组调谐曲线推导出的历史的 $Q_{\text{erb}} = Q_{\text{sim}}$ ，这些调谐曲线用于获得 $B_{u,\,0}$ ，我们得到 $A_{p,\,0} = 0.0252^{4.37\text{CF}+1}$ 特征频率，其中特征频率以千赫为单位。这相当于通过拟合历史的调谐曲线，同时估算 A_p 和 B_u 所得的结果。

来自 g_1 和 Q_{sim}

图10 中 A_p 的下一个估计值来自$B_{u,\,1}$以及同时掩蔽实验报告的 Q_{erb} 值， $Q_{\text{erb}} = Q_{\text{sim}} = \frac{10^3}{24.7}$ CF 4。37CF+1 （CF以千赫为单位）。 Q_{sim} 是根据对人类进行心理声学实验测得的调谐曲线报告的，这些实验采用同时缺口噪声掩蔽，详见Glasberg 和 Moore（1990年）。这与用于估算经典GTF滤波器 n和 b历史值的实验相同。结合$B_u = B_{u,\,1}$，并基于 Q_{erb} 的方程，

方程5 （其中 $b_p = 1$），得出估计值$A_p = A_{p,\,1-1} = \frac{1.4334}{Q_{\text{sim}}} = 0.0354^{4.37\text{CF}+1}_{CF}$ 其中CF以千赫为单位。

来自 g_1 和 Q_{forw}

图10 中 A_p 的最终估计值来自$B_{u,1}$ ，并结合 $Q_{\text{erb}} = Q_{\text{forw}} = 11\text{CF}^{0.27}$ （CF 以千赫为单位）。该估计基于在特征频率为 1 至 8 千赫范围内，对人类进行前向掩蔽心理声学实验所测得的调谐曲线，如Oxenham 和 Shera （2003年）所述。结合$B_u = B_{u,1}$，并根据方程5中的 Q_{erb} 方程（其中 $b_p = 1$），得到$A_p = A_{p,\,1-2} = \frac{1.4334}{Q_{\text{forw}}} = 0.1303^{-0.27}_{A_p}$ 的估计值，此处 CF 以千赫为单位，但该估计值为无量纲。

局限性

下文将介绍我们的估计中存在的各种注意事项，以及将已报告的特征用于估计滤波器常数、以构建模拟健康人类听觉处理的听觉滤波器组这一方法的局限性。

关于常数的假设我们指出，所有估计和约束仅在尖锐滤波器近似仍然准确的范围内才有效，即 A_p 较小（人类的情况正是如此），且针对的是峰值中心特征。这些估计和约束还基于我们的结论：B_u 具有 CF 不变性。不过，鉴于前文所述的一些相互矛盾的观察结果，评估这一结论是否成立或许是有益的。

区分滤波器类别在利用已报告的特征值来估算滤波器常数时，我们只关注适用于不同滤波器类别的估算结果，并不关注判断哪种滤波器类别更合适。要做到这一点，需要额外的数据，并推导额外的表达式来区分不同特征，例如峰值附近幅度曲线的斜率不对称性。

特征值的不确定性无论使用哪一组滤波器特性，我们都必须意识到录音和已报告数值中固有的误差，例如噪声，以及从测量结果得出已报告特征值时所采用的假设。在前文中，我们通过研究B_u 估算值对关注区域内各特征比的敏感性，考察了这种误差可能产生影响的若干情况。

从不同物种进行外推在人类研究中，可靠且公认的滤波器特性报告值十分匮乏，因此我们需要整合来自不同物种的信息。相比之下，例如猫的情况并非如此，因为可以利用反相关数据，甚至计算出最以峰值为中心的幅度特征，例如 S_β。

用于估计 B_u 的 g_1 不仅来自不同物种，还取决于某些潜在的

维纳核方法中的假设。理想情况下，在估计人类的滤波器常数时，我们更希望使用人类现成的数据——具体而言，是来自自发性耳声发射的群延迟，N_{sfoae} 以及 Q_{erb} 来自心理声学调谐曲线的数据。然而，这种方法需要准确且精确的 η，以将 N_{sfoae} 转换为 N_β，但我们并没有这些数据*。因此，我们采用了从龙猫听神经纤维的维纳核中外推得到的心理声学 Q_{erb} 和 g_1 滤波器常数。

总体而言，无论使用何种滤波器特性，在根据特性估算人类的滤波器常数时，我们可能需要从不同物种和位置外推预期不受物种或特征频率影响的特性；这些特性甚至可能来自不同类型的实验（例如听神经纤维、生物力学或心理声学实验）。我们还可能需要整合来自不同刺激级或性质不同的信息，例如频率响应和阈值调谐曲线。如果我们可以使用 N_{sfoae} 和 Q_{erb} 来估算滤波器常数，情况也同样如此。

掩蔽范式 另一个需要牢记的注意事项，是用于开展心理声学实验的选择所产生的影响；我们从这些实验中获得 Q_{erb}。我们采用了 Q_{erb}，其数值是根据心理声学调谐曲线，并使用两种特定的前向掩蔽和同时掩蔽范式报告的，因为对于各种掩蔽声范式是否适合估算频率响应幅值，仍存在一些争议。其他实验选择也可能影响报告的 Q_{erb} 数值，例如心理声学实验中的掩蔽声时长，尤其是在较低特征频率处 [Lopez-Ramos 等人 (2024)]。

替代方法从滤波器特性估计滤波器常数，既有一些优势，也存在局限性。然而，正如前文所述，如果我们的唯一目标是根据一条经过精细采样且可靠的调谐曲线估计一组滤波器常数，那么使用我们从滤波器特性估计滤波器常数的方法并非首选。在这种情况下，最合适的方法是采用黄金标准：将滤波器的频率响应幅度拟合到心理声学调谐曲线上，同时估计滤波器常数。

结论

贡献

本文根据近期报告的滤波器特性数值设计了人类听觉滤波器，以便理解这些特性的变化如何影响估算出的滤波器常数。为实现这一目标，我们探究了滤波器的全部自由度，而不是将常数固定为过去根据人类同时掩蔽实验估算出的数值。我们纳入的滤波器特性主要以峰值为中心。具体而言，我们采用尖锐滤波器近似来分析三类伽马音调滤波器族滤波器的传递函数中，滤波器特性对滤波器常数的依赖关系。我们的研究结果表明，听觉滤波器的滤波器常数（例如极点和滤波器指数）的选择会极大影响听觉滤波器的行为，并最终影响从感知模型中得出的结论，以及使用听觉滤波器组的技术的性能。

事实上，我们认为，充分利用给定滤波器类别的自由度更为重要，也能让我们获取更多行为特性；与之相比，转而采用另一种滤波器类别并非上策——除非我们关注的是某类滤波器从根本上无法实现的滤波器行为，例如与功率谱不对称性或非线性行为相关的行为。因此，重新审视参数空间在理论和实践上都至关重要。

我们还推导了特征比的表达式，这些表达式取决于 B_u 或 A_p，其中包括 g 等比率；我们报告了这些比率的数值，并利用它们约束特定物种或应用的滤波器常数取值。我们研究了滤波器特性对滤波器常数的灵敏度，从而确定哪些特性组合适合用于设计滤波器。我们改进了在给定一组滤波器特性规格的情况下设计滤波器的方法，随后以三类可实现的线性滤波器为例，验证了关于滤波器行为的研究结果（也间接验证了我们的设计方法）的准确性；当 A_p 较小时（人类在整个特征频率范围内的情况便是如此），这一结论尤为适用。最后，我们利用报告的观测结果和特征比对 B_u 的约束，并结合人类同时掩蔽和前向掩蔽心理声学实验报告的 Q_{erb} 数值，采用这些方法设计了人类听觉滤波器组。

未来方向

如果所提供的原生规格是一组滤波器特性，我们的表达式、约束和方法还可用于直接、准确地设计听觉滤波器。此外，这些方法还可用于系统地研究感知研究和技术研究结果对滤波器特性的依赖关系，例如，通过研究孤立特性的影响（改变等效矩形带宽，同时固定最大群延迟；或改变10 dB 品质因数，同时固定向下凸度）。之所以开展这类研究，是因为已有研究报告称，通过改变某些参数（通常采用临时设定的方式）可以测得灵敏度，例如等效矩形带宽和滤波器指数。改变滤波器特性所影响的结果包括：带通滤波语音的可懂度得分 [Warren 等（2004）],语音识别准确率 [Dimitriadis 等（2010）；Slaney 和 Seltzer（2014）],到达方向和声源定位模型 [Dietz 等（2011）],声道发音动作与声学及感知特征之间的互信息 [Ghosh 等（2011）]，以及人工耳蜗语音可懂度模型的准确率 [Cosentino 等（2013）]。这项工作还可用于理解

*如果我们确实掌握了这些信息，就必须确保使用通过相同实验方法获得的 $N_{\text{自发性耳声发射}}$ 以及 η 所生成的自发性耳声发射

耳蜗通过底层统一模型在感知中所起的作用 [Alkhairy 和 Shera (2019年)]。

我们指出，我们的兴趣不仅在于根据特定的调谐曲线估算滤波器常数——这促成了基于滤波器特性的方案。不过，我们鼓励将滤波器拟合到前向掩蔽调谐曲线，并估算滤波器常数，以便根据这些数据检验我们对人类的估算。此外，根据以这种方式估算出的滤波器常数计算 g 也很有用，这样可以检验我们将 g 外推至不同物种和特征频率的有效性。

我们的分析和方法可以扩展，以纳入对综合时频特性的规格要求，这与研究某些感知功能相关 [Moore (2008)]。未来的工作可以进一步研究和推导其他方法，包括针对特定滤波器类别（如不对称性）的滤波器特性，并利用这些特性估算滤波器常数。我们还可以根据滤波器特性的表达式推导出估算滤波器常数的不确定性度量；如果能够获得所报告特性的标准差，就可以使用这些度量。

我们已测试本研究结果和方法的准确性，针对的是伽马音调滤波器族中三个相关类别的听觉滤波器。我们预计，这些结论同样适用于该滤波器族中的其他此类类别。不过，如果我们有意设计这些类别的滤波器，就应测试其准确性——尤其是在其峰值区域的形状存在根本差异，或具有会影响峰值区域行为的额外自由度时。最后，我们希望在本研究基础上进一步研究准线性滤波器，并处理这些滤波器的非线性版本；这对于听力损失模拟尤其重要。 [Irino 和 Patterson (2020)]。

附录：用滤波器常数推导等效矩形带宽表达式

此处我们推导等效矩形带宽β 及其相关品质因数（不等式 5）关于滤波器常数的表达式。等效矩形带宽β（为简便起见，本节中将其称为等效带宽）对于传递函数为 H 的滤波器定义如下：

$$\mathrm{ERB} \triangleq \frac{1}{|H(\beta_{peak})|^2}\int_0^\infty |H(\beta)|^2 d\beta\,, \tag{16}$$

其中， H可以是 H_P， H_V、 H_{GTF}，或任何其他带通滤波器的传递函数。我们注意到，在数值计算等效矩形带宽时，积分下限会替换为一个“足够小”的值 β_1，积分上限会替换为一个“足够大”的值 β_2。

让我们回到上面方程中 ERB 的定义，将 H 替换为 $G = H_{\mathrm{sharp}}$，它近似表示所关注的可实现滤波器的传递函数。由此得到：

$$\mathrm{ERB} \approx \frac{1}{|G(\beta_{peak})|^2}\int_0^\infty |G(\beta)|^2 d\beta\,, \tag{17}$$

或等价地：

$$\mathrm{ERB} \approx \frac{1}{|G_{max}|^2} I_\infty\,, \tag{18}$$

其中，

$$I_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\beta)|^2 d\beta\,, \tag{19}$$

为简化起见，我们将积分下限替换为 $-\infty$。这是合理的，因为在所关注的参数区域内， $|G|$（ H_{sharp}的幅度）对于 $\beta < 0$ 可以忽略不计。

根据 G 的表达式（方程 4 及其幅度——参见 Alkhairy(2025a)），我们推导得，

$$|G_{max}|^2 = A_p^{-2B_u}\,. \tag{20}$$

为推导 I_∞的表达式，我们将其改写如下：

$$I_\infty = \lim_{n\to\infty} J(\beta)\Big|_{-n}^{n}\,, \tag{21}$$

其中，

$$\begin{aligned} J(\beta) &= \int^{\beta} |G(\beta')|^2 d\beta' \\ &= \int^{\beta} \left((A_p^2 + (\beta' - b_p)^2)^{-B_u/2}\right)^2 d\beta' \\ &= \underbrace{\frac{\beta - b_p}{A_p^{2B_u}}}_{\triangleq\zeta}\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, B_u; \frac{3}{2}; -(\frac{\beta - b_p}{A_p})^2\right)\,, \end{aligned} \tag{22}$$

该表达式用高斯超几何函数（GHF）表示；对于 $|z| > 1$*，可表示为，

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z^{-1})^a\ {}_2F_1(a, a-c+1; a-b+1; z^{-1}) \\ &+ \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z^{-1})^b\ {}_2F_1(b, b-c+1; -a+b+1; z^{-1})\,. \end{aligned} \tag{23}$$

在等效矩形带宽的方程（23）中使用方程（22，我们定义 z 和 y 为

$$z = -y = -(\frac{\beta - b_p}{A_p})^2\,, \tag{24}$$

其中 $|\beta| \to \infty \implies z \to -\infty$ $a = \frac{1}{-2}$ $b =$, B_u $c = \frac{3}{2}$ $\Gamma\ 1/2 = \sqrt{\pi}$ $\Gamma\ 3/2 = \sqrt{\pi}/2$ $\Gamma\ 1 = 1$ 且 ,, 以及 ( ) , ( ) , ( ) 。因此，我们有，

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\frac{1}{2}, B_u; \frac{3}{2}; -y) &= \frac{\Gamma(B_u - \frac{1}{2})\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\Gamma(B_u)1} y^{-\frac{1}{2}}\ {}_2F_1(\frac{1}{2}, 0; \frac{3}{2} - B_u; -y^{-1}) \\ &+ \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - B_u)\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2} - B_u)} y^{-B_u}\ {}_2F_1(B_u, B_u - \frac{1}{2}; B_u + \frac{1}{2}; -y^{-1}) \end{aligned} \tag{25}$$

上述表达式中的第一个高斯超几何函数只需写作 $= 1$, 这是由于其参数为零。我们使用 $|z| < 1$ 对应的高斯超几何函数公式展开第二项，

$${}_2F_1(a,b;c;z) = 1 + \frac{ab}{c}z + O(z^2) \tag{26}$$

*这是本例中高斯超几何函数的相关形式，其中$\beta \to \infty$， $-\infty$

并得到，

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(\frac{1}{2}, B_u; \frac{3}{2}; -y) &= a_1 y^{-\frac{1}{2}} \\
&+ a_2 y^{-B_u}\left(1 + B_u \frac{B_u - \frac{1}{2}}{B_u + \frac{1}{2}}(-y^{-1}) + O(y^{-2})\right), \quad (27)
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(B_u - \frac{1}{2})}{\Gamma(B_u)} \\
a_2 &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - B_u)}{\Gamma(\frac{3}{2} - B_u)}.
\end{aligned} \quad (28)
$$

将上述展开式代入 for ${}_2F_1(1/2, B_u; 3/2; -y)$ 对于较大的 y代入方程对于 $J(\beta)$，我们得到，(22)

$$
\begin{aligned}
J(\beta) &= \frac{\beta - b_p}{A_p^{2B_u}} a_1 y^{-\frac{1}{2}} \\
&+ a_2 y^{-B_u}\left(1 + B_u \frac{B_u - \frac{1}{2}}{B_u + \frac{1}{2}}(-y^{-1}) + O(y^{-2})\right). \quad (29)
\end{aligned}
$$

由于 $|\beta| \to \infty$，除第一项外，其余各项都因 $B_u > 1$ 而趋于零。因此，

$$
\begin{aligned}
\lim_{|\beta|\to\infty} J(\beta) &= \frac{\beta - b_p}{A_p^{2B_u}} a_1 y^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\beta - b_p}{A_p^{2B_u}} a_1 ((\frac{\beta - b_p}{A_p})^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\beta - b_p}{A_p^{2B_u}} a_1 \frac{A_p}{|\beta - b_p|} \\
&= a_1 A_p^{1-2B_u} \frac{\beta - b_p}{|\beta - b_p|}.
\end{aligned} \quad (30)
$$

因此，

$$
\lim_{\beta\to\infty} J(\beta) = a_1 A_p^{1-2B_u}, \quad (31)
$$

and,

$$
\lim_{\beta\to-\infty} J(\beta) = -a_1 A_p^{1-2B_u}, \quad (32)
$$

由方程（21）可得，

$$
I_\infty = 2a_1 A_p^{1-2B_u} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(B_u - \frac{1}{2})}{\Gamma(B_u)} A_p^{1-2B_u}. \quad (33)
$$

因此，根据方程18 并利用方程20，我们得到，

$$
\mathrm{ERB}_\infty = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(B_u - \frac{1}{2})}{\Gamma(B_u)} A_p, \quad (34)
$$

及其对应的品质因数，

$$
Q_{erb} = \frac{b_p}{\sqrt{\pi} A_p}\frac{\Gamma(B_u)}{\Gamma(B_u - \frac{1}{2})}, \quad (35)
$$

如方程5所示。

我们注意到，当 B_u （以及$b_p = 1$）为正整数时，基于 H_{sharp}推导出的 Q_{erb} 与先前为GTF滤波器推导出的表达式非常接近。我们在下式中将该表达式记为$Q_{erb,\ \mathrm{GTF}}$。$Q_{erb,\ \mathrm{GTF}}$ 的表达式是通过经典GTF滤波器的脉冲响应推导等效矩形带宽f 而得到的，方法是使用帕塞瓦尔定理，如下所述

如 Holdsworth 等人（1988年）所述，并在Darling （1991）中详述。

$$
\begin{aligned}
Q_{erb,\mathrm{GTF}} &= \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{ERB}_f} \\
&= \frac{\mathrm{CF}}{\pi b}\frac{(n-1)!^2 2^{2n-2}}{(2n-2)!} \\
&= \frac{1}{\pi A_p}\frac{(n-1)!^2 2^{2n-2}}{(2n-2)!}.
\end{aligned} \quad (36)
$$

参考文献

S. A. Alkhairy。人类耳蜗基底和顶端的耳蜗波传播与动力学：基于模型的非侵入性测量估计。载于 *AIP Conference Proceedings*，第3062卷，第020010页。AIP Publishing LLC，2024年。S. A. Alkhairy。广义指数带通滤波器的基于特征的设计。 *IEEE Access*，2025a。S. A. Alkhairy。用于广义指数滤波器的有理指数滤波器。 *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*，2025b。S. A. Alkhairy和C. A. Shera。哺乳动物耳蜗的解析物理动机模型。*TheJournal of the Acoustical Society of America*，145(1)：45–60，2019年。T. Bentsen、J. M. Harte和T. Dau。基于刺激频率耳声发射的人类耳蜗调谐估计。*The Journal of the Acoustical Society ofAmerica*，129(6)：3797–3807，2011年。S. Cosentino、T. H. Falk、D. McAlpine和T. Marquardt。人工耳蜗滤波器组设计与优化：一项仿真研究。 *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*，22(2)：347–353，2013年。A. Darling。伽马通滤波器的性质与实现：教程。*Speech Hearing andLanguage, Work in Progress, University College London, Department of Phonetics and Linguistics*，第43–61页，1991。M. Dietz、S. D. Ewert和V. Hohmann。基于听觉模型的双耳信号中并发说话者方向估计。*Speech Communication*，53(5)：592–605，2011年。D. Dimitriadis、P. Maragos和A. Potamianos。滤波器组设计与能量计算对鲁棒语音识别的影响。*IEEE transactions on audio, speech, and language processing*，19(6)：1504–1516，2010年。P. K. Ghosh、L. M. Goldstein和S. S. Narayanan。使用类听觉滤波器组处理语音信号，可将发音动作的不确定性降至最低。*The Journal of the Acoustical Society of America*，129(6)：4014–4022，2011年。B. R. Glasberg和B. C. Moore。根据缺口噪声数据推导听觉滤波器形状。*Hearing research*，47(1-2)：103–138，1990年。J. J. Guinan Jr.。个人通信，2017年。J. Holdsworth、I. Nimmo-Smith、R. Patterson和P. Rice。伽马通滤波器组的实现。 *Annex C of the SVOS Final Report: Part A: The Auditory Filterbank*，1：1–5，1988年。

T. Irino和R. D. Patterson。gammachirp听觉滤波器及其在语音感知中的应用。 *AcousticalScience and Technology*, 41(1)：99–107，2020年。Y. Jin、H. Su、C. Xu和Q. Guo。伽马通滤波器组在主动噪声控制算法中的应用。载于*2017 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing (ICSPCC)*，第1–5页。IEEE，2017年。A. G. Katsiamis、E. M. Drakakis和R. F. Lyon。用于听觉处理的实用类伽马音调滤波器。 *EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing*，2007(1)：063685，2007年。B. Lineton和C. Wildgoose。基于刺激频率耳声发射比较两种提出的耳蜗机械滤波器带宽测量方法。*The Journal of the Acoustical Society of America*，125(3)：1558–1566，2009年。D. Lopez-Ramos、A. Eustaquio-Martin、L. E. Lopez-Bascuas和E. A. Lopez-Poveda。刺激时长对人类耳蜗调谐估计的影响。 *HearingResearch*，451：109080，2024年。Y. Matsumoto、M. Suzuki、H. Ogushi和A. Omoto。使用听觉滤波器评估声音和声场。 *Building Acoustics*，18(1-2)：175–188，2011年。B. C. Moore。时间精细结构处理在正常听力者和听力障碍者的音高感知、掩蔽和语音感知中的作用。 *Journalof the Association for Research in Otolaryngology*，9(4)：399–406，2008年。A. J. Oxenham和C. A. Shera。利用前向掩蔽和同时掩蔽估计低声级下的人类耳蜗调谐。 *Journal of the Association for Research in Otolaryngology*，4(4)：541–554，2003年。R. D. Patterson、K. Robinson、J. Holdsworth、D. McKeown、C. Zhang和M. Allerhand。复杂声音与听觉图像。载于 *Auditory physiology and perception*，第429–446页。Elsevier，1992年。L. Robles和M. A. Ruggero。哺乳动物耳蜗的力学。 *Physiological reviews*，81(3)：1305–1352，2001年。K. S. Schairer、J. C. Ellison、D. Fitzpatrick和D. H. Keefe。利用刺激频率耳声发射潜伏期和声级研究人耳中的耳蜗力学。 *The Journal of the Acoustical Society of America*，120(2)：901–914，2006年。C. A. Shera和J. J. Guinan Jr.。刺激频率耳声发射群延迟：对相干反射滤波的检验及观察耳蜗调谐的窗口。 *The Journal of the Acoustical Society of America*，113(5)：2762–2772，2003年。C. A. Shera、J. J. Guinan Jr.和A. J. Oxenham。耳声法估算耳蜗调谐：在龙猫中的验证。 *Journal of the Association for Researchin Otolaryngology*，11(3)：343–365，2010年。M. Slaney和M. L. Seltzer。音高和噪声对滤波器组特征可辨别性的影响。载于 *INTERSPEECH*，第14卷，第2263–2267页，2014年。M. Slaney等。Patterson-Holdsworth听觉滤波器组的高效实现。*Apple Computer, Perception Group, Tech. Rep*，35(8)：1–42，1993年。Q.Tanand L.H.Carney。听神经纤维响应的现象学模型。II. 具有频率滑移的非线性调谐。 *The Journal of the Acoustical Society of America*，114(4):2007–2020，2003年。X. Valero 和 F. Alias。伽马通倒谱系数：用于非语音音频分类的生物启发特征。 *IEEE transactions on multimedia*，14(6):1684–1689，2012年。R. M. Warren、J. A. Bashford Jr 和 P. W. Lenz。带通滤波语音的可懂度：消除过渡带贡献所需的斜率陡峭程度。 *The Journal of the Acoustical Society ofAmerica*，115(3):1292–1295，2004年。